



16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering

Engineering for the New Millennium

FLUID MECHANICS

ISBN 85-85769-06-6

Fluid Mechanics

TRB0012	13
STROUHAL NUMBER DETERMINATION OF A SEMI-CIRCULAR CYLINDER AT DIFFERENT ATTACK ANGLES	
Vieira, Edson Del Rio Almeida, Odenir de Mansur, Sérgio Said	
TRB0030	21
HORIZONTAL PNEUMATIC CONVEYING OF CORK STOPPERS	
Pinho, Carlos	
TRB0035	30
NUMERICAL SIMULATIONS OF THE LAMINAR AND TURBULENT VORTEX SHEDDING FROM RECTANGULAR CYLINDERS	
Almeida, Odenir De Mansur, Sérgio Said Neto, Aristeu Da Silveira	
TRB0046	37
AN ALGORITHM FOR SLIGHTLY COMPRESSIBLE FLOWS	
Wanderley, Juan Bautista Villa Levi, Carlos Antonio	
TRB0111	47
NUMERICAL SIMULATION OF THE FLOW AROUND A CYLINDER NEAR A PLANE SURFACE BY VORTEX METHOD	
Menezes, Gilda Lúcia Bakker Batista de Araújo, Zenaide Alves de Hirata, Miguel Hiroo Ricci, José Eugênio Rios Guerra, Ângelo Roncalli Oliveira	
TRB0113	57
ELECTRIC FIELD SIMULATION IN CAPACITIVE SENSORS	
Prata, Álvaro Toubes Duarte, Luiz Gustavo da Cruz Luz, Maurício Valência Ferreira da	
TRB0124	66
EXPERIMENTAL STUDY OF THE RADIAL BLADES IMPELLER AND THE PITCHED BLADED TURBINE ON THE MANUFACTURING OF THE PRIMARY SYRUP.	
Ronchi, Augusto Junior Palma, Geraldo Luiz Losnak, Célio	

TRB0133	74
THREE-DIMENSIONAL LAGRANGIAN SIMULATION OF MHD SHOCK	
Marinho, Eraldo P Navarro, Helio A Andreazza, Carmen M	
TRB0137	79
ANALYSIS OF TURBULENCE MODELS AND IMPORTANCE OF GRID REFINEMENT IN 3-D SIMULATION OF GAS FLOW IN A CYCLONE	
Peres, Alexandre de Paula Meier, Henry França Kasper, Fábio Roberto Sulzbacher Huziwara, Wilson Kenzo Mori, Milton	
TRB0210	88
A COMPARISON OF SOME MULTIGRID TECHNIQUES WITH A HIGH ORDER INTERPOLATION SCHEME	
Bortolon, Helio C. Moura, Luiz Felipe Mendes	
TRB0252	97
FLOW CALCULATION IN THE NOZZLE OF A CROSS-FLOW TURBINE	
Teixeira Borges, João Eduardo Costa Pereira, Nuno Humberto	
TRB0269	107
SENSITIVITY COMPUTATIONS USING PERTURBATIVE METHODS FOR THE ADVECTION-DIFUSION-REACTION MODEL OF POLLUTANT TRANSPORT	
Lima, Fernando Roberto de Andrade Fraidenraich, Ariel Jacovkis, Pablo Miguel Lima, Fernando Roberto De Andrade	
TRB0360	116
POWER CONSUMPTION AND SUSPENSION CRITERIA FOR TWO-PHASE FLOW IN A STIRRED VESSEL POWERED BY AN HYPERBOLOID IMPELLER	
Pinho, Fernando /Tavares Cavadas, Adélio Sousa	
TRB0361	124
FRICTION AND INERTIA EFFECTS FOR THE EVALUATION OF PRESSURE DROP IN FLOW THROUGH PACKED BEDS OF CORK STOPPERS	
Pinho, Carlos Rangel, Nelson Santos, Armando	

TRB0378	130
INFLUENCE OF A GROUND PLANE IN THE AERODYNAMIC LOADS ON AN AIRFOIL	
Ricci, José Eugênio Rios Alcântara Pereira, Luiz Antonio Hirata, Miguel Hiroo Manzanares Filho, Nelson	
TRB0380	139
NUMERICAL SIMULATION OF UNSATURATED FLOW IN POROUS MEDIA USING A MASS-CONSERVATIVE MODEL	
Vasconcellos, Carlos Alexandre Bastos de Amorim, José Carlos Cesar	
TRB0390	149
LAGRANGIAN PARTICLES MODELS APPLIED TO ATMOSPHERIC DISPERSION OF POLLUTANTS	
Pereira, Maxsuel M. R. Oliveira, Amauri P. Karam, Hugo A. Marques Filho, Edson P.	
TRB0408	159
ALLOY SOLIDIFICATION IN SQUARE SECTION	
Salinas, Carlos Correa, Claudio Figueroa, Juan Carlos	
TRB0418	169
TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS OF THE MICROFLUIDIC OSCILLATORS	
Simões, Eliphaz Wagner Furlan, Rogério Pereira, Marcos Tadeu Choi, Dong Ho	
TRB0421	178
YAW ANGLE INFLUENCE ON WAKES OF BUS MODELS	
Girardi, Roberto Mota Videira, Luís Carlos Pires	
TRB0433	188
EXPERIMENTAL ANALYSIS OF DROP FORMATION OVER A SPRAY NOZZLE-PLATE SYSTEM	
Silva, Marcelo Bacci Neto, Aristeu da Silveira Barrozo, Marcos Antônio De Souza Santana, Alexandre Antônio	

TRB0588	195
FLOW AND PARTICLE TRAJECTORIES SIMULATION WITHIN AN INERTIAL AEROSOL SAMPLER	
Gomes, Marcos S.P. Cardoso, Renata S.	
TRB0617	203
COMPUTATIONAL METHOD FOR THE DESIGN OF DUCTS	
Teixeira Borges, João Eduardo	
TRB0638	213
NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOW THROUGH AXI-SYMMETRIC STENOSIS USING LINEAR AND NON-LINEAR EDDY-VISCOSITY MODELS	
de-Lemos, Marcelo J.S. Assato, Marcelo	
TRB0640	223
NUMERICAL STUDY OF TURBULENT FLOW SUBJECTED TO SUDDEN CHANGES IN WALL ROUGHNESS	
Avelino, Mila R. Kakaç, Sadic De-Lemos, Marcelo J.S.	
TRB0642	231
NUMERICAL SOLUTION OF TURBULENT HEATED FLOW IN DUCTS OF VARYING CROSS SECTION USING A LINEAR EDDY-DIFFUSIVITY MODEL	
de-Lemos, Marcelo J.S. Braga, Edimilson J.	
TRB0651	238
A BLOCK-IMPLICIT NUMERICAL SCHEME FOR SIMULATION OF SWIRLING FLOWS IN A MODEL COMBUSTOR	
De-Lemos, Marcelo J.S.	
TRB0670	246
DEFINITION OF THE TRANSITION BETWEEN BUBBLING AND TURBULENT FLUIDIZATION THROUGH BED MEAN VOIDAGE VARIATIONS.	
Paiva, João Monney Pinho, Carlos Figueiredo, Rui	
TRB0671	256
AN EFFICIENT PANEL METHOD BASED ON LINEAR VORTEX DISTRIBUTIONS FOR TURBOMACHINERY CASCADE FLOW ANALYSIS	
Petrucci, Denis Rinaldi Manzanares Filho, Nelson Camacho, Ramiro Gustavo Ramirez	

- TRB0695** **266**
THE INFLUENCE OF GAS SHEAR STRESS ON THE CONVECTION OF WELD POOL DURING GTA WELDING
Xuefeng, Yang
Silveira-Neto, Aristeu
Scotti, Americo
- TRB0696** **275**
EXPERIMENTAL METHOD FOR EVALUATION OF THE PROCESSES AND PROPAGATION OF THE WAVES INSIDE A SHOCK TUBE
Vianna, João Nildo de souza
Oliveira, Alessandro Borges de Sousa
Guimarães, Antônio Marcos Fonte
Barcelos Jr., Manuel N. D
- TRB0733** **285**
ORIFICE PLATE EFFECTS ON HIDRODYNAMICAL AND THERMAL ENTRANCE REGIONS INSIDE FLAT CHANNELS
Leiroz, Albino José
Caldeira, Aldélio Bueno
Rodrigues, Renata Cavalcanti
- TRB0756** **293**
AN STUDY OF THE ELECTRODE AREA INFLUENCE ON THE OVERPOTENTIAL AND REACTION RATE DISTRIBUTION AT FLUIDIZED BED ELECTRODES (FBE)
Ponte, Haroldo de Araujo
Ponte, Maria José Jerônimo S
Bianchi, José Carlos
- TRB0764** **301**
ON KAPLUN LIMITS THE AND THE GENERALIZATION OF THE BLASIUS EQUATION FOR THE FLAT PLATE LEADING EDGE FLOW
Cruz, Daniel Onofre de Almeida
- TRB0787** **311**
INVISCID VISCOUS - INTERACTION CALCULATIONS OF ATTACHED AND SEPARATED FLOWS IN TURBOMACHINERY CASCADES.
Camacho, Ramiro Gustavo Ramirez
Manzanares Filho, Nelson
Petrucci, Denis Rinaldi
- TRB0800** **321**
THE INFLUENCE OF THE DISTRIBUTOR PLATE ON THE BOTTOM ZONE OF A FLUIDIZED BED.
Paiva, João Monney
Pinho, Carlos
Figueiredo, António Rui

TRB0926	329
DENSITY-WAVE OSCILLATIONS IN HEATED BOILING CHANNELS	
Rosa, Mauricio A. Pinheiro Podowski, Michael Z.	
TRB0953	338
VOID FRACTION CALCULATIONS IN TWO-PHASE FLOW USING NEUTRON RADIOGRAPHY	
da Silva, Ademir Xavier Crispim, Verginia Reis	
TRB1017	343
FACTORIAL EXPERIMENTAL DESIGN APPLIED TO A HOT PARTICLES FEEDER VALVE	
Oliveira, Júlio César Dainezi De Pécora, Araújo Augusta Bernárdez	
TRB1042	353
TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATION OF PARALLEL AIRFOIL-VORTEX INTERACTION IN THE VICINITY OF A GROUND PLANE	
Carreiro, Flávia/Reis Bodstein, Gustavo/C.R	
TRB1137	363
SIMULATION OF 3D FREE-SURFACE FLOWS WITH SURFACE TENSION	
Mangiavacchi, Norberto de Sousa, Fabricio Simeoni Castelo, Antonio Tome, Murilo F. Cuminato, Jose A. Nonato, Luiz Gustavo	
TRB1145	372
NUMERICAL SIMULATION OF MULTI-PHASE FLOWS USING THE FREEFLOW-2D SYSTEM	
Santos, Fernando Luiz Pio dos Mangiavacchi, Norberto Castelo, Antonio Tome, Murilo F. McKee, Sean Cuminato, Jose Alberto	
TRB1281	382
MULTIGRID METHOD IN ELASTOHYDRODYNAMIC LUBRICATION	
Lebrón, Silvia Carolina Ribeiro, Carlos Roberto	

- TRB1378** **392**
**FROM A POWER-LAW EQUATION FOR THE FRICTION FACTOR IN SMOOTH PIPES
TO A CONTROVERSY ON THE OVERLAP LAYER**
Branco, José F.
Pinho, Carlos T.
Figueiredo, Rui A.
- TRB1384** **400**
**INVESTIGATION ON VORTEX-INDUCED VIBRATION IN WATER: FURTHER ANALYSIS
AND A NEW MEASUREMENT DEVICE FOR 2D EXPERIMENTS**
Fujarra, André Luis Condino
Menezes, Maurício Ribeiro de
Pesce, Celso Pupo
- TRB1404** **410**
FLOW DISTRIBUTION IN THE CORE OF IEA-R1 NUCLEAR RESEARCH REACTOR
Torres, Walmir Maximo
Umbehaum, Pedro Ernesto
Baptista Filho, Benedito Dias
Almeida, José Carlos
Souza, José Antonio Batista
Silva, Davilson Gomes
- TRB1410** **420**
**NUMERICAL CALCULATION OF STRAIGHT/DIFFUSER/ STRAIGHT TUBE
TURBULENT FLOW**
Zaparoli, Edson Luiz
Rossetti, Reinaldo
Braga, Edimilson Junqueira
deLemos, Marcelo José Santos
- TRB1418** **426**
YIELD STRESS FLUID FLOW THROUGH TUBES WITH STENOSIS
Naccache, Monica Feijo
Souza Mendes, Paulo Roberto
Coelho, Erick Fabrizio Quintella
- TRB1449** **434**
SLOT COATING OF VISCOELASTIC LIQUIDS
Carvalho, Marcio S
Romero, Oldrich Joel
- TRB1471** **444**
**VALIDATION OF AN HYBRID NUMERICAL-ANALYTICAL
METHOD FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN A PARALLEL CHANNEL FLOW**
Oliveria, Mauro Costa
Hernandez, Jose Eduardo Rengel
Sphaier, Sergio Hamilton

- TRB1601** **455**
A SKIN FRICTION EQUATION FOR TURBULENT FLOW OF CARREAU-YASUDA FLUIDS
Cruz, Daniel Onofre De Almeida
- TRB1701** **462**
LARGE-EDDY SIMULATION WITH TURBULENT FORCED CONVECTION BETWEEN CORRUGATED PLATES
Brito, Rogerio Fernandes
Neto, Aristeu Silveira
Dias, Joao Batista
Menon, Genesis Jose
- TRB1774** **472**
MAPPING OF CROSSFLOW FILTRATION PROCESSES BY ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS
da Silva, Ivan Nunes
Razuk, Paulo Cezar
- TRB1872** **481**
A STOCHASTIC ANALYSIS METHODOLOGY FOR TURBULENT FLOWS
Bobenrieth, Roberto
Oliveira, Taygoara Felamingo de
Sousa, Aldo João De
Cunha, Francisco Ricardo Da
- TRB2078** **490**
A METHOD FOR COMPUTER SIMULATIONS OF RANDOM HYDRODYNAMICALLY INTERACTING SYSTEMS
Cunha, Francisco Ricardo
Abade, Gustavo Coelho
Cunha, Francisco Ricardo
- TRB2086** **500**
A NOTE ON THE GOVERNING EQUATIONS OF FLUIDIZED BEDS SUSPENSIONS
Cunha, Francisco Ricardo
Sobral, Yuri Dumaresq
- TRB2090** **510**
THE DYNAMIC BEHAVIOR OF A COLLAPSING BUBBLE IN A NON-NEWTONIAN FLUID
510
Cunha, Francisco Ricardo
Santos, Rodrigo Avelino Mesquita

TRB2098	520
INVESTIGATION OF DRAG REDUCTION USING FIBERS IN TURBULENT FLOWS: THEORETICAL DEVELOPMENT	
Cunha, Francisco Ricardo Andreotti, Marcelo Cunha, Francisco Ricardo Da Cunha Sousa, Aldo João De Sousa	
TRB2118	530
WIND ENERGY PARK LOCATION BY AIR FLOW SIMULATION AROUND HILLS	
Borges, Amadeu Duarte da Silva Rouboa, Abel Ilah	
TRB2124	537
AN EXPERIMENTAL STUDY OF TURBULENT STRATIFIED FLOWS OVER HILLS WITH LARGE CHANGES IN SURFACE ELEVATION.	
Silva Freire, Atila Pantaleao Loureiro, Juliana B. R. Cataldi, Marcio Cataldi	
TRB2139	547
DESIGN FEATURES AND FLOW MEASUREMENTS IN A THERMALLY STRATIFIED WIND TUNNEL	
Silva Freire, Atila Pantaleao Cataldi, Marcio Loureiro, Juliana B. R. Pimentel, Luis Cláudio G.	
TRB2203	557
A NUMERICALLY GENERATED GRID FOR IRREGULAR WALL CAVITY ANALYSIS	
Leiroz, Albino José Abreu, Andressa Araújo	
TRB2212	567
APLICACION OF SIMPLEX ALGORITHM FOR SOLVING PIPE NETWORKS	
Curia Lisandro, Horacio	
TRB2248	577
LAMINAR-TURBULENT TRANSITION: A NEW MODEL OF THE NONLINEAR EVOLUTION OF A WAVE EMANATING FROM A POINT SOURCE IN A BOUNDARY LAYER	
Medeiros, Marcello A. Faraco Mendonca, Marcio Teixeira De	

- TRB2260** **586**
**AN ANALYSE OF ERROR INDUCED BY NATURAL CONVECTION IN TERMO-
ANEMOMETERS**
Güths, Saulo
Bertezini, Luis Gustavo
Kraemer, Adirlei André
- TRB2282** **592**
**NUMERICAL SIMULATION OF A FULLY DEVELOPED LAMINAR FLOW IN A HELICAL
CHANNEL OF SQUARE CROSS SECTION WITH FINITE PITCH**
Morales, Rigoberto E. M.
Rosa, Eugênio S.
- TRB2289** **602**
THE EVOLUTION OF HORIZONTAL SLUG FLOW
Morales, Rigoberto E. M.
Rosa, Eugênio Spanó
Melo, Artur Inácio
Freire, Rafael Cruz
França, Fernando de Almeida
- TRB2296** **612**
FLOW PATTERNS AND TRANSITION CRITERIA IN HEAVY CRUDE OIL-WATER FLOW
Hernandez Rodriguez, Oscar Mauricio
Wang, Isabela S.
Bannwart, Antonio C.
- TRB2303** **622**
**ANALYSIS OF THE EFFECTS OF THE DIAPHRAGM CURVATURE ON THE FLOW INSIDE
A SHOCK TUBE**
Barcelos Júnior, Manuel Nascimento Dias
Oliveira, Alessandro Borges de souza
Vianna, João Nildo de souza
Damion, Jean-Pierre
Daru, Virginie
- TRB2345** **632**
**HYBRID NUMERICAL-ANALYTICAL APPROACH IN TURBULENT CHANNEL FLOW:
ALGEBRAIC TURBULENCE MODELS**
Lima, João Alves de
Santos, Carlos Antônio Cabral dos
Pimentel, Luiz Cláudio Gomes
- TRB2453** **642**
**FLOWFIELD AND FLOW PARAMETERS FOR FLOW INSIDE A LOW SPEED WIND
TUNNEL CONTRACTION WITH CIRCULAR CROSS-SECTION**
Aparecido, João Batista
Vieira, Edson Del Rio
Campos-Silva, João Batista

- TRB2479** 652
NUMERICAL ANALYSIS OF FLOW IN THE IRREGULAR CAVITIES
Prata, Álvaro Toubes
Mariani, Viviana Cocco
- TRB2519** 662
THREE-DIMENSIONAL, COMPRESSIBLE AND TURBULENT BOUNDARY-LAYER MODELING
Amorim, José Carlos C.
Pisani dos Santos, Mauro Jorge
- TRB2584** 672
EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE FIELD OF TEMPERATURE INSIDE THERMAL CAPACITOR
Campos, Julio Cesar Costa
Biage, Milton
- TRB2615** 682
NUMERICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF VORTEX SHEDDING AROUND AN ARRANGEMENT OF PARALLEL RECTANGULAR CYLINDERS IN CROSS-FLOW AT REYNOLDS NUMBERS UP TO 1000
Campregher Jr., Rubens
Almeida, Odenir De
Mansur, Sérgio Said
Vieira, Edson Del Rio
Silveira Neto, Aristeu
- TRB2624** 690
USE OF FLOW VISUALIZATION IN A VERTICAL WATER TUNNEL IN ENGINEERING TEACHING
Vieira, Edson Del Rio
Woiski, Emanuel Rocha
- TRB2669** 700
CONCEPTUAL ASPECTS AND PRELIMINARY TESTS FOR THE FLEXIBLE BLADE FLOWRATE MEASUREMENT TRANSDUCER
Orlando, Alcir de Faro
Lavrador, Marcelo de Bastos
Meneses, Marcus Frederico Sousa
Mota, Rodrigo de Paula
Gryner, Flavio
- TRB2677** 706
VISCOUS SUB-LAYER STRUCTURE IN BOUNDARY LAYER ALONG PERMEABLE SURFACE
Vlassov, Dmitri

STROUHAL NUMBER DETERMINATION OF A SEMI-CIRCULAR CYLINDER AT DIFFERENT ATTACK ANGLES

Odenir de Almeida

EMBRAER – Empresa Brasileira de Aeronáutica S.A, 12227-901 – São José dos Campos, SP, Brazil –

odenir.almeida@embraer.com.br

Edson Del Rio Vieira

Sérgio Said Mansur

UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, 15385-000 – Ilha Solteira, SP, Brazil.

Abstract. *The studies of the vortex-wake generated by different cross-section of prismatic bluff bodies have many applications in several engineering fields. A particular application of vortex wake generated by a cylindrical rigid body is concerning to vortex meter project and compact heat exchanger design. In this effort of work, the vortex shedding frequency produced by a semi-circular cross-section cylinder has been determined for different attack angles in Reynolds numbers up to 600. The measurements have been made utilizing hot-film probes controlled by a constant temperature anemometer. Important characteristics of the flow field have been explored through the hydrodynamics flow visualization. All experiments have been conducted in a vertical low turbulence water-tunnel operated in continuous mode. Wake flow visualization has been performed using an injection of liquid dye directly in the non-perturbed flow. The knowledge of Strouhal-Reynolds curves is an important information useful to vortex-meter designers.*

Keywords: *flow visualization, vortex shedding, vortex meters, semi-circular cylinder, hot-film anemometer*

1. Introduction

The flow past over circular cylinders has been studied since the pioneer Strouhal's work of 1878. Nowadays, the importance of this flow is obvious in many engineering applications. Of course, the understanding of vortex-shedding phenomenon is vital to the design of elastic structures such as suspension bridges, electrical transmission lines and bundles of heat exchangers, because when they are exposed to the wind or water stream, failure may occur if the natural vibration frequency of these structures is close enough to the frequency of vortex formation. In fact, the enormous effort that has been expended on understanding the flow around circular cylinder has contributed for effective control of the vortex shedding flow in several fluid-structure interactions.

In the periodic regime of vortex shedding from a bluff body, the fundamental shedding frequency (f) is directly related to the free stream velocity (U_∞) and to the characteristic dimension of the solid body (B) through a dimensionless parameter named Strouhal number, defined as:

$$St = \frac{f B}{U_\infty} \quad (1)$$

In the literature, several experimental studies show the close relation for Strouhal number and the flow regime. The idea of building a flow meter based on the assumption of Strouhal number variation as a function of Reynolds number (Re) was first proposed by Anatol Roshko in 1953. He studied vortex shedding from a circular cylinder and established the functional relationship between (St) and (Re) within certain ranges of Reynolds number with sufficient accuracy to enable it to be used as a mean of measuring air speed – Ower & Pankhurst (1977).

Vortex shedding flowmeters, have been used in steady flow in several industrial, aeronautical and commercial applications for over two decades and have proven themselves to be accurate and reliable. Vortex meter is a flow meter with a simple configuration, high accuracy, linearity, wide dynamic range, poor dependency of fluid viscosity and no containing moving parts submitted to deterioration, it is in fact high reliability – Wolochuk *et al.* (1996); Yokoi & Kamemoto (1994) and Unal & Rockwell (1988).

Although the flow past over circular cylinders represents a great subject of research, at the last time the vortex shedding phenomena, in the wake behind modified circular cylinders, has showed a new field of research due to possible application in industrial vortex flow meter devices. Recently, the work of Olsen & Rajagopalan (2000) using a circular cylinder with an axial slit, in Reynolds number equal to 2200, is a good example. In their study, the Strouhal / Reynolds relationship for modified cylinders with axial slit was significantly different to that of a circular cylinder, particularly for the cylinder with a slit normal to the flow. Many other configurations are possible to modify a circular cylinder, more specifically, semi-circular cylinders. The study of the flow around these modified cylinders is very important because they can be used in new practical applications in the engineering field.

However, just few works explore the semi-circular section geometry, one exception could be given up to the papers by Luo & Chew (1989), Boisaubert *et al.* (1996) and by Gonçalves & Vieira (2000), where the special attention is focalized exclusively to qualitative flow visualization aspects. Additionally it is well known to the bluff-body aerodynamicist that the wakes of different prismatic bluff-bodies are not identical and moreover, there is a great influence of the after-body shape on their aerodynamics.

The flow characteristics of the a semi-circular cylinder positioned orthogonal to non perturbed flow in several attack angles have been studied with views to application in vortex meters in the present work. Differently of the other works, this investigation has been conducted with qualitative and quantitative study. In the first way, the wake's characteristic is explored using hydrodynamics flow visualization. On the other hand, the Strouhal number is quantified based to measurements using a hot-film anemometer. The experiments were conducted in the range of Reynolds numbers between 100 and 600. Generally, flow visualization techniques are related to reveals basic flows structures in a qualitative way, and hot-film probes are utilized to supply quantitative results. A link of the two techniques, with each technique giving what the other does not, has showed a good combination.

2. Experimental Apparatus and Procedures

The experiments of this work were performed in a low speed vertical hydrodynamic tunnel operated in a continuous mode with a working section of dimensions equal to $146 \times 146 \times 500$ mm as illustrated schematically in the Figure 1. The turbulence intensity of the free stream was less than 1% in the more adverse operation mode. More details about that water tunnel facility and its operation are available in Vieira *et al* (1997).

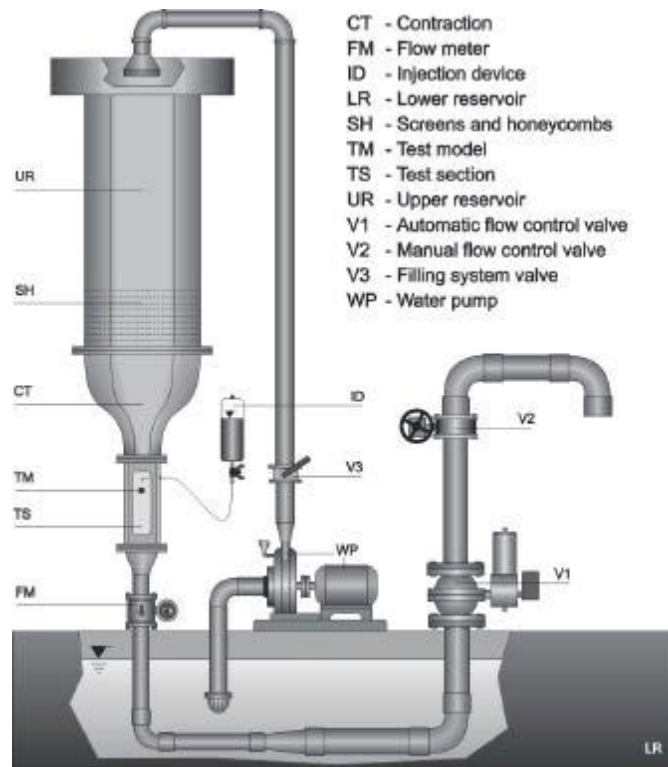


Figure 1. Vertical hydrodynamic water tunnel.

A semi-circular cylinder model with characteristic length (B) equal to 6 mm was used during the course of the investigation, subjected to variations in the attack angle (α). The Figure 2 shows the configuration employed in this work for to vary the attack angle over the range 0 to 270 degrees.

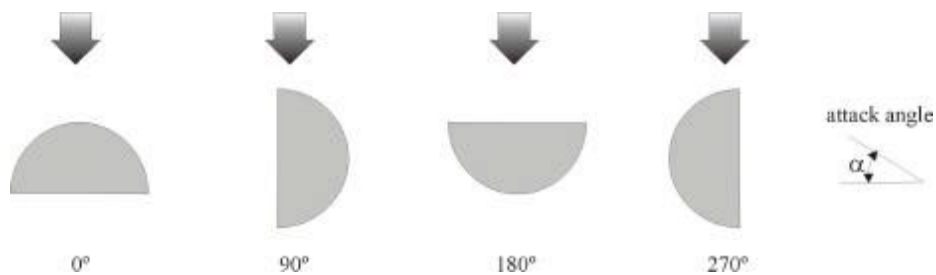


Figure 2. Variations in the attack angle (α) of the semi-circular cylinder.

It is important to emphasize that inside the test section the blockage ratio is less than 5 % and aspect ratio (relation between the length of the cylinder and the characteristic dimension – L/B) more than 24. The end-plates or other device for end-cylinder effects control wasn't utilized in this work.

To determine the fundamental vortex shedding frequency in the wake was used a hot-film anemometer DANTEC, StreamLine 90N10, equipped with one probe 55R11. The element sensor was placed in the wake at position with $x/B = -0,75$ and $y/B = -6$ measured of the center plane base, as showed in the Figure 3. The uncertainty attributed to frequency measurements is less than 5 %. Latter on, the fundamental vortex shedding frequencies were obtained processing the hot-film traces by means of a FFT software on a PC.

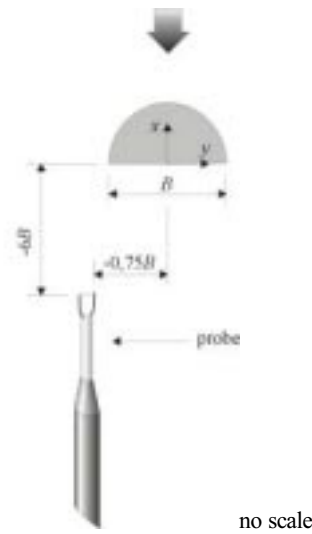


Figure 3. Hot-film probe positioned in the semi-circular cylinder’s wake.

Images of the von Kármán vortex shedding were obtained with the *dye wash* flow visualization technique. This procedure, consists on adequate injection of opaque liquid dye into the non-disturbed flow upstream to the solid body by means of a needle. Then, dye injection is suddenly stopped, the needle is removed, and the clean water stream washes the flow field, except the regions where the flow speed is relatively small, as in the cylinder boundary layer and wake. This procedure enables to visualize, for some seconds, the vortex street downstream the cylinder. In the present work, the section test was illuminated in back-light by eight flooding lamps of 150 W, providing an uniformly diffuse bright background against which the dye patterns have been photographed. The dye employed is strong aqueous solution of black PVA pigment. The images generated were registered on a photographic film ISO 100, employing a photographic camera Nikon F4s with a Nikkor Micro 60 mm lens.

3. Experimental Results

3.1. Variation of Strouhal number with Reynolds number at different attack angles

The Figure 4 shows the results for the variation of Strouhal number for a semi-circular cylinder at different attack angles at Reynolds numbers ranged 100 to 600.

In general way, all curves showed the same trend for the vortex-shedding frequency for the different Reynolds numbers investigated. It can be seen that at attack angles closest 90 degrees the Strouhal curves presented a singular peak with values between 0,32 – 0,4. After 90 degrees the Strouhal number curve decreases continuously until 180 degrees. It worth noting a gap in the every Strouhal curves for attack angles ranged 170° to 200°. In that cases the signal registered by the anemometer does not reveal a well-defined fundamental vortex shedding frequency, although is possible to identify a discernible wake for all regimes with vortices formed far away behind the cylinder. In this case, as the probe was fixed in the position illustrated in the Figure 3, weak amplitudes were acquired by the hot-film sensor hindering the determination of the Strouhal number. A further analysis in the hot-film traces and the wake visualization will be presented focusing special attention about this problem.

For attack angles between 200° and 270° the Strouhal curve shows an accentuated growth when compared with the values in the range of 0° to 90°. A second peak in the Strouhal curves was found at attack angles nears 270° degrees, as expected, since the flow past over the same shape mirrored by 180 degrees.

It is interesting to realize that the value of Strouhal number for the semi-circular cylinder at 0 degree is nearly the same of a circular cylinder (0,2), obtained by Roshko in 1953.

For the comparison effects, the graph in the Figure 5 shows the experimental data of Gonçalves & Vieira (2000) and the curve obtained, in this work, for the semi-circular cylinder at $\alpha = 0^\circ$ in Reynolds number ranged of 100 to 600. The Strouhal numbers results of Gonçalves & Vieira (2000) were determined using exclusively hydrodynamic flow visualization through images captured in a video camera and later on processed in VCR (videocassette recording) in order to calculate the fundamental frequency. As noted in the Figure 5 the results agree perfectly to each other for Reynolds numbers less than 600.

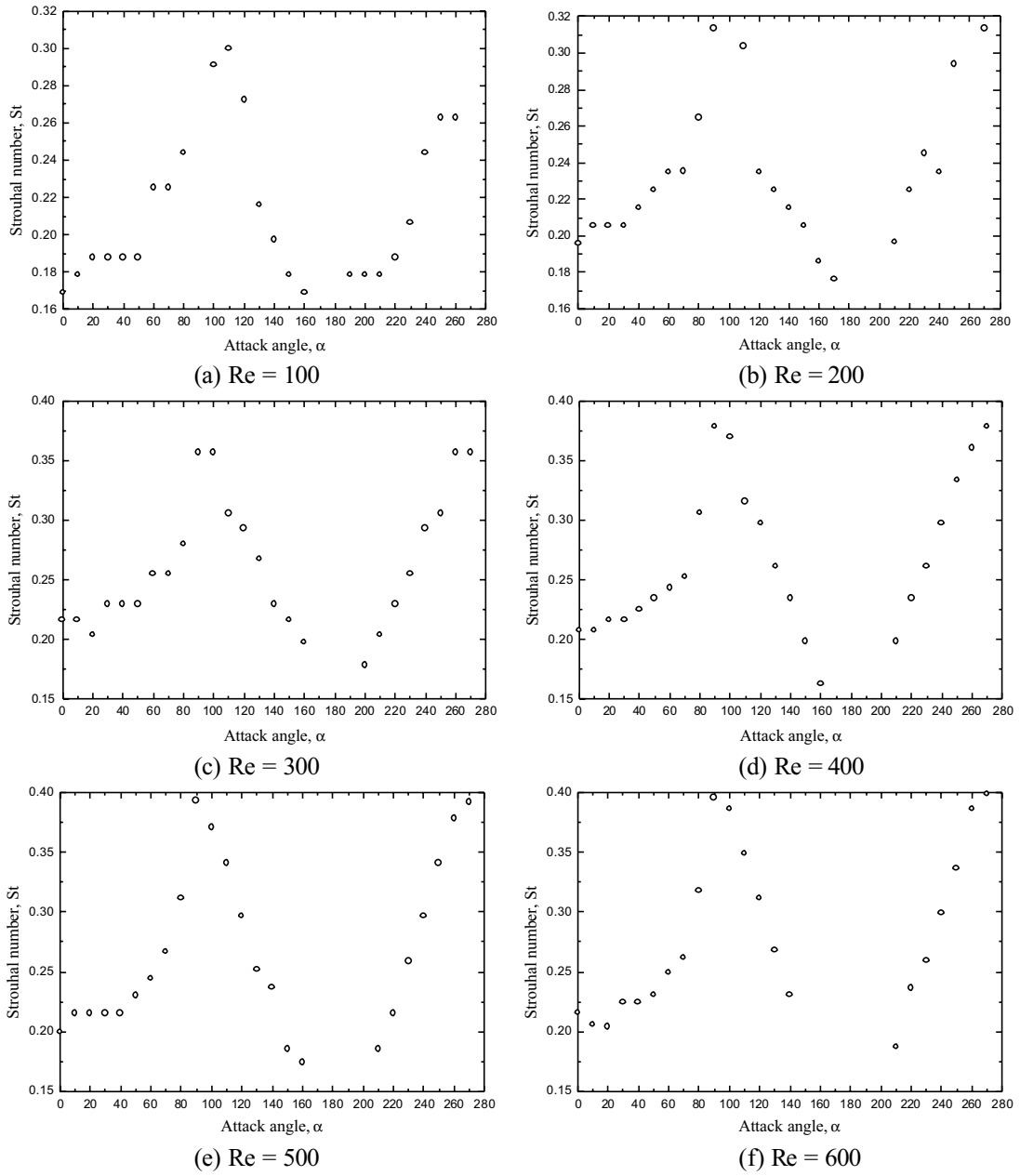


Figure 4. Variation of Strouhal number with attack angle at different Reynolds numbers.

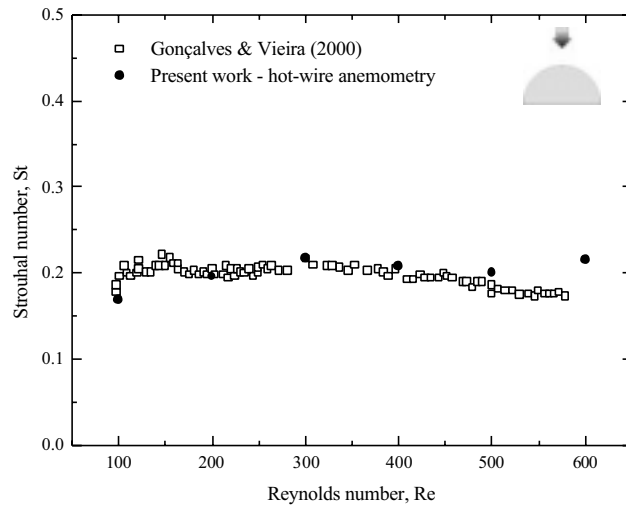


Figure 5. Comparative Strouhal \times Reynolds curves.

3.2 Hot-film traces

The Figure 6 presents the hot-film traces at $x/B = -0,75$ and $y/B = -6$ for three regimes of the flow over the semi-circular cylinder at different attack angles, $Re = 200$ (Figure 6(a)-(c)), 400 (Figure 6(d)-(f)) and 600 (Figure 6(g)-(i)).

The hot-film traces allows an analysis in the nature of the signal amplitude and its periodicity in the wake. It can be seen, as the attack angle increases until 90° – Figures 6(b), 6(e) and 6(h) – the amplitude also increase improving the periodicity and resulting in a larger Strouhal number. This trend is observed for the all regimes investigated.

On the other hand, for attack angles closest to 180° the hot-film signal is very irregular without an amplitude and periodicity well defined, as shows the Figures 6(c), 6(f) and 6(i). Although, in some of these cases, it was possible to calculate the fundamental frequency, the data were not inserted in the curves shown in the Figure 4, for avoid bad interpretations.

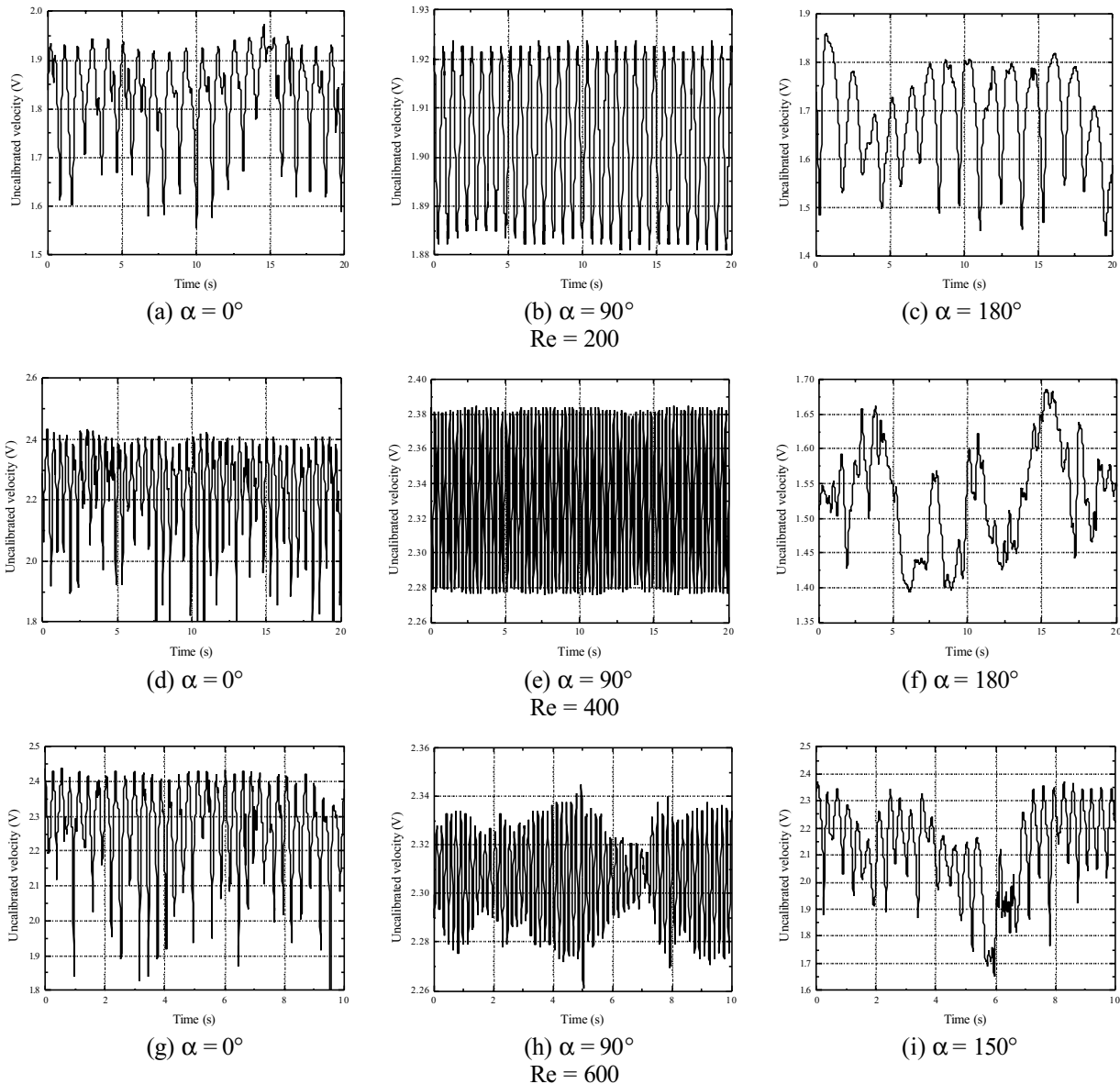


Figure 6. The hot-film traces registered in the wake of a semi-circular cylinder at different attack angles and flow regimes.

3.2. Flow field visualization

The Figure 7 presents images of the von Kármán vortex street from the semi-circular cylinders subjected to different attack angles for Reynolds numbers equal to 100 and 200. The hot-film probe was left in the photo for demonstrates its position in the wake and its interaction with the alternate vortices. These visualizations permits to identify some important changes in the vortex patterns in the cylinder’s wake.

The Figure 7(a) shows a pair of asymmetrical recirculation bubbles behind the semi-circular cylinder at 270° degrees attack angle. It worth noting that the wake begins to oscillate distant of the cylinder. For attack angle equal to 0° the

shear layer separates on the corners of the semi-circular cylinder as seen in the Figure 7(b). This trend was observed in all regimes at this attack angle. At this attack angle the flow over the semi-circular body has practically the same behavior that the flow past around a circular cylinder.

It can be seen in the Figure 7(c) that the shear layer separates after the mid face of the semi-circular cylinder, developing a recirculating region and a posteriori wake with vortices formed close the probe position. At this attack angle the Strouhal number curve posses a peak. It worth noting that all curves presented this peak.

Increasing the attack angle for 180° the shear layer separates over the corners with a large recirculation region. In this situation the hot-film anemometer do not registers a well defined fundamental frequency of the vortex shedding, although is possible to visualize the wake – Figure 7(d).

As expected the flow behavior over the cylinder for an attack angle equal to 270° is similar to 90° , as shows the Figure 7(e).

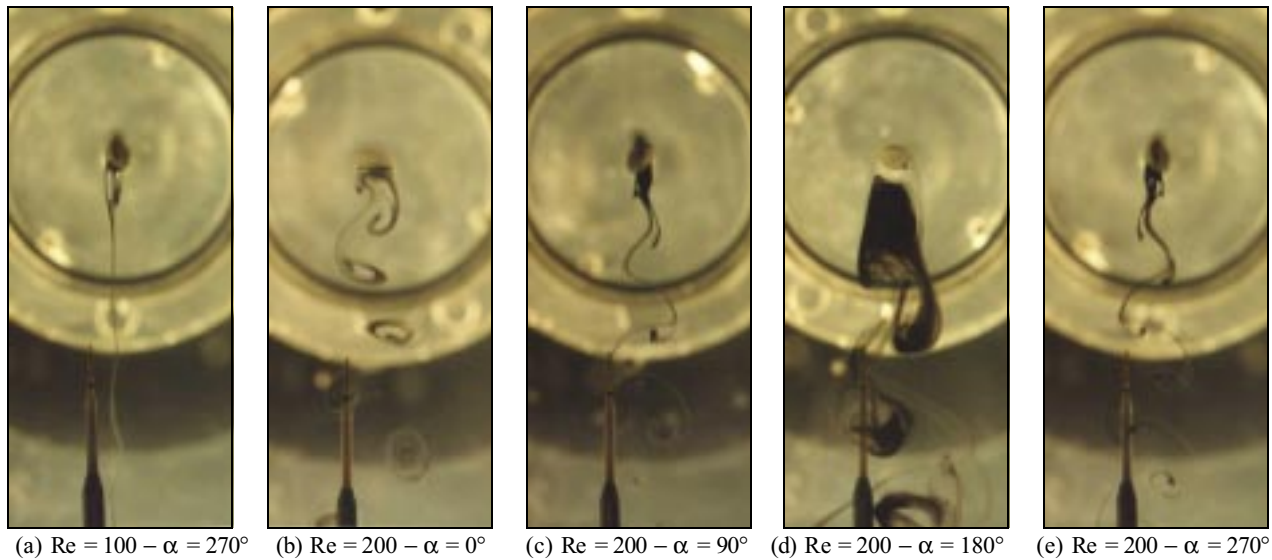


Figure 7. Flow visualization of the semi-circular cylinder’s wake for different attack angles – $100 \leq Re \leq 200$.

The Figure 8 illustrates the vortex shedding for the semi-circular cylinder at Reynolds number equal to 300 for attack angles of 0° , 90° and 180° . The vortex shedding for an attack angle equal to 0° is well defined with vortices regularly distributed in the wake – Figure 8(a). However, in this experiment, was possible to identify a discontinuity in the vortex shedding from the semi-circular cylinder at attack angle equal to 90° . The Figures 8(b) and 8(c) reveals two distinct wakes formed behind the same cylinder in time instants different. It is possible to visualize that the center of vortices are practically aligned in the centerline in the wake, for the first case, and alternated in the second case. This discontinuity persisted along the experiment for this regime and is probably due to three-dimensional vortex shedding transitional regime in the spanwise.

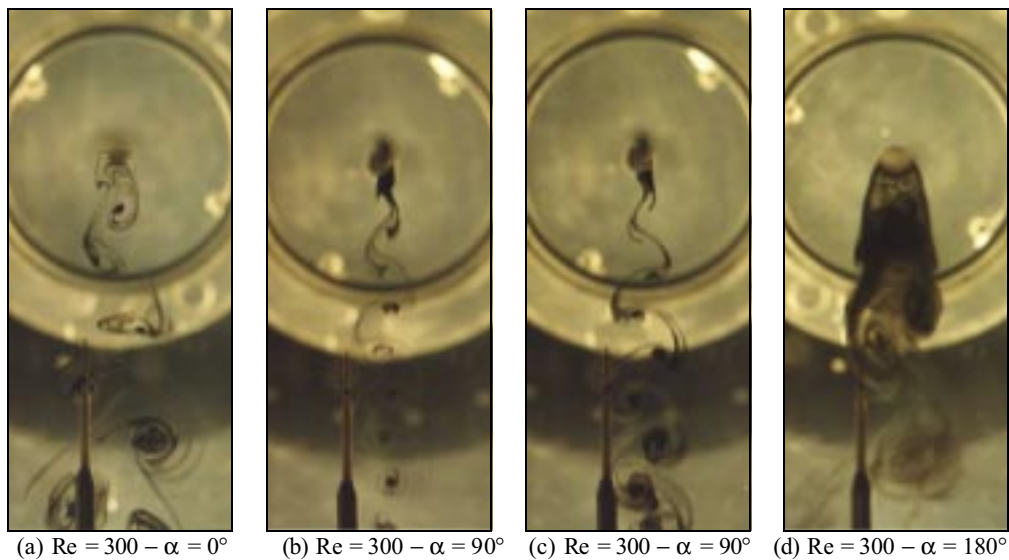


Figure 8. Flow visualization of the semi-circular cylinder’s wake for different attack angles – $Re = 300$.

The Figure 8(d) illustrates the wake behind the semi-circular cylinder at attack angle equal to 180° . Again, it can be seen that the formation region is larger than the previous cases, showing, soon after, an irregular vortex wake. As already pointed previously, in this situation the hot-film anemometer does not reveal a well defined vortex shedding frequency.

The Figure 9 shows the vortex shedding for the semi-circular cylinder at Reynolds number equal to 400 for attack angles of 90° and 180° . The images obtained are similar those registered previously for lower Reynolds numbers. However, for Reynolds more than 300, the vortex wake is relatively more turbulent and the corresponding images is less clear, forcing the images to be captured using a higher dye tracer flow rate.

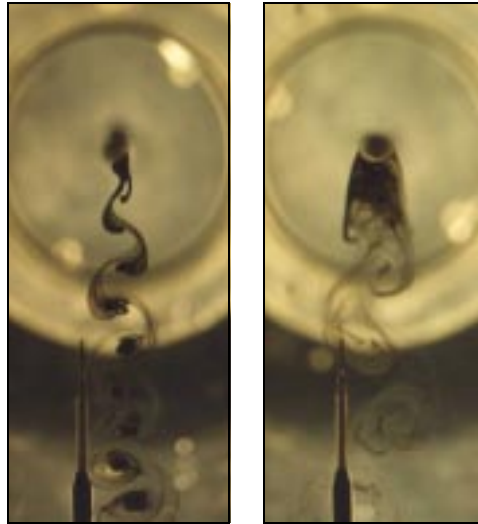


Figure 9. Flow visualization of the semi-circular cylinder's wake for different attack angles – $Re = 400$.

At this end is important to emphasize that the testes have been restricted to Reynolds numbers up to 600, because the limitations in flow visualization technique. The best images are presented for the flow regimes at $Re = 100, 200, 300$ and 400. For Reynolds numbers larger than 500 the flow images capture are extremely difficult due principally the nature turbulent of the wake.

4. Concluding Remarks

An experimental study of the semi-circular's wakes at different attack angles and Reynolds numbers ranged of 100 to 600, in order to quantify the Strouhal number, has been performed out in this work. The tests were carried out in a low turbulence hydrodynamic tunnel employing the hot-film anemometry technique for to acquire the fundamental vortex shedding frequency in the wake.

The Strouhal curve of the modified cylinder, when submitted at variations in the attack angle in a fixed flow regime, was significantly altered. In particular, a peak with values 0,32 – 0,4 was encountered for the all regimes investigated for an attack angle equal to 90° . After this attack angle the Strouhal curve decreases continuously until 180° when begins to growth again until 270° .

In the sequence, the hot-film traces were presented in order to indicate the amplitude and periodicity of the signal acquired in the wake. It was observed that the signal is very irregular for attack angles closest to 180° , hindering the fundamental frequency calculus. At end, the flow visualization by means of the *dye wash* technique was displayed for an analysis in the different flow patterns observed when the semi-circular cylinders was rotated.

A combination of the two techniques – flow visualization and hot-film anemometry – with each technique reinforcing the other one and complement each other strongly, is extensively discussed by Freymuth *et al* (1983) and utilized with success in this work.

5. Acknowledgement

This study has been developed with financial support provided by FAPESP (proc. 97/12249-9 and proc. 98/12990-3). The authors thank also the support of PROPP/UNESP and FUNDUNESP.

6. References

Boisubert, N.; Coutanceau, M. and Ehrmann, P., 1996, "Comparative Early Development of Wake Vortices Behind a Short Semicircular-Section Cylinder in Two opposite Arrangements", *Journal of Fluid Mechanics*, vol.327, pp.73-99.

- Freytmuth, P., Bank, W. and Palmer, M., 1983, "Flow Visualization and Hot-wire Anemometry", TSI Quartely, vol. IX, Issue 4, pp. 11-14.
- Gonçalves, H.C. and Vieira, E.D.R., 2000, "Semi-Circular-Section Cylinder Wake Visualization", Proceedings (in CD-ROM) of the CONEM 2000 - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Natal, RN.
- Luo, S.C. and Chew, Y.T., 1989, "A Smoke Wires Flow Visualization Study of the Wakes of Bluff Bodies with Different Afterbodies", Flow Visualization V (Reznicek, R. ed.) Proceedings of the Fifth International Symposium on Flow Visualization, Hemisphere Publishing Corp.
- Olsen, J.F., and Rajagopalan, S., 2000, "Vortex Shedding Behind Modified Circular Cylinders", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.86, pp. 55-63
- Ower, E. & Pankhurst, R.C., 1977, "The Measurement of Air Flow", Pergamon Press, Oxford.
- Unal, M.F. & Rockwell, D., 1988, "On Vortex from a Cylinder. Part 1. The Initial Instability", Journal of Fluid Mechanics, vol.190, pp.491-512.
- Vieira, E.D.R., Lindquist, C.; Woiski, E.R. & Mansur, S.S., 1997, "Vortex Velocity Measurement by Hydrodynamic Flow Visualization", Proceedings (in CD-ROM) of COBEM / 97 XIV Brazilian Congress of Mechanical Engineering, paper code 059, 8pp, Bauru.
- Wolochuk, M.C.; Plesniak, M.W. & Braun, J.E., 1996, "The Effects of Turbulence and Unsteadiness on Vortex Shedding from Sharp-edged Bluff Bodies", Journal of Fluids Engineering, vol.118, pp.18-25.
- Yokoi, Y & Kamemoto, K., 1994, "Vortex Shedding from a Oscillating Circular Cylinder in a Uniform Flow", Experimental Thermal and Fluid Science, vol.8, pp.121-127.

Horizontal Pneumatic Conveying of Cork Stoppers

Carlos Pinho

CEFT-DEMEGI

FEUP – Rua Dr. Robert Frias, s/n

4200-465 Porto, Portugal

ctp@fe.up.pt

Abstract. *A general revision of the study of dilute phase horizontal pneumatic transport of cork stoppers is presented. A steady state pressure drop correlation is given as well as an analysis that shows the lubricating effect of the cork dust released during conveying, either in the acceleration regime or in steady state.*

Keywords. Pneumatic conveying, pressure drop, acceleration.

1. Introduction

Pneumatic conveying is commonly used in the primary steps of the production of cork stoppers, where particle damage through interparticle and particle/confining walls impaction has a minor effect upon the final cylindrical shape of the stoppers. Transported particle sizes are one order of magnitude smaller than the conveying pipe internal diameter, leading to the appearance of frequent flow blockage conditions. The development of small distance transport systems for stoppers has been essentially an empirical process and only recently has been subjected to a systematic experiential approach. The work carried out so far has been only on horizontal pneumatic conveying, either in steady state (Neto and Pinho, 1998), or during acceleration conditions (Pinho, 1999).

An update of the experimental observations concerning steady state and acceleration regimes is carried out and a revised correlation for the calculation of pressure drop in steady state is given whereas the importance of drag reduction in the acceleration process is stressed. It is also shown that, for the order of magnitude of conveying air velocities and particle loading factors usually found in the cork stoppers pneumatic transport, the acceleration length is virtually constant.

In the pneumatic conveying of cork stoppers, fine cork dust is released and acts as a lubricant reducing friction effects, Neto and Pinho (1998). The deposition of this fine dust is still enhanced by electrostatic generation, Smeltzer et al (1982). The conveying air pressure drop is then reduced, with the increase of the solids mass loading. This situation has already been found on solid-liquid systems; Lee et al (1974) studied polymeric solutions containing suspended fibers and Radin et al (1975) studied the drag reduction in several dilute solid-liquid suspensions. Szikszay (1988) argued that, as the measured experimental data referred to both the solids and the conveying air pressure drop, it was unreasonable to separate them. Weber (1991) also suggested that a single friction factor for the gas-solid mixture should be used, instead of two separate friction factors for the air and solids flow. This question of drag reduction with the addition of particles into a flow stream has been recently reviewed in the book of Fan and Zhu (1998). These authors present a phenomenological model to account for the drag reduction and suggest that basically, the drag reduction is attributed to turbulence modulation associated to the particle motion near the confining walls, and that particle motion close to the confining walls is dependent on several factors like deposition, agglomeration and electrostatic effects.

For the short distances used in pneumatic conveying of cork stoppers the steady state transport conditions are never reached and the acceleration regime becomes dominant. The theoretical determination of the acceleration length is a difficult task and the Rose and Ducworth (1961) equation is still the reference for this matter. However, it is becoming recognized that the acceleration length does not change very much with the solids loading factor and also that, such equation gives acceleration lengths below those measured for the transport of large particles, Marcus et al (1985). Cork stoppers being large particles it was expectable that the Rose and Ducworth equation could not be recommended. Experimental measurements were then carried out to evaluate the importance of this transient phenomenon during corks conveying.

2. Experimental setup

The experimental setup, schematically presented on Fig. (1), was composed by a 14 m long horizontal PVC, 122 mm internal diameter pipe, where measurements were taken, and a recovery circuit composed by two 90 ° bends and another portion of 14 m straight pipe. Neto and Pinho (1998) and Pinho (1999), have informations for the experimental procedure, data acquisition methodology and transducers accuracy. Along the horizontal pipe, in the measurement region, pressure taps composed of four interconnected measuring points placed 90 ° appart were installed every 0.20 m; starting 0.20 m downwards the corks feeding hopper and covering the first six meters of conveying pipe. From then on, pressure taps were placed one meter appart.

Experiments covered both steady state conveying as well as accelerating conditions. To define the acceleration zone, a simple experimental procedure was adopted, through the only use of pressure taps placed one meter appart.

Measuring the pressure drop between a reference pressure tap already three meters away from the feeding point and subsequent pressure taps placed at every one meter distance, it was easily detected that after an initially high pressure drop per unit length of pipe, this value decreased, achieving a relatively constant value typical of a steady state conveying regime. Such preliminary experiments were carried out with only two different types of cork stoppers 38×22 and 45×24. Stoppers are characterized by their length and diameter as well as density. Table (1) shows, for the stoppers sizes used in the experiments, the equivalent diameter, i.e., the diameter of the sphere with the same volume, the sphericity, and the density.

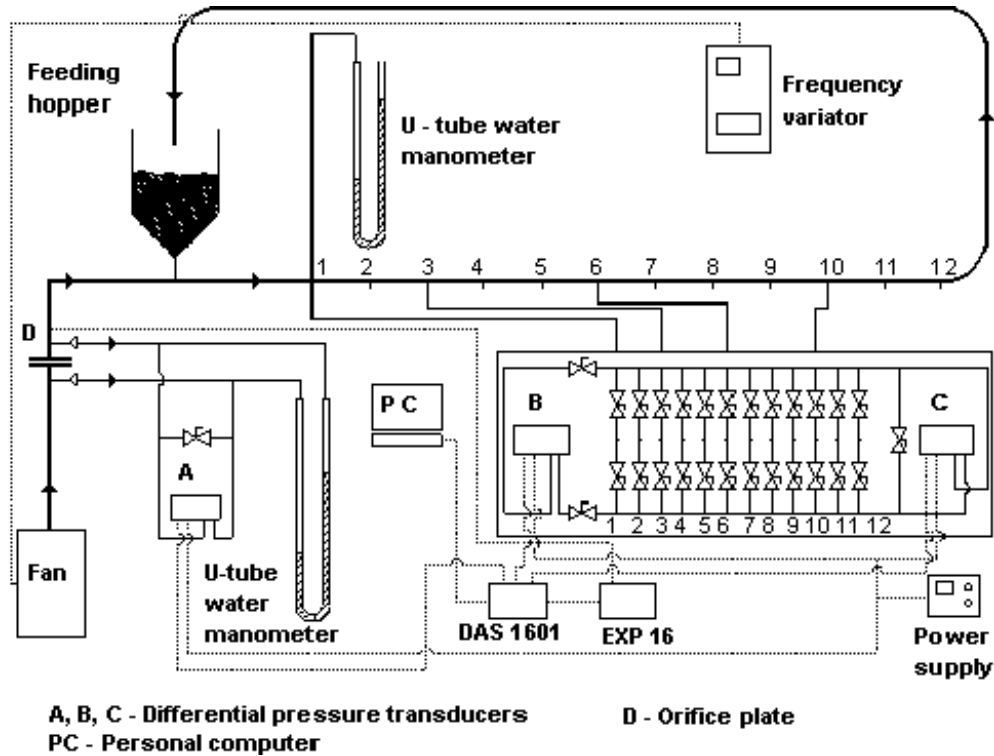


Figure 1 – Schematic diagram of experimental setup.

Table 1 – Characteristics of cork stoppers used in the experiments.

Size ($l \times d$) (mm×mm)	d_{eq} (m)	ψ	ρ_p (kg/m ³)
27 × 20	0.0253	0.87	195
38 × 22	0.0302	0.85	219
38 × 24	0.0320	0.85	198
45 × 24	0.0339	0.84	177

From the analysis of the Fig. (2) it can be seen that 6 meters beyond the corks feeding point the conveying system is in steady state conditions. To obtain steady state conveying data, measurements were then carried out between 6 and 12 meters downwards the feeding point. To avoid the influence of corks deceleration on the approach of the final bend, placed at the end of the lower straight horizontal line, data beyond 12 meters were discarded. On the other end, acceleration pressure drop data were obtained in the first six meters to achieve a proper definition of the acceleration length and the corresponding pressure drop.

3. Steady state transport

The influence of the cork dust released by the stoppers during transport is easily detected through the reduction of drag, when compared to single air flow in the conveying ducts. This effect is enhanced with the increase of the solids loading factor, as can be seen from Fig. (3), where the pressure drop per unit length for the two phase flow and several conveying conditions is plotted against the conveying air superficial velocity. The higher the solids loading factor, the stronger is the reduction of the pressure drop, as Weber (1991) detected by working with granular solids and small loadings.

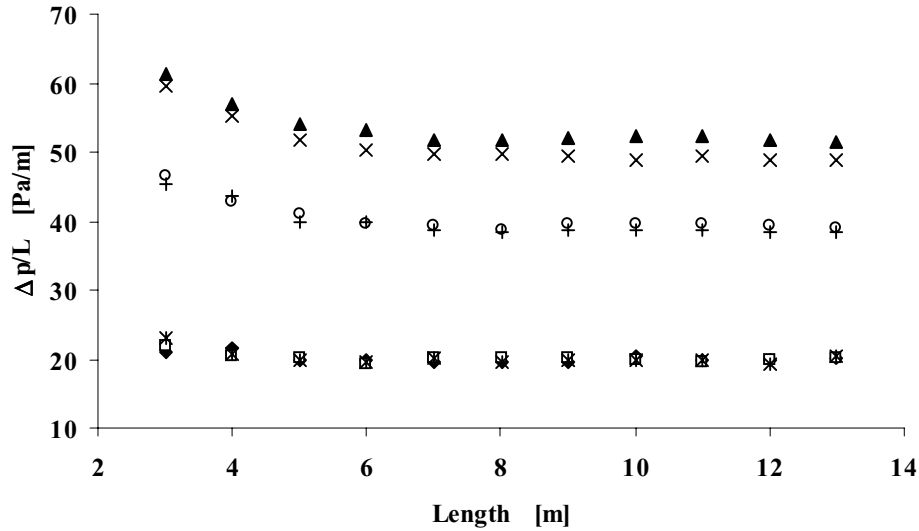


Figure 2 – Evolution of pressure drop per unit length in the acceleration phase. ◆ corks of 38×22 size and $\theta = 0.2$; ◻ corks of 38×22 size and $\theta = 0.31$; ▲ corks of 38×22 size and $\theta = 0.17$; × corks of 38×22 size and $\theta = 0.86$; * corks of 45×24 size and $\theta = 0.17$; ○ corks of 45×24 size and $\theta = 0.15$; + corks of 45×24 size and $\theta = 0.28$.

In classical models for pneumatic conveying, Barth (1960a; 1960b), Yang (1973; 1974; 1978) and Yang and Keairns (1973; 1976), the steady state overall pressure drop is considered the addition of two individual contributions, the gas and the solids pressure drop. More recently, Rhodes (2000) continues to adopt, as a general approach, the addition of individual pressure drop contributions. In the Barth’s model, the total pressure drop is calculated as

$$\Delta p_t = \Delta p_f + \Delta p_s \tag{1}$$

where the gas phase contribution, Δp_f , is calculated through the Darcy-Weisbach equation, whereas for the solid contribution,

$$\Delta p_s = \lambda_s \theta \frac{L}{D} \rho_f \frac{U_f^2}{2} \tag{2}$$

where λ_s is the solids friction factor which depends upon the conveying pipe inclination towards the horizontal direction and inter-particle and particle-confining walls collisions, θ is the solids loading factor, L is the pipe length, D is the pipe internal diameter, ρ_f the gas density and U_f the air interstitial velocity.

The Yang’s model considers the overall steady state pressure drop, as the combination of static and friction contributions for both the gas and the solid phase, which means the consideration of four independent terms.

In these approaches, it is implicit assumed that the overall pressure drop for a pneumatic conveying situation should be higher than any individual contribution. However, this is not always the real situation and the application of any of such models, or others following the same philosophy, would mean that some individual contributions should be negative leading to a physically inaccurate condition. The alternative and simpler methodology is to consider an overall friction factor for the gas-solid mixture, as suggested by Weber (1991). The use of a single friction factor for the whole mixture is tempting, because the experimental determination of pneumatic conveying pressure drop is effectively the measurement of a combined (gas plus solid) pressure drop and the total pressure will then be given by,

$$\Delta p_t = \lambda_t \frac{L}{D} \rho_f \frac{U_f^2}{2} \tag{3}$$

where the global friction factor, λ_t , is written as a simple function of dimensionless parameters, Szikszay (1988),

$$\lambda_t = a \theta^b Fr^c \left(\frac{d_p}{D} \right)^d \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} \right)^e \tag{4}$$

Knowing experimental data of $\Delta p_t/L$, for different tested situations covering several stoppers diameters d_p and densities ρ_p , loading factors and air interstitial velocities, λ_t is calculated by means of Eq. (3) and correlated with the dimensionless numbers referred in Eq. (4), θ , Fr, d_p/D and ρ_p/ρ_f , through least squares fitting of parameters a, b, c, d and e.

For the determination of steady state pressure drop in horizontal pneumatic conveying, three stoppers sizes were used, 38x22, 38x24, 45x24. Tested loading factors covered the range from 0.11 to 1.3, while the Froude number ($Fr = U_f/\sqrt{g D}$) ranged from 13.7 to 28.1, typical of corks conveying systems. Small loading factor values are common in the pneumatic conveying of stoppers, because of the combined influence of having to transport large size particles with the use of centrifugal fans having flat working curves promoting flow blockage situations, Wirth and Molerus (1986). This affects minimum conveying conditions and imposes restrictions on the maximum possible loading factor. At the same time, the extreme fragility of stoppers material imposes some limitations on the maximum recommended transport velocity, reducing even further the range of working conditions. A previous correlation was already published (Neto and Pinho, 1998), but the next covers a slightly wider range of working conditions (older θ varied from 0.14 to 1.2).

$$\lambda_t = 1.26 \times 10^{-4} \theta^{-0.0787} Fr^{-0.263} \left(\frac{d_{eq}}{D}\right)^{3.94} \left(\frac{\rho_p}{\rho_f}\right)^{2.11} \tag{5}$$

The maximum absolute deviation between experimental and calculated data with this formulae is of 12.6 % whereas the mean deviation, calculated through

$$\text{Mean Deviation, \%} = \left[\sqrt{\sum \left(\frac{\lambda_{t,cal} - \lambda_{t,exp}}{\lambda_{t,exp}} \right)^2 / N} \right] \times 100 \tag{6}$$

as defined by Wen and Chen (1982), is 5.1 %. Experimental and calculated λ_t are compared on Fig. (4).

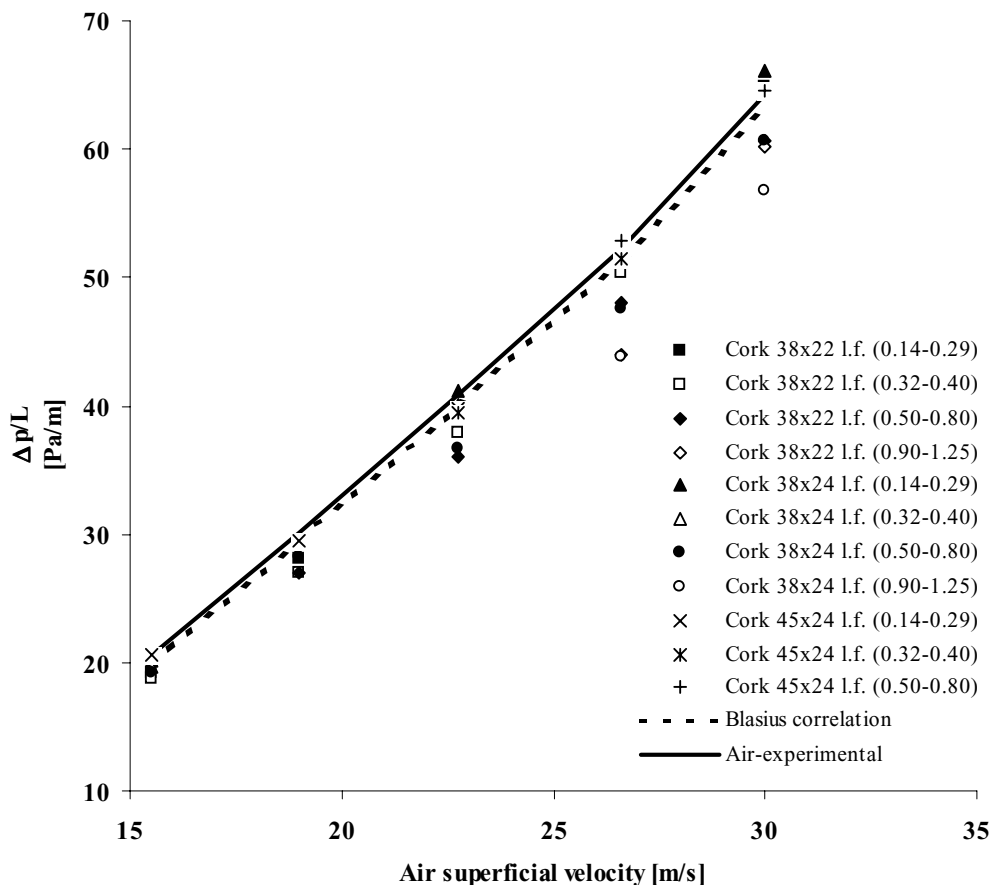


Figure 3 – Evolution of the two phase flow pressure drop with solids loading factor.

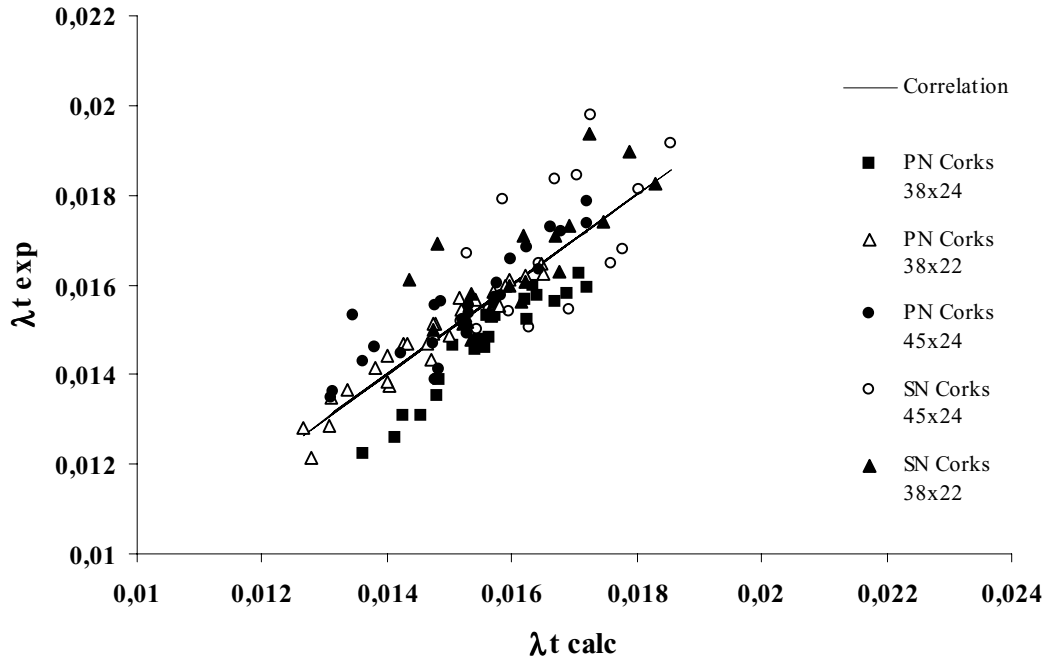


Figure 4 – Comparison between experimental and correlated overall friction factor. (PN and SN symbols refer to different set of experiments)

The experimental determination of proper values of online pressure drop is dependent upon the chosen pressure taps. Using too close pressure taps to the solids entrance, which in the present situation is below six meters, acceleration effects will become important, whereas the use of pressure taps too close to the bend, placed at the end of the horizontal conveying pipe, can give experimental results dependent upon the pressure increase related to the flow deceleration in the approach of the change of direction.

4. Acceleration regime

4.1 Pressure drop

After the definition of the acceleration region, a new set of tests was carried out. The pressure drop between the pressure tap set placed 600 mm beyond the feeding point (third set of pressure taps in the flow direction) and the subsequent pressure taps, every 200 mm, up to a set of pressure taps placed 6 meters beyond the feeding point, was measured. Using this range of conveying pipe length it was assured that the acceleration region was completely covered by the obtained experimental data. The plotting of the experimental results was, similarly to the steady state situation, based on the fact that the combined gas solid flow pressure drop can be defined through an equation dependent upon fully developed flow parameters like the gas density ρ_f , interstitial velocity U_f and acceleration length, L_a ,

$$\Delta p_a = \lambda_a \rho_f \frac{L_a}{D} \frac{U_f^2}{2} \quad (7)$$

where the acceleration friction factor λ_a is to be considered, analogously to the steady state regime, see Szikszay (1988), Weber (1991) and Neto and Pinho (1998), a function of the solids load factor θ , air flow Froude number Fr , particle density ρ_p , particle equivalent diameter d_p , gas density ρ_f , and pipe internal diameter D ,

$$\lambda_a = \alpha \theta^\beta Fr^\gamma \left(\frac{d_p}{D} \right)^\delta \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} \right)^\nu \quad (8)$$

The fitting parameters α , β , γ , δ and ν were again determined from experimental results. However, before going to this process it must be found out what was the range of pressure drop results truly belonging to the acceleration regime. According to Eq. (7), experimental data were treated in the form of a dimensionless pressure drop,

$P^* = \Delta p / \left(\rho_f \frac{L}{D} \frac{U_f^2}{2} \right)$, and plotted, as a function of the distance between correspondent pressure taps, Fig. (5). The dimensionless pressure drop decreases rapidly with covered distance and from four to five meters downwards the corks feeding point, the acceleration process is accomplished. The determination of the acceleration length as well as the acceleration pressure drop was then carried out with experimental data obtained inside this length range; data beyond it were discarded.

The resultant correlation for the acceleration friction factor is

$$\lambda_a = 7.601 \times 10^{-6} \theta^{0.1005} Fr^{-0.3851} \left(\frac{d_p}{D} \right)^{-0.3183} \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} \right)^{1.742} \tag{9}$$

The accuracy of this correlation expressed as the mean deviation in percent, calculated through the comparison between experimental and calculated values for P^* , using also the definition of Wen and Chen (1982), is 9.69 %, while the maximum absolute deviation is of 17.1 %.

The pressure drop evolution as shown in Fig. (5) allows also the determination of the acceleration length. Two criteria were used for the dimensionless pressure drop P^* variation below which the acceleration region was completed, respectively 5 and 10 % variation for successive measured points. With this, for every tested situations, two sets of acceleration lengths were obtained and experimental results were treated according to the following theoretical approach.

4.2 Acceleration length

Applying the momentum equation to a single particle of mass m_p and velocity U_p in the acceleration regime, where only conveying air drag, interparticle and particle confining walls impaction effects were considered,

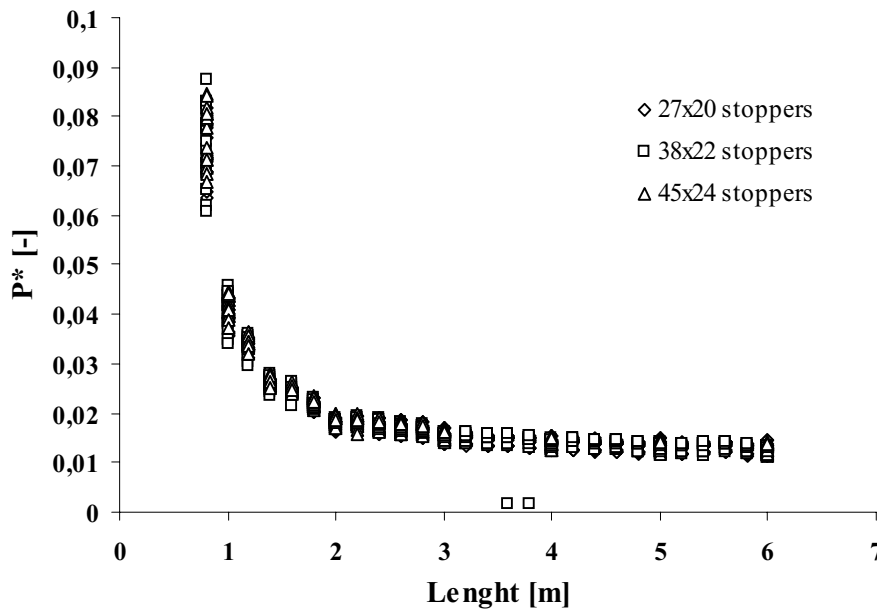


Figure 5 – Detailed measurement of gas/solid pressure drop in the acceleration region

$$m_p \frac{dU_p}{dt} = \frac{\pi}{8} \rho_f d_p^2 C_D (U_f - U_p)^2 - m_p \lambda_{pa} \frac{1}{2} \frac{U_p^2}{D} \tag{10}$$

The first term of the second member is the drag force acting by the conveying air upon the accelerating particle (where C_D is the drag coefficient for a particle in a cloud), whereas the second term of the second member takes into account the interparticle and particle walls interaction through the acceleration impaction factor λ_{pa} . Working on this equation,

considering that $\frac{dU_p}{dt} = U_p \frac{dU_p}{dx}$ and knowing that the ratio $\frac{3}{4} \frac{C_D \rho_f}{\rho_p d_p}$ is in fact $\frac{g}{U_t^2}$, where U_t is the particle terminal velocity, that differential equation can then be written as,

$$\left[\frac{g}{U_t^2} - \frac{\lambda_{pa}}{2D} \right] dx = \frac{U_p dU_p}{U_p^2 + p U_p + q} \quad (11)$$

with,

$$p = \frac{-2 U_f \frac{g}{U_t^2}}{\left[\frac{g}{U_t^2} - \frac{\lambda_{pa}}{2D} \right]} \quad (12)$$

and,

$$q = \frac{U_f^2 \frac{g}{U_t^2}}{\left[\frac{g}{U_t^2} - \frac{\lambda_{pa}}{2D} \right]} \quad (13)$$

Equation (11) can now be integrated for x between 0 and L_a and U_p between 0 and U_p giving as result that,

$$\left[\frac{g}{U_t^2} - \frac{\lambda_{pa}}{2D} \right] L_a = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_p^2 + p U_p + q}{q} \right| - \frac{p}{\sqrt{4q - p^2}} \left[\operatorname{atan} \left(\frac{2 U_p + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) - \operatorname{atan} \left(\frac{p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) \right] \quad (14)$$

The final expression can be developed in a McLaurin series. Considering only the first term of the series and replacing p and q by their proper values,

$$\left[\frac{g}{U_t^2} - \frac{\lambda_{pa}}{2D} \right] L_a = \frac{1}{2} \ln \left[\left(1 - \frac{\lambda_{pa} U_t^2}{2Dg} \right) \left(\frac{U_p}{U_f} \right)^2 - 2 \left(\frac{U_p}{U_f} \right) + 1 \right] + \frac{\left(\frac{U_p}{U_f} \right)}{\left(1 - \frac{\lambda_{pa} U_t^2}{2Dg} \right) \left(\frac{U_p}{U_f} \right)^2 - 2 \left(\frac{U_p}{U_f} \right) + 1} \quad (15)$$

Using the experimental values for L_a either for 10 or for 5 % variation criteria, λ_{pa} values can be determined through the data fitting to the previous equations. The obtained values were -0.022257 and -0.018390 respectively. The unusual result that is given by the data analysis is the negative value of the acceleration impaction factor, meaning that in the development of particle momentum equation, the last part of the second member should be positive, and not negative as it was assumed. Usually, interparticle and particle/wall interaction effects operate against the acceleration process, reducing the particle velocity and increasing its acceleration length. But, as previously seen for the steady state pneumatic transport of stoppers, the dust released acts as a lubricant reducing the pressure drop, Neto and Pinho (1998). The same occurs in the acceleration region and the lubricating action of the cork dust is promoting it. When writing down the momentum balance, this should be taken into account. Errors imposed by the development in the McLaurin series and by the simple consideration of the first term of the series, are eliminated through the fitting of the equation to the experimental data.

The acceleration lengths do not vary significantly in the tested situations and plots of experimental results are not very suggestive, Fig. (6) shows the acceleration lengths according to the adopted criteria.

No significant variations can be detected due to the narrow range of working conditions being used. This means that a useful correlation for this acceleration distance could not be found and that for design purposes a pneumatic conveying acceleration length of about 5 m should be considered, according the 5 % criterion in the variation of pressure drop.

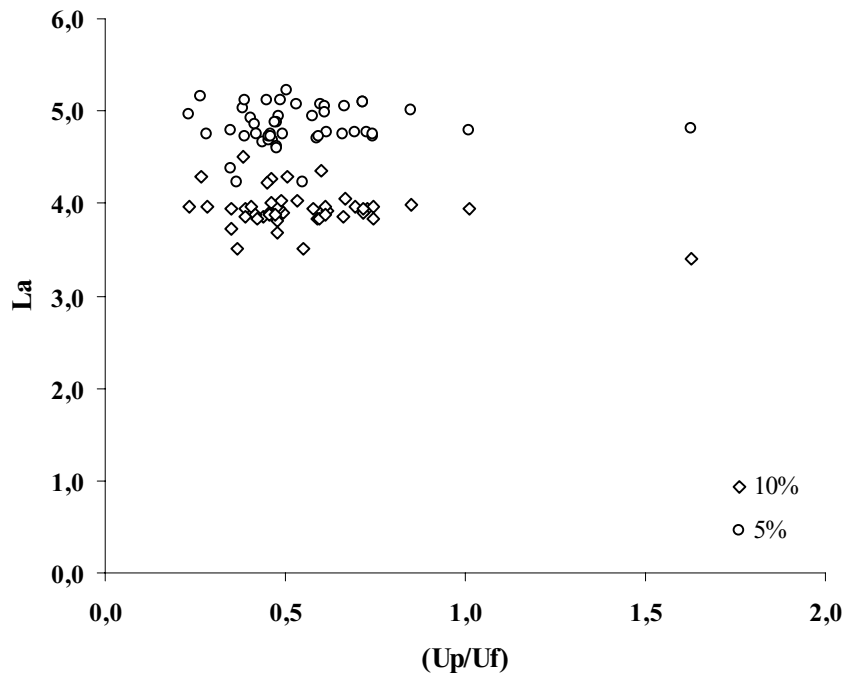


Figure 6 – Acceleration lengths according to the 10 % and 5 % criteria.

5. Conclusions

The observed pressure drop for this type of pneumatic transport is below the observed pressure drop for the conveying air without the stoppers. The reasons for the drag reduction are connected to the lubricating effect of the cork dust released by the particles. Accordingly, a revised version of a correlation for the calculation of the air/solid combined pressure drop was presented.

The acceleration process was also studied and although being already subject of a previous publication, it was now shown that, for cork stoppers, the effect of drag reduction could also be detected in this regime. Because of the small range of tested operating conditions, typical of industrial pneumatic conveying of cork stoppers, no significant acceleration length variations could be measured and a value of around 5 meters should be used for design purposes.

These results can be object of controversy due to the limited range of obtained experimental data; however, practical situations in pneumatic conveying of cork stoppers only cover the load factors and flow ranges used herein and consequently results must be analysed in the light of such small universe of data.

6. References

- Barth, W., 1960a, "Physical and Economical Aspects of Transportation of Solids in Fluids and Gases", (In Germany), CIT 32, No. 2, pp.164-171.
- Barth, W., 1960b, "Technical Flow Problems in Conveying Dust and Gas Mixtures", (In Germany), Mitt. VGB., No. 79, p.238-244.
- Fan, L. S., and Zhu, C., 1998, "Principles of Gas-Solid Flows", Cambridge University Press, Cambridge Series in Chemical Engineering, Cambridge.
- Lee, W. K., Vaseleski, R. C. and Metzner, A. B., 1974, "Turbulent Drag Reduction in Polymeric Solutions Containing Suspended Fibres", A.I.Ch.E. Journal, Vol. 20, No.1, pp. 128-133.
- Marcus, R. D., Hilbert Jr., J. D, and Klinzing, G. E., 1985, "Flow Through Bends and Acceleration Zones in Pneumatic Conveying Systems", " Bulk Solids Handling, Vol. 5, No. 4, pp. 121-126.
- Neto, P. and Pinho, C.,1998, "Dilute Phase Horizontal Pneumatic Conveying of Cork Stoppers: A Preliminary Experimental Study", Proceedings of the Symposium on Thermal and Fluids Engineering, CSME Forum SCGM, 19th-22nd May, Toronto, Vol. 1, pp. 360-367.
- Pinho, C., 1999, "Acceleration of Cork Stoppers in Pneumatic Conveying", 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 22nd-26th November, Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil.
- Radin, I., Zakin, J.L. and Patterson, G.K., 1975, "Drag Reduction in Solid-Fluid Systems", A.I.Ch.E. Journal, Vol. 21, No.2, pp. 358-371.
- Rose, H.E. and Duckworth, R. A., 1961, "Transport of Solids Particles in Liquids and Gases", The Engineer, No. 14, 21 and 28 March.
- Smeltzer, E. E., Weaver, M. L. and Klinzing, G. E., 1982, "Pressure Drop Losses due to Electrostatic Generation in Pneumatic Transport", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., Vol. 21, No. 3, pp. 390-394.

- Szikszay, G., 1988, "Friction Factor for Dilute Phase Pneumatic Conveying", *Bulk Solids Handling*, Vol. 8, No. 4, pp.395-399.
- Weber, M., 1991, "Friction of the Air and the Air/Solid Mixture in Pneumatic Conveying", *Bulk Solids Handling*, Vol. 11, No. 1, pp. 99-102.
- Wirth, K.-E. and Molerus, O., 1986, "Solids and Gas-Solid Flows", *Encyclopedia of Fluids Mechanics*, Vol. 4, Ch. 15, pp. 471-484 N. P. Cheremisinoffs Editor, Gulf Publishing Company.
- Yang, W. and Keairns, D.L., 1973, "Estimating the Solid Particle Velocity in Horizontal Pneumatic Conveying Lines", *The Canadian Journal of Chem. Eng.*, Vol. 51, pp. 779-781.
- Yang, W., 1973, "Estimating the Solid Particle Velocity in Vertical Pneumatic Conveying Lines", *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, Vol. 12, No. 3, pp. 349-352.
- Yang, W. and Keairns, D.L., 1976, "Estimating the Acceleration Pressure Drop and Particle Acceleration Length in Vertical and Horizontal Pneumatic Transport Lines", *Pneumotransport 3. Third International Conference on the Pneumatic Transport of Solids in Pipes*, 7th - 9th April, pp. D7-89 - D7-98.
- Yang, W., 1978, "A Correlation for Solid Friction Factor in Vertical Pneumatic Conveying Lines", *AIChE Journal*, Vol. 24, No. 3, pp. 548-552.
- Yang, W., 1974, "A Correlation for Solid Friction Factor in Vertical and Horizontal Pneumatic Conveying", *AIChE Journal*, Vol. 20, No. 3, pp. 605-607.

6. Copyright Notice

The author is the only responsible for the printed material included in this paper.

NUMERICAL SIMULATIONS OF THE LAMINAR AND TURBULENT VORTEX SHEDDING FROM RECTANGULAR CYLINDERS

Odenir de Almeida
Sérgio Said Mansur

UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, 15385-000 – Ilha Solteira, SP, Brazil – odenir@dem.feis.unesp.br

Aristeu da Silveira Neto

UFU – Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, 38400-092 – Uberlândia, MG, Brazil

Abstract. This work presents numerical simulations of laminar and turbulent vortex shedding from rectangular cylinders with side ratios from 1 to 10 at Reynolds number of 1000. At this Reynolds number the vortex shedding phenomenon is characterized by impinging-shear-layer instability and the flow becomes unstable transitioning to turbulent. In order to understand the flow transport mechanisms the two-dimensional simulations have been performed with FLUENT[®] 5.3 software by means of the finite volume method. The solution of the original Navier-Stokes equations, without turbulence model failed to predict correctly the flow over cylinders with side ratios 8, 9 and 10, showing a probable transition to fully turbulent flow. On the other hand a more adequate investigation was conducted using the LES methodology to analyze the transitional flow. The classical Smagorinsky LES model has been utilized to calculate the flow field. Qualitative results obtained from both approaches characterized the impinging-shear-layer instability, where a single separated shear layer becomes unstable in the presence of a sharp trailing edge corner. Quantitative results based in the Strouhal numbers were compared with experimental ones showing a good agreement and providing some important information on the vortical flow dynamics.

Keywords. rectangular cylinders, vortex shedding, numerical simulation, large eddy simulation, side ratio

1. Introduction

In the last decade the flow over rectangular cylinders has received increasing attention due to its many possibilities of applications in structural, electrical and mechanical devices. In fact, the flow around bodies is frequently encountered around buildings, inside boilers, compact heat exchangers, vortex meters and other industrial equipments. In spite of several researches about flows around bluff bodies, there's little literature and a bit of papers published with experimental and numerical studies on this problem. In general way, most are concerned to experimental approach and there are few works exclusively numerical.

From a phenomenological point of view, the problem is characterized by a high complexity degree due to simultaneous interaction of different shear layers: the *boundary layer*, the *separation zone* and the *vortex shedding* in the wake, which can characterize different mechanisms of vortex formation. The Figure 1 compares the unsteady separated flow around the square and rectangular cylinders, showing some interesting phenomena strongly dependent on the shape of the cross-section and the Reynolds number.

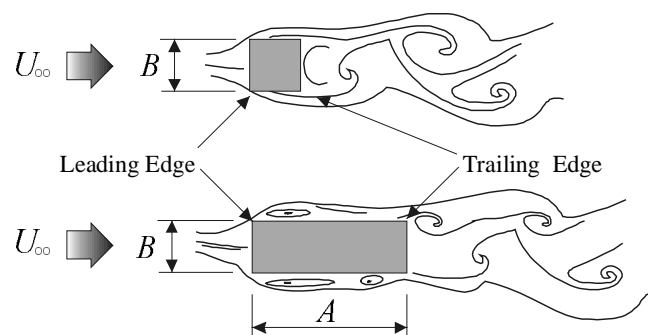


Figure 1. Vortex Kármán structures over square and rectangular cylinders.

As shown in the figure, the flow over the square cylinder is characterized by the presence of a single shear layer separating from the top and bottom leading edges which are developed rounding the obstacle and interacting close to the downstream corner. This interaction between the separated shear layers in the trailing edge are generated by the Kelvin-Helmholtz instability, where the region closest to the wall possesses approximately zero velocity producing an inflectional velocity profile. Due to adverse gradients of pressure formed in this region the shear layers separate over the side of cylinder rolling in discrete vortices that are advected in the near and far wake.

For rectangular cylinders immersed in the free stream, a single separated shear layer is developed over the elongated side of the cylinder. Due to the presence of a sharp trailing edge this shear layer become unstable introducing additional complexity in the flow and promoting the interaction between the vortices that are formed over the side of

cylinder and at trailing edge. In this case the flow pattern changes completely since there is a reattaching of the shear layers over the side of cylinder and the interaction of leading and trailing edges vortices. Depending on the side ratio of the cylinder, different numbers of vortices are formed over its surface, which are advected with a particular and unexpected flow dynamics. The mechanism responsible for this interaction and vortex shedding is characterized by the Impinging Shear Layer Instability (ISLI), according to several authors – Nakamura *et al* (1996), Ohya *et al.* (1992) and others. The dynamic nature of the flow can introduce the transition from laminar to turbulent flow, which will occur in the flow near the cylinder at certain values of the Reynolds number. Consequently it should be taken into consideration in the experimental and in the numerical calculations where the turbulence models can develop an important role in the investigation.

In the literature, the relatively few previous numerical investigations have considered rectangular cylinders exposed to free stream at Reynolds number below 1000. In their paper Ohya *et al.* (1992) accomplished a numerical study employing finite differences of the flow over rectangular cylinders with width-to-height ratios from 3 to 9, for a Reynolds number equal to 1000. In that work the authors confirm the presence of other instabilities which promotes the vortex shedding. The ISLI (*impinging shear layer instability*) is responsible for the vortex shedding over the lateral sides of the cylinder where the separated shear layer becomes unstable in the presence of a sharp trailing edge corner. The number of vortices that were formed on the cylinder's side increased in correspondence to the stepwise increase in the Strouhal number.

Nakamura *et al.* (1996) present the results for the Strouhal number based on the rectangular width of cylinder with related to width-to-height ratio. In this case a further increase in the ratio increases the Strouhal number curve stepwise. The flow visualizations with isovorticity plots are presented helping in the understanding of the transport mechanisms over the elongated cylinder and in the wake.

More recently, Lindquist *et al.* (2000) present a numerical and experimental study on the width-to-height ratio influence over the flow around rectangular cylinders. In this case the side ratio was ranged from 1 to 16 in the experiments for Reynolds number up to 1000. Images of the cylinder wake and the shear layers over the surfaces were obtained by visualization techniques and streamlines plots for the numerical case. However, the simulations were conducted to cylinders with side ratio solely equal to 5, 7, 9, 10 and 11.

The present work describes a numerical study of the flow past over rectangular cylinders with side ratios ranging from 1 to 10 at a Reynolds number of 1000. As already pointed out by other authors, at this flow regime the turbulent characteristics promote some important disturbances in the flowfield whereby the interactions between the vortices in the wake are stronger. To capture these instabilities the LES methodology was employed to calculate the turbulent flow.

Based on the Figure 1, the quantitative parameters considered in this study were defined as follows:

$$\text{Side ratio: } \phi = \frac{A}{B} \tag{1}$$

$$\text{The Reynolds Number: } Re_B = \frac{U_\infty B}{\nu} \tag{2}$$

$$\text{The Strouhal Number: } St_A = \frac{f A}{U_\infty} \tag{3}$$

It is worth noting that the Strouhal number was defined based on the characteristic dimension A , however the dimension B is frequently used by several authors in the literature as the most representative of physical problems. Note that the Reynolds number is based in the B dimension. The numerical analysis can shed light on the complex phenomena as the ISLI (Impinging Shear Layer Instability), not explored in other ways. The flow visualization of the flow field was very important in the understanding of the mechanisms responsible for the vortex shedding. All the computed results are analyzed and compared with previous experimental ones showing a good agreement and the good performance of the LES methodology applied to this flow problem.

2. Outline of Numerical Simulations

In this work the flow was assumed to be unsteady and two-dimensional with constant fluid properties. The computational domain is a rectangular field in the cartesian coordinate system with meshes non-uniformly distributed. The Navier-Stokes equations have been solved by the code FLUENT®5.3 without the turbulence model and employing the Smagorinsky LES model to investigate the transitional flow. In all simulations an incompressible SIMPLEC finite-volume algorithm (Patankar & Spalding, 1972) have been utilized associated to QUICK scheme (Leonard, 1979) for discretization of the convective terms in the Navier-Stokes equations. A second-order central differences scheme has been used for the diffusive terms. For time marching, the second order fully implicit scheme was used with a dimensionless step time equal to $\Delta t^* = \Delta t \cdot U_\infty / B$.

Figure 2 shows the computational domain, where X_u and X_d are the size of upstream and downstream lengths, respectively and Y is the height.

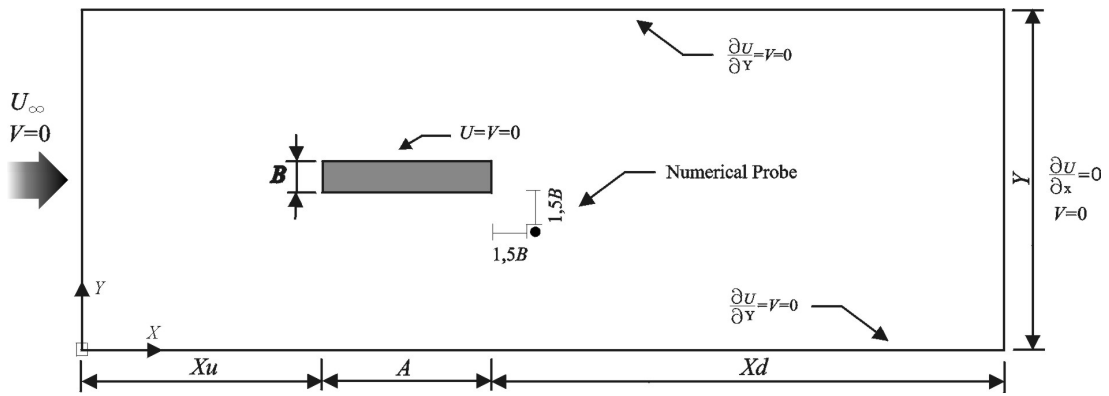


Figure 2. Computational domain and boundary conditions.

The boundary conditions have been set as follows: At the upstream boundary, the inlet flow has been assumed to be uniform. At the outlet, a zero gradient boundary condition for both U and V has been used. A no-slip condition has been prescribed at the body surfaces ($U = V = 0$). At the upper and lower boundaries it has been used symmetry conditions, simulating a frictionless wall ($V = \partial U / \partial y = 0$). For the calculation of Strouhal number, was positioned a numerical probe in the wake of the cylinder at position $1.5B$ in the horizontal axis behind the obstacle and $1.5B$ in the vertical axis below the body. A marching time step of $\Delta t = 0.001$ s was used, advancing the solution until the development of von Kármán vortex street. The temporal evolution of the vertical velocity component was registered in the fully periodic regime of vortices and the numerical signal was processed by means of the Fast Fourier Transform (FFT) resulting in the fundamental frequency of vortex shedding.

The table 1 presents the different extensions of the domain for the cases investigated in this study. In this work the mesh number (N) over the lateral sides of the rectangular cylinders was varied according to the side ratio factor as described in the Table 1.

Table 1. Domain configuration and grid size on each characteristic dimension.

ϕ	Grid size	N/A	X_u	X_d	Y
1	240 × 160	20	7B 70 meshes	15B 150 meshes	13B 160 meshes
2	260 × 160	40			
3	280 × 160	60			
4	300 × 160	80			
5	320 × 160	100			
6	340 × 160	120			
7	360 × 160	140			
8	380 × 160	160			
9	400 × 160	180			
10	420 × 160	200			

2.1 Smagorinsky (LES) model

The governing equations employed for LES are obtained by filtering the time-dependent Navier-Stokes equations – Silveira Neto (1991). This approach leads the following equations:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{5}$$

where τ_{ij} is the subgrid-scale stress defined by:

$$\tau_{ij} \equiv \overline{\rho u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \tag{6}$$

The subgrid-scale stresses resulting from the filtering operation are unknown, and require modeling. In this work, the Smagorinsky model is used to evaluate the subgrid-scale viscosity through the Boussinesq hypothesis:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\mu_t\bar{S}_{ij} \quad (7)$$

where μ_t is the subgrid-scale turbulent viscosity, and \bar{S}_{ij} is the rate-of-strain tensor for the resolved scale defined by:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \quad (8)$$

$$\mu_t = \rho L_s^2 |\bar{S}| \quad (9)$$

where L_s is the mixing length for subgrid scales and $|\bar{S}| \equiv \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$. The value L_s is computed using:

$$L_s = \min(kd, C_s V^{1/3}) \quad (10)$$

where $k = 0.42$, d is the distance to the closest wall, and V is the volume of the computational cell. The parameter $C_s \cong 0,2$ is the Smagorinsky constant determined analytically by Lilly in 1966. It is important to emphasize that this constant value depends on the flow dynamics. In simulations of the flow past over bluff bodies the most common values employed ranged 0,1 to 0,2. In this study the Smagorinsky constant was adjusted for 0,1 for all turbulent simulations.

3. Numerical Results

3.1 Strouhal Number

The numerical results of the flow around rectangular cylinders are reported in this section for both turbulence model and without it cases. For this study the simulated flow Reynolds number was equal to 1000. Figure 3 show the Strouhal number plotted against the side ratio factor for rectangular cylinders varying from 1 to 10 without the turbulence model and with the LES model. For side ratios under eight the numerical simulations without turbulence model agree well with the LES results except to side ratio equal to 2. However, for side ratios equal to 8, 9 and 10, the results show a larger discrepancy. This can be related to transitional nature of the flow near the cylinder surface where the fine instabilities aren't captured for the simulation without the turbulence model. Experiments conducted by Nakamura *et al.* (1991) revealed that the flow around a rectangular cylinder with $\phi = 8$ is already fully turbulent at Reynolds number equal to 1000, with randomic fluctuations. The dashed lines in the graphic were inserted to show the numerical trend of the LES results.

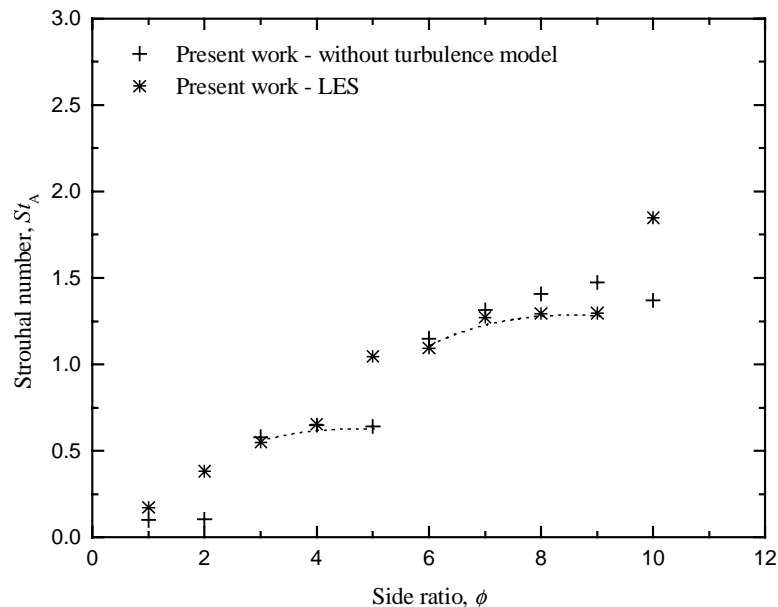


Figure 3. Strouhal vs side ratio curve for rectangular cylinders at $Re = 1000$.

Figure 4 shows the comparison between the numerical data, obtained in this work, with the experimental results of Nakamura *et al.* (1996) and Lindquist (2000). The stepwise increase in the Strouhal curve is related to a change in the vortex shedding mode according Nakamura *et al.* (1996) and Lindquist (2000). When the Reynolds number of the flow is nearly 250, the vortex shedding from rectangular cylinders are influenced by another type of flow instability, known as *ISLI* (*Impinging Shear Layer Instability*). Before, the vortex shedding is characterized by the Kármán street, where

the two separated shear layers interact with each other behind the cylinder to form a staggered array of discrete vortices. In the new case, a single separated shear layer can be unstable due to the presence of a sharp downstream corner – Nakamura *et al.* (1996).

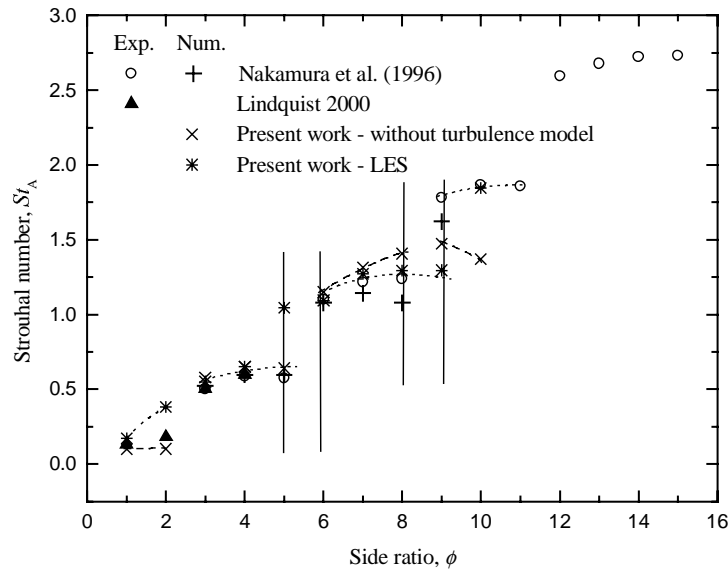


Figure 4. Strouhal vs side ratio curve for rectangular cylinders at $Re = 1000$ – with LES and without turbulence model.

These results reveal a better agreement between the LES calculus and the experimental data than previous simulations without turbulence model. It’s worth noting that the LES model was capable of predict the jump in the Strouhal value in the critical region located between two serial steps, as happens in the experiments.

3.2. Flow field visualization

Figure 5 show the two types of vortices formed in the flow around the rectangular cylinders. According to the nomenclature used by Ozono *et al.* (1992) and Ohya *et al.* (1992), the vortex originated on the lateral side due to the separation and reattaching of the shear layer is called the L-vortex (*leading-vortex*) for brevity. On the other hand, the vortex formed due to separation of the shear layer in the trailing edge is called T-vortex (*trailing-vortex*).

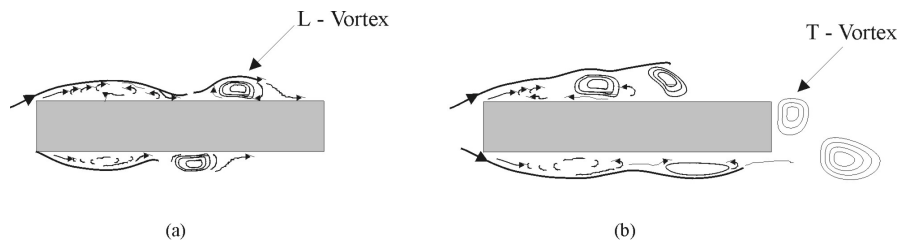


Figure 5. The L-vortex and T-vortex formed on the flow past over a rectangular cylinder.

In the wake of the cylinder it’s observed that the T-vortex interacts regularly with the oncoming L-vortex, and they are shed in a pair. Frequently this interaction is stronger, which promotes the vortex pairing and irregularity in the downstream wake, modifying the fundamental frequency, and consecutively, the Strouhal number .

Figures 6, 7 and 8 show the isovorticity plots generated by the LES simulations over three different rectangular cylinders with side ratio equal to 4, 7 and 10 at distinct dimensionless computational times. As can be seen in Figures 6, 7 and 8, the shear layer separating from the leading edge reattaches to the lateral side forming a recirculation bubble. This bubble increases steadily in length until the bounding shear layer halfway along the bubble deflects towards the surface and reattaches. This splits the bubble into two with the upstream section beginning to grow again and the downstream section moving along the lateral side as a discrete vortex.

In this work, the L-vortices observed over the lateral side permit to corroborate that the Strouhal number increases stepwise according to the following expression – Ohya *et al.* (1992):

$$St_A \cong 0,6n \tag{11}$$

Thus, the rectangular cylinders with side ratio $\phi = 3 - 5$ are grouped into the first step, in Figures 3 and 4, with $n = 1$; the second step is formed by $\phi = 6 - 8$ and $n = 2$; and the third step by $\phi = 9 - 12$ and $n = 3$.

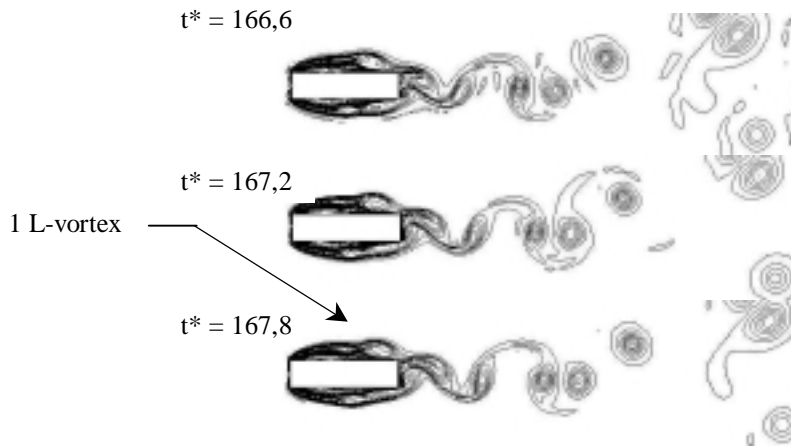


Figure 6. Isovorticity contours around a rectangular cylinder ($\phi = 4$) – LES – $Re = 1 \times 10^3$.

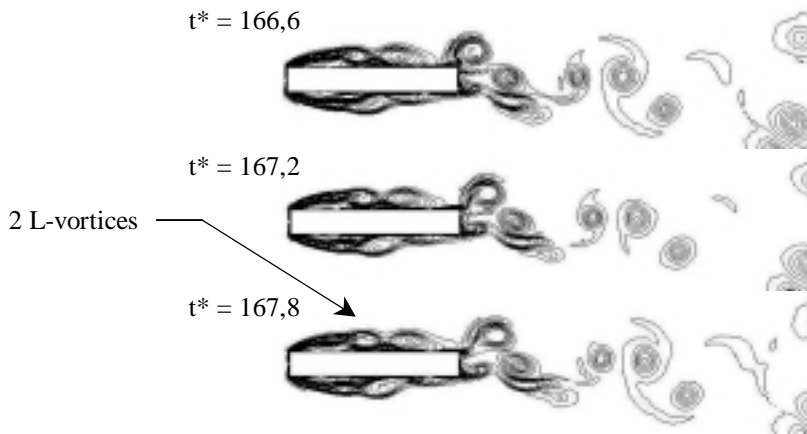


Figure 7. Isovorticity contours around a rectangular cylinder ($\phi = 7$) – LES – $Re = 1 \times 10^3$.

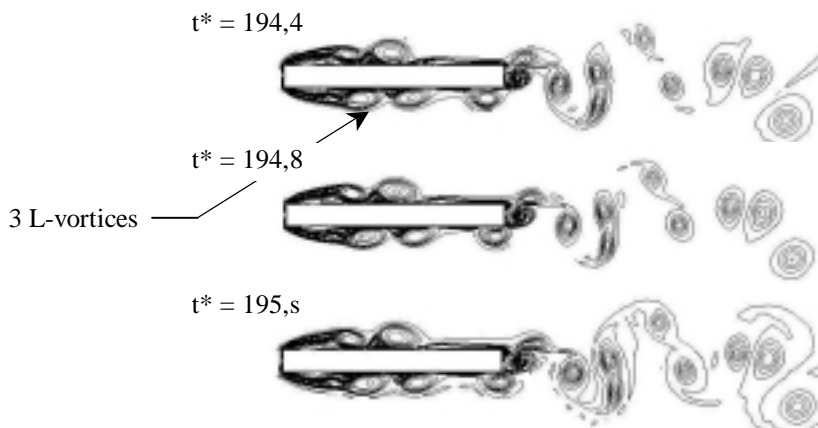


Figure 8. Isovorticity contours around a rectangular cylinder ($\phi = 10$) – LES – $Re = 1 \times 10^3$.

4. Concluding Remarks

This work presented the numerical analysis of the flow around rectangular cylinders with side ratios equal 1 to 10 at Reynolds number 1000. The numerical results were provided from the simulations without turbulence model and employing the LES methodology. In the first case, the unsteady Navier-Stokes equations were solved in the original

form. For the turbulent simulations were employed the Smagorinsky LES model with the (C_s) Smagorinsky constant equal to 0.1 for all simulations.

The results are based in the Strouhal number curves and isovorticity plots for the flowfield. The Strouhal number, defined in relation to the (A) dimension, is plotted against the side ratio factor showing a stepwise increase. Important changes are verified among the simulations with and without turbulence model. For rectangular cylinders with side ratio equal to 8, 9 and 10 the numerical results without the LES model don't agree with the experimental results. On the other hand, all results with the LES model show a good agreement with the experimental data of Nakamura *et al.* (1996). This disagreement can be attributed to probable transition from laminar to turbulent flow for cylinders with side ratio larger than 8, as pointed out in the work of Nakamura *et al.* (1991).

Corroborating some experimental results in the literature, the computed values of the Strouhal number increases stepwise to values that are approximately equal to multiples of 0.6. Finally, it was found that the flow dynamics responsible for the vortex shedding is characterized by the ISLI (*impinging shear layer instability*).

5. Acknowledgement

This study has been developed with financial support provided by FAPESP (proc.97/12249-9 and 98/12990-3). The authors also thank the support of PROPP/UNESP and FUNDUNESP.

6. References

- Leonard, B.P., 1979, "A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation", *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng*, pp.59-98.
- Lindquist, C., O. Almeida, S.S. Mansur & Silveira-Neto, A., 2000, "Estudo numérico e experimental do escoamento ao redor de cilindros retangulares: Influência da razão de forma", in: *Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Térmica e Ciências – ENCIT 2000*, ABCM, CD-ROM, código S16P20, Porto Alegre.
- Nakamura, Y., Ohya, Y., Ozono, S. & Nakayama, R., 1996, "Experimental and numerical analysis of vortex shedding from elongated rectangular cylinders at low Reynolds numbers $200-10^3$ ", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol.65, pp.301-308.
- Ohya, Y., Nakamura, Y., Ozono, S., Tsuruta, H. & Nakayama, R., 1992, "A Numerical study of vortex shedding from flat plates with square leading and trailing edges", *Journal of Fluid Mechanics*, vol.236, pp.445-460.
- Okajima, A., 1982, "Strouhal numbers of rectangular cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*", vol.123, pp.379-398.
- Ozono, S., Ohya, Y., Nakamura, Y., 1992, "Stepwise increase in the Strouhal number for flows around flat plates", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol.15, pp.1025-1036.
- Patankar, S.V. & Spalding, D.B., 1972, "A calculation procedure for heat and mass transfer in three-dimensional parabolic flows", *Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.15, pp.1787-1806.

AN ALGORITHM FOR SLIGHTLY COMPRESSIBLE FLOWS

J. B. V. Wanderley¹, Ph.D.

Ocean Engineering Program, COPPE, UFRJ, Technology Center,
Building C, Room 203, Rio de Janeiro, RJ, CEP.: 21945-970, Brazil
E: juanw@peno.coppe.ufrj.br

C. A. Levi, Ph.D.

Ocean Engineering Program, COPPE, UFRJ, Technology Center,
Building C, Room 203, Rio de Janeiro, RJ, CEP.: 21945-970, Brazil
E: levi@peno.coppe.ufrj.br

Abstract. A formulation for slightly compressible flows is obtained. The adopted continuity equation is a first order approximation of the compressible conservation of mass equation, which considers the compressibility of slightly compressible fluids, although very small. The obtained continuity equation together with the momentum equations are solved using the Beam and Warming approximated factorization scheme. The obtained results are compared with other numerical and experimental results for the flow around a circular cylinder. The comparison shows not only the validity and accuracy of the governing equations, but also their suitability for numerical solutions, mainly due to its relatively low processing time.

Key words: Navier – Stokes, computational fluid dynamics

1. Introduction

In Fluid Mechanics, an incompressible flow is defined as a constant density flow. Considering this definition, the incompressible Navier-Stokes equations are obtained which are used in engineering to govern very low compressibility flows of liquids and gases ($Mach < 0.3$). Although being a good approximation for low compressibility flows, the incompressible flow governing equations are very difficult to solve numerically.

The earliest technique for solving the incompressible N-S equations was the artificial compressibility method proposed by Chorin (1967). This method involves the use of an unphysical artificial compressibility that affects the accuracy and convergence of the numerical scheme. Another popular approach to tackle the incompressible problem uses a Poisson - type pressure - equation instead of the original continuity equation. The numerical methods that solve this new set of equations present low rate of convergence.

Other methods have been developed trying to improve convergence rate. The SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) - Patankar and Spalding (1972) is based on a cyclic series of guess-and-correct operations to solve the governing equations. The SIMPLER method by Patankar (1981) is a revised version of the SIMPLE method aiming to improve the rate of convergence. Another approach, the semi-implicit projection method also developed by Chorin (1968), is based on three successive operations: computation of the velocity components using the momentum equations neglecting the pressure gradient term; computation of the pressure field by solving a Poisson pressure-equation; and finally, projection of the velocity field over a space with zero divergence.

The present work shows a pressure field equation appropriated for low compressibility flows which considers the compressibility of the fluids, although very small. The pressure field equation together with the incompressible momentum equations form an appropriated formulation which not only represents correctly the physics of low compressibility flows, but it is also suitable for numerical solutions. The pressure field equation has a term of time derivative of the pressure which facilitates substantially the implementation of any time-marching method. The comparison between the numerical solution of the adopted formulation and other consecrated numerical and experimental results for the flow around a circular cylinder shows the validity of the governing equations.

2. Mathematical Formulation

In order to obtain the pressure field equation, Wanderley (2001) combined the full continuity equation and the definition of isothermal compressibility. The continuity equation in Cartesian coordinates and the definition of isothermal compressibility - Anderson (1990) are shown in Eqs. (1) and (2), respectively.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

(1)

¹ Supported by Fundo de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ.

$$\tau = \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (2)$$

where

$$\tau = \begin{cases} 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{N} , \text{ air} (p = 1 \text{ atm}) \\ 5 \times 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{N} , \text{ water} (p = 1 \text{ atm}) \end{cases} \quad (3)$$

Further, a Taylor's series expansion of the density in terms of pressure around p_∞ is obtained, as in Eq. (4). Here, only very small changes in temperature are admissible so that their influence on the density may be considered negligible.

$$\rho = \rho_\infty + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\infty (p - p_\infty) + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right)_\infty (p - p_\infty)^2 + \quad (4)$$

Multiplying Eq. (2) by ρ , Eq. (5) is then obtained.

$$\tau \rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (5)$$

Assuming that the isothermal compressibility is constant and computing the derivative of Eq. (5) with respect to p , Eq. (6) is obtained.

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \quad (6)$$

Substituting Eq. (5) into Eq. (6) to eliminate the first derivative, Eq. (7) is then obtained.

$$\tau^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \quad (7)$$

Computing the derivative of Eq. (7) with respect to p , Eq. (8) is obtained.

$$\tau^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial^3 \rho}{\partial p^3} \quad (8)$$

Substituting Eq. (5) into Eq. (8) to eliminate the first derivative, Eq. (9) is then obtained.

$$\tau^3 \rho = \frac{\partial^3 \rho}{\partial p^3} \quad (9)$$

Repeating the same procedure successively, it is possible to obtain the higher order derivatives. Substituting Eqs. (5), (7), and (9) into Eq. (4), Eq. (10) is then obtained.

$$\rho = \rho_{\infty} + \rho_{\infty}\tau(p - p_{\infty}) + \frac{1}{2}\rho_{\infty}\tau^2(p - p_{\infty})^2 + \quad (10)$$

In the incompressible formulation, only the first term of Eq. (10) is retained and Eq. (11) is obtained.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Equation (11) is a zero order approximation of the continuity equation, Eq. (1), and is very convenient for the analytical solution of simple flows like: Stokes oscillating plate, Couette flow, Poiseuille flow, etc. However, for the numerical solution of complex flows, Eq. (11) is not a good option. For this reason, in the present work, a first order approximation of the continuity equation is obtained by retaining the first two terms of Eq. (10). Substituting Eq. (10) into Eq. (1), Eqs. (12) are then obtained.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi v}{\partial y} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} &= 0 \\ \phi &= 1 + (p - p_{\infty})\tau \end{aligned} \quad (12)$$

The dimensionless form of Eqs. (12) are shown in Eqs. (13) where the star symbol represents dimensionless variables.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{\partial \phi u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \phi v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \phi w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \phi &= 1 + (p^* - p_{\infty}^*)\tau \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$u^* = \frac{u}{a_{\infty}}, \quad v^* = \frac{v}{a_{\infty}}, \quad w^* = \frac{w}{a_{\infty}} \quad (14)$$

$$x^* = \frac{x}{d}, \quad y^* = \frac{y}{d}, \quad z^* = \frac{z}{d} \quad (15)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho_{\infty} a_{\infty}^2}, \quad t^* = \frac{t}{d/a_{\infty}} \quad (16)$$

$$a_{\infty} = \sqrt{\frac{1}{\rho_{\infty}\tau}} \quad (17)$$

Equation (13) is a first order approximation of the continuity equation and it is very suitable for numerical solution of complex flows due to the term of time derivative of the pressure. This term of time derivative facilitates substantially the implementation of any time-marching method.

Hereafter, the star symbol of the dimensionless variables in Eqs. (13) will be dropped for simplicity purpose.

Computing the first derivative of the second of Eqs. (13) with respect to x and y , the following relations may be obtained:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\quad (18)$$

Equations (13) together with the incompressible momentum equations and Eqs. (18) form a convenient system of equations for slightly compressible flows. The time derivative of the pressure and velocity components facilitates substantially the implementation of any time-marching method, see Eqs. (19).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi v}{\partial y} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 + \phi)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} - \frac{M_\infty}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2 + \phi)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} - \frac{M_\infty}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (uw)}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial y} + \frac{\partial (w^2 + \phi)}{\partial z} - \frac{M_\infty}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= 0\end{aligned}\quad (19)$$

where

$$Re = \frac{\rho_\infty u_\infty d}{\mu_\infty}, \quad M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty}, \quad C_p = \frac{\phi - 1}{1/2 M_\infty^2}\quad (20)$$

In order to solve the problem of the flow around a circular cylinder, it is convenient to write Eqs. (19) in general curvilinear coordinates, in the conservative form, and in two dimensions, see Eq. (21).

$$Q_t + (E_e - E_v)_\xi + (F_e - F_v)_\eta = 0\quad (21)$$

where

$$Q = \frac{1}{J} \begin{Bmatrix} \phi \\ u \\ v \end{Bmatrix}\quad (22)$$

$$E_e = \frac{1}{J} \begin{Bmatrix} \phi U \\ uU + \phi \xi_x \\ vU + \phi \xi_y \end{Bmatrix}\quad (23)$$

$$F_e = \frac{1}{J} \begin{Bmatrix} \phi V \\ uV + \phi \eta_x \\ vV + \phi \eta_y \end{Bmatrix}\quad (24)$$

$$E_v = \frac{M_\infty}{JR_e} \begin{Bmatrix} 0 \\ A_1 u_\xi + A_2 u_\eta \\ A_1 v_\xi + A_2 v_\eta \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$F_v = \frac{M_\infty}{JR_e} \begin{Bmatrix} 0 \\ A_2 u_\xi + A_3 u_\eta \\ A_2 v_\xi + A_3 v_\eta \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \xi_x^2 + \xi_y^2 \\ A_2 &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \\ A_3 &= \eta_x^2 + \eta_y^2 \\ J &= \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \\ U &= u \xi_x + v \xi_y \\ &= u \eta_x + v \eta_y \end{aligned} \quad (27)$$

where ξ_x, ξ_y, η_x and η_y are the metrics of the transformation.

Equation (21) is solved numerically together with the initial conditions, boundary conditions on the body surface, and free-stream boundary conditions given in Eqs. (28), (29), and (30), respectively. Here, $\phi=1$ corresponds to $p=p_\infty$, according to Eq. (13).

$$\begin{aligned} u &= M_\infty \\ v &= 0 \\ \phi &= 1 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} u &= M_\infty \\ v &= 0 \\ \phi &= 1 \end{aligned} \quad (30)$$

3. Numerical Formulation

In the present work, Eqs. (21), (28), (29), and (30) are solved numerically for the flow around a circular cylinder using the Beam and Warming (1978) central difference scheme. The Euler implicit method is used as time-marching method not only because of its simplicity, but also because it does not show the same restrictions as the explicit methods do with respect to the step of integration.

It is well known that central difference schemes require artificial dissipation to improve stability – Pulliam (1986). The artificial dissipation suppresses high frequency oscillations and controls the odd-even uncoupling inherent to central difference schemes. The Von-Neumann linear stability analysis applied to the Beam-Warming central difference scheme shows that some artificial dissipation is required to improve stability. This can be accomplished by adding a fourth-order explicit dissipation term to the right-hand side and a second-order implicit smoothing term to the

left-hand side of the scheme. Equation (31) shows the Beam and Warming scheme after the addition of artificial dissipation.

$$\begin{aligned} \left(I + \Delta t \delta_{\xi} A^n - \Delta t \nabla_{\xi} M_{\xi} \Delta_{\xi} J + D_{\xi}^{(2)} \right) f^n &= -\Delta t \left(\delta_{\xi} E^n + \delta_{\eta} F^n \right) + D^{(4)} \\ \left(I + \Delta t \delta_{\eta} B^n - \Delta t \nabla_{\eta} M_{\eta} \Delta_{\eta} J + D_{\eta}^{(2)} \right) \Delta Q^n &= f^n \end{aligned} \tag{31}$$

where

$$\begin{aligned} D_{\xi}^{(2)} &= -\epsilon_i \Delta t J^{-1} \nabla_{\xi} \Delta_{\xi} J \\ D_{\eta}^{(2)} &= -\epsilon_i \Delta t J^{-1} \nabla_{\eta} \Delta_{\eta} J \\ D^{(4)} &= -\epsilon_e \Delta t J^{-1} \left[\left(\nabla_{\xi} \Delta_{\xi} \right)^2 + \left(\nabla_{\eta} \Delta_{\eta} \right)^2 \right] J Q^n \end{aligned} \tag{32}$$

$$A^n = \frac{\partial E_e}{\partial Q} \quad , \quad M_{\xi}^n = \frac{\partial E_v}{\partial Q_{\xi}} \tag{33}$$

$$B^n = \frac{\partial F_e}{\partial Q} \quad , \quad M_{\eta}^n = \frac{\partial F_v}{\partial Q_{\eta}} \tag{34}$$

$$\bar{Q} = JQ \tag{35}$$

$$\delta_{\xi} g = (g_{i+1,j} - g_{i-1,j})/2 \tag{36}$$

$$\Delta_{\xi} g = g_{i+1,j} - g_{i,j} \tag{37}$$

$$\nabla_{\xi} g = g_{i,j} - g_{i-1,j} \tag{38}$$

4. Results

In this section, the obtained results for Mach number equal to 0.2 and Reynolds numbers 40, 100, 200, and 1000 are compared with other numerical and experimental results to verify the validity of the adopted formulation.

An O-grid was generated around a fixed circular cylinder with 100x100 nodes, using stretching parameters $q_{\eta}=1.025$ and $q_{\xi}=1.050$ in the radial and circular directions, respectively. The distance between the body surface and the external boundary was taken equal to 20 cylinder diameters, see Fig. 1.

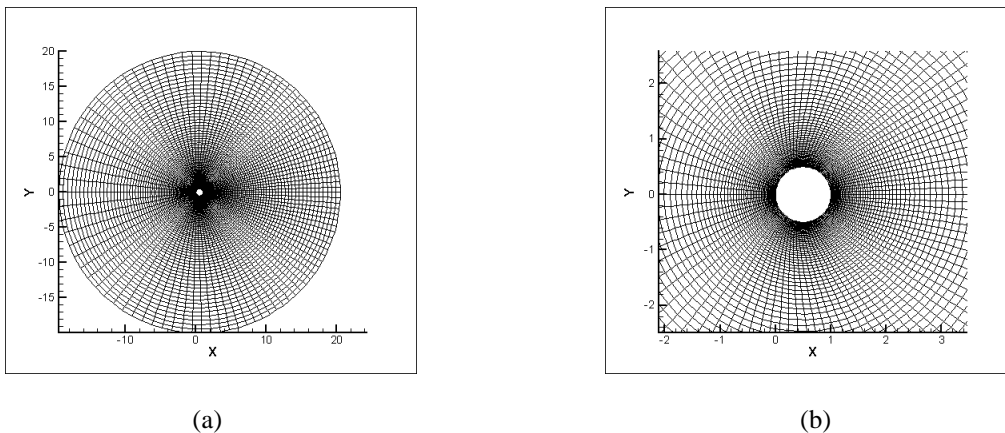


Figure 1. Computational Grid in the Physical Domain: (a) 100x100 Grid and (b) Amplified View

Table 1 shows results obtained for Reynolds number equal to 40 for the drag coefficient and the wake parameters defined in Fig. 2. The agreement between the results obtained in the present work and other numerical and experimental results is remarkable. Moreover, the time for convergence required by the Beam and Warming scheme to solve the present governing equations is substantially lower than that for the projection method used by Rengel and Sphaier (1999) to solve the incompressible Navier-Stokes equations.

Results were also obtained for a more refined grid (180x160). No substantial difference is observed between the numerical results obtained with the (100x100) and (180x160) grids. Results were also obtained with different values of artificial viscosity, and no substantial difference is observed in the results, see Tab. 1. For this reason, the explicit artificial viscosity of 6×10^{-2} was used in all computations. In the present work, numerical experiments showed that $\epsilon_r = 2\epsilon_e$ gives the maximum rate of convergence.

Table 1. Comparison Between Results Obtained by the Present Work and other numerical and experimental results for $Re=40$.

References	C_d	L/d	a/d	b/d	θ_s	Time* (hours) Residue 1.0×10^{-9}
Tritton Exp. (1959)	1.57	-	-	-	-	-
Constanceau Bouard (1977)	-	2.13	0.76	0.59	53.5	-
Rengel Sphaier (1999) 180x160	1.61	2.23	0.72	0.58	54.06	11:00
Present Study 100x100 $\epsilon_e = 6 \times 10^{-2}$	1.60	2.20	0.72	0.60	54.60	00:42
Present Study 180x160 $\epsilon_e = 6 \times 10^{-2}$	1.61	2.20	0.71	0.60	54.01	02:06
Present Study 100x100 $\epsilon_e = 1$	1.58	2.20	0.73	0.59	54.26	00:42

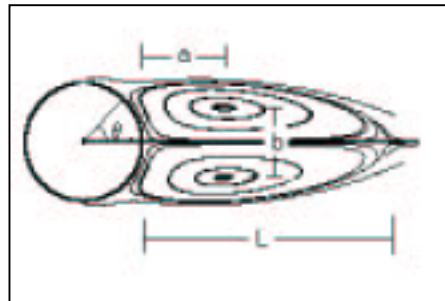


Figure 2. Characteristic Parameters of the Cylinder's Wake.

Figure 3a shows the Mach number effect on the pressure distribution. It may be observed that as the Mach number goes to zero, the pressure distribution goes asymptotically to the incompressible pressure distribution. Observe that the pressure distributions for Mach number 0.2 and 0.1 match. For this reason, the Mach number equal to 0.2 was used in all the computations in the present work. Figure 3b shows a comparison between the pressure distribution obtained in the present work and other numerical and experimental ones obtained from the literature for Reynolds number equal to 40. Again, the agreement is remarkable. A pressure distribution was also obtained for a more refined grid (180x160). No substantial difference is observed between the pressure distributions obtained with the (100x100) and (180x160) grids.

* PC-Pentium III – 550 MHz

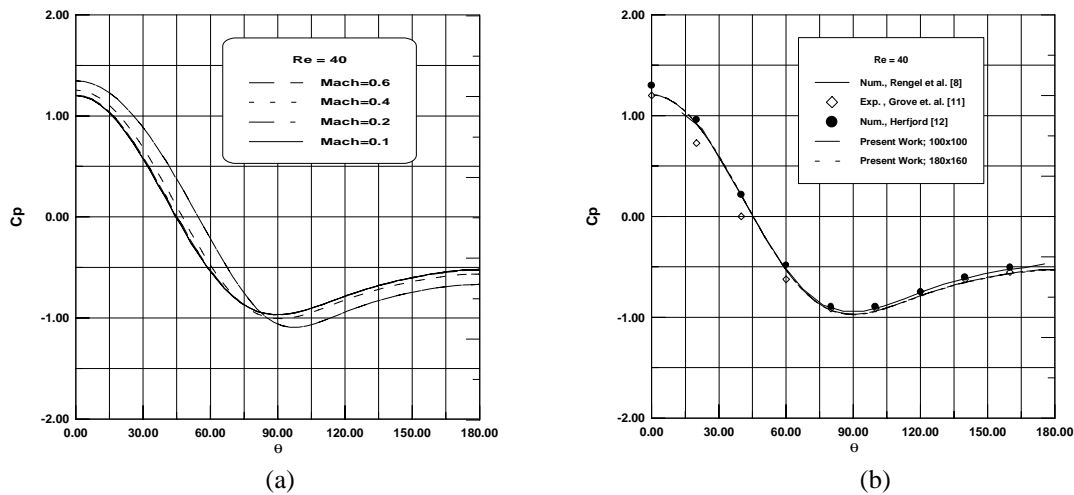


Figure 3. Pressure Distribution around a Circular Cylinder Obtained by the Present Work; (a) Mach Number Effect, (b) Comparison with other Numerical and Experimental Results.

Table 2 shows a comparison between results obtained in the present work and other numerical results for Strouhal number, drag, and lift coefficients for Reynolds numbers equal to 100, 200, and 1000. The agreement among the results is very good showing again the validity of the adopted formulation.

Table 2. Comparison Between the Results Obtained by the Present Work for $Re=100, 200,$ and 1000 and other Consecrated Numerical Results.

Reference	Re	C_D	C_L	S_t	Observation
Meneghini (1993)	100	1.52	0.353	0.162	Discrete Vortex Grid, dt
	200	1.40	0.570	0.195	128x170, 0.0025
					128x170, 0.0025
Herfjord (1995)	100	1.36	0.34	0.168	Finite Elements N^0 of nodes, dt
	200	1.35	0.70	0.196	10080, 0.002
	1000	1.47	1.45	0.234	10080, 0.005
					10080, 0.0025
Rengel Sphaier (1999)	100	1.36	0.32	0.173	Finite Volume
	200	1.35	0.67	0.203	(180x160)
	1000	1.50	1.70	0.225	
Presente Study	100	1.37	0.297	0.160	Finite
	200	1.36	0.646	0.192	Difference
	1000	1.51	1.33	0.233	(100X100)

Figure 4 shows the variation of the lift and drag coefficients as a function of time for Reynolds number equal to 40, 100, 200, and 1000. It may be observed that the adopted governing equations are able to represent correctly the expected physics of the flow. For example, for Reynolds number equal to 40, the lift coefficient is constant and equal to zero and the drag coefficient goes asymptotically to the expected value. For Reynolds number equal to 100, 200, and 1000, oscillations take place for both the lift and drag coefficients. These oscillations are caused by the asymmetric pressure distribution on the body surface due to the vortex shedding known in Fluid Mechanics as Kármán vortex street.

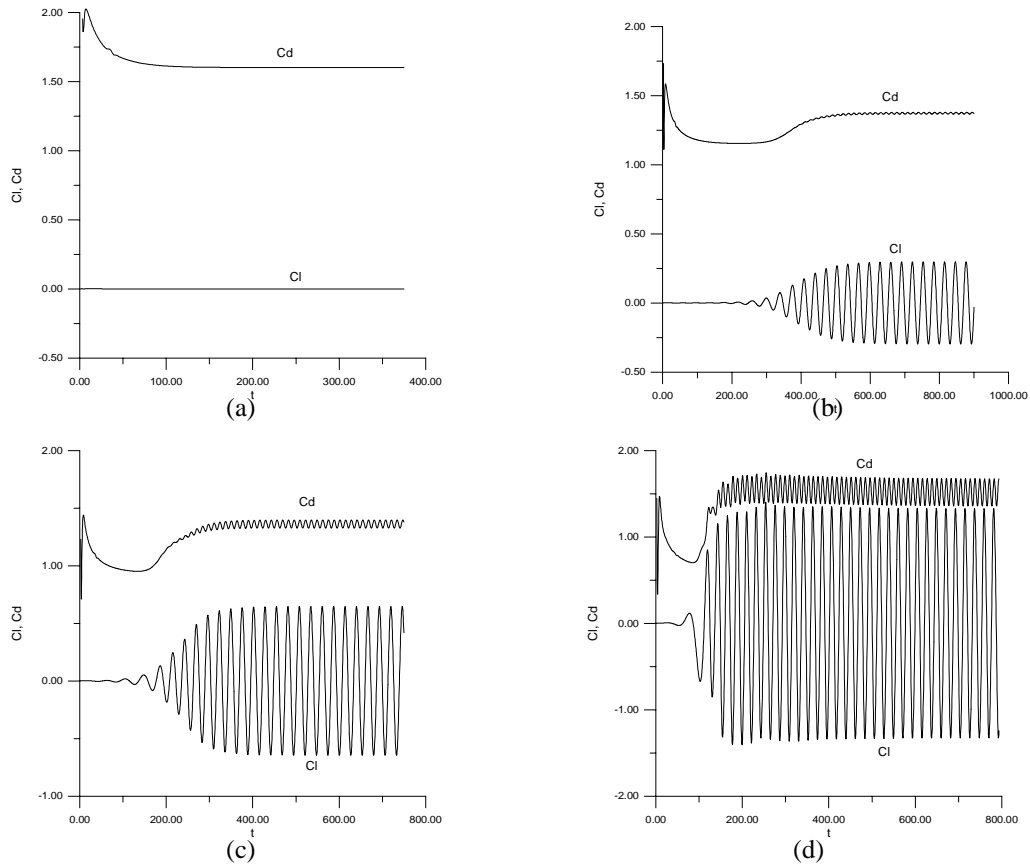
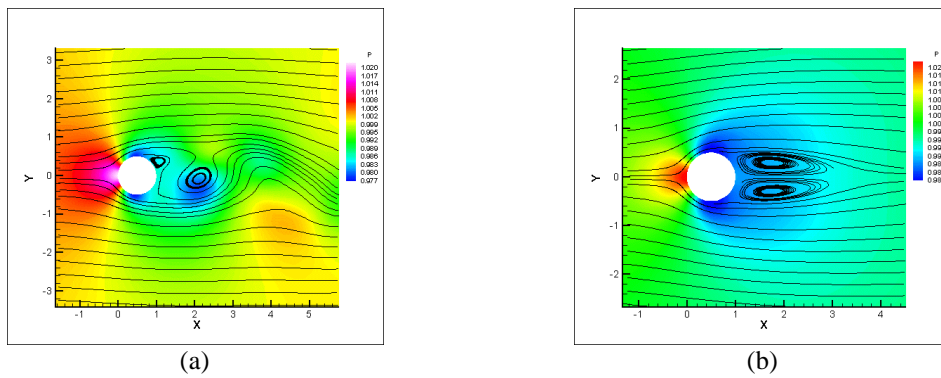


Figure 4. Time Variation of Lift and Drag Coefficients of a Cylinder, $Re = 40$ (a); 100 (b); 200 (c); 1000 (d).

Figure 5 shows the pressure distribution and stream lines around a circular cylinder for Reynolds numbers equal to 40, 100, 200, and 1000. For Reynolds number equal to 40, the formation of two vortices attached to the back of the cylinder and the symmetry of the flow with respect to the x -axis can be seen in Fig. 5a. For Reynolds number equal to 100, 200, and 1000, the Kármán vortex street can be observed in Fig. 5b,c,d, respectively. The vortices in the wake of the cylinder may be identified by their low pressure core.



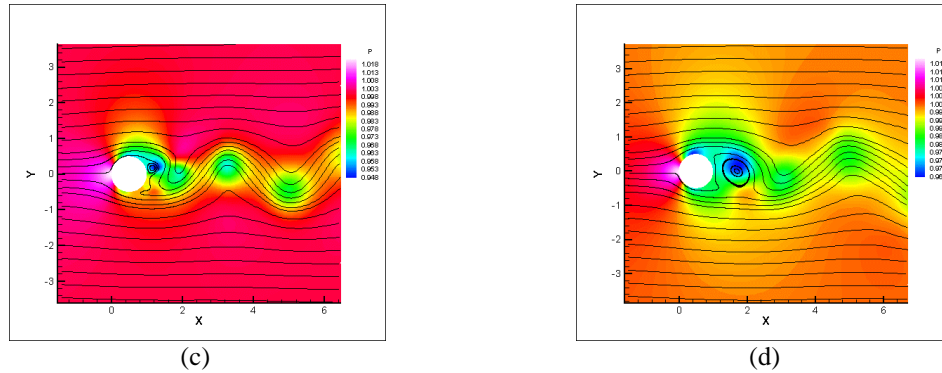


Figure 5. Pressure Field and Streamlines Around a Circular Cylinder for $Re=40$ (a); 100 (b); 200 (c); 1000 (d).

5. Conclusion

In the present work, a pressure field equation appropriated for low compressibility flows is obtained. The adopted pressure equation together with the incompressible momentum equations form a valid formulation for the flow of liquids and low velocity flow of gases ($Mach < 0.3$).

The numerical results obtained with the adopted formulation agree well with other numerical and experimental results for the flow around a circular cylinder. Moreover, the pressure equation has a term of time derivative of the pressure which facilitates substantially the numerical solution of the adopted governing equations. From the numerical results, it may be concluded that the obtained formulation predicts correctly the physics of low compressibility flows and may be solved easily using any time-marching method available in the literature.

6. Acknowledgments

I would like to give special thanks to FAPERJ for his financial support.

7. References

- Anderson, J. D., 1990, *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. McGraw-Hill, New York.
- Beam, R. M., and Warming, R. F., 1978, "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, **16**, No. 4, pp. 393-402.
- Chorin, A. J., 1967, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," *Journal of Computational Physics*, **2**, pp. 12-26.
- Chorin, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Mathematical Computations*, **22**, pp. 745-762.
- Constanceau, M., and Bouard, R., 1977, "Experimental Determination of the Main Features of Viscous Flow in the Wake of a Circular Cylinder in Uniform Translation Steady Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, **79**, pp. 231-256.
- Grove, A. S., Shair, S. H., and Peterson, E. E., 1964, "An Experimental Investigation of the Steady Separated Flow Past a Circular Cylinder," *Journal of Fluid Mechanics*, **19**, pp. 60-80.
- Herfjord, K., 1995, "A Study of Two-dimensional Separated Flow by a Combination of the Finite Element Method and Navier-Stokes Equations," Dr. Eng. Theses, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway.
- Meneghini, J. R., 1993, "Numerical Simulation of Bluff Flow Control Using a Discrete Vortex Method," Ph.D. Dissertation, University of London, England.
- Patankar, S. V., and Spalding, D. B., 1972, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows," *Journal of Heat Mass Transfer*, **15**, pp. 1787-1806.
- Patankar, S. V., 1981, "A Calculation Procedure for Two-dimensional Elliptic Situations," *Numerical Heat Transfer*, **4**, pp. 409-425.
- Pulliam, T. H., 1986, "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations," *AIAA Journal*, **24**.
- Rengel, J. E., and Sphaier, S. H., 1999, "A Projection Method for Unsteady Navier-Stokes Equation with Finite Volume Method and Collocated Grid," *Hybrid Methods in Heat and Mass Transfer*, **1**, no 4.
- Tritton, D. J., 1959, *Journal of Fluid Mechanics*, **6**, p. 547.
- Wanderley, J. B. V., 2001, "An Algorithm for Slightly Compressible Flows," *Proceedings of the 20th International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Conference*, Rio de Janeiro, 2001.

8. Copyright Notice

The author is the only responsible for the printed material included in his paper.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CILINDRO PRÓXIMO A UMA SUPERFÍCIE PLANA PELO MÉTODO DOS VÓRTICES

Gilda Lúcia Bakker B. de Menezes

UFRN – Centro de Tecnologia – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Campus Universitário – Lagoa Nova
Natal/RN – Brasil – cep 59072-970
gilda@dem.ufrn.br

Zenaide Alves de Araújo

UFRN – Centro de Tecnologia – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Campus Universitário – Lagoa Nova
Natal/RN – Brasil – cep 59072-970
zenaide@dem.ufrn.br

Miguel Hiroo Hirata

EFEI – IEM – Departamento de Engenharia Mecânica - Av. BPS, 1303 – caixa postal 50 – Itajubá/MG – Brasil – cep 37500-903
hirata@iem.efei.br

José Eugênio Rios Ricci

EFEI – IEM – Departamento de Engenharia Mecânica - Av. BPS, 1303 – caixa postal 50 – Itajubá/MG – Brasil – cep 37500-903
ricci@iem.efei.br

Ângelo Roncalli de Oliveira Guerra

UFRN – Centro de Tecnologia – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Campus Universitário – Lagoa Nova
Natal/RN – Brasil – cep 59072-970
angelo@dem.ufrn.br

Resumo. Neste trabalho é feita a simulação do escoamento em torno de um cilindro que se encontra próximo a uma superfície plana. O escoamento é considerado incompressível e o número de Reynolds é da ordem de 10^3 . Os corpos (cilindro e superfície) são simulados através do Método de Painéis com fontes distribuídas. O escoamento é simulado através do Método de Vórtices, que usa uma descrição Lagrangeana do campo de escoamento. Os vórtices de Lamb, gerados em toda a superfície dos corpos são convectados por um esquema que utiliza as fórmulas de Euler (1ª ordem) e Adams-Bashforth (2ª ordem). A difusão dos mesmos é feita através do Método do Avanço Randômico. Os coeficientes de sustentação e arrasto são calculados pela integração dos campos de pressões. A simulação tomou por base um programa já existente, testado para o caso de um cilindro isolado, e que reproduz os resultados constantes na literatura. As esteiras obtidas nas diversas simulações são representadas em Realidade Virtual. Os valores dos coeficientes de sustentação e arrasto para diversas distâncias entre o cilindro e a superfície são mostrados e analisados.

Palavras chave : Método dos Vórtices, Método dos Painéis, Simulação Numérica, Número de Reynolds, Coeficientes de Sustentação e Arrasto.

1. Introdução

A análise de escoamentos em torno de corpos é importante devido às suas inúmeras aplicações práticas na engenharia. Citam-se as análises aerodinâmicas em automóveis e veículos aéreos, o estudo do comportamento estático e dinâmico de condutos submersos e o cálculo da influência de ventos em edifícios, torres de comunicação e energia, etc. O escoamento incompressível em torno de um cilindro de seção circular (Araújo, 1994) tem sido objeto de muitos desses estudos por várias décadas. De forma semelhante, o escoamento em torno de um cilindro próximo a uma superfície plana tem sido tema de muitas pesquisas em várias áreas da engenharia.

Devido à complexidade do problema, ainda persistem algumas divergências, de acordo com os diferentes pontos de vista dessas pesquisas, estando muitos questionamentos ainda por serem respondidos.

O efeito da superfície plana nas forças aerodinâmicas e na emissão de vórtices tem sido continuamente investigado em estudos experimentais. Algumas considerações devem ser observadas nas análises desses estudos. Em Lei et al (1999), considera-se que se um fluido escoar em torno de um cilindro, submetido a um número de Reynolds crítico, ocorre a emissão de vórtices. A pressão local varia no tempo e o cilindro é submetido a um arrasto e sustentação flutuantes, em adição ao arrasto e sustentação médios. O arrasto, a sustentação e a frequência da emissão de vórtices, são normalmente expressos de forma adimensional, como o coeficiente de arrasto C_D , o coeficiente de sustentação C_L e o número de Strouhal St . Estes três parâmetros adimensionais dependem da natureza das aproximações feitas para o escoamento e o cilindro. O mesmo autor, cita que a grande maioria dos experimentos foi feita em função do número de Reynolds, Re , em regime sub-crítico (até 1.4×10^5). Para o caso de um cilindro isolado, a emissão de vórtices é extremamente regular, e o número de Strouhal permanece constante, a aproximadamente 0.2. Medições têm demonstrado que o coeficiente de arrasto para um cilindro isolado é relativamente independente do número de Reynolds, para Re acima de 1.0×10^4 , no regime sub-crítico.

Os experimentos conduzidos por Bearman e Zdravkovich (1978) em um túnel de vento a Reynolds da ordem de 4.8×10^4 , revelam que para a razão (G/D) , maior ou igual a 0.3, entre a distância da base do cilindro à superfície (G) , e o diâmetro do cilindro (D) , o número de Strouhal permanece constante.

Zdravkovich examinou o coeficiente de arrasto em uma faixa ampla de números de Reynolds de 4.8×10^4 a 3.0×10^5 . Os resultados indicaram que o coeficiente de arrasto ficava em um valor constante quando o cilindro estava fora da camada limite. Para um cilindro colocado dentro da camada limite, o coeficiente de arrasto aumentou com a razão (G/δ) sendo δ a espessura da camada limite.

Alguns estudos, como os de Bearman e Zdravkovich (1978), e Grass et all (1984), indicaram que a emissão de vórtices é suprimida para a razão (G/D) menor que 0.3. Estes pesquisadores chegaram a essa conclusão pela análise de espectros obtidos através de anemômetro de fio quente em pontos discretos da esteira do cilindro.

Lei et all (1999) investigou experimentalmente as forças aerodinâmicas e a emissão de vórtices em torno de um cilindro circular, próximo a uma superfície plana, para números de Reynolds de 1.30×10^4 a 1.45×10^4 . Seus resultados mostraram que ambos os coeficientes de arrasto e sustentação, dependem fortemente da razão (G/D) e são afetados pela camada limite, e que a emissão de vórtices é suprimida para (G/D) em torno de 0.2 a 0.3, dependendo da espessura da camada limite.

Em estudo posterior, Lei et all (2000), estudou o escoamento citado anteriormente, através de simulação numérica, utilizando o método das diferenças finitas. Foram utilizados números de Reynolds variando de 80 a 1000, com distâncias entre o bordo de ataque da parede e o centro do cilindro de 8D, 10D, 16D, 20D e 40D. Em todos os testes foi adimensionalizada a escala de tempo, sendo $\Delta t = 0.002$ utilizado para todos os cálculos. Estes estudos indicaram que a amplitude da flutuação do coeficiente de sustentação é reduzida com o aumento da razão (G/D) e/ou do número de Reynolds.

Neste artigo é feita a simulação do escoamento bi-dimensional em torno de um cilindro que se encontra próximo a uma superfície plana. A simulação do escoamento, através do Método de Vórtices, utiliza uma nuvem de vórtices discretos (vórtices livres) para representar a vorticidade gerada na superfície do corpo e que se desenvolve através da esteira. Com a utilização do acompanhamento Lagrangeano dos vórtices livres, não se exige uma consideração explícita das condições de contorno a grandes distâncias dos corpos. Esta é uma questão importante, nos problemas sob análise, uma vez que as esteiras formadas são bastante desenvolvidas. Segundo Hirata (2000) o número de operações quando se utiliza o Método de Vórtices é da ordem de N^2 , onde N é o número de vórtices livres utilizados na simulação. Para diminuir o tempo computacional, utilizou-se o algoritmo acelerador de tempo proposto por Pereira (1999). A simulação tomou por base um programa já existente, testado para o caso de um cilindro isolado, e que reproduz os resultados constantes na literatura.

As equações básicas que governam o problema sob investigação são apresentadas na próxima seção, seguidas da descrição do método numérico e do algoritmo. Na última seção, os resultados (as esteiras obtidas nas diversas simulações, assim como os valores dos coeficientes de arrasto e sustentação para diversas distâncias entre o cilindro e a superfície) são apresentados, discutidos e comparados, sendo formuladas as conclusões finais.

2. Formulação matemática

Inicia-se a análise considerando o escoamento em torno de um cilindro de seção circular, próximo a uma superfície plana, imerso em uma região fluida infinita. Este escoamento é uniforme, incompressível e possui velocidade incidente igual a U . Assume-se que o fluido é newtoniano, homogêneo, com propriedades constantes, e que as perturbações do referido escoamento se devem exclusivamente à presença do corpo, como pode ser visualizado na Fig.(1).

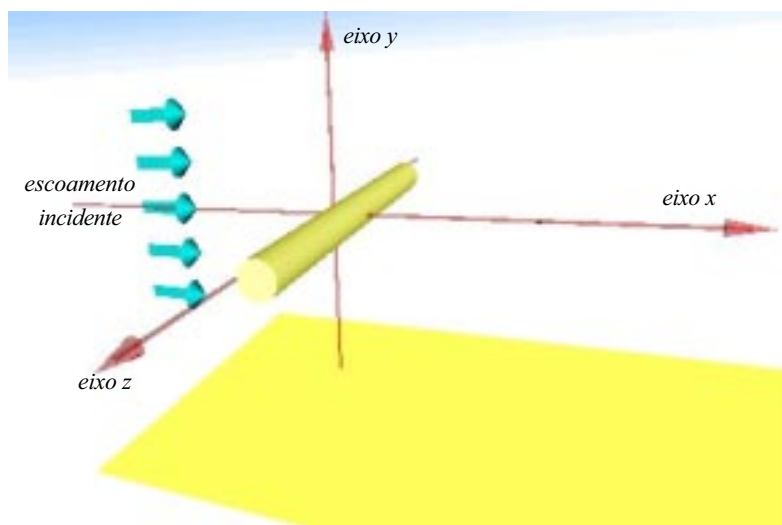


Figura 1. Visualização do escoamento em três dimensões.

Devido a complexidade envolvida na simulação de escoamentos tridimensionais, tomou-se uma seção do sistema, tornando bidimensional o problema em questão, Fig.(2).

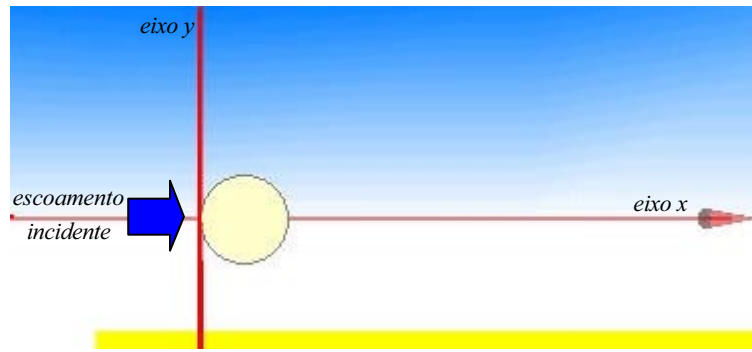


Figura 2. Visualização do escoamento em duas dimensões.

O escoamento mostrado na Fig. (2), é governado pelas Equações da Continuidade e de Navier-Stokes, que podem ser escritas na sua forma adimensional como :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{Equação da continuidade}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{Equação de Navier-Stokes}) \quad (2)$$

Sendo R_e o número de Reynolds e p a pressão

A adimensionalização das equações foi feita utilizando-se como comprimento característico, o diâmetro D do cilindro, como velocidade característica, a velocidade U do escoamento incidente e, a escala de tempo foi adimensionalizada pela relação D/U .

Na utilização das Eq. (1) e Eq. (2), surge uma dificuldade, representada pelo termo pressão nas equações de Navier-Stokes. Estas equações podem ser manipuladas, assumindo a forma da equação de transporte da vorticidade (Chorin, 1973), onde ω representa a única componente não nula do vetor vorticidade.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \omega \quad (\text{Equação do transporte da vorticidade}) \quad (3)$$

Para o escoamento em questão, se faz necessário ainda, obedecer às condições de impenetrabilidade e escorregamento nulo :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{impenetrabilidade}) \quad (4)$$

Onde ϕ é o potencial de velocidade, \mathbf{u}_n é a componente da velocidade na direção normal à superfície do corpo e \mathbf{n} é o vetor unitário normal.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (\text{escorregamento nulo}) \quad (5)$$

Onde \mathbf{u}_τ é a componente da velocidade na direção tangencial à superfície do corpo e $\boldsymbol{\tau}$ é o vetor tangente unitário.

Na fronteira da região fluida, assume-se que a velocidade tende para a do escoamento não perturbado :

$$|\mathbf{u}| = |\nabla \phi| \rightarrow U, \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{onde } \nabla \phi \text{ é o gradiente da função potencial} \quad (6)$$

3. Método de solução – O Método dos Vórtices

O Método dos Vórtices (Hirata, 2000) utiliza uma descrição lagrangeana do campo de escoamento. Assim sendo, não utiliza uma malha e permite que as condições de contorno no infinito sejam satisfeitas com maior exatidão, em virtude de acompanhar o vórtice no tempo, atualizando sua posição. Não há necessidade, portanto, de se estabelecer um domínio de solução.

Este método utiliza um algoritmo numérico que separa o fenômeno convectivo, lado esquerdo da Eq. (3), do difusivo, lado direito da Eq. (3), como é visto a seguir.

3.1. Algoritmo de separação

Em um mesmo passo de tempo, a convecção da vorticidade é governada por :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (7)$$

enquanto a difusão é regida por :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \omega \quad (8)$$

3.2. Convecção da vorticidade

A velocidade U_p de cada vórtice "p" da nuvem de N_v vórtices, pode ser calculada a partir do potencial complexo $f(z)$, como segue :

$$u(x, y) - i \cdot v(x, y) = \frac{df(z)}{dz} \quad (9)$$

$$u_p(x_p(t), t) = u(x_p, y_p) = u^i(x_p, y_p) + u^v(x_p, y_p) + u^c(x_p, y_p) \quad (10)$$

$$v_p(x_p(t), t) = v(x_p, y_p) = v^i(x_p, y_p) + v^v(x_p, y_p) + v^c(x_p, y_p) \quad (11)$$

$$\text{Onde } f(z) = f(z)^i + f(z)^v + f(z)^c \quad (12)$$

Nestas expressões, os índices i , v e c , representam respectivamente o escoamento incidente, a nuvem de vórtices livres e o corpo.

Assim, o potencial complexo $f(z)^i$ representa o escoamento incidente, e para o problema em questão :

$$f(z)^i = z \quad (13)$$

$$u^i = 1 \quad \text{e} \quad v^i = 0 \quad (14)$$

O potencial complexo $f(z)^c$ representa o escoamento associado à presença dos corpos, e neste trabalho é simulado por fontes distribuídas nas superfícies dos mesmos.

$$f(z)^c = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} \sigma(\zeta) \ln(z - \zeta) d\zeta \quad \text{sendo } \sigma(\zeta) \text{ a densidade das fontes} \quad (15)$$

O potencial complexo $f(z)^v$, que representa o escoamento induzido pela nuvem de vórtices livres, é dado por :

$$f(z)^v = \frac{i}{2\pi} \sum_{q=1}^{N_v} \Gamma_q w_v(z - z_q) \quad \text{sendo } \Gamma \text{ a intensidade do vórtice} \quad (16)$$

A função característica $w_v(z - z_q)$ é uma função complexa, definida pelos tipos de vórtices discretos que formam a nuvem e está associada à distribuição de vorticidade no interior do núcleo. Se o vórtice presente na nuvem for um vórtice potencial, toda a vorticidade estará concentrada no seu centro, e o campo de velocidade associado à nuvem é calculado considerando um vórtice arbitrário no ponto "q", induzindo velocidade no ponto "p".

$$u^v(x_p, y_p) - i.v^v(x_p, y_p) = \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{Nv} \Gamma_q \frac{1}{(z_p - z_q)} \quad (17)$$

Pode-se verificar na Eq. (17) que $q \neq p$, pelo fato de um vórtice não induzir velocidade sobre ele mesmo.

Esta função é singular quando o vórtice "q" se aproxima de "p". Utiliza-se, portanto, o vórtice de Lamb, que possui um núcleo viscoso de raio σ_0 . Neste vórtice, para distâncias maiores que σ_0 , o campo de velocidades praticamente coincide com aquele induzido pelo vórtice potencial, e a função característica é definida como mostram as Eq. (18) e Eq.(19) conforme Mustto(1998).

$$w_v(z_p - z_q) = \ln(z_p - z_q) \left[1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \quad (18)$$

$$\text{Onde } \sigma_0 = 4,48364 \sqrt{\Delta t / R_e} \quad (19)$$

3.3. Avanço convectivo

Conhecida a velocidade induzida em cada vórtice da nuvem, é feito o avanço convectivo destes vórtices, utilizando-se o esquema de Euler, de 1ª ordem, para os vórtices nascentes :

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t) \Delta t \quad (20)$$

Para os demais vórtices, a fórmula de Adams-Bashforth, proposta por Pereira (1999), é uma aproximação de 2ª ordem bastante eficiente em termos de memória requerida :

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + [1,5\mathbf{u}_p(t) - 0,5\mathbf{u}_p(t - \Delta t)] \Delta t \quad (21)$$

3.4. Difusão da vorticidade

Dentre as propostas existentes na literatura para simulação da difusão viscosa, foi adotado o método do avanço randômico, que consiste em um deslocamento aleatório de cada vórtice, a cada intervalo de tempo, nas direções "x" e "y", dado respectivamente por :

$$\xi(t) = \Delta r \cdot \cos \theta \quad \text{e} \quad \eta(t) = \Delta r \cdot \sin \theta \quad (22)$$

Onde Δr e θ são dados por :

$$\Delta r = \sqrt{\frac{8\Delta t}{R_e} \ln\left(\frac{1}{P}\right)} \quad , \quad \theta = 2\pi Q \quad (23)$$

Sendo P e Q números randômicos, definidos no intervalo $0 \leq P < 1$ e $0 \leq Q < 1$.

Desta forma, o avanço em cada vórtice, ao final de um incremento de tempo, continua sendo calculado pela Eq. (20) ou Eq. (21), acrescentando-se o deslocamento randômico, Eq. (22).

3.5. Geração da vorticidade

Quando o gradiente de pressão é favorável, há uma geração de vorticidade na superfície sólida, porque o fluxo passa a ser positivo. Se o gradiente de pressão for desfavorável, ou seja, quando o escoamento é desacelerado, há uma geração negativa (aniquilamento).

Para se desenvolver um algoritmo capaz de quantificar de maneira apropriada a vorticidade criada na superfície sólida, normalmente à superfície do corpo, é necessário entender o mecanismo de geração da vorticidade. Considera-se por um breve intervalo de tempo, a ação da convecção que desloca a vorticidade presente; a nova distribuição de vorticidade irá induzir um campo de velocidades ligeiramente diferente do anteriormente induzido. A condição de escorregamento nulo será violada, sendo gerada uma velocidade tangencial u_t . Para que isso não aconteça, o escoamento desenvolve uma superfície de vorticidade, cuja densidade é o suficiente para anular esta velocidade tangencial.

No Método dos Painéis, sobre os quais fontes são distribuídas para simular o corpo, a intensidade dos vórtices livres (gerados a cada incremento de tempo) deve ser tal que anule a velocidade u_{τ} , calculada no ponto de controle de cada painel. Este procedimento é equivalente à satisfação da condição de escorregamento nulo.

A uma distância finita, ϵ , de cada ponto de controle dos painéis um vórtice é gerado, ou seja, a cada incremento de tempo são gerados NP novos vórtices livres (vórtices nascentes).

3.6. Cargas aerodinâmicas

A análise das cargas aerodinâmicas que atuam em consequência do movimento do fluido ao redor dos corpos é restrita ao campo de pressão e às forças de arrasto e sustentação.

O campo de pressão, em termos adimensionais, é dado por :

$$\Delta p_m = - \frac{\Delta \Gamma_m}{\Delta t} \tag{24}$$

Os coeficientes de arrasto e sustentação são então calculadas após a integração do campo de pressões sobre as superfícies do cilindro, e são dados respectivamente por :

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \tag{25}$$

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \tag{26}$$

Onde F_x é a componente da força que atua sobre o corpo, e é tangencial à direção do escoamento incidente, e F_y é a componente normal a essa velocidade.

4. Implementação numérica do método

A implementação do Método dos Vórtices, apresentado nas seções anteriores, obedece o seguinte algoritmo :

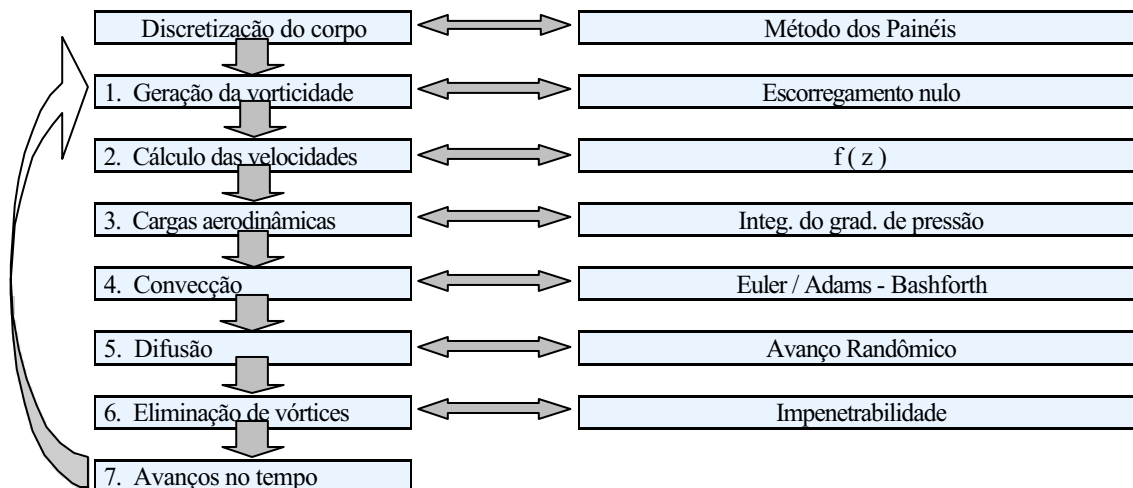


Figura 3. Algoritmo de implementação do Método dos Vórtices.

Geração da vorticidade – é simulada por um número finito de vórtices discretos (nascentes). Estes vórtices são posicionados a uma pequena distância ϵ da superfície do corpo, denominada de deslocamento primário.

Cálculo das velocidades – analisando a velocidade induzida pelo painel i , no ponto de controle do painel j , verifica-se que esta velocidade é igual a um fator geométrico multiplicado pela densidade de fontes (σ_j) distribuída sobre este painel. Por sua vez, as componentes desta velocidade, nas direções normal e tangencial ao painel j , são iguais a outro fator geométrico, denominado índice de influência, multiplicado pela densidade de fontes.

Cargas aerodinâmicas/ Convecção / Difusão – no mesmo incremento de tempo, os vórtices nascentes são incorporados aos vórtices presentes na nuvem, as cargas aerodinâmicas são calculadas e, os vórtices são submetidos aos processos de convecção e difusão.

Eliminação de vórtices – após o processo de difusão, verifica-se se algum vórtice foi levado para o interior dos corpos, sendo este eliminado e os vórtices remanescentes renumerados. Visando a conservação da circulação, faz-se a soma das intensidades dos vórtices eliminados, de modo que este total seja distribuído entre os vórtices a serem gerados no próximo passo de tempo.

Todo o procedimento, a partir da geração de vórtices, deve então ser repetido até o número máximo de iterações especificado nos dados de entrada do programa. Para diferentes distâncias entre o cilindro e a superfície, toda a simulação é feita novamente, sendo as conformações das esteiras, assim como as cargas aerodinâmicas analisadas a seguir.

5. Resultados e conclusões

Com os dados de entrada mostrados na Tab. (1), obteve-se as seguintes esteiras, assim como os coeficientes médios de arrasto e sustentação :

Tabela 1. Coeficientes médios de arrasto e sustentação (incremento de tempo = 0.18; ângulo de ataque da velocidade incidente = 0.0; número de Reynolds = 10^5).

Dados de entrada : distância do centro do cilindro à superfície = 1.2		
iterações	C_D (médio)	C_L (médio)
10	2.106	0.088
30	1.732	-0.030
50	1.942	-0.175
80	2.025	-0.214

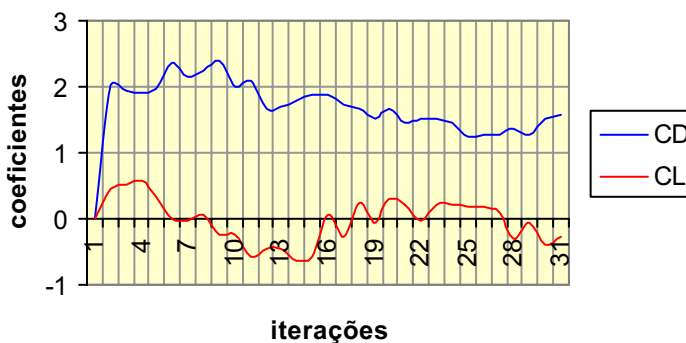


Figura 4. Coeficientes de arrasto e sustentação (distância cilindro / superfície = 1.20 ; 30 iterações)

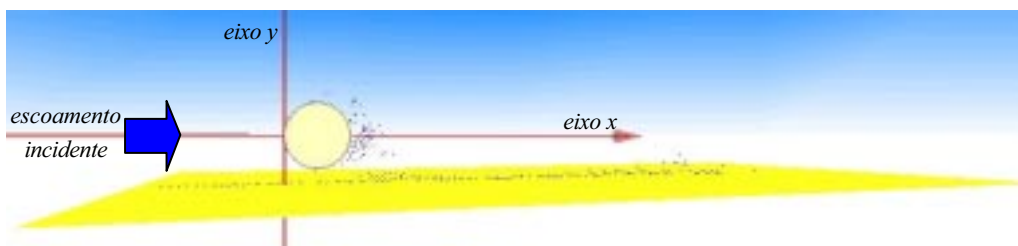


Figura 5. Esteira de vórtices formada pelo escoamento ao redor de um cilindro próximo a uma superfície plana (distância do centro do cilindro à superfície = 1.20 ; iterações : 10)

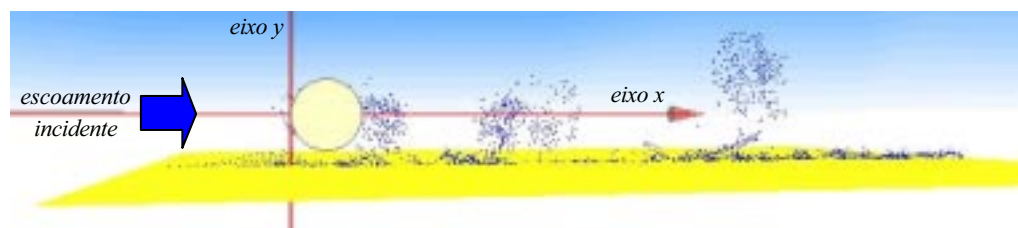


Figura 6. Esteira de vórtices formada pelo escoamento ao redor de um cilindro próximo a uma superfície plana (distância do centro do cilindro à superfície = 1.20 ; iterações : 50)

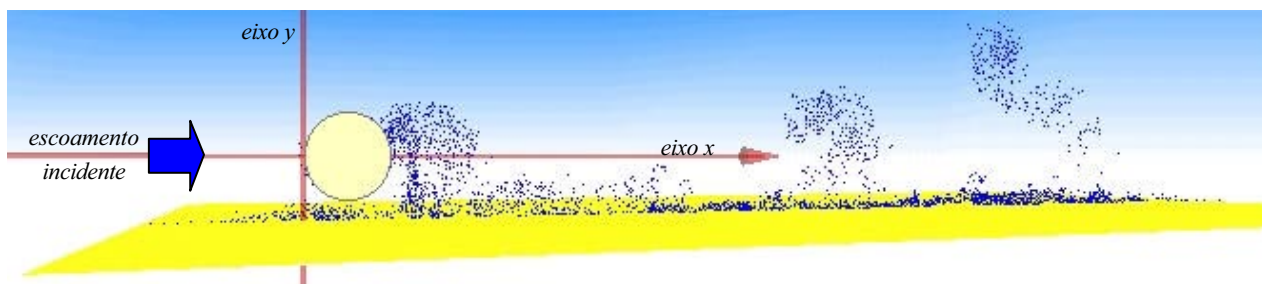


Figura 7. Esteira de vórtices formada pelo escoamento ao redor de um cilindro próximo a uma superfície plana (distância do centro do cilindro à superfície = 1.20 ; iterações : 80)

Alterando-se a distância entre o cilindro e a superfície obtivemos os valores da Tab. (2)

Tabela 2. Coeficientes médios de arrasto e sustentação (incremento de tempo = 0.18; ângulo de ataque da velocidade incidente = 0.0; número de Reynolds = 10^5).

Dados de entrada : distância do centro do cilindro à superfície = 4		
iterações	C_D (médio)	C_L (médio)
50	1.684	-0.359
Dados de entrada : distância do centro do cilindro à superfície = 6		
iterações	C_D (médio)	C_L (médio)
50	1.456	-0.235

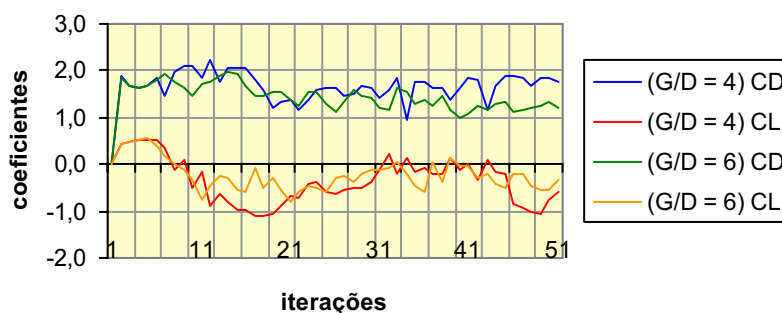


Figura 8. Coeficientes de arrasto e sustentação (distância do centro do cilindro à superfície = 4 e 6 ; 50 iterações)

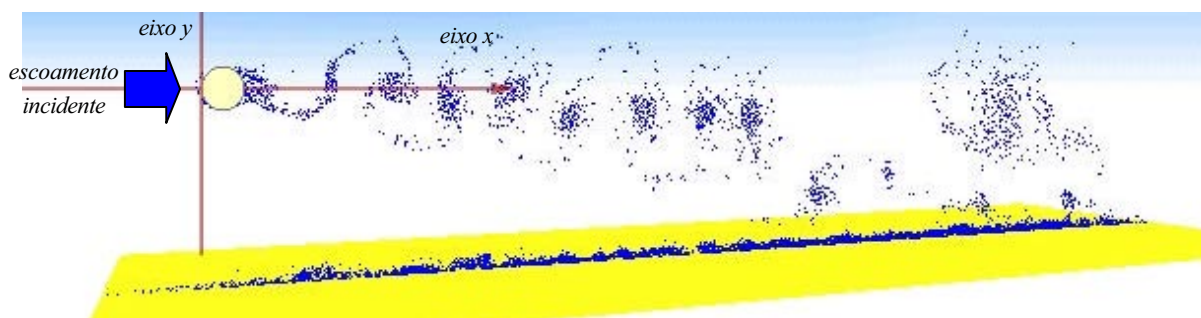


Figura 9. Esteira de vórtices formada pelo escoamento ao redor de um cilindro próximo a uma superfície plana (distância do centro do cilindro à superfície = 6.00 ; 150 iterações)

Com referência à Tab. (1), $G/D = 0.7$, pode-se verificar que Lei et al (1999), obtiveram valores menores de C_D em seus experimentos com números de Reynolds na faixa de 1.31×10^4 a 1.38×10^4 (menores que o considerado neste trabalho). Além disso, no referido trabalho experimental, o cilindro foi localizado totalmente dentro da camada limite da superfície plana, o que não ocorre nesta simulação (o cilindro é posicionado a $3.31 \cdot D$ do bordo de ataque da superfície plana).

Considerando a Tab. (2), $G/D = 3.5$ e $G/D = 5.5$, não há valores de referência em Lei et al (1999).

Portanto, a partir dos resultados obtidos, chega-se às seguintes conclusões :

Os valores dos coeficientes aerodinâmicos são fortemente influenciados pela distância do cilindro à superfície plana, como Lei et al. (1999) conclui em seu estudo. Com o aumento de G/D , inicialmente há um aumento do C_D , seguido de uma rápida oscilação e finalmente um decaimento muito lento, quase estável, conforme pode ser visualizado na Tab.(3). Observa-se que a referência de comparação, Lei et al (1999), estuda o comportamento do C_D até um $G/D=3$. Neste trabalho verificou-se que para G/D maiores que 5.5 o C_D decai muito lentamente, da ordem de 4.3% ($C_D=1.45$ para $G/D=5.5$ e $C_D=1.20$ para $G/D=39.5$).

Tabela 3. Coeficientes médios de arrasto (dados comparativos)

Lei et al (experimental)		Este trabalho (numérico)	
Re = 1.38×10^4		Re = 1.00×10^5	
		$\Delta t = 0.18$	
		50 iterações	
G / D	$C_{D\text{ médio}}$	G / D	$C_{D\text{ médio}}$
0.0	0.8	0.0	1.02
0.6	1.32	0.6	2.15
1.0	1.35	1.0	2.18
2.0	1.37	2.0	1.99
3.0	1.35	3.0	1.75
--	--	3.5	1.68
--	--	5.5	1.45

Utilizando grandes distâncias ($G/D = 39.5$), a forma da esteira, assim como os coeficientes aerodinâmicos, tendem para os resultados existentes na literatura, encontrados com cilindro isolado (C_D em torno de 1,2 e C_L em torno de zero);

O tempo de processamento computacional, em comparação com outros métodos numéricos, tem se apresentado bastante reduzido. Executando o programa em um PC de processador AMD K-6 (2), com 64 Mb de memória RAM, e para uma simulação de 100 iterações (com incremento de tempo de 0.18), por exemplo, o tempo de processamento foi de 22,6 minutos.

Para entender o porque dos vórtices dispersos no final da esteira, foram feitas animações gráficas utilizando Realidade Virtual (VRML - Virtual Reality Modeling Language) e gif animados, sendo observado que, os vórtices da esteira do cilindro são atraídos pela placa e, ao tocá-la, apresentam o comportamento mostrado nas Fig. (5), Fig. (6), Fig. (7) e Fig. (9), provavelmente, devido à influência da camada limite da placa.

6. Agradecimentos

Um dos autores agradece ao CNPq, pelo suporte oferecido em forma de bolsa de estudos de pós-graduação.

7. Referências

Araújo, Z. A., 1994, "Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro flexível através do Método de Vórtices", Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

Bearman, P.W. and Zdravkovich, M.M., 1978, "Flow around a circular cylinder near a plane boundary", Journal of Fluid Mechanics, No. 89, pp. 33-47.

Buresti, G. and Lanciotti, A., 1992, "Mean and fluctuating forces on a circular cylinder in cross-flow near a plane surface", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, No. 41, pp. 639-650.

Chorin, A.J., 1973, "Numerical study of slightly viscous flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, pp. 785-796.

Grass, A.J., Raven, P.W.J., Stuart, R.J. and Bray, J.A., 1984, "The influence of boundary layer velocity gradients and bed proximity on vortex shedding from free spanning pipelines", Journal of Energy Resources Technology, Transactions of the ASME, No. 106, pp. 70-78.

Hirata, M. H., 2000, "O método de vórtices com modelagem de turbulência", Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM2000, Natal, Brasil.

Lei, C., Cheng, L., and Kavanagh, K., 1999, "Re-examination of the effect of a plane boundary on force and vortex shedding of a circular cylinder", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, No. 80, pp. 263-286.

Lei, C., Cheng, L., Armfield, S.W. and Kavanagh, K., 2000 "Vortex shedding suppression for flow over a circular cylinder near a plane boundary", Ocean Engineering, ScienceDirect, Vol. 27, No. 10, pp. 1109-1127.

Musto, A.A., 1998, "Simulação Numérica do Escoamento em Torno de Um Cilindro Circular Com e Sem Rotação Utilizando o Método de Vórtices Discretos", Tese de Mestrado aprovada pelo Corpo Docente da Coordenação dos Programas de Pós Graduação em Engenharia da Universidade do Rio de Janeiro.

Pereira, A.L.A., 1999, "Simulação numérica do escoamento em torno de um corpo de forma arbitrária utilizando o método de vórtices discretos", Dissertação de Mestrado, EFEI-IEM-DME, Itajubá, MG, Brasil.

Numerical simulation of the flow around a cylinder near a plane surface by Vortex Method

Gilda Lúcia B. de Menezes

UFRN – Federal University of RN – Technology Center – Mechanical Engineering Pos Graduation Program – Lagoa Nova – Natal/RN – Brazil – CP 59072-970
gilda@dem.ufrn.br

Zenaide Alves de Araújo

UFRN – Federal University of RN – Technology Center – Mechanical Engineering Pos Graduation Program – Lagoa Nova – Natal/RN – Brazil – CP 59072-970
zenaide@dem.ufrn.br

Miguel Hiroo Hirata

EFEI – IEM – Department of Mechanical Engineering – Avenue BPS, 1303 – Itajuba/MG – Brazil – CP 37500-903
hirata@iem.efei.br

José Eugênio Rios Ricci

EFEI – IEM – Department of Mechanical Engineering – Avenue BPS, 1303 – Itajuba/MG – Brazil – CP 37500-903
ricci@iem.efei.br

Ângelo Roncalli de Oliveira Guerra

UFRN – Federal University of RN – Technology Center – Mechanical Engineering Pos Graduation Program – Lagoa Nova – Natal/RN – Brazil – CP 59072-970
angelo@dem.ufrn.br

8. Abstract. *In this paper it is presented the simulation of the flow around a cylinder that is close to a plane surface. The flow is considered to be incompressible and the related Reynolds Number is of the power of 10^5 . The bodies (cylinder and surface) are simulated by using the Panels Method with distributed sources. On the other hand, the flow is simulated through the Vortex Method, that uses a Lagrangian description of the flow field. The Lamb vortex approach was considered over the whole surface of the bodies and the set of vortex is under convection action following a scheme that uses the Euler equations (1st order) and Adams-Bashforth (2nd order). The vortex diffusion is made by the Random Walk Method. The lift and drag coefficients are calculated by pressure gradient integration. The simulation makes use of a previously published and reliable computer code as its background. The former computer code has been exhaustively tested for the case of an isolated circular cylinder and can be easily found in the literature. The wake found in several simulations is modeled in Virtual Reality. The values of the lift and drag coefficients for several distances between the cylinder and the surface are shown and analyzed.*

Keywords : *Vortex Method, Panel Method, Numerical Simulation, Reynolds Number, Drag and Lift Coefficients.*

SIMULAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO EM SENSORES CAPACITIVOS

Luiz G. C. Duarte

Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia, Departamento de Tecnologia Mecânica e Materiais, Rua Emídio dos Santos s/n, 40300-010, Salvador, BA
duarte@nrva.ufsc.br

Álvaro T. Prata

Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, NRVA, 88040-910, Florianópolis, SC
prata@nrva.ufsc.br

Maurício V. Ferreira da Luz

Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Elétrica, GRUCAD, 88040-910, Florianópolis, SC
valencia@grucad.ufsc.br

Resumo. O objetivo deste trabalho é a análise do campo elétrico formado entre eletrodos de sensores capacitivos utilizados para a medição da fração de vazio. Para um melhor entendimento do fenômeno relacionado com a geração de um campo elétrico entre eletrodos capacitivos são avaliadas diversas geometrias destes eletrodos buscando identificar-se a configuração que apresenta a maior sensibilidade e a melhor uniformidade do campo elétrico gerado para a posterior utilização dos mesmos em conjunto com tubos de pequeno diâmetro. Os benefícios da utilização de eletrodos de guarda são também explorados mostrando que eles aumentam significativamente a uniformidade do campo elétrico. São apresentados resultados através de simulações utilizando-se o programa computacional EFCAD. Os resultados confirmaram que os sensores que utilizam dois eletrodos em forma de placas côncavas são os que melhor atendem as expectativas para a utilização em escoamentos através de dutos de diâmetro reduzido.

Palavras chave: fração de vazio, sensores capacitivos, escoamentos multifásicos, sensibilidade, solubilidade de gás em líquido, lubrificação

1. Introdução

Este trabalho é uma continuação do trabalho de Duarte e Prata (2000) que tratava do projeto de sensores capacitivos para a determinação experimental da fração de vazio de uma mistura de óleo e fluido refrigerante escoando em um tubo de pequeno diâmetro.

Para um melhor entendimento do fenômeno relacionado com a geração de um campo elétrico entre eletrodos capacitivos realizou-se uma simulação numérica de alguns sensores capacitivos utilizando-se o programa computacional EFCAD, Bastos (1998). Estas simulações proporcionaram uma observação dos efeitos causados no campo elétrico com a utilização de eletrodos de guarda. Simulou-se também geometrias de eletrodos buscando-se determinar a geometria que incorporasse maior uniformidade do campo elétrico na região de escoamento e que também tivesse os maiores valores do campo elétrico gerado nesta região.

O programa EFCAD (Eletromagnetic Fields Computer Aided Design) foi desenvolvido pelo Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos e gentilmente cedido para ser utilizado neste trabalho. O programa foi desenvolvido para resolver a equação de Poisson bi-dimensional relacionada com fenômenos eletromagnéticos e térmicos. A estrutura do programa impediu a realização de algumas simulações. O método de elementos finitos, como aplicado no EFCAD, trabalha com potenciais ao invés de campos, que são calculados a partir dos potenciais no módulo de pós-processamento.

No problema de campos eletrostáticos, materiais dielétricos e potencial escalar o potencial em Volts é a variável desconhecida. O potencial (V) é relacionado à intensidade de campo elétrico (E) através da Eq. (1):

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (1)$$

A equação de Maxwell para este caso é:

$$\nabla \mathbf{D} = 0 \quad (2)$$

Como o campo é gerado por uma diferença de potenciais e não pela densidade de carga no interior do domínio, combinando a Eq. (2) com a relação constitutiva:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3)$$

onde ϵ é a constante dielétrica, tem-se:

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla V = 0 \tag{4}$$

Que é a equação de Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

Esta é a equação resolvida pelo método de elementos finitos no EFCAD. Uma vez que a Eq. (5) é resolvida, o módulo de pós-processamento é capaz de calcular o campo em qualquer ponto do domínio.

Para um melhor entendimento de como estão dispostos os eletrodos nas simulações realizadas com o EFCAD, a seguir é mostrado um esquema, Fig. 1, na qual o posicionamento dos eletrodos é facilmente identificado para os diversos casos estudados em que isto não pode ser feito diretamente das figuras que ilustram a simulação realizada. Não é mostrado nesta figura o tubo de poliacetal que envolve o tubo de silicone para facilitar a visualização dos eletrodos, este porém estava presente nas simulações e tinha uma finalidade isolante. A Fig. 2 mostra um dos sensores simulados de maneira a esclarecer o projeto dos sensores.

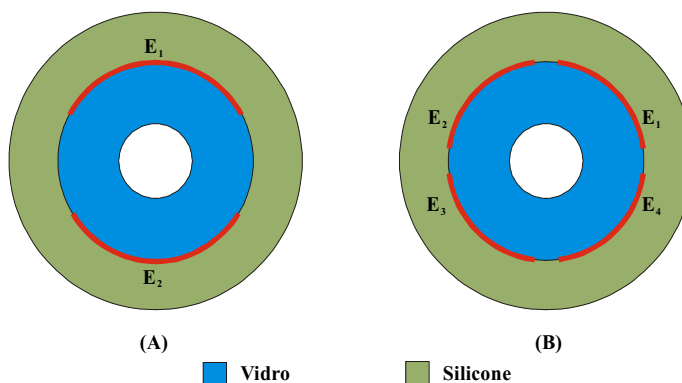


Figura 1. Posicionamento dos eletrodos nas simulações com o EFCAD

- (a) Geometria com dois eletrodos de placas côncavas
- (b) Geometria com quatro eletrodo de placas côncavas

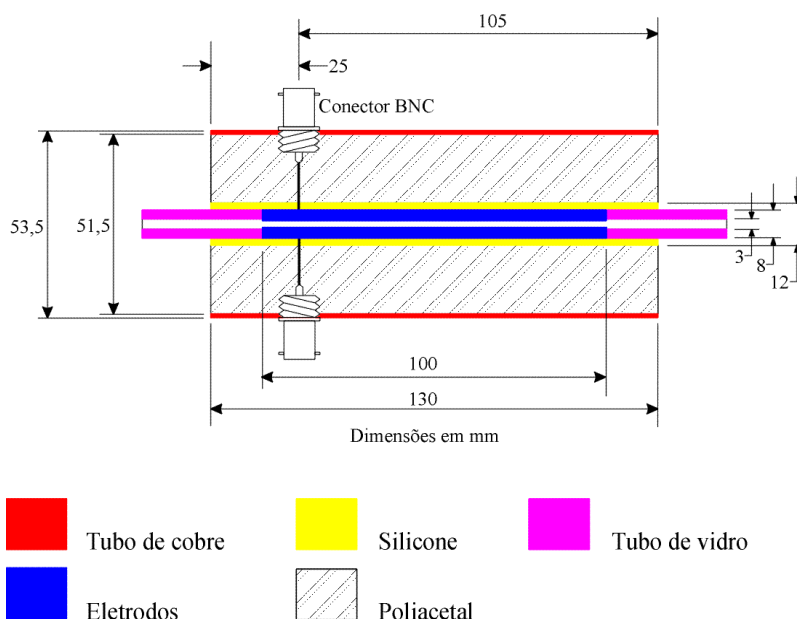


Figura 2. Esquema do sensor capacitivo de 2 placas côncavas

2. Testes preliminares

Nesta seção são apresentados resultados de testes realizados com sensores capacitivos que auxiliaram na discussão e entendimento dos resultados obtidos com as simulações realizadas. Os seguintes tipos de sensores foram testados e os resultados são vistos na Tab. (1):

- Sensor 1 – 2 eletrodos em forma de anel
- Sensor 2 – 6 eletrodos em forma de anel
- Sensor 3 – 2 eletrodos em forma de placas côncavas
- Sensor 4 – 4 eletrodos em forma de placas côncavas

A Tab. (1) mostra a sensibilidade ($\delta C = C_0 - C_1$) para algumas configurações. C_1 é a capacitância medida quando a fração de vazio é máxima e C_0 é a capacitância medida quando a fração de vazio é mínima.

Tabela 1. Resultados dos testes preliminares

Sensor	C_0 (pF)	C_1 (pF)	δC (pF)
1	1,17788	1,16895	0,00893
2	5,50526	5,47381	0,03145
3	11,4933	11,0905	0,4028
4	15,1499	14,9995	0,1504

3. Simulações do campo elétrico entre eletrodos

3.1. Dois eletrodos de placas côncavas

A Fig. 3, Fig. 4 e Fig. 5 permitem visualizar a influência do tamanho radial (ângulo) dos eletrodos no campo elétrico formado entre eles. O campo é mostrado segundo uma escala numérica de cores e um campo vetorial. Não é vista toda a figura e sim um zoom da região de maior interesse, dado que a intensidade do campo gerado na região preenchida com poliacetal tem valor bastante reduzido e uniforme, como poderá ser constatado na Fig. 5(b) em que será mostrado também o tubo de poliacetal possibilitando a verificação da afirmação acima.

Um pequeno engano pode ocorrer quando o campo é mostrado sob a forma de vetores. O tamanho dos vetores mostrados nas figuras relaciona-se diretamente com a intensidade do campo elétrico, mas existe um tamanho mínimo de vetor especificado pelo programa para que o vetor seja visível. Intensidades do campo elétrico menores do que este valor são mostradas nas figuras por vetores que representam uma intensidade maior do que a que realmente ocorre, por isto mesmo a intensidade do campo elétrico também é mostrada segundo uma escala de cores. As figuras com vetores são mais úteis na observação da direção do fluxo do campo elétrico. O programa EFCAD não produziu resultados simétricos como esperado, mas mesmo assim é possível tirar conclusões válidas das situações estudadas.

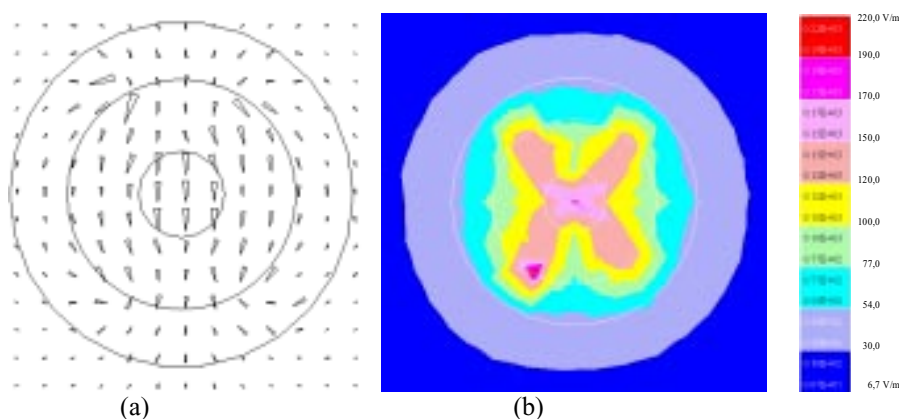


Figura 3. Campo elétrico para ângulo do eletrodo igual a 60°
 (a) Campo vetorial
 (b) Intensidade do campo elétrico

Na Fig. 2 as três circunferências facilmente identificadas formam um tubo de vidro coberto com uma camada de silicone. A região externa ao silicone é preenchida com poliacetal, mas só pode ser inteiramente vista na Fig. 5(b). A tensão é aplicada no eletrodo superior, E_1 na Fig. 1(a) situado na parte externa do tubo de vidro e não mostrado nas demais figuras por questões práticas, e o inferior é mantido com tensão nula.

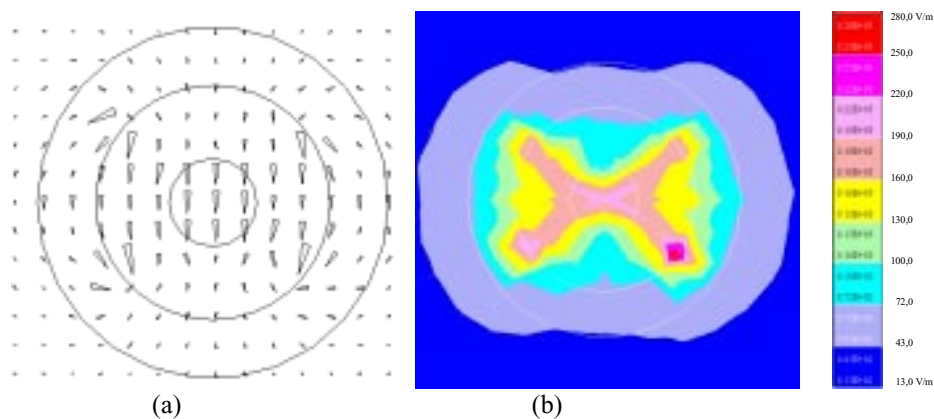


Figura 4. Campo elétrico para ângulo do eletrodo igual a 100°
 (a) Campo vetorial
 (b) Intensidade do campo elétrico

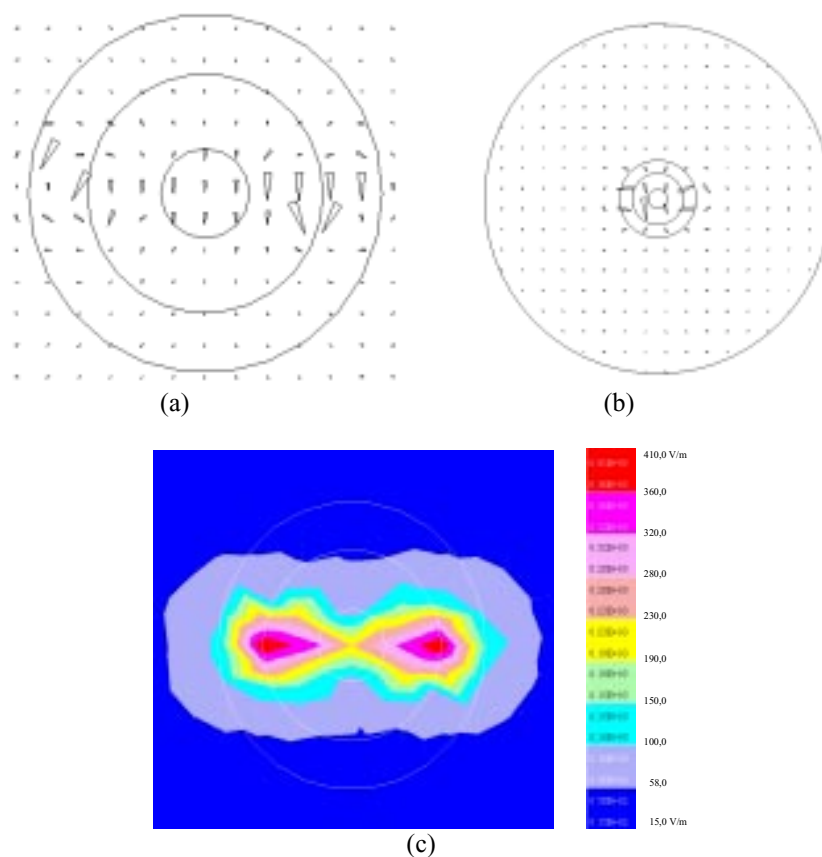


Figura 5. Campo elétrico para ângulo do eletrodo igual a 150°
 (a) Campo vetorial – zoom do item
 (b) Campo vetorial completo
 (c) Intensidade do campo elétrico

Pelas figuras 3, 4 e 5 pode-se constatar que a maior intensidade do campo situa-se no interior do tubo de vidro quando o ângulo dos eletrodos é de 60 e 100°. Para um maior valor do ângulo em questão a proximidade das extremidades dos eletrodos faz com que a maior intensidade do campo esteja concentrada próximo a esta região, ou seja, há um deslocamento dos pontos de maior intensidade do campo elétrico para a região em que as extremidades dos eletrodos se aproximam. Com isto, na região em que o escoamento se desenvolve o campo elétrico torna-se menos uniforme e portanto mais susceptível a variações do regime de escoamento.

Isto seria mais crítico se os eletrodos estivessem posicionados internamente ao tubo, quando a obtenção do valor estimado da fração de vazão seria mais prejudicada. Mesmo assim pode-se observar que no interior do tubo, por onde desenvolve-se o escoamento, há uma variação na intensidade do campo que é mais acentuada para maiores valores do comprimento radial do eletrodo, o que sugere uma dependência do regime de escoamento para esta geometria. Pode-se

notar também que a maior proximidade entre as extremidades dos eletrodos produz efeitos de borda mais acentuados, mas o campo parece ter uma única direção e sentido na região em que ocorre escoamento. A situação de maior segurança contra efeitos de borda ocorre para menores valores do comprimento radial do eletrodo.

O valor numérico do campo para o caso em que o ângulo dos eletrodos é de 150° é maior do que nos outros casos na região do escoamento, sugerindo que a capacitância obtida com estes eletrodos é maior que os dois casos anteriores, o que pôde ser verificado em testes preliminares.

3.2. Quatro eletrodos de placas côncavas

As simulações mostradas na Fig. 6 e na Fig. 7 referem-se a situações em que quatro eletrodos de placas côncavas são utilizados. Os eletrodos têm um comprimento radial tal que as suas extremidades formam um ângulo de aproximadamente 70° com o centro do tubo de vidro. São simuladas duas situações para as ligações dos eletrodos com o sistema de medição. Na primeira um eletrodo é excitado, o eletrodo oposto é aterrado e os demais ficam flutuando. Na segunda situação dois eletrodos opostos são excitados e os demais são aterrados.

Nestas figuras observa-se que a distribuição do campo elétrico é bastante característica. Para o caso em que apenas um eletrodo é excitado, Fig. 6, a distribuição do campo é menos susceptível a efeitos de borda, como já acontecia quando uma configuração semelhante foi montada, Fig. 3, pois o campo tende a concentrar-se entre os eletrodos devido ao seu menor comprimento radial e à configuração de tensão aplicada a eles. Quando dois eletrodos são excitados, Fig. 7, a proximidade entre os eletrodos e o fato de que os dois eletrodos adjacentes aos eletrodos excitados estão aterrados, fazem com que naquela região ocorra uma concentração muito significativa do campo e que tem valores bastante elevados. Isto pode explicar a constatação feita nos testes preliminares de que eletrodos de quatro placas côncavas apresentavam maiores valores da capacitância medida. A Fig. 7 deixa claro, no entanto, que como os maiores valores do campo gerado concentram-se fora da região de escoamento, esta é uma configuração de geometria que não trás atrativos para a aplicação em outros trabalhos.

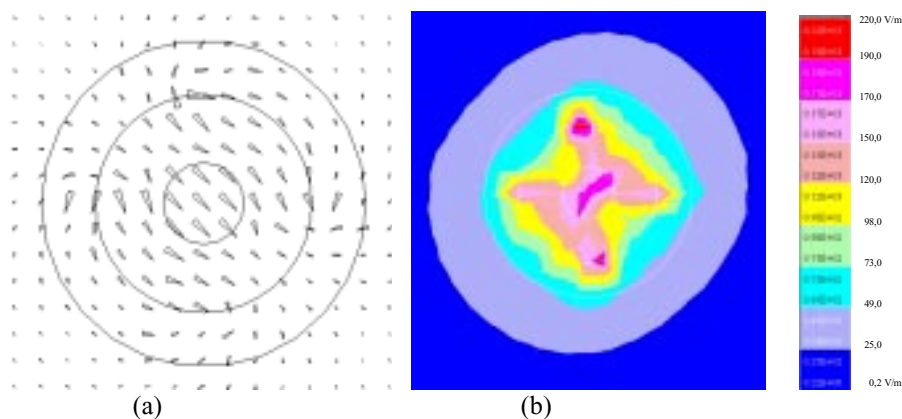


Figura 6. Campo elétrico para quatro eletrodos de placas côncavas
 Eletrodo 2 ($V=1$), eletrodo 4 ($V=0$), eletrodos 1 e 3 flutuando
 (a) Campo vetorial
 (b) Intensidade do campo elétrico

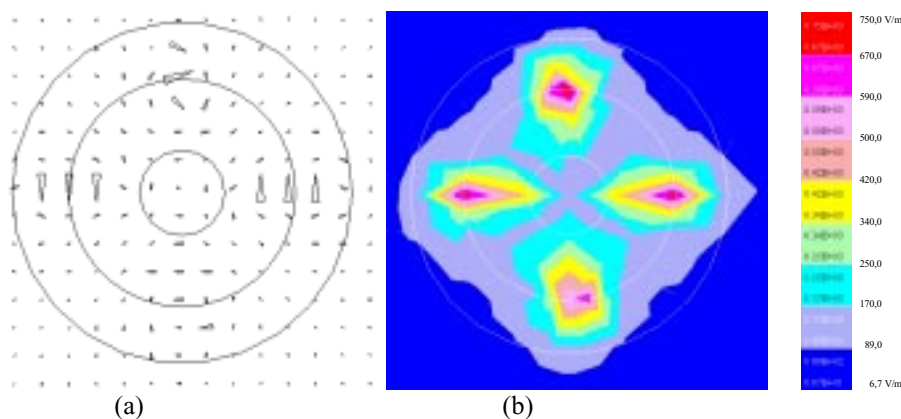


Figura 7. Campo elétrico para quatro eletrodos de placas côncavas
 Eletrodos 2 e 4 ($V=1$), eletrodos 1 e 3 ($V=0$)
 (a) Campo vetorial
 (b) Intensidade do campo elétrico

Esta observação explica também porque apesar de apresentar maiores valores para a capacitância medida, a geometria de quatro eletrodos apresentou uma sensibilidade menor do que a geometria que utilizava dois eletrodos nos testes preliminares. Como o campo concentra-se fora da região de escoamento, fica claro que uma variação do dielétrico devido ao escoamento tem pouca significância para a capacitância medida. Mesmo para os casos extremos em que variou-se a fração de vazio entre os valores máximo e mínimo a sensibilidade obtida não foi satisfatória.

Certamente este também é o motivo para que os autores que já trabalharam com esta configuração, Abouelwafa e Kendall (1980), afirmem que esta geometria é pouco sensível a variações do regime de escoamento, na verdade, como foi mostrado acima, o campo concentra-se próximo às extremidades dos eletrodos e isto sem dúvida alguma faz com que o regime seja pouco significativo nas medições de capacitância realizadas.

3.3. Eletrodos de anel

Na Fig. 8 e na Fig. 9 são mostrados os casos em que os eletrodos têm a forma de anel. Na primeira delas é vista a geometria com dois eletrodos e na figura seguinte são dispostos seis eletrodos sobre o tubo de vidro. Quando são utilizados apenas dois eletrodos o da esquerda é excitado e o da direita é mantido com tensão nula. No caso de seis eletrodos o primeiro eletrodo da esquerda para a direita da Fig. 9 é excitado e o segundo é mantido com tensão nula, e assim sucessivamente até o sexto eletrodo. A configuração é mostrada segundo um corte longitudinal, enquanto nos casos anteriores era visto um corte transversal, mas mesmo assim é possível identificar-se com facilidade o tubo de vidro e a cobertura com silicone. Nestas figuras é visível o posicionamento dos eletrodos sobre o tubo de vidro. Eles são representados por linhas na cor preta.

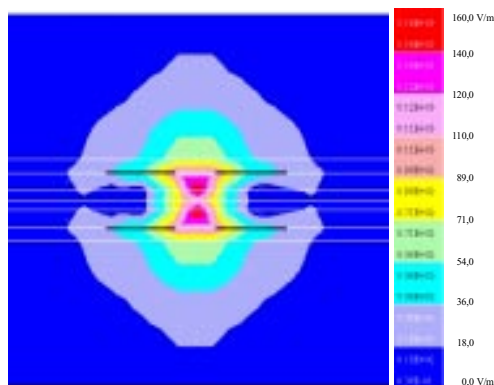


Figura 8. Intensidade do campo elétrico para dois eletrodos tipo anel

A região de maior intensidade do campo elétrico situa-se entre dois eletrodos consecutivos em qualquer um dos casos estudados, região que é considerada como sendo o volume sobre o qual realiza-se a medida capacitiva.

Observa-se que a intensidade do campo elétrico é bem menor que os casos analisados anteriormente, o que está de acordo com os resultados experimentais obtidos nos testes preliminares deste trabalho. Isto se deve mais ao menor volume relacionado com a medida capacitiva no caso de eletrodos tipo anel do que com a intensidade do campo elétrico na região de escoamento. Os efeitos de borda não estão tão presentes na geometria com eletrodos tipo anel como estavam nas anteriores.

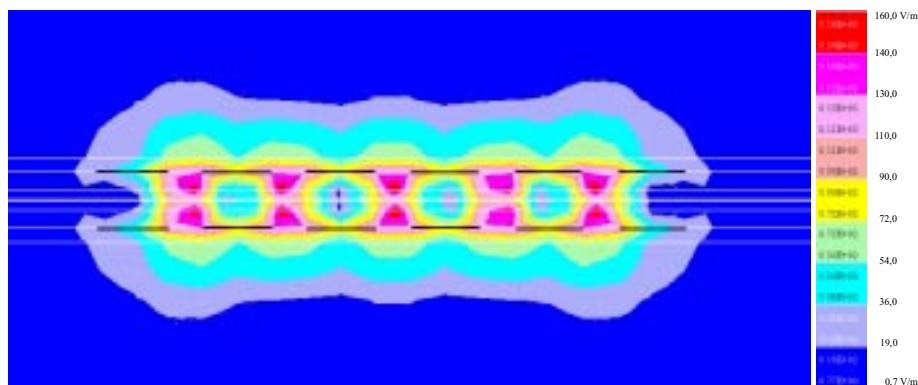


Figura 9. Intensidade do campo elétrico para seis eletrodos tipo anel

3.4. Eletrodos de guarda

Nesta seção avaliou-se o efeito da presença de eletrodos de guarda. O uso destes eletrodos tem por principal função atenuar os indesejáveis efeitos de borda tornando o campo elétrico mais uniforme entre os eletrodos.

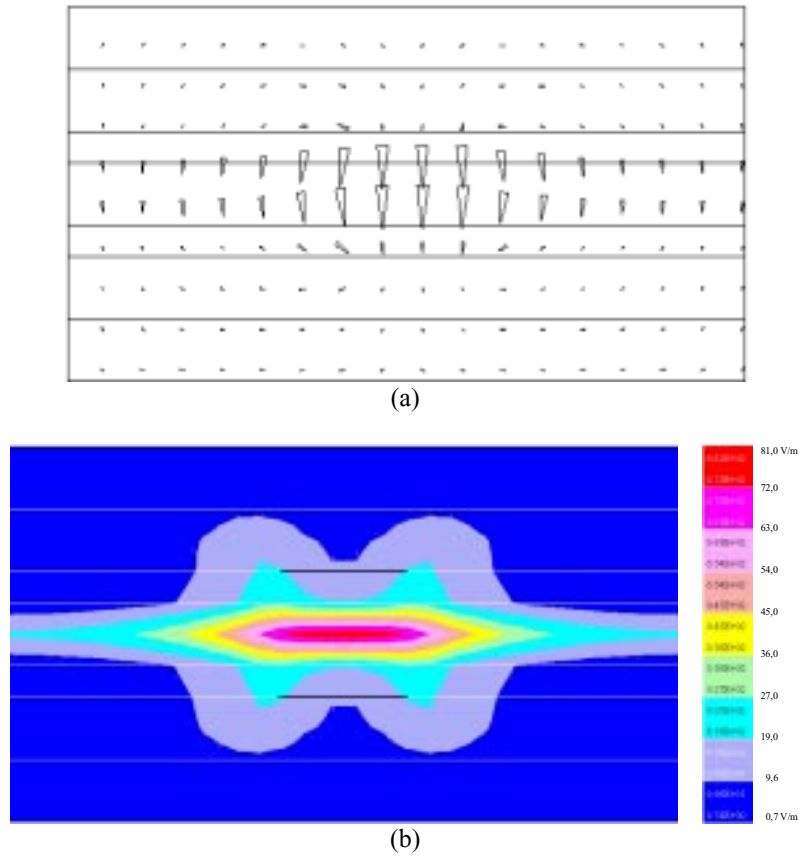


Figura 10. Campo elétrico sem eletrodos de guarda

- (a) Campo vetorial
- (b) Intensidade do campo elétrico

Nestas simulações os eletrodos de guarda, em número de quatro, são eletrodos com as mesmas dimensões que os eletrodos de medição e são posicionados lateralmente a eles. Em todos os casos simulados apenas a situação em que estão presentes eletrodos de placas planas é estudada. Mais uma vez as limitações do programa utilizado, EFCAD, impossibilitaram maiores investigações.

Na Fig. 10 em que não há presença de eletrodos de guarda, a presença dos efeitos de borda é notada. Este efeito faz com que não haja uniformidade do campo elétrico na região de escoamento, Fig. 10(a), e há um espalhamento do campo para fora da região de interesse para a medição capacitiva, Fig. 10(b). É importante notar também a direção e a pequena intensidade do campo na região da camada de silicone.

Para a situação em que são utilizados eletrodos de guarda, Fig. 11, pode-se notar o desaparecimento dos efeitos de borda nas imediações dos eletrodos de medição, que são os eletrodos centrais. O que acontece na verdade é que os efeitos de borda são deslocados para os eletrodos de guarda e com isto consegue-se uma melhor uniformidade do campo na região em que a medição realmente tem influência.

Fazendo uma comparação entre a Fig. 10 e a Fig. 11 vê-se que a introdução dos eletrodos de guarda influenciou na uniformidade do campo, mas não alterou significativamente a intensidade do mesmo na região do escoamento escolhida para estudo.

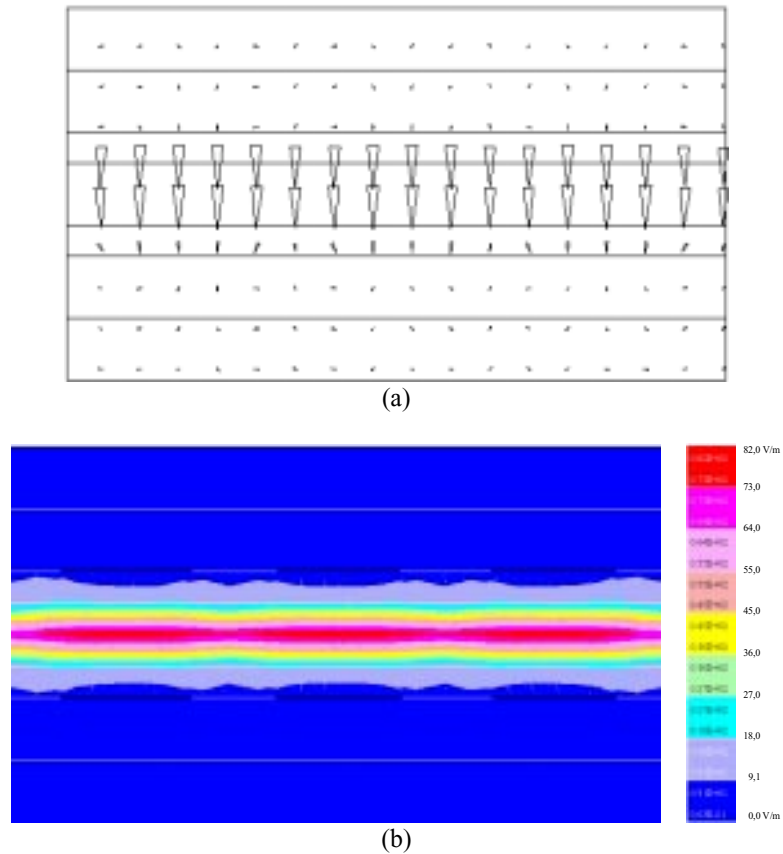


Figura 11. Campo elétrico com eletrodos de guarda
 (a) Campo vetorial
 (b) Intensidade do campo elétrico

4. Conclusões

Estas simulações serviram para aumentar a convicção de que os eletrodos de duas placas côncavas têm qualidades superiores às outras geometrias para utilização na aplicação capacitiva em conjunto com tubos de pequeno diâmetro. Na escolha do comprimento radial do eletrodo deverão pesar a uniformidade do campo sem deixar de lado a sensibilidade obtida para este tipo de aplicação. O uso de eletrodos de guarda sem dúvida alguma é benéfico para a técnica capacitiva, mas a sua implementação deve ser verificada quando busca-se construir um transdutor compacto. O programa utilizado não atendeu completamente às necessidades deste estudo, mas foi imprescindível para a análise qualitativa do problema, o que valida a sua aplicação.

5. Referências

- Abdul-Razzak, A., Shoukri, M., Chang, J. S., 1995, "Characteristics of Refrigerant R-134A Liquid-Vapor Two-Phase Flow in a Horizontal Pipe", ASHRAE Transactions, vol. 1, pp. 953-964.
- Abouelwafa, M. S. A., Kendall, E. J. M., 1980, "The Use of Capacitance Sensors for Phase Percentage Determination in Multiphase Pipelines", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 29, N^o 1, pp. 24-27.
- Elkow, K. J., Reskallah, K. S., 1996, "Void Fractions Measurements in Gas-Liquid Flows using Capacitance Sensors", Measurement Science Technology, vol. 7, pp. 1153-1163.
- Bastos, J. P. A., 1998, "Eletromagnetic Fields Computer Aided Design – EFCAD Manual", 50p.

ELECTRIC FIELD SIMULATION IN CAPACITIVE SENSORS

Luiz G. C. Duarte

Federal Center of Technological Education of Bahia, Department of Mechanical and Materials Technology, Emídio dos Santos Street s/n, 40300-010, Salvador, BA
duarte@nrva.ufsc.br

Álvaro T. Prata

Federal University of Santa Catarina, Department of Mechanical Engineering, NRVA, 88040-910, Florianópolis, SC
prata@nrva.ufsc.br

Maurício V. Ferreira da Luz

Federal University of Santa Catarina, Department of Electric Engineering, GRUCAD, 88040-910, Florianópolis, SC
valencia@grucad.ufsc.br

Abstract. The main purpose of this work is to analyze electric fields generation between capacitance electrodes used in void fraction measurement. To better understanding the phenomena of electric fields generation between capacitance electrodes, some electrodes geometries are evaluated to get the arrange that brings the better electric field uniformity and sensitivity to use them in applications with very small tube diameter. The guard electrodes benefits are also explored showing that they increase the electric field uniformity. The software EFCAD is used in the simulations. The results confirmed that two concave plate electrodes are the best choice for applications in very small tube diameter flows.

Key words: void fraction, capacitive sensors, multiphase flow, sensitivity, gas-liquid solubility, lubrication

ESTUDO EXPERIMENTAL DOS IMPELIDORES TIPO HOMOGENEIZADOR E UNIVERSAL DE PÁS RETAS NA PREPARAÇÃO DO XAROPE PRIMÁRIO.

Ronchi, Augusto Junior

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Av. Eng. Luiz E. C. Coube, s/n Campus da Vargem Limpa Bauru / SP 17033-360
ronchi@bauru.unesp.br

Palma, Geraldo Luiz

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Av. Eng. Luiz E. C. Coube, s/n Campus da Vargem Limpa Bauru / SP 17033-360
gipalma@bauru.unesp.br

Losnak, Célio

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Av. Eng. Luiz E. C. Coube, s/n Campus da Vargem Limpa Bauru / SP 17033-360
losnak@bauru.unesp.br

Resumo. A mistura de líquidos constitui-se num importante tópico das operações unitárias. Exige-se flexibilidade operacional dos misturadores, que devem estar aptos para trabalhar com diferentes volumes de líquidos, em função das variações na demanda de consumo. Algumas características de processo podem dificultar o projeto e a avaliação do rendimento do misturador, em termos do tempo e da potência necessária para se obter uma determinada mistura. A peça mais importante desse contexto é o impulsor e suas condições operacionais. Foram executados ensaios com o homogeneizador de estator fixo e rotor de quatro pás radiais e com a turbina a 45°. Para a verificação do desempenho do homogeneizador e da turbina, foi preparado um xarope de açúcar com água comum a 40° Brix e a 60° Brix e também com água deionizada, nas mesmas concentrações. Foram executados ensaios com rotações de 9,6, 19,2, 25 e 50 rps, num béquer de volume 0,005 m³ com o impelidor mergulhado até uma altura de 0,03 m acima do fundo do tanque. Para a mistura, em função dos parâmetros de potência consumida e concentração da solução com o tempo, comprovou-se o melhor desempenho do impelidor convencional com água comum para 40° Brix e 60° Brix.

Palavras chave: Mistura – líquidos; Potência; Concentração.

1. Introdução

Com aplicações numa vasta área da indústria, a mistura pode ser considerada hoje de importância fundamental na maioria dos processos. Ramos industriais tais como o alimentício, químico, petroquímico, farmacêutico e metalúrgico não dispensam processos de mistura em operações que necessitam de alterações químicas, físicas e/ou transferência de calor e massa em seus produtos.

Um misturador pode ser projetado para apenas misturar ou, em alguns casos, para que etapas intermediárias do processo, tais como reações químicas, possam ocorrer. Exige-se também flexibilidade operacional dos misturadores, que devem estar aptos para trabalhar com diferentes volumes de líquidos, em função das variações na demanda de consumo.

As mudanças na intensidade da agitação necessária para cada produto, fazem com que os projetos de misturadores sejam os mais distintos possíveis.

Características de processos tais como alterações na composição química, podem levar a variações na viscosidade, criar ou eliminar partículas suspensas, alterar o volume da batelada, dificultando o projeto e a avaliação do rendimento do misturador, em termos do tempo e da potência necessária para se obter uma determinada mistura.

Em muitas situações a identificação do problema é um fator determinante para a escolha do equipamento de mistura.

Assim, devem ser verificados itens tais como:

- taxa de reação suficiente para executar o processo num dado tempo;
- condições de processo adequadas para atingir a desejada porcentagem de conversão do produto;
- alta produção desejada em relação ao(s) subproduto(s);
- taxa de transferência de calor suficiente;
- uniformidade de temperatura ou concentração e
- distribuição de partículas dentro de padrões pré-estabelecidos.

Da mesma forma, deve-se evitar que ocorram determinadas situações, como por exemplo:

- acúmulo de material estagnado na superfície do líquido;
- deposição de sólidos no fundo do tanque;
- adesão de material nas paredes do vaso e
- pontos frios ou quentes na superfície de transmissão de calor.

1.1. Principais tipos de impulsores

O padrão de recirculação do fluido num misturador deve-se, principalmente, as características de descarga do impulsor. Assim, são classificados e conceituados os principais tipos de impulsores, os quais irão fornecer padrões distintos de fluxo.

Tal classificação pode ser encontrada em Ronchi et al. (1999), que apresenta os principais tipos de impelidores.

Além desses principais tipos de impulsores, tem-se inúmeras outras concepções tanto para fluidos Newtonianos como para não-Newtonianos.

Um projeto de impulsor relativamente recente é o homogeneizador mostrado a esquerda na Fig. (1), o qual traz além das pás rotativas, um estator fixo com furos oblongos na direção axial, capaz de alterar as características de fluxo e, conseqüentemente, a eficiência do processo em termos da resposta de tempo e potência consumida na operação de mistura.

A Fig. (1) mostra ainda, a direita, um impulsor tipo turbina com quatro lâminas inclinadas.



Figura 1 – O homogeneizador, a esquerda, e a turbina, a direita.

1.2 Objetivos

Este trabalho de pesquisa tem como objetivos principais:

- o estudo da eficiência na preparação do xarope de açúcar, considerando o tempo necessário para se obter as concentrações de 40° Brix e 60° Brix com o uso do homogeneizador,
- da mesma forma usando um impelidor com quatro lâminas inclinadas a 45°, e
- para todas as situações acima, empregando ora água comum, ora água deionizada.

2. Revisão bibliográfica

A agitação pode ser classificada da seguinte forma:

Mistura de líquidos miscíveis. constitui-se numa operação que necessita muito mais de circulação do que cisalhamento. A potência necessária pode variar bastante, em função do tempo disponível para executar a mistura e das viscosidades e densidades dos componentes a serem misturados. A turbina mais adequada seria a do tipo lâmina inclinada.

Mistura de líquidos não-miscíveis. operação que necessita mais de cisalhamento em relação a circulação, sendo empregada usualmente para gerar uma emulsão, estável ou instável, entre dois líquidos. O fluxo aqui tem a sua importância pois é ele que leva o fluido até a região do impulsor, onde é feito o corte. A potência será função do grau de dispersão necessário e do tempo disponível para produzir a dispersão. O impulsor tipo lâmina vertical geralmente é o escolhido.

Suspensões. são divididas em suspensões simples e operações de cristalização. A operação de suspensão simples requer grande circulação de volume e potência suficiente para evitar a decantação da partícula sólida. Aqui, independente do tipo de mistura, a potência deve garantir que as partículas fiquem suspensas no grau desejado.

Nas operações de cristalização, torna-se importante o formato e tamanho do cristal produzido. Assim, deve-se ter circulação, porém com esforço controlado para evitar fratura mecânica dos cristais. Geralmente adota-se um impulsor tipo lâmina inclinada.

Absorção de gás. esta operação requer um alto esforço cortante controlado para proporcionar uma dispersão fina e máxima área de contato interfacial entre o gás e o líquido. A potência será a suficiente para, além de dispersar o gás, evitar que ele escape para a superfície do líquido. Um pulverizador de gás que injete o mesmo próximo e abaixo das pontas das lâminas produz os melhores resultados. A turbina de fluxo radial, mostrada na Fig. 1, é a mais indicada.

Transferência de calor. a circulação deve assegurar uma temperatura uniforme da massa líquida em agitação. Uma mistura insatisfatória dos componentes, da parede ao centro do vaso, fará com que a temperatura do líquido na parede aproxime-se da temperatura da mesma, reduzindo assim a transferência de calor entre eles.

Dickey & Hemrajani (1992) chamam a atenção para a importância de se compreender os objetivos do processo de mistura como um passo essencial para o correto dimensionamento e seleção do equipamento. Em alguns casos, os resultados desejáveis desse processo são difíceis de quantificar.

A mistura, segundo os autores, é melhor avaliada em termos de três parâmetros principais: intensidade, dificuldade e capacidade.

A intensidade da mistura relaciona-se com a velocidade do fluido; a dificuldade está representada pela viscosidade e a capacidade com a quantidade de material que deve ser misturado.

O número de Reynolds é definido como

$$NRe = \rho \cdot N \cdot D^2 / \mu \tag{1}$$

onde ρ é a massa específica do líquido, N é a rotação do impelidor, D é o diâmetro do impulsor e μ é a viscosidade absoluta do líquido.

Assim, a classificação do escoamento foi feita como sendo:

- viscoso, para NRe menor que 10,
- turbulento, para NRe maior que 20.000, e
- região de transição, para NRe entre 10 e 20.000.

O número de potência do impulsor é calculado pela equação

$$N_p = P / (\rho \cdot N^3 \cdot D^5) \tag{2}$$

e permanece constante para condições turbulentas. O símbolo P representa a potência.

A exigência de potência num misturador foi objeto da pesquisa de King *et al.* (1988), que consideraram várias características de processo, tais como o tempo necessário para a operação e os coeficientes de transferência de massa e de calor, dependentes da potência demandada. Constatou-se também que o consumo de potência nas operações industriais de mistura, usualmente não é aferido.

Hicks *et al.* (1976) e Razuk & Souza (1996) apresentaram um trabalho visando a determinação da potência e da rotação do eixo do agitador com o diâmetro do impulsor da turbina para aplicações variando de vasos de estocagem, com pouca agitação, até reatores críticos que necessitam de altos níveis de agitação.

A capacidade da agitação foi indicada pelo volume equivalente V_{eq} definido como

$$V_{eq} = S_g \cdot V \tag{3}$$

onde S_g representa a densidade relativa e V o volume, enquanto a severidade, conforme denominado pelos autores, foi expressa pela viscosidade máxima μ da fase líquida à ser agitada.

Da correlação da Fig. (2) pode-se calcular, através da Eq. (4), a capacidade de bombeamento efetivo Q para a turbina de lâmina inclinada, que dividida pela área de secção transversal do tanque com a geometria da Fig. (3), fornece a velocidade média v_b do fluido. Essa é a velocidade representativa de todas as velocidades no fluido agitado e que serve como base para a escala de agitação proposta pelos autores. O símbolo K_p representa o número de bombeamento.

$$K_p = Q / (N \cdot D^3) \tag{4}$$

Velocidades de fluido variando de 0,031 a 0,310 m/s caracterizam a maioria das aplicações de agitadores para mistura.

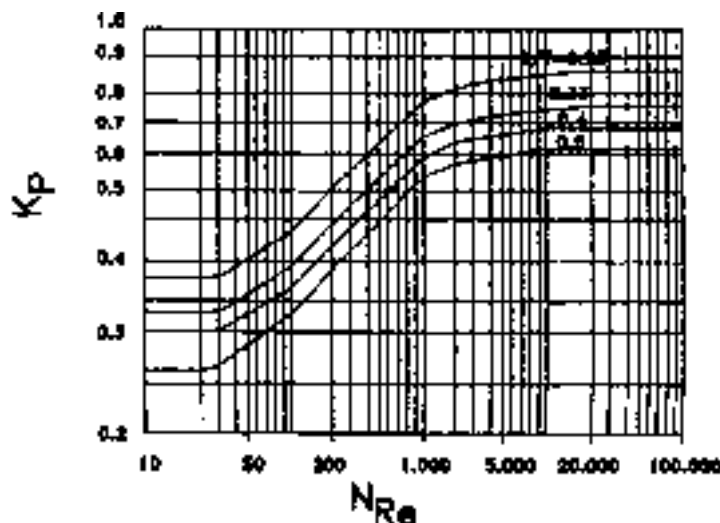


Figura 2 – Número de bombeamento em função do número de Reynolds. De Hicks *et al.* (1976) e Dickey (1984).

Jahoda & Machon (1994) estudaram o processo de homogeneização de líquidos em tanques agitados por impulsores múltiplos. Foram usadas até quatro turbinas Rushton e/ou seis turbinas de lâminas inclinadas.

Os autores afirmaram ser escassa a literatura sobre o uso de sistemas multi-impulsores e geralmente limitada ao uso de dois impelidores.

Deve-se observar contudo a crescente adoção de mais de um impelidor no eixo, podendo-se encontrar, simultaneamente, a âncora, o impulsor rápido e o homogeneizador para algumas aplicações de mistura.

É de se esperar, portanto, um maior número de publicações nesse sentido, visando atender à essa demanda.

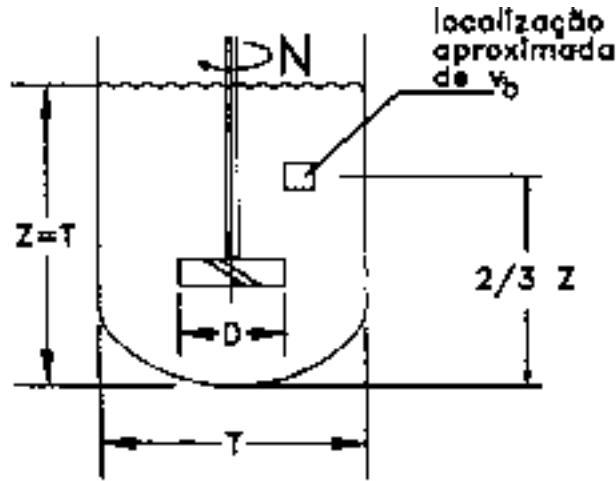


Figura 3 - Tanque de batelada quadrada ($Z = T$) mostrando a velocidade média (v_b) do fluido. De Hicks *et al.* (1976).

Os símbolos Z e T representam, respectivamente, a altura do líquido e o diâmetro do tanque.

3. Materiais e métodos

Todos os experimentos foram executados cinco vezes e os valores aqui apresentados são a média aritmética. As rotações executadas foram, em rps: 9,6 - 19,2 - 25 - 50.

O desvio máximo para todos os ensaios foi de $\pm 1\%$ do valor médio.

Utilizou-se a mistura de água e açúcar cristal, que é o chamado xarope simples, base da produção de bebidas carbonatadas na indústria de refrigerantes. A mistura preparada foi feita ora com água comum, ora com água deionizada.

De uso corrente na produção do xarope de açúcar, o grau Brix, é definido como sendo a porcentagem, em peso, dos sólidos solúveis em uma solução.

Assim, tomando como exemplo um xarope a 40° Brix, cuja massa específica deve ser igual a 1.176 kg/m^3 , tem-se, para 1 litro de xarope à ser produzido, 0,47 kg de açúcar e 0,71 kg de água, não importando a massa específica da água, desde que se trabalhe com quantidades em massa e não em volume. Para 60° Brix, a massa específica é de 1.286 kg/m^3 .

Além do homogeneizador montado com o estator, foi ensaiado também um impelidor com quatro pás retas inclinadas a 45°, executado em aço inoxidável, e com diâmetro de $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Ambos os impelidores podem ser vistos na Fig. (1).

Foi medida a viscosidade do xarope a 40° Brix resultando o valor de $0,0062 \text{ kg/m.s}$, à temperatura de 28 °C. Para 60° Brix, o valor foi de $0,0600 \text{ kg/m.s}$.

Pode-se calcular o número de bombeamento K_p , segundo Dickey (1984), através da expressão:

$$K_p = 0,683 \cdot [0,394 / (D/T)]^{1/2} \tag{5}$$

constante para o regime turbulento e uma dada relação D/T .

Contudo, deve-se neste ponto executar um cálculo iterativo da seguinte forma:

- calcula-se o NRe , Eq. (1), que deve ser ajustado pela relação D/T , dando origem ao número de Reynolds modificado, NRe^* , de acordo com a Eq. (6);

$$NRe^* = NRe \cdot [(D/T) / 0,394]^{1/2} \tag{6}$$

- segundo Dickey (1984), em função do valor do NRe^* , deve-se também corrigir o número de bombeamento, dando origem ao K_p^* , conforme abaixo:

- para NRe^* maior que 20.000:

$$K_p^* = 0,683 \tag{7}$$

- para NRe^* entre 20.000 e 300:

$$K_p^* = \exp(-5,71 + 1,683 \cdot \ln NRe^* - 0,179 \cdot (\ln NRe^*)^2 + 0,0064 \cdot (\ln NRe^*)^3) \quad (8)$$

- para NRe^* entre 300 e 25:

$$K_p^* = \exp(-0,947 - 0,231 \cdot \ln NRe^* + 0,0467 \cdot (\ln NRe^*)^2) \quad (9)$$

- para NRe^* menor que 25:

$$K_p^* = 0,3 \quad (10)$$

Conhecendo-se o valor do número de bombeamento modificado K_p^* , a expressão

$$K_p = K_p^* \cdot [0,394 / (D/T)]^{1/2} \quad (11)$$

permite recalcular o K_p que deve ser comparado com o valor obtido pela Eq. (5).

Com K_p , N , D e a Eq. (4), pode-se calcular a capacidade de bombeamento Q do impulsor em questão.

Pela Eq. (12), basta dividir Q pela área transversal (A) do tanque para obter-se a velocidade média v_b do fluido

$$v_b = Q / A \quad (12)$$

Conhecida v_b e aplicando-se a Eq. (13)

$$I_A = v_b / 0,031 \quad (13)$$

determina-se o índice de agitação I_A , que, para a produção de xarope de açúcar usualmente é igual a 3, conforme Bowen (1985).

Assim foram executados os cálculos, obtendo-se o I_A para o homogeneizador e ambas as concentrações estudadas.

Os resultados foram 3,1 e 6,4, respectivamente para as rotações de 25 e 50 rps, a 40° Brix. Para 60° Brix, obteve-se para os I_A , 2,8 e 6,0, respectivamente para 25 e 50 rps.

Devido ao seu maior diâmetro, a turbina com pás a 45° leva a níveis de agitação maiores que o homogeneizador, para uma mesma rotação e um mesmo grau Brix.

Decidiu-se então, pela comparação do desempenho entre os dois impelidores pelo índice de agitação para as duas concentrações.

Assim, tomando-se como referência os I_A para o homogeneizador, foram recalculadas, pelo mesmo roteiro, as rotações necessárias para que a turbina a 45° produzisse o mesmo efeito de mistura, isto é, o mesmo índice de agitação. Tais rotações resultaram iguais a 9,6 rps e 19,2 rps, respectivamente para os I_A de 3,1 e 6,4 a 40° Brix. Para 60° Brix as rotações também foram de 9,6 rps e 19,2 rps, respectivamente para os I_A de 2,8 e 6,0.

Desta forma, as duas rotações suplementares acima tornam a comparação mais justa entre os dois impelidores, do ponto de vista de resposta dinâmica.

Foram colhidos dados de corrente elétrica consumida, para efeito de cálculo de potência, sob duas condições distintas: no instante de partida do motor, caracterizando a potência de pico, em início de operação de mistura, e após o xarope ter atingido sua concentração, ou grau Brix final, caracterizando a menor potência demandada.

3.1 O método de ensaio

Na execução dos ensaios, montou-se o impulsor centralizado e a uma altura de 0,03 m acima do fundo do béquer e regulou-se a rotação desejada. Foram pesadas as massas de açúcar e de água. Iniciou-se a operação de mistura por um tempo de 15 s, sendo colhida a amostra após um período de 5 minutos de espera, para desaeração do xarope.

Na Fig. 4 pode-se ver um gráfico típico dos resultados dos ensaios.

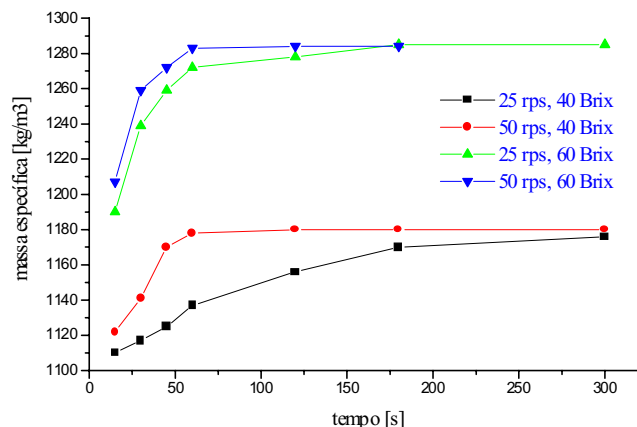


Figura 4 – Resultados para a turbina com água comum.

Mediu-se a massa específica da amostra, numa balança de Mohr-Westphal, sendo em seguida, retornada a amostra para o béquer, de onde foram retiradas novas amostras nos tempos de 30, 45, 60, 120, 180 e 300 segundos, conforme descrito em Ronchi (1997).

Assim, percebeu-se que, sob determinadas condições de rotação e tipo de impelidor, a massa específica desejada era rapidamente obtida, quando comparada com outras condições.

4. Resultados

Foram obtidos os valores mostrados na Tab. 1, onde constam também os resultados dos cálculos da potência aparente.

Para se calcular a potência útil (P_u) ou a efetivamente requerida pelo xarope, bastou subtrair a potência consumida pelo impulsor girando a seco da potência em regime.

Tabela 1 - Resultados para corrente elétrica, potência a seco e potência aparente.

Impelidor	Rotação (rps)	Brix (grau)	I_A	P (W)		P (W) A seco	P_u (W)
				Partida	Regime		
turbina	9,6	40	3,1	528,0	50,6	41,8	8,8
		60	2,8	534,6	55,0	41,8	13,2
	19,2	40	6,4	-	77,0	55,0	22,0
		60	6,0	-	101,2	55,0	46,2
homogeneizador	25	40	3,1	770,0	176,0	110,0	66,0
		60	2,8	1.1216,6	242,0	110,0	132,0
	50	40	6,4	-	367,4	121,0	246,4
		60	6,0	-	506,0	121,0	385,0

5. Discussão

Através da análise das curvas da massa específica em função do tempo, tal como a da Fig. 4, verificou-se que o impelidor de pás a 45° apresentou melhor rendimento que o conjunto rotor/estator do homogeneizador. O motivo está no baixo poder de sucção do homogeneizador, como pode ser visto na foto da Fig (5). Sua geometria e ângulo, não conseguem o mesmo desempenho que a turbina que, nitidamente, promove um vigoroso fluxo circulatório, notadamente longitudinal, capaz de realmente misturar o açúcar com a água. A Fig. (6) mostra a turbina em operação.



Figura 5 – O homogeneizador, agitando a água a 25 rps.

Na comparação entre os dois impelidores pelo índice de agitação, houve vantagem para a turbina, para os I_A de 6,0 e 6,4, tanto no menor tempo de mistura quanto na menor potência demandada, para ambos os graus Brix ensaiados.

Já para os I_A de 2,8 e 3,1, houve melhor desempenho do homogeneizador no que diz respeito ao tempo menor exigido para a mistura. Tal vantagem, porém, foi anulada pelo consumo demasiadamente alto de potência requerida para a operação, para 40° Brix e 60° Brix.

O uso de água deionizada, não apresentou nenhuma vantagem, tornando seu uso desaconselhável, devido ao maior custo que tal alternativa implicaria.

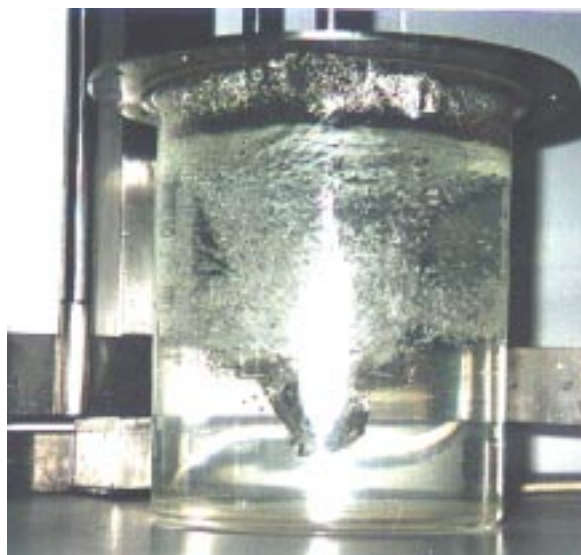


Figura 6 – A turbina, agitando a água a 25 rps.

6. Conclusões

Com poucas exceções, na comparação entre os dois impelidores quando à mesma rotação, a turbina apresentou um desempenho melhor. Mesmo quando comparados para o mesmo índice de agitação, implicando numa rotação maior para o homogeneizador, houve melhor rendimento da turbina, que necessitou de menos tempo para a obtenção do grau Brix final, nas condições do índice de agitação igual a 6,0 e 6,4.

Para os índices de agitação 2,8 e 3,1, muito embora o homogeneizador tenha sido mais rápido, seu consumo de potência muito maior que o da turbina, tornou questionável essa vantagem.

O comportamento foi o mesmo para os dois graus Brix ensaiados e a água comum foi de uso mais vantajoso.

Os ensaios aqui realizados no modelo em escala, podem ser extrapolados para um tanque de dimensões industriais.

5. Referências

- Bowen, R.L., 1985, "Agitation intensity: key to scaling up flow-sensitive liquid systems", *Chemical Engineering*, Mar., pp.159-168.
- Dickey, D.S., 1984, "Program chooses agitator", *Chemical Engineering*, Jan., pp.73-81.
- Dickey, D.S.; Hemrajani, R.R., 1992, "Recipes for fluid mixing", *Chemical Engineering*, Mar., pp.82-89.
- Hicks, R.W.; Morton, J.R.; Fenic, J.G., 1976, "How to design agitators for desired process Response", *Chemical Engineering*, Apr., pp. 102-110.
- Jahoda, M.; Machon, V., 1994, "Homogenization of liquids in tanks stirred by multiple impellers", *Chemical Engineering Technology*, n.17, p.95-101.
- King, R.L.; Hiller, R.A.; Tatterson, G.B., 1988, "Power consumption in a mixer", *AIChE Journal*, v. 34, n.3, pp.506-509.
- Razuk, P.C.; Souza, E., 1996, "Operações unitárias no tratamento do xarope de açúcar", EDIPRO, Bauru, SP.
- Ronchi Junior, A., 1997, "O número de potência na agitação de líquidos e a concentração namistura do xarope de açúcar", Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Ronchi Junior, A.; Palma, G.L.; Razuk, P.C. 1999, "Uma medida de eficiência entre o homogeneizador e o impelidor universal de pás retas", XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, Brasil, ISBN 85-85769-03-3

Experimental study of the radial blades impeller and the pitched bladed turbine on the manufacturing of the primary syrup.

Ronchi, Augusto Junior

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Av. Eng. Luiz E. C. Coube, s/n Campus da Vargem Limpa Bauru / SP 17033-360

ronchi@bauru.unesp.br

Palma, Geraldo Luiz

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Av. Eng. Luiz E. C. Coube, s/n Campus da Vargem Limpa Bauru / SP 17033-360

gpalma@bauru.unesp.br

Losnak, Célio

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Av. Eng. Luiz E. C. Coube, s/n Campus da Vargem Limpa Bauru / SP 17033-360

losnak@bauru.unesp.br

Abstract: Agitation and liquid mixing is an important topic in unit operations, having huge application in most branches of industry. The major role in this context is the impeller and its operational conditions. Among the several types of impellers, test runs were carried out using the impeller with four radial blades at an angle of 90° , mounted with a stator, and also using a pitched bladed turbine with four flat blades at an angle of 45° . At the mixing experiments, it was prepared a sugar syrup with tap water and with deionized water at two different concentrations: 40° and 60° Brix, with the radial impeller and with the turbine. By analysing the data it has been proved at the mixing experiments, using the data of power and concentration versus time, that the best performance occurred with the use of the turbine and tap water.

Keywords: *Mixing - liquids; Power; Concentration*

THREE DIMENSIONAL LAGRANGIAN SIMULATION OF MHD SHOCK

Eraldo Pereira Marinho

DEMAC, IGCE, UNESP, R. 10, 2527 CxP. 178, Rio Claro, SP, CEP 13500-230
emarinho@rc.unesp.br

Hélio Aparecido Navarro

DEMAC, IGCE, UNESP, R. 10, 2527 CxP. 178, Rio Claro, SP, CEP 13500-230
helio@rc.unesp.br

Carmen Maria Andreazza

DEMAC, IGCE, UNESP, R. 10, 2527 CxP. 178, Rio Claro, SP, CEP 13500-230
carmenma@rc.unesp.br

Abstract. *The problem of strong magnetohydrodynamics (MHD) shock using the three dimensional smoothed particle hydrodynamics is investigated. The shock is caused by the collision of two spherical gaseous masses with the initial motion aligned with the magnetic field. The MHD equations are adapted to the particle approach. The connection between vorticity and the magnetic field is also explored.*

Keywords: *vorticity, MHD, supersonic shock, compressible flow, Lagrangian methods, numerical analysis*

1. Introduction

Smoothed particle hydrodynamics (SPH) is a full Lagrangian method to simulate compressible fluids using particles (e.g., Gingold and Monaghan, 1977, Lucy, 1977, Monaghan, 1992). The method is historically a generalization of the Monte Carlo method of calculating multiple integrals. The technique combines some properties of the distribution theory and the Monte Carlo approach of estimating multiple integrals. Essentially, SPH reduces the hydrodynamic equations to an N-body problem by using particles to transport local average (smoothed) fluid properties. The averaging is weighted by a function W known as the smoothing kernel, which width is proportional to a parameter called the smoothing length h .

The technique easily adapts to problems of physics of plasmas, mainly on compressible partially ionized gases, where the MHD approximation is valid. Problems such as the effects of the terrestrial magnetic field on the supersonic shock caused by an aircraft, or geophysical and astrophysical applications can be solved with this technique.

In this paper, we studied the evolution of an MHD shock caused by the supersonic collision of two magnetized spherical masses.

2. Methodology

The smoothed particle magnetohydrodynamics (SPMHD) equations of motion (Phillips and Monaghan, 1985) are derived from the ideal Lagrangian magnetohydrodynamics equations, where the viscosity, the electrical resistivity and the displacement current are neglected. We also consider adiabatic transformations, and we neglect the gravity acceleration. The basic equations of motion are listed below:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

and

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4)$$

2.1. The smoothed particle magnetohydrodynamics equations

The translation from the continuous Lagrangian magnetohydrodynamics equations to the smoothed particle equations is performed by the usual way (see Monaghan, 1992, for a review). The summations are performed for each particle over a list of the n -nearest neighbor, which is determined by a *nearest neighbors searching routine* (see, e.g., Marinho and Lépine, 2000).

The smoothed (expected) particle density is given by

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}, \quad (5)$$

and the particle form of the mass conservation equation is derived by calculating the total derivative of Eq. (5).

$$\dot{\rho}_i = \sum_j m_j \nabla_i W_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \quad (6)$$

The SPH momentum equation is written

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{a}_i^{(\text{iso})} + \mathbf{a}_i^{(\text{aniso})} \quad (7)$$

where $\mathbf{a}_i^{(\text{iso})}$ and $\mathbf{a}_i^{(\text{aniso})}$ are the isotropic and anisotropic terms, respectively expressed as

$$\mathbf{a}_i^{(\text{iso})} = - \sum_j m_j \nabla_i W_{ij} \left[\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{B_i^2}{\rho_i^2} + \frac{B_j^2}{\rho_j^2} \right) \right], \quad (8)$$

and

$$\mathbf{a}_i^{(\text{aniso})} = \frac{1}{4\pi} \sum_j m_j \nabla_i W_{ij} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_i}{\rho_i^2} + \frac{\mathbf{B}_j \mathbf{B}_j}{\rho_j^2} \right) \quad (9)$$

The particle form of the energy equation is given by

$$\dot{u}_i = - \frac{1}{2} \sum_j m_j \nabla_i W_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \quad (10)$$

The smoothed particle induction equation is written as

$$\dot{\mathbf{B}}_i = - \frac{1}{\rho} \sum_j m_j \left[\mathbf{B}_j \cdot \nabla_i W_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \mathbf{B}_i \cdot \nabla_i W_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right] \quad (11)$$

2.2. Time integration

2.2. 1. Time-stepping

The multiple time-scale integration-scheme requires bookkeeping to control what particles are integrated with a given time-step, and how a time-step is selected regarding synchronization of the finite-differences solutions. One possible time scheme is that illustrated in Fig. (1), where the finite-differences equations are solved along with a binary hierarchy of time-steps. In the figure, it is assumed the pre-fixed integration, so that upper level particles (coarser time-steps) are integrated before a descent.

For each time-step is assigned a list (time-bin) of dynamically similar particles. Each time-bin is indexed by a time-depth, $l = \{0, 1, 2, \dots\}$, which, in turn, labels a time-step $\Delta t_l = 2^{-l} \Delta t_0$, where Δt_0 is the root time-step that is calculated in

the program initializations. For this reason, a time-step must be an ease-to-handle floating-point, so that divisions by two will not compromise the time integrity. Thus, the chosen initial time-steps must be numbers as 0.0078125, 0.00390625 etc. Numbers as $1/\pi$, $\exp-23$ etc. will round-off on divisions by two, inducing synchronization breaking, and the program will hang due to infinite loops or will at least incurs in wrong results.

An upper-limit time-step is calculated from stability/accuracy considerations, which may be associated to the local physical properties. Regarding synchronization, the definitive time-step is determined as the maximum power of two that is smaller than or equal to the initial value.

For pure gravitational purposes is adopted the maximum time-step as being half the cell's size divided by the particle's velocity (e.g., Jernigan and Porter, 1989), assuming the octal-tree itself to be the standard of rest. For SPH simulations, the maximum individual time-step is calculated by the Courant stability condition:

$$\tau_i^c = \frac{h_i}{\max\left(c_s, \sum_j \mu_{ij}, \dots\right)}, \tag{12}$$

so that we determine the particle time-step (time-bin) as being the maximum time-step satisfying:

$$\tau_k = 2^{-k} \tau_0 \leq \tau_i^c. \tag{13}$$

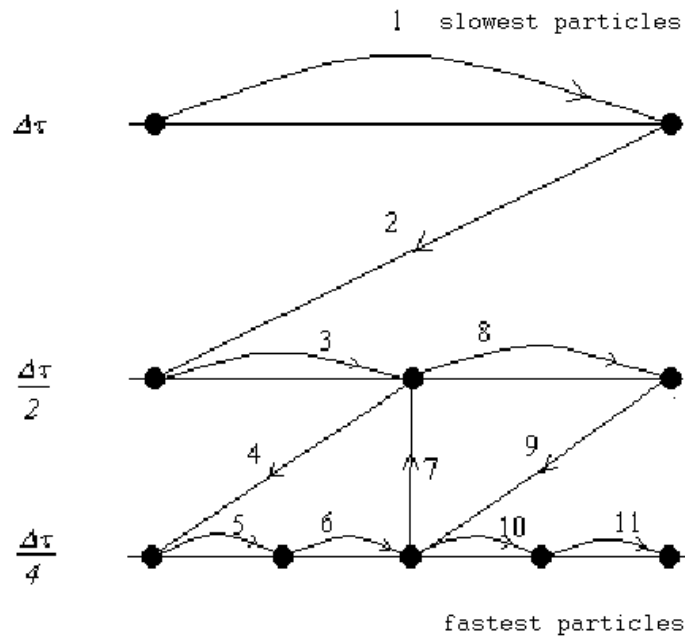


Figure 1. Hierarchical scheme for multiple time-step leapfrog.

The time-stepping algorithm descends recursively to the deepest time-bin and, before a descent, a time accumulator (indexed by the current time-bin) is set equal to zero. After the descent is exhausted, the current time-step is accumulated; the particles of the current time-bin are simultaneously integrated, until the returning condition of the accumulated time for the current level equals the time-step of the parent time-bin. The time-stepping order may be changed from pre-fixed integration to the post-fixed one by placing the leapfrog subroutine-call to the end of the time-bin descent subroutine-call. However, we have noticed that in some tests the post-fixed integration increases the numerical cooling in compressive shock simulations.

2.2. Modified leapfrog

The SPH equations of motion are integrated by means of a time-adaptive leapfrog, so that corrections due to the changing of time-steps are explicitly included in the finite-differences equations. A particle may jump from a time-bin to another so that along its history the particle may have visited several time-bins. The finite-differences scheme is derived in an approach similar of that given by Hernquist and Katz (1989), so that positions and specific thermal energies are time-centered and velocities are synchronized with the time-level. Thus, if the SPH particles are dynamically described by their position vector, $\mathbf{x}_{n+1/2}$, velocity, \mathbf{v}_n , and specific thermal energy, $u_{n+1/2}$, we have the following finite difference equations:

$$\mathbf{x}_{n+1/2} = \mathbf{x}_{n-1/2} + \bar{\tau}_n \mathbf{v}_n + \bar{\tau}_n \delta \tau_n \mathbf{a}_{n-1/2}, \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \tau_{n+1/2} \mathbf{a}_{n+1/2} \quad (15)$$

and

$$u_{n+1/2} = u_{n-1/2} + 0.5 \bar{\tau}_n (\dot{u}_{n+1/2} + \dot{u}_{n-1/2}) \quad (16)$$

where $\tau_n = 0.5(\tau_{n+1/2} + \tau_{n-1/2})$, $\delta \tau = 0.25(\tau_{n+1/2} - \tau_{n-1/2})$, and the time-step for the current time-bin is $\tau_{n+1/2}$ and the old individual time-step was $\tau_{n-1/2}$.

Time-centered velocities, appearing in the acceleration and in the specific thermal-energy-rate, are predicted by

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = 0.5(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \quad (17)$$

3. Results

The computer experiment was performed by impinging two spherical H_2 -gaseous masses onto each other, where each sphere is modeled by distributing 4000 particles by Monte Carlo. The initial non-dimensional velocity is equal 10, approximately 20 Mach for a non-dimensional specific thermal energy of 0.05. The magnetic field is initially unity, homogeneous and aligned with the collision direction.

The field deformation, and compression, in the shocking layer can be seen in Fig. (2).

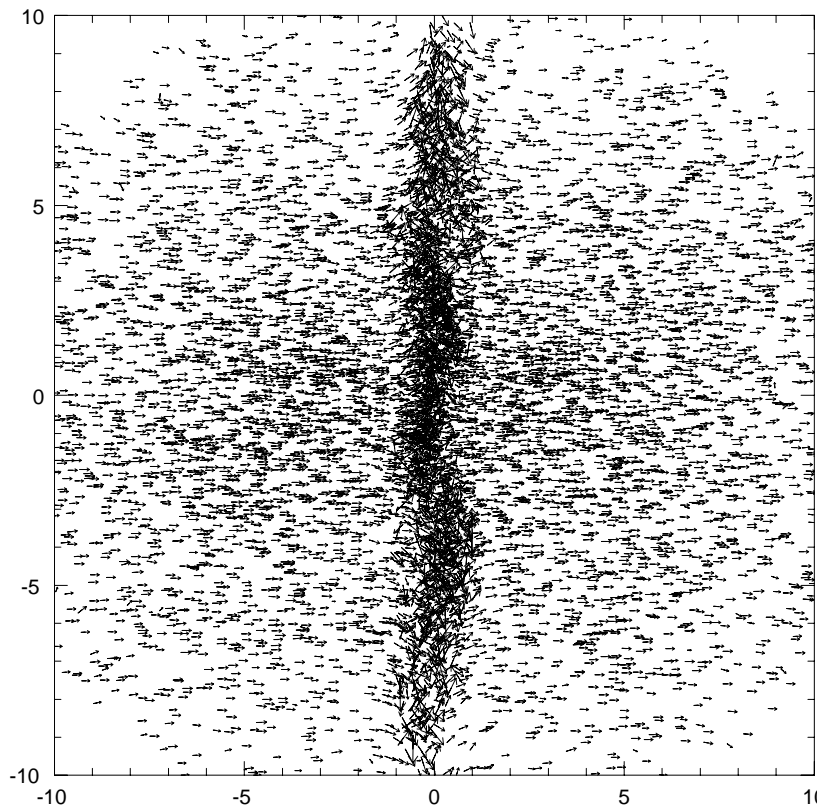


Figure 2. Edge-on projected view of the magnetic field assigned to each particle of the gas model.

The plot reveals the formation of vorticity cells caused by the magnetic field compression in the shocking layer (Fig.3).

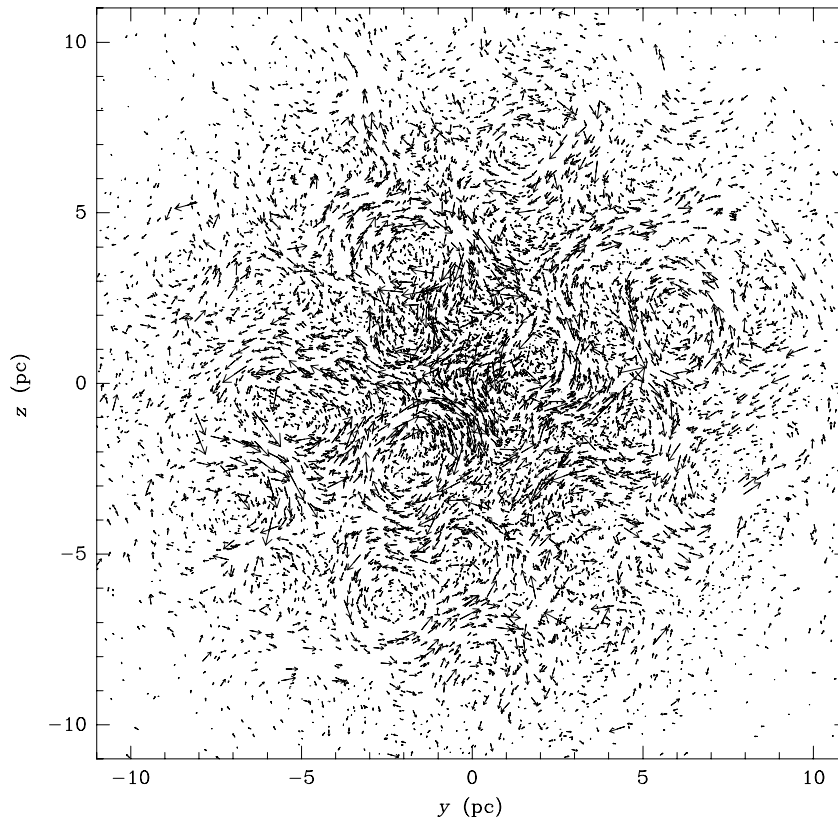


Figure 3. Vorticity distribution projected onto the collision (shock) plane.

4. Conclusion

The three dimensional head-on collision of two magnetized spherical gaseous masses was performed with the smoothed particle magnetohydrodynamics method.

The clouds were initially aligned with a homogeneous magnetic field. The evolution of the plasma equations obeys the magnetohydrodynamics approximation.

The collision front forms an accretion region in which the field is strongly compressed and deformed. By this reason, the accreting gas, confined by the field, forms a distribution of vorticity cells.

Acknowledgement

The authors are grateful to *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP, BR)* for financial support.

References

- Gingold, R. A. and Monaghan, J.J.,1977, "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical Stars", *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, Vol.181, pp. 375-389.
- Hernquist and Katz, 1989, "TREESPH – A Unification of SPH with the Hierarchical Tree Method", *Astrophysical Journal Supplement Series*, Vol.70, pp. 419-446.
- Jernigan and Porter, 1989 "A Tree Code with Logarithmic Reduction of Force Terms, Hierarchical Regularization of all Variables, and Explicit Accuracy Controls", *Astrophysical Journal Supplement Series*, Vol. 71, pp. 871-893.
- Lucy, L.,1977, "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis", *Astronomical Journal*, Vol.82, No.12, pp.1013-1024.
- Marinho,E.P. and Lépine, J.R.D., 2000, "SPH Simulations of Clumps Formation by Dissipative Collision of Molecular Clouds.I.Non Magnetic Case", *Astronomy and Astrophysics Supplement*, Vol. 142, pp. 165-179.
- Monaghan, J.J.,1992, "Smoothed Particle Hydrodynamics", *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol.30, pp.543-574.
- Phillips,G.J. and Monaghan,J.J.,1985, "A Numerical Method for Three-dimensional Simulations of Collapsing, Isothermal, Magnetic Gas Clouds", *Monthly Notices Royal Astronomical Society* Vol.216, pp. 883-895.

ANÁLISE DE MODELOS DE TURBULÊNCIA E DA IMPORTÂNCIA DO REFINAMENTO DA MALHA NA SIMULAÇÃO 3-D DO ESCOAMENTO GASOSO EM UM CICLONE

Alexandre de Paula Peres

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), C.P. 6066, CEP 13081-970, Campinas-SP, Brasil
e-mail: apperes@lmspq.feq.unicamp.br

Henry França Meier

Universidade Regional de Blumenau (FURB), C.P. 1507, CEP 89010-971, Blumenau-SC, Brasil
e-mail: meier@furb.rct-sc.br

Fábio Roberto Sulzbacher Kasper

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), C.P. 6066, CEP 13081-970, Campinas-SP, Brasil
e-mail: kasper@feq.unicamp.br

Wilson Kenzo Huziwara

PETROBRAS, Centro de Pesquisas e Desenvolvimento (CENPES), Rio de Janeiro-RJ, Brasil
e-mail: huziwara@cenpes.petrobras.com.br

Milton Mori

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), C.P. 6066, CEP 13081-970, Campinas-SP, Brasil
e-mail: mori@feq.unicamp.br

Resumo. O escoamento turbulento no interior ciclônico apresenta um complexo comportamento fluidodinâmico, sendo que a representação adequada deste escoamento depende da confecção de uma malha 3-D devidamente refinada e da escolha de um modelo de turbulência adequado, entre outros fatores. Para as simulações, utilizou-se o código computacional CFX 4.3 da AEA Technology, disponível no mercado. Estudos recentes têm observado que apenas modelos de turbulência anisotrópicos, como o DSM – “Differential Stress Model”, têm conseguido boa representação do escoamento gasoso vorticial presente em ciclones. Analisaram-se neste trabalho alguns esquemas de interpolação do modelo de turbulência DSM e os problemas de difusão numérica encontrados, além da extensão da importância do refinamento da malha tridimensional na resolução numérica do escoamento gasoso em um ciclone. Quatro malhas foram construídas (entre 12500 e 71000 células) e os resultados numéricos de distribuições do componente de velocidade tangencial obtidos em três velocidades de entrada do ar distintas (9,8m/s; 13,4m/s e 18,0m/s) foram comparados com os resultados experimentais de um estudo de caso advindo da literatura. Os modelos mostraram satisfatória capacidade de prever o comportamento fluidodinâmico quando foram utilizados esquemas de interpolação de alta ordem (“higher upwind” e “QUICK”) junto ao modelo DSM e uma malha numérica devidamente refinada.

Palavras chave: ciclone, modelos de turbulência, fluidodinâmica computacional, simulação tridimensional.

1. Introdução

O ciclone é um equipamento de simples construção e manutenção, largamente utilizado na separação de sólidos de uma corrente gasosa, e que apresenta em seu interior um complexo comportamento fluidodinâmico, o qual vem sendo melhor compreendido com a utilização das modernas técnicas de fluidodinâmica computacional (CFD), que com o contínuo avanço tecnológico vêm possibilitando a obtenção de resultados numéricos em um menor espaço de tempo.

O interesse renovado no estudo do ciclone é resultado das exigências de se removerem partículas cada vez menores das emissões industriais, de tal forma que se trabalhe com alta eficiência de separação, especificamente em condições de alta pressão e temperatura, mesmo que acarrete maiores perdas de carga em determinadas aplicações. Nessas condições extremas de operação, o ciclone é o único equipamento de separação que pode ser usado em escala industrial, já que, em princípio, sua utilização é limitada apenas pelo material de que é construído (Souza, 1994).

Trabalhos anteriores na área de fluidodinâmica computacional aplicada à simulação do escoamento em ciclones, tais como o de Peres et al (1999) e Meier et al (2000), entre outros, já vislumbravam a importância da utilização adequada de boas estratégias de solução dos modelos de turbulência, bem como de uma malha devidamente refinada, na boa representação dos resultados numéricos frente aos experimentais.

Este trabalho visa determinar a extensão da importância do refinamento da malha nas simulações tridimensionais, por intermédio da construção de quatro malhas (com número de células entre 12500 e 71100), analisando-se ainda os modelos de turbulência e os problemas de difusão numérica encontrados. Para tanto, apresenta-se um estudo de caso com um ciclone de coluna cilíndrica ($D=0,296m$) conforme o utilizado por Yuu et al (1978), em que os autores determinaram as distribuições do componente de velocidade tangencial em uma altura situada a 0,19m do topo do ciclone (pouco abaixo do “vortex finder”) em três velocidades de entrada do ar distintas (9,8m/s; 13,4m/s e 18,0m/s).

Para as simulações, utiliza-se o código computacional CFX 4.3 da AEA Technology, o qual consiste de um potente gerador de malhas e de um módulo de solução das equações de transporte, no qual as soluções numéricas são obtidas pelo método dos volumes finitos.

2. Modelagem Matemática

2.1. Equações da conservação

Os modelos matemáticos médias-temporais da decomposição de Reynolds podem ser escritos como segue:

2.1.1. Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1)$$

2.1.2. Equações do momento

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla P - \nabla \cdot (\tau + \overline{\rho u' u'}) + \rho g \quad (2)$$

em que u é o vetor velocidade, t é o tempo, ρ é a massa específica, g é o campo gravitacional, P é a pressão, τ é o tensor viscoso e $\overline{\rho u' u'}$ é o tensor de Reynolds.

2.2. Modelo de Turbulência

O modelo de turbulência usado nesse trabalho é o Modelo das Tensões Diferenciais, conhecido como DSM (Differential Stress Model), o qual, por ser um modelo anisotrópico, representa melhor o escoamento em ciclones, como demonstrado no trabalho de (Meier *et al*, 2000), em cujo trabalho, os modelos k- ϵ (isotrópico) e DSM foram comparados, empregando-se os esquemas de interpolação “upwind” e “QUICK”, em uma malha com 71000 células.

O modelo tem uma equação diferencial, ou equação de transporte, para cada componente dos tensores de Reynolds, podendo ser expressa por:

$$\frac{\partial (\overline{\rho v' v'})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho v' v' v'}) = \nabla \cdot \left[\rho \frac{C_s}{\sigma_{DS}} \frac{K}{\epsilon} \overline{v' v'} (\nabla \cdot \overline{v' v'})^T \right] + \delta - \phi - \frac{2}{3} \rho \epsilon \mathbf{I} \quad (3)$$

sendo que δ é o tensor da tensão de cisalhamento e é dado por:

$$\delta = \rho \left[\overline{v' v'} (\nabla v)^T + (\nabla v) \overline{v' v'} \right] \quad (4)$$

e ϕ é a correlação pressão-tensão dado para fluxo incompressível como:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (5)$$

$$\phi_1 = -\rho C_{1S} \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{v' v'} - \frac{2}{3} K \mathbf{I} \right) \quad (6)$$

$$\phi_2 = -C_{2S} \left(\mathbf{P} - \frac{2}{3} P \mathbf{I} \right) \quad (7)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade, $C_s(0,22)$, $C_{1S}(2,50)$, $C_{2S}(0,55)$ e $\sigma_{DS}(1,0)$ são constantes do modelo.

A taxa de dissipação da energia cinética turbulenta é dada por:

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \epsilon) = \nabla \cdot \left[\rho \frac{C_s}{\sigma_\epsilon} \frac{k}{\epsilon} (\overline{v' v'}) [\nabla \epsilon] \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (8)$$

com k sendo obtido diretamente de sua definição, isto é, $(k = 1/2 \overline{v'^2})$ e $C_1(1,44)$, $C_2(1,92)$ são constantes do modelo.

3. Métodos Numéricos e Condições de Contorno

Os métodos numéricos usados na solução das equações diferenciais parciais são o volume finito co-localizado, acoplamento pressão velocidade *SIMPLEC* (*SIMPLE Consistent*), com esquemas de interpolação: “upwind”, “higher

upwind” e “QUICK” com uso de fatores de relaxação. As equações algébricas são resolvidas pelo algoritmo *AMG* (Algebraic Multi-Grid) e a geração da malha é feita por intermédio da técnica dos multi-blocos. Patankar (1980) e Maliska (1995) apresentam detalhes dos métodos empregados.

As condições de contorno para a entrada são definidas como perfil de velocidade uniforme, já para o tubo de saída é definida como continuidade de fluxo. Nas paredes a velocidade é nula, sendo que nas suas proximidades as variações nas propriedades turbulentas são ajustadas por funções de parede, as quais são formuladas usando o conceito de que a região próxima da parede é uma área de tensão de cisalhamento constante, de acordo com evidências experimentais para uma gama de escoamentos, com isto, assume-se uma distribuição de velocidade logarítmica próximo à parede (Manual do CFX, 2000).

4. Estudo de Caso

O estudo de caso utilizado é o trabalho experimental de Yuu et all (1978), o qual foi conduzido em um ciclone com seção cilíndrica de 0,296m de diâmetro, como mostrado na Tab. 1, que apresenta as dimensões geométricas do ciclone em estudo.

Tabela 1. Dimensões características do ciclone de Yuu et all (1978)

$D_c(m)$	$D_s(m)$	$D_l(m)$	$L_c(m)$	$L_c(m)$	$L_s(m)$	$L_{co}(m)$
0,296	0,152	0,075	0,11	0,06	0,16	0,40

A montagem é dotada de uma sonda tipo Pitot, para as medidas de distribuição radial de velocidades, situada a 0,19m do topo do ciclone. O estudo contemplou três vazões distintas de alimentação de ar, ou seja, três velocidades de entrada do ar, sendo 9,8m/s, 13,4 m/s e 18,0 m/s . O desenho esquemático do ciclone é apresentado na Fig. 1.

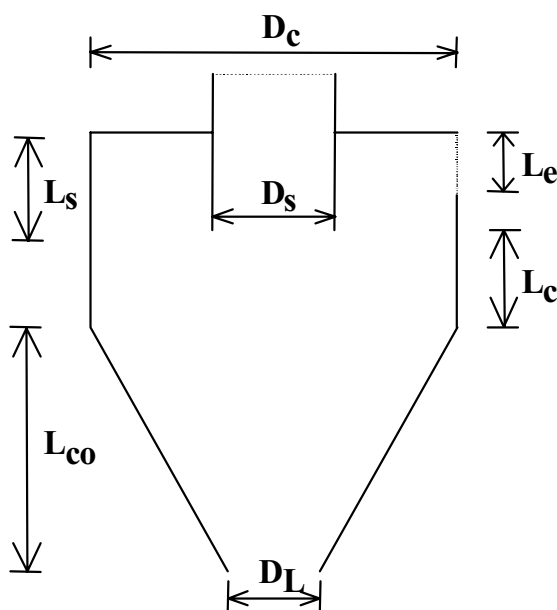


Figura 1. Desenho esquemático do ciclone

5. Resultados e Discussões

5.1. Extensão da Importância do Refinamento das Malhas

Os resultados numéricos foram obtidos em uma estação de trabalho SUN-UNIX ULTRA 10 com a utilização do código CFX-4.3. As 4 malhas em estudo, da menos refinada à mais robusta, exemplificadas na Fig. 2, foram construídas por intermédio do pré-processador “build” presente no código e com o número de células descritos na Tab.2. Para as simulações foi utilizada uma precisão de 10^{-8} na norma euclidian para o resíduo de massa. Todos os resultados apresentados neste tópico foram obtidos com velocidade de entrada do ar de 9,8m/s.

Tabela 2. Número de células das malhas

Malha	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
Número de células	12500	18900	51000	71100

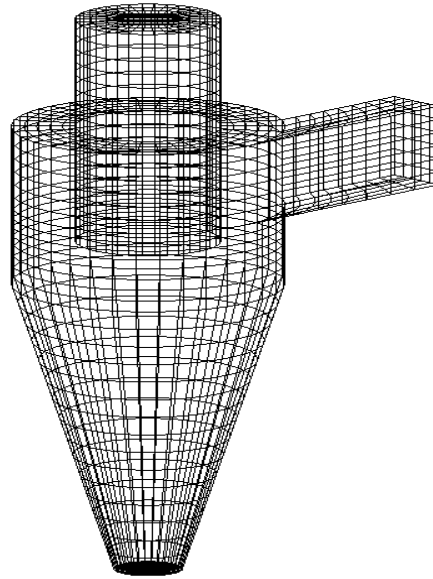


Figura 2. Malha 3-D do ciclone

Avaliaram-se neste trabalho as distribuições do componente de velocidade tangencial simuladas pelo CFX em cada uma das quatro malhas construídas, as quais foram comparadas com os dados obtidos experimentalmente. Em todas as simulações efetuadas, trabalhou-se com o modelo de turbulência DSM (Differential Stress Model), já que o mesmo se mostrou o modelo mais adequado para a representação do escoamento vorticial do gás em ciclones (Meier et all, 2000).

Os esquemas de interpolação “upwind” (primeira ordem), “higher upwind” (segunda ordem) e “QUICK” (terceira ordem) [Manual do CFX.4.3, 2000] foram utilizados na procura da obtenção da melhor representação do escoamento. Inicialmente, utilizou-se a malha 1, pouco refinada, para a obtenção de resultados preliminares de distribuição do componente de velocidade tangencial em um curto espaço de tempo.

A Figura 3 apresenta os resultados numéricos obtidos com a malha 1, da qual constatou-se que o esquema de interpolação de primeira ordem “upwind” não representa bem a distribuição de velocidades no interior ciclônico, já que a distribuição de velocidades com o pico de velocidade característica de ciclones não é obtida, isto pode ser atribuído à difusão numérica (mecanismo de suavização dos gradientes nas soluções numéricas), conforme Maliska (1995). Já para os esquemas de alta ordem, a representação é qualitativamente melhor, já que a difusão numérica é atenuada

Deve ser salientado que para que se obtivesse a convergência, quando utilizados esquemas de alta ordem, foi necessária a adoção da estratégia de se simular o escoamento em regime transiente até se atingir o estado estacionário (tempo real de aproximadamente 1 segundo).

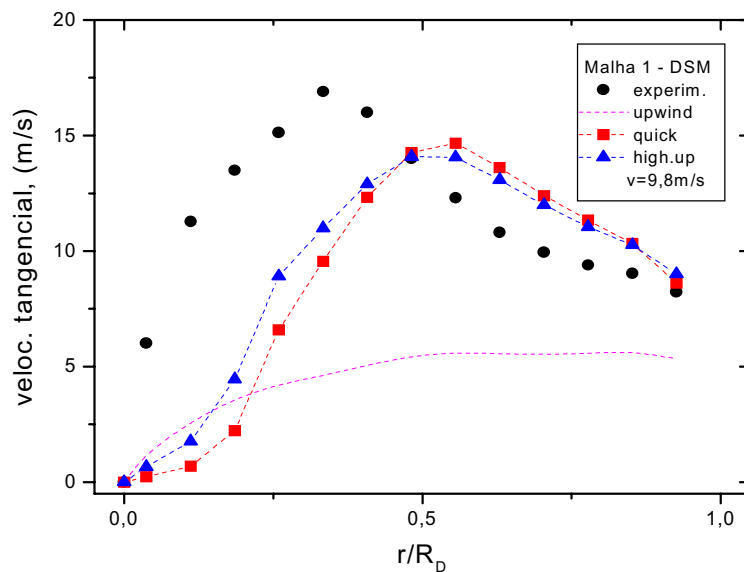


Figura 3. Distribuições do componente de velocidade tangencial para a Malha 1.

Constatado que os esquemas de interpolação “higher upwind” e “QUICK” se mostraram os mais adequados para o fechamento do modelo de turbulência empregado, partiu-se para a comparação entre as malhas numéricas. As Figuras (4) e (5) apresentam os resultados numéricos obtidos com os esquemas “higher upwind” e “QUICK”, comparando-se as quatro malhas construídas com os resultados obtidos experimentalmente.

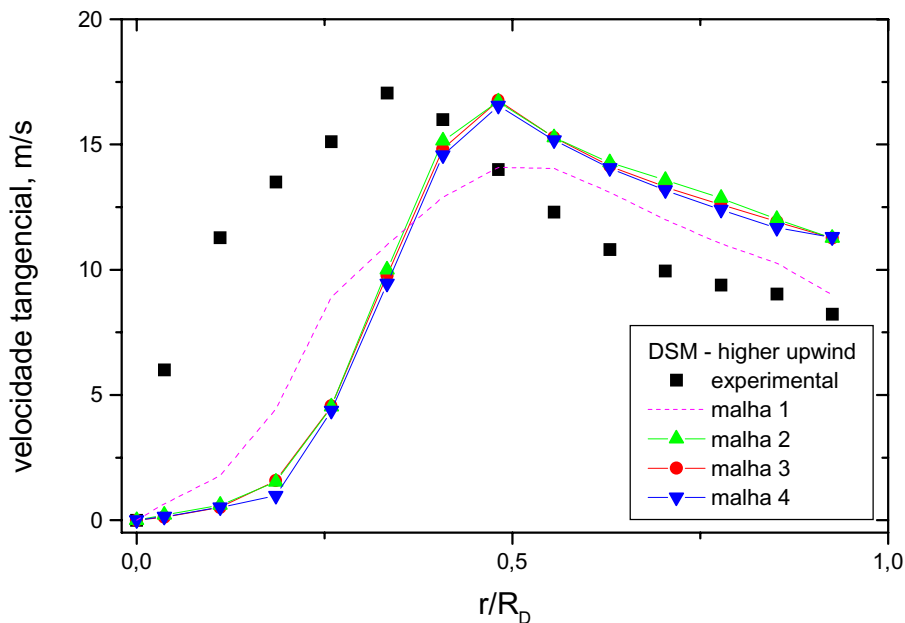


Figura 4. Comparação entre as malhas utilizando-se o esquema de interpolação “higher upwind”.

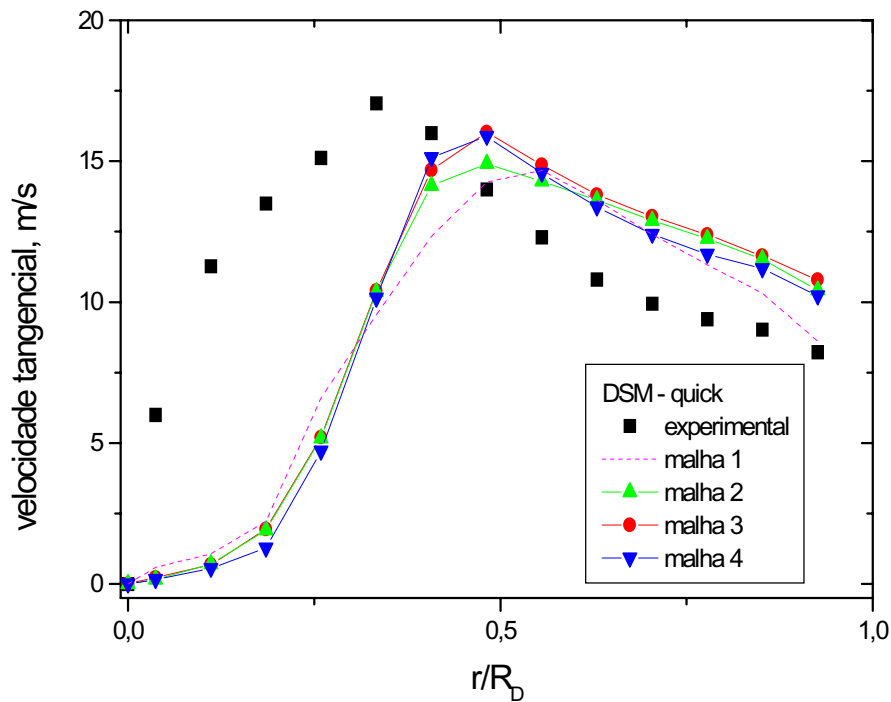


Figura 5. Comparação entre as malhas utilizando-se o esquema de interpolação “QUICK”.

Verificou-se, pela inspeção da Fig. (4), que a única diferença significativa nos resultados obtidos quando da utilização do esquema “higher upwind” foi encontrada entre a malha 1 (12500 células) e as demais. Já a Fig. (5), com o esquema “QUICK”, mostrou que somente as malhas 3 e 4 apresentaram resultados praticamente iguais, constatando-se que há deslocamento das curvas de distribuição de velocidade para todas as malhas estudadas.

5.2. Comparação entre os esquemas de interpolação para as 3 velocidades de entrada do ar

Para as outras velocidades de entrada do ar ($v=13,4\text{m/s}$ e $v=18,0\text{m/s}$) encontradas no trabalho de Yuu et all (1978), optou-se pela malha 3 para as simulações comparativas entre os esquemas de interpolação. A escolha deveu-se ao fato de que a malha 3 apresentou resultados bastante semelhantes aos da malha 4, com a vantagem de requerer menor tempo computacional devido ao menor número de células. As Fig. (6), (7) e (8) ilustram os resultados obtidos para as velocidades de $9,8\text{m/s}$, $13,4\text{m/s}$ e de $18,0\text{m/s}$.

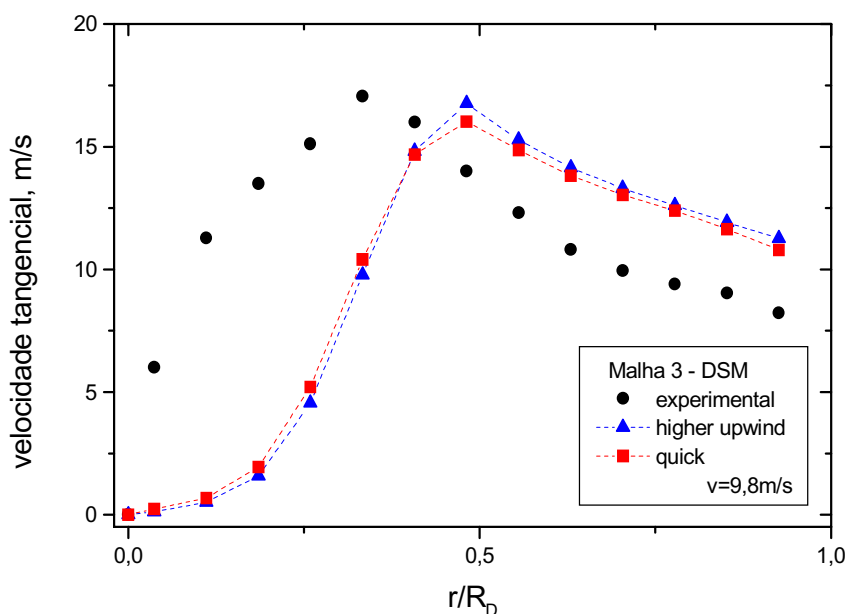


Figura 6. Comparação entre os modelos de interpolação “higher upwind” e “QUICK” ($v=9,8\text{m/s}$).

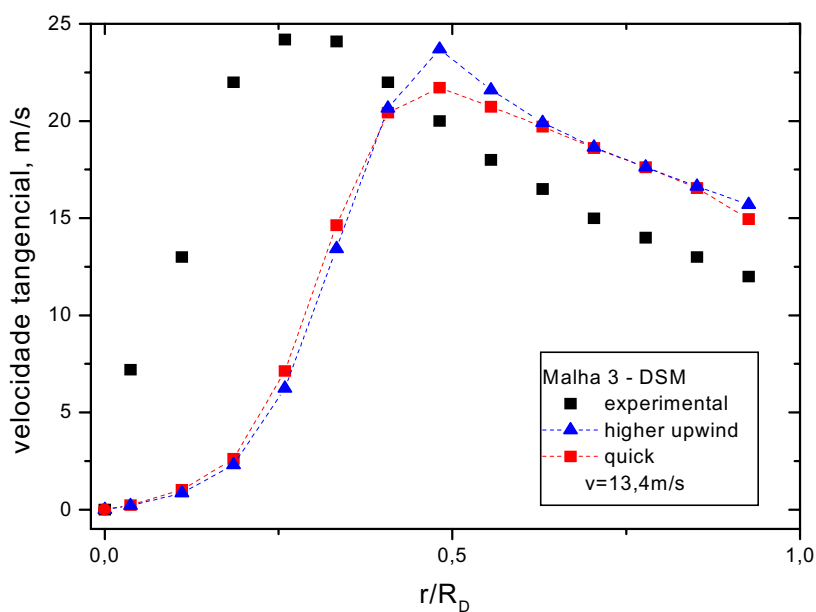


Figura 7. Comparação entre os modelos de interpolação “higher upwind” e “QUICK” ($v=13,4\text{m/s}$).

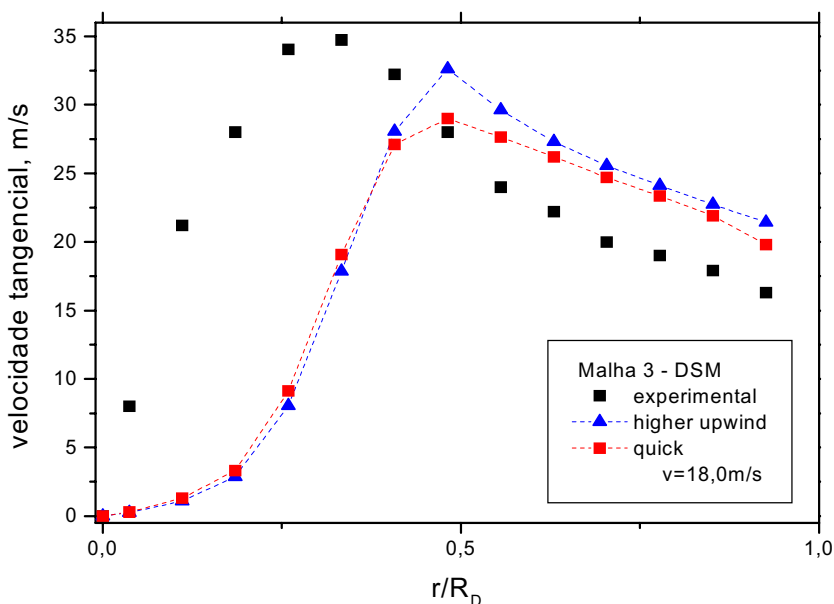


Figura 8. Comparação entre os modelos de interpolação “higher upwind” e “QUICK” ($v=18,0\text{m/s}$).

Constatou-se, para as três velocidades de entrada do ar, que o esquema de interpolação “higher upwind” propiciou picos de velocidade tangencial superiores àqueles do esquema “QUICK” e que à medida que houve aumento da velocidade de entrada do ar, as diferenças entre os esquemas de interpolação foram mais significativas.

Os mapeamentos dos campos de velocidade e pressão ao longo de todo o ciclone são apresentadas nas Fig. (9a) e (9b), para a velocidade de entrada do ar de $13,4\text{m/s}$, utilizando-se a malha 3 e com o esquema de interpolação “higher upwind”. Observou-se, pela inspeção da Fig. (9a), que a preservação da alta velocidade de giro ao longo do equipamento, quase o dobro da velocidade de entrada, foi bem caracterizada nas simulações, assim como uma larga região de baixa pressão próxima do eixo de simetria apresentada na Fig. (9b).

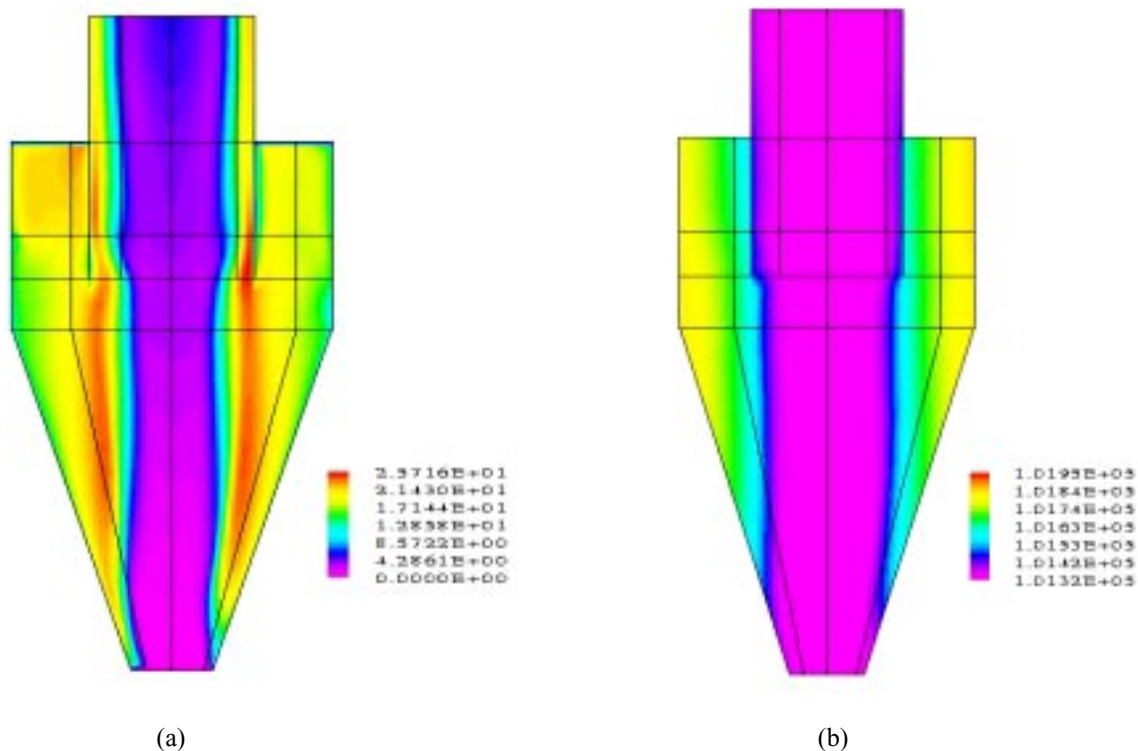


Figura 9. Mapeamento dos campos de (a) velocidade e (b) pressão preditos pelo CFX.

Para melhor ilustrar quantitativamente os resultados numéricos obtidos, elaborou-se a Tab. 3, na qual foram apresentados os valores máximos do componente de velocidade tangencial para todas as simulações realizadas neste trabalho. Constatou-se, em todos os casos, que o esquema “higher upwind” propiciou maiores picos de velocidade tangencial, bastante próximos dos valores experimentais, quando comparados com o esquema “QUICK”.

Tabela 3. Comparação entre os valores máximos da velocidade tangencial experimentais e simulados no CFX 4.3.

veloc. tangencial	“higher upwind”	“QUICK”	“higher upwind”	“QUICK”	“higher upwind”	“QUICK”
máxima (m/s)	$v_0 = 9,8$ (v_{\max} exp.= 17,0)		$v_0 = 13,4$ (v_{\max} exp.= 24,2)		$v_0 = 18,0$ (v_{\max} exp.= 34,8)	
Malha 1	14,1	14,7				
Malha 2	16,7	14,9				
Malha 3	16,8	16,0	23,7	21,7	32,6	29,0
Malha 4	16,6	15,9				

6. Conclusões

O esquema de interpolação “upwind”, mesmo utilizando-se o modelo de turbulência anisotrópico DSM, mostrou-se inadequado para a representação de escoamentos de alta complexidade tais quais os encontrados em ciclones, já esquemas de alta ordem, como o “higher upwind” e o “QUICK”, representaram qualitativamente bem as curvas de distribuição do componente de velocidade tangencial no interior ciclônico, pois diminuem a difusão numérica.

Constatou-se que à medida que se aumentou a velocidade de entrada do ar no equipamento, o desempenho do esquema “higher upwind” foi superior ao do esquema “QUICK”, com a vantagem do “higher upwind” ser um esquema de menor ordem que o “QUICK”, apresentando assim menores problemas de convergência e estabilidade numérica.

Observou-se que ocorreu um deslocamento das curvas de distribuição de velocidade para todas as malhas estudadas, prejudicando uma melhor representação dos resultados numéricos frente aos experimentais. Estudos para o aprimoramento dos resultados vêm sendo desenvolvidos em nossos laboratórios.

Conclui-se que o refinamento da malha numérica em princípio contribuiu para sensível melhora dos resultados numéricos quando se comparou uma malha de 12500 células com uma de 71100 células, entretanto, verificou-se que a malha 3 (51000 células) já foi adequadamente refinada, um maior refinamento desta malha em nada melhorou o desempenho das simulações, tornando-se injustificável a utilização de uma malha extremamente refinada (malha 4) em virtude do tempo computacional requerido ser muito maior.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem à PETROBRAS, Petróleo Brasileiro S.A., pelo suporte financeiro que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

8. Nomenclatura

Letras Latinas

D_C – diâmetro cilíndrico do ciclone;
 D_S – diâmetro do tubo de saída do gás;
 D_L – diâmetro do tubo de saída inferior;
 exp. – experimental;
 g – aceleração da gravidade;
 I – tensor identidade;
 k – energia cinética turbulenta;
 L_C – altura da seção cilíndrica;
 L_{CO} – altura da seção cônica;
 L_e – altura da seção de entrada;
 L_S – altura do tubo de saída do gás;
 P – pressão;
 v – componente da velocidade;
 t – tempo.

Letras Gregas

ϵ - taxa de dissipação da energia cinética turbulenta;
 ϕ - correlação pressão-tensão;
 ρ - massa específica;

δ - tensor da tensão de cisalhamento;

Subscritos

0 – entrada;
max- máximo.

Sobrescritos

- significa propriedade média-temporal;
' - significa propriedade de flutuação;
T –transposto do tensor ou matriz.

9. Referências

- Manual CFX-4.3: Solver, 2000, AEA Techno-logy, Reino Unido.
- Maliska, C.R., 1995, “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional: Fundamentos, Coordenadas Generalizadas”, LTC Editora, Brasil, 424p.
- Meier, H.F., Kasper, F.S., Peres, A.P., Huziwara, W.K., Mori, M., 2000, “Comparison Between Turbulence Models for 3-D Turbulent Flows in Cyclones”, Proceedings of the XXI CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, Brasil, em CD-rom
- Patankar, S., 1980, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Ed. Hemisphere Publishing Corp., USA.
- Peres, A.P., Meier, H.F., Mori, M., 1999, “Modelagem e Simulação Tridimensional do Escoamento Turbulento do Gás com Particulados em um Ciclone utilizando o Código CFX: Análise do Tempo de Residência”, Anais do XXVII COBRASP - Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, Campos do Jordão, Brasil, pp.437-442.
- Souza, D.R.C. 1994, “Desenvolvimento de um Software Aplicativo em Linguagem C para Cálculo de Eficiência e Perda de Carga de Ciclones”, Dissertação de Mestrado, FEQ/UNICAMP, Campinas, Brasil, 200 p.
- Yuu, S., Jotaki, T; Yoshida, K., 1978, “The Reduction of Pressure Drop due to Dust Loading in a Conventional Cyclone”, Chemical Engineering Science, v.33, pp.1573-1580.

ANALYSIS OF TURBULENCE MODELS AND IMPORTANCE OF GRID REFINEMENT IN 3-D SIMULATION OF GAS FLOW IN A CYCLONE

Alexandre de Paula Peres

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), C..P. 6066, CEP 13081-970, Campinas-SP, Brasil
e-mail: apperes@lmspq.feq.unicamp.br

Henry França Meier

Universidade Regional de Blumenau (FURB), C.P. 1507, CEP 89010-971, Blumenau-SC, Brasil
e-mail: meier@furb.rct-sc.br

Fábio Roberto Sulzbacher Kasper

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), C..P. 6066, CEP 13081-970, Campinas-SP, Brasil
e-mail: kasper@feq.unicamp.br

Wilson Kenzo Huziwara

PETROBRAS, Centro de Pesquisas e Desenvolvimento (CENPES), Rio de Janeiro-RJ, Brasil
e-mail: huziwara@cenpes.petrobras.com.br

Milton Mori

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), C..P. 6066, CEP 13081-970, Campinas-SP, Brasil
e-mail: mori@feq.unicamp.br

Abstract. *The gas turbulent swirling flow in a cyclone separator presents a complex fluid-dynamic behavior, a satisfactory representation of the flow is function of grid refinement and of the choice of the turbulence model, among others factors. A three-dimensional simulation of the turbulent gas flow was carried out using the computational fluid-dynamics code CFX 4.3 available on the market. Recent studies have been observed that turbulence models based on the assumption of isotropy like standard k-ε turbulence model is inapplicable for the swirling flow in a cyclone. The aim of this work was to analyze the anisotropic turbulence models, using Differential Stress Model – DSM (using first and higher order interpolation schemes). Four grids cells were generated (between 12500 and 71000) by using CFX-Build and the numerical results showed the importance of grid refinement in the solution of CFD problems. The models showed a satisfactory capability of predicting the fluid dynamics behavior and the numerical solutions of the distribution of velocity components and pressure have been tested against experimental results in a cyclone with tangential entrance found in the literature. The comparison of numerical results with experimental data showed that a reasonable agreement can be achieved using the second order closure Differential Stress Model and a numerical grid with good refinement.*

Keywords. *Cyclone, turbulence models, CFD, 3-D simulation.*

Uma Comparação de Algumas Técnicas Multigrid com um Esquema de Interpolação de Alta Ordem

Hélio Carlos Bortolon

Dep. de Engenharia Térmica e Fluidos, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp
heliocb@fem.unicamp.br

Luiz Felipe Mendes de Moura

Dep. de Engenharia Térmica e Fluidos, Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp
felipe@fem.unicamp.br

Resumo. A solução numérica de fenômenos de transporte complexos precisa de um quadro no qual ela seja factível, especialmente quanto ao tempo consumido, para permitir o uso de algoritmos de projeto automático. Este artigo analisa algumas formas de Multigrid com um Método de Volumes Finitos de alta ordem para problemas convectivos e difusivos. As variações incluem o modo de calcular a matriz de coeficientes dos níveis grossos (matrizes grossas) e de transferir as soluções para as malhas finas (projeção). Novas formas para a matriz grossa e para a projeção são propostas e comparadas com as técnicas tradicionais em problemas indo da difusão com fortes variações nos coeficientes a convecção com números de Péclet de moderados a altos.

Palavras chave: Multigrid, Convecção-difusão, Projeção dependente do operador.

1. Introdução

Uma técnica que vem se tornando bastante popular na solução de grandes sistemas lineares, oriundos da discretização de equações de transporte convectivo, é a da solução em múltiplos níveis (Multilevel ou Multigrid).

Nas soluções com uma única malha (nível), a taxa de queda do resíduo do sistema linear aproxima-se, com o passar das iterações, assintoticamente da unidade (estagnação). Isso se deve ao fato de que apenas as componentes harmônicas vistas como oscilantes pela malha são eficientemente reduzidas, ficando as suaves (comprimento de onda de vários espaçamentos de malha) quase sem redução.

No Multigrid novas discretizações são geradas, com malhas mais grossas, de forma que as componentes outrora suaves passam a ser consideradas oscilantes, e são eficientemente reduzidas. A comunicação entre as malhas dá-se por operações de projeção (malha grossa para malha fina) e restrição (fina para grossa).

Trabalhos básicos nesta área são os de Brandt (1977), Wesseling(1992), que dão uma ótima introdução ao tema. Muito material está livremente disponível na Internet (www.mgnet.org).

2. O Método Multigrid

No MG a solução iterativa do sistema linear é levada adiante, numa determinada malha, até que o resíduo esteja caindo a uma taxa acima de um limite pré-estabelecido, ou seja,

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|r^{(k-1)}\|} \leq \varepsilon_{k, \max}$$

após o que o resíduo é transferido para a malha imediatamente mais grossa (restrição), onde o sistema será resolvido novamente até atingir o limite acima, e assim por diante até um número máximo de malhas. Em seguida, as soluções das malhas grossas são interpoladas (projeção) para as finas e usadas como correções. Há uma outra forma de determinar quando passar de um nível ao outro: é a fixação de um número de iterações na solução iterativa em cada nível, o que exigiria executar o ciclo diversas vezes, com o conseqüente aumento das operações de projeção e restrição. Este modo, entretanto, é o predileto para a implementação do MG como pré-condicionador para métodos tipo-Lanczos, como mostrado por Osterlee e Washio (1998), ou quando se aceita uma solução não muito precisa do sistema, como quando o operador A vem de uma linearização de uma equação qualquer, e deverá ser atualizado periodicamente.

Há vários arranjos possíveis para a seqüência na qual se visita as malhas, ou ciclos, e o adotado aqui é o tipo V, descrito no algoritmo a seguir.

$$\text{MGV}(A^{(m)}, \phi^0, b, m)$$

$$\text{Se } m < m_{\max}$$

$$\phi = S(A^{(m)}, b, \varepsilon_{\max}, \phi^0)$$

$$r = b - A^{(m)}\phi$$

$$\bar{r} = Rr$$

$$\text{MGV}(A^{(m+1)}, \bar{\phi}, \bar{r}, m + 1)$$

$$\phi = \phi + P\bar{\phi}$$

$$\phi = S(A^{(m)}, b, \varepsilon_{\max}, \phi)$$

Senão

$$\phi = S(A^{(m)}, b, \varepsilon_{\max}, \phi^0)$$

Fim

Fecho de MGV

Neste algoritmo os operadores R e P são os de restrição e projeção, respectivamente, o operador $A^{(m)}$ é aquele do sistema da m-ésima malha e o operador S representa a solução iterativa do sistema linear nessa malha. Para o presente trabalho escolheu-se a fatoração LU incompleta, sem entradas adicionais, ILU(0), como método de solução iterativa. O sistema é resolvido na forma de correção, sendo usado um fator de relaxação para garantir que a aplicação desta correção sempre leve a um mínimo de resíduo, como colocado por Heinrichs (1988).

A recursão do ciclo V faz com que a solução em cada nível seja feita uma única vez. Há ciclos com mais de uma solução por nível como o W e o F (Wesseling, 1992).

2. 1. Formação das malhas grossas

Uma das formas de conseguir definir as várias malhas é por aglomeração de volumes que consiste em, no caso bidimensional, reunir quatro volumes finos para formar um volume da malha imediatamente mais grossa, como mostra a Fig. (1).

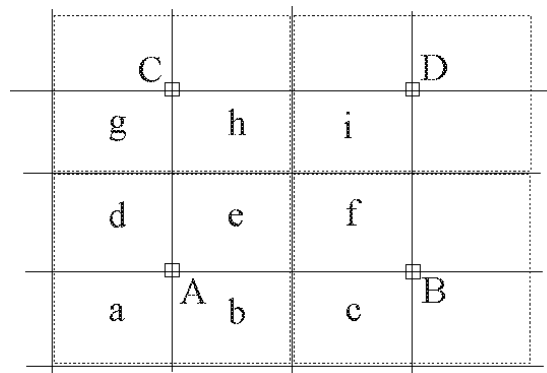


Figura 1. Formação dos volumes grossos por agrupamento. Os pontilhados definem os volumes grossos.

Esta é a forma empregada, por exemplo, por Ersland e Teigland (1993), Molenaar(1996) e Hutchinson e Raithby (1986).

Na apresentação destes métodos, que se fará a seguir, parte-se da premissa de que o leitor já esteja habituado à terminologia usada no Método dos Volumes Finitos.

2.2. Definição dos operadores nas malhas grossas

Os diversos autores usam modos diferentes na formação das matrizes de coeficientes para as malhas grossas. Por exemplo Hutchinson e Raithby (1986), para formar o coeficiente leste do ponto A (fazendo referência à Fig. (1)), usaram

$$\bar{A}_A^E = A_e^E + A_b^E \tag{1}$$

com expressões semelhantes para os demais coeficientes, finalizando com o cálculo do coeficiente diagonal

$$\bar{A}_A^P = \sum_{nb} \bar{A}_A^{nb} \tag{2}$$

Ersland e Teigland (1993), ao resolver um problema tipo-difusivo, notaram a necessidade de escalonar a soma para considerar o aumento das distâncias, entre os nós dos volumes aglomerados, nas quais a transferência difusiva ocorreria. Desta observação resulta, para o mesmo coeficiente leste

$$\bar{A}_A^E = \frac{1}{2} (A_e^E + A_b^E) \tag{3}$$

O coeficiente diagonal permaneceu calculado da mesma forma. Esta forma também é empregada por Mavriplis e Venkatakrisnan (1995) para problemas envolvendo advecção-difusão.

Já Molenaar (1996), para resolver um problema de difusão-reação fez, antes da montagem do coeficiente diagonal, uma separação dos diagonais dos volumes aglomerados para considerar separadamente o transporte, que foi escalonado como em Ersland e Teigland (1993), e a reação. A expressão resultante ficou

$$\bar{A}_A^P = \sum_{nb} \bar{A}_A^{nb} + \sum_{\alpha=a,b,d,e} (S^P V)_\alpha \tag{4}$$

sendo

$$(S^P V)_\alpha = A_\alpha^P - \sum_{nb} A_\alpha^{nb} \tag{5}$$

No presente trabalho, ao lidar com problemas envolvendo advecção-difusão, usa-se a abordagem de Ersland e Teigland (1993), extendendo a separação usada por Molenaar (1996) também aos coeficientes de troca (não-diagonais), ou seja,

$$A_\alpha^E = C_\alpha^E + D_\alpha^E, \quad \alpha = b, e \tag{6}$$

$$\bar{A}_A^E = C_b^E + C_e^E + \frac{1}{2} (D_b^E + D_e^E) \tag{7}$$

sendo C_α^E a parte advectiva do coeficiente, se houver e D_α^E a parte difusiva dos coeficientes.

O coeficiente diagonal continua calculado como na Eq. (4).

2.3. Operações de transferência entre malhas

2.3.1. Transferência dos resíduos - Restrição

Para a restrição dos resíduos usou-se uma soma pura e simples daqueles dos volumes constituintes de um volume grosso, ou seja, para o volume grosso A da Fig. (1),

$$\bar{r}_A = r_a + r_b + r_d + r_e \tag{8}$$

2.3.2. Interpolação da correção - Projeção

Para a transferência de correções uma grande parte dos autores usa interpolação linear, mas uma observação dos bons resultados obtidos por autores que usam interpolação com fatores peso dependentes dos coeficientes de troca (de Zeeuw, 1990; Alcoufe et al., 1981) evidencia que se deve buscar uma forma de fazer o mesmo no ambiente da aglomeração de volumes.

Não há, até onde os presentes autores saibam, métodos de interpolação baseados no operador para malhas formadas por aglomeração em volumes finitos.

As expressões serão deduzidas para um caso unidimensional e, então, extendidas para o caso bidimensional.

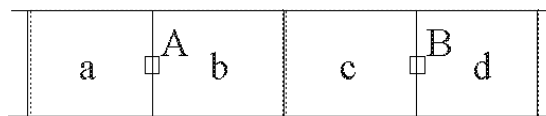


Figura 2. Nomenclatura para cálculo dos fatores de interpolação.

Para o volume b na Fig. (2), começa-se criando coeficientes que o liguem a pontos situados em A e B com uma remontagem, com os devidos escalonamentos da parte difusiva, daqueles que o ligam aos volumes a e c. Assim

$$\chi_b^W = 2D_b^W + C_b^W \tag{9}$$

$$\chi_b^E = \frac{2}{3}D_b^E + C_b^E \tag{10}$$

$$\chi_b^P = \chi_b^E + \chi_b^W + (S^P V)_b \tag{11}$$

A interpolação para o volume b fica

$$\phi'_b = \frac{(\chi_b^E \bar{\phi}_A + \chi_b^W \bar{\phi}_B)}{\chi_b^P} \tag{12}$$

É claro que se não houver advecção, a difusividade for constante e não houver termo de reação esta interpolação volta à forma de uma linear entre A e B.

Para o caso bidimensional os pesos são levantados por direção e depois multiplicados, ou seja, fazendo referência à Fig. (1),

$$\phi'_e = \frac{(\chi_e^S \chi_e^W \bar{\phi}_A + \chi_e^S \chi_e^E \bar{\phi}_B + \chi_e^N \chi_e^W \bar{\phi}_C + \chi_e^N \chi_e^E \bar{\phi}_D)}{(\chi_e^E + \chi_e^W)(\chi_e^N + \chi_e^S) + (S^P V)_e} \tag{13}$$

Para o caso da interpolação bilinear, a expressão seria simplesmente

$$\phi'_e = \frac{(9\bar{\phi}_A + 3\bar{\phi}_B + 3\bar{\phi}_C + \bar{\phi}_D)}{16} \tag{14}$$

3. Método dos Volumes Finitos

A equação básica de transporte de uma propriedade volumétrica ϕ , escrita na forma de fluxos, fica

$$\nabla \cdot \vec{J} = S^c + S^p \phi \tag{15}$$

Sendo $J_i = \rho u_i \phi - \gamma (\partial \phi / \partial x_i)$ a i-ésima componente do vetor fluxo.

Esta equação é discretizada pelo Método dos Volumes Finitos na forma descrita por Varejão (1979), Varejão et al. (1991a,b) e Karki et al. (1990), e será apenas brevemente descrita aqui.

Para tal método, chamado *Flux-Spline*, a equação básica a resolver é dada por

$$\rho u \phi - \gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\Delta J}{\Delta x} x + J_w \tag{16}$$

onde $\Delta J = J_e - J_w$, com os subscritos referindo-se às faces do volume P, e os fatores geométricos são os mostrados na Fig. (3).

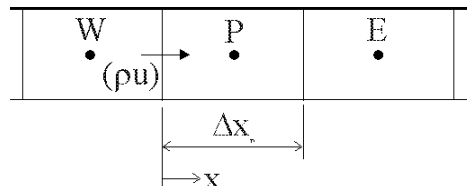


Figura 3. Termos para a equação básica.

A solução desta equação para ϕ nos intervalos dos volumes P e W, separadamente, e a imposição da continuidade de ϕ na interface w resulta numa equação para J_w

$$J_w = \{F_w (J_w - J_e) + B_w (J_w - J_{ww})\}_{HO} + \{E_w^W \phi_w - E_w^P \phi_p\}_{LO} \quad (17)$$

que pode ser substituída na equação de transporte discretizada

$$(J_e - J_w) = (S_p^c + S_p^p \phi_p) \Delta x_p \quad (18)$$

para gerar a linha de P no sistema de equações

$$A_p^W \phi_w + A_p^P \phi_p + A_p^E \phi_e = b_p \quad (19)$$

Deve-se notar que os coeficientes na matriz são os mesmos do esquema *Power-Law* de Patankar (1978), ficando a contribuição de alta ordem (HO na Eq. (17)) contida no termo fonte e avaliada explicitamente. Usou-se ainda uma relaxação para aumentar a dominância diagonal da matriz final, facilitando sua solução iterativa, na forma de passo fictício de tempo,

$$A_p^P = (\sum_{nb} A_p^{nb} - (S^p V)_p) (1 + \frac{1}{\Delta \tau}) \quad (20)$$

A extensão para mais de uma dimensão exige a consideração da variação da vazão, $\Delta(\rho u) = (\rho u)_e - (\rho u)_w$, que é feita explicitamente com adição de termos à parcela HO de Eq. (17), que passa a ser dada por

$$F_w [J_w - J_e + ((\rho u)_e - (\rho u)_w) \phi_p] + B_w [J_w - J_{ww} + ((\rho u)_{ww} - (\rho u)_w) \phi_w] \quad (21)$$

O acoplamento entre J e ϕ é resolvido com um laço iterativo entre as Eqs. (17) e (19).

O uso deste método com o *Multigrid* já foi testado, comprovando sua eficácia para problemas de escoamento em três dimensões, por Karki et al. (1996, 1989). Embora a formulação do *Multigrid* usada nestes trabalhos seja diferente da adotada aqui, considerou-se que seria vantajoso para o *Flux-Spline* uma combinação com uma solução em múltiplos níveis.

4. Problemas Teste

Alguns problemas teste extraídos de Varejão et al. (1991b), de Zeeuw (1990) e de Alcouffe et al. (1981) foram resolvidos para comparar as várias formulações possíveis para o método *Multigrid*.

Nas descrições a seguir usaremos 'dtau' para o passo fictício de tempo, 'nitsol' para designar o número máximo de iterações no resolvidor, tanto para a solução num único como para múltiplos níveis, 'nitphi' para as iterações no acoplamento $J \times \phi$, 'levm' para o número de malhas usadas, 'maxredtax' para a máxima redução que aciona a mudança de nível, 'redtot' para a redução total do resíduo que termina a solução presente do sistema linear num único nível, 'epsmin' para o resíduo relativo, definido por

$$\epsilon_{\min} = \frac{\|r\|}{\|b\|},$$

que é o segundo critério de parada para a solução num único nível e 'epsphi' para a razão entre a norma da variação de ϕ entre duas iterações consecutivas e a norma de ϕ , que determina o fim do processo de solução.

O termo Pe_h é o número de Péclet baseado na velocidade máxima e no espaçamento da malha.

4.1. Primeiro Teste

O primeiro problema teste é um caso difusivo, com uma variação forte na difusividade numa porção limitada do domínio, extraído de Alcouffe et al. (1981), cuja definição é

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) = S, \Omega = [0,24] \times [0,24]$$

$$S = 1.0, \Omega$$

$$\gamma = \frac{1}{3} 10^4, \Omega' = [11,13] \times [11,13]$$

$$= \frac{1}{3}, \Omega - \Omega'$$

com a condição de contorno, para todo ele

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{2} \gamma \phi$$

Os parâmetros usados estão na Tab. 1

Tabela 1. Parâmetros para o primeiro problema.

Malha (volumes internos)	24 x 24
dtau	10e3
nitsol	40
nitphi	5
levm	4
maxredtax	0.1
epsmin	10e-6
redtot	10e-5
epsphi	10e-7

Os tempos de CPU, em segundos, obtidos numa UltraSparc 1, são dados na Tab. 2. A solução na malha única não convergiu.

Tabela 2. Tempos de CPU (s) de acordo com o modo de formação das matrizes grossas e as formas de projeção.

Modo de Formação da Matriz Grossa	Mode de Projeção	
	Eq. (14)	Eq. (13)
Eqs. (1) e (2)	2.38	2.68
Eqs. (2) e (3)	div	div
Eqs. (6), (7) e (4)	1.96	2.67

4.2. Segundo Teste

Este teste foi extraído de de Zeeuw (1990) e é definido como se segue,

$$\nabla \cdot (\bar{u} \phi) = \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi), \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$\bar{u} = (A(2y - 1)(1 - x^2), 2Ax y(y - 1)), \Omega$$

$$\phi = \sin(\pi x) + \sin(\pi y) + \sin(13\pi x) + \sin(13\pi y), \partial \Omega$$

Na referência o valor de γ foi posto em 10^{-5} , mas os números de Péclet de malha gerados causaram problemas com os cálculos dos exponenciais necessários para a definição dos coeficientes, portanto, usou-se $\gamma = 1$, com o efeito de advecção controlado através do valor de A.

Tabela 3. Parâmetros para o segundo problema.

Malha (volumes internos)	64 x 64
dtau	10e3
nitsol	40
nitphi	5
levm	5
maxredtax	0.1
epsmin	10e-6
redtot	10e-5
epsphi	10e-5

Tabela 4. Tempos de CPU (s), de acordo com o modo de formação das matrizes grossas e as formas de projeção, A solução de malha única consumiu 2,85s (Pe_h = 5) e 1.77s (Pe_h= 50).

Modos de Formação da Matriz Grossa	Modos de Projeção			
	Eq. (14)		Eq. (13)	
	Pe _h = 5	Pe _h = 50	Pe _h = 5	Pe _h = 50
Eqs. (1) e (2)	1.4	1.1	1.51	1.1
Eqs. (2) e (3)	div	1.52	div	1.63
Eqs. (6), (7) e (4)	1.4	1.1	1.44	1.09

4.3. Terceiro Teste

Este teste foi extraído de Varejão et al. (1991b), sendo outro teste advectivo-difusivo, e é definido por

$$\nabla \cdot (\bar{u} \phi) = \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) + S, \Omega = [-1,1] \times [-1,1]$$

$$\bar{u} = \left(A \frac{3\sqrt{3}}{2} (y^3 - y)(1 - x^2)^2, A \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^3 - x)(1 - y^2)^2 \right)$$

$$S = 2(2 - x^2 - y^2)$$

$$\phi = (1 - x^2)(1 - y^2)$$

A intensidade advectiva é controlada pelo parâmetro A nas equações acima. Os parâmetros de solução são dados abaixo.

Tabela 5. Parâmetros para o terceiro problema.

Malha (volumes internos)	64 x 64
dtau	10e2
nitsol	50
nitphi	5
levm	5
maxredtax	0.1
epsmin	10e-6
redtot	10e-5
epsphi	10e-6

Os dados de desempenho figuram na Tab. 6.

Tabela 6. Tempos de CPU (s) para o terceiro problema teste. Soluções de malha única a 63.47s (Pe_h=5) e sem convergência para Pe_h=50.

Modos de Formação da Matriz Grossa	Modos de Projeção			
	Eq. (14)		Eq. (13)	
	Pe _h = 5	Pe _h = 50	Pe _h = 5	Pe _h = 50
Eqs. (1) e (2)	20.96	83.18	21.45	92.04
Eqs. (2) e (3)	div	div	div	div
Eqs. (6), (7) e (4)	20.57	81.95	22.48	88.04

5. Análise dos Resultados e Conclusões

A forma de Multigrid adotada neste trabalho mantém a característica de ganhos de desempenho, mas não é comparavelmente superior à forma padrão (projeção bilinear).

Isto se deve à inclusão do tempo do cálculo dos fatores de projeção e devido ao fato de que estes, num caso de escoamento intenso e não alinhado com a malha, promovem uma injeção do valor de uma das correções sobre todos os volumes que a incluem na base para a interpolação, o que configura-se numa perturbação da solução já alcançada na malha anterior, não numa melhora. Por exemplo, na Fig. (1), o valor da correção calculada, na malha grossa, para o

ponto A, pode ser copiado para os pontos {e,f,h,i}, o que acontece no caso da velocidade ter, nas várias faces dos volumes indicados, intensidade suficiente para anular os efeitos difusivos. Isto acontece mesmo para o esquema de alta ordem adotado aqui, pois o controle da ordem de interpolação é feito no termo fonte, não na matriz que é usada para calcular os ponderadores da projeção.

De todas as formas de montagem do operador das malhas grossas, aquela envolvendo as Eqs. (2) e (3), mostrou-se a mais instável, embora não tenha mostrado este comportamento em Ersland e Teigland (1993). Mas deve-se considerar que os esquemas de discretização usados foram diferentes e, para o presente método, há um acoplamento a mais (fluxo-variável). Não foi possível avaliar de que forma este novo acoplamento interagiu com a formulação *Multigrid* citada.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pelo suporte financeiro deste trabalho.

7. Referências

- Alcouffe, R. E., Brandt, A., Dendy Jr, J. E., Painter, J. W., 1981, "The Multigrid Method for the Diffusion Equation with Strongly Discontinuous Coefficients", *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, Vol. 2, No. 4, pp. 430-454.
- Brandt, A., 1977, "Multilevel Adaptive Solutions to Boundary Value Problems", *Math. of Comp.*, Vol. 31, No. 138, pp. 333-390.
- Ersland, B. G., Teigland, R., 1993, "Comparison of Two Cell-centered Multigrid Schemes for Problems with Discontinuous Coefficients", *Num. Meth. for PDE*, Vol. 9, pp 265-283.
- Heinrichs, W., 1988, "Line Relaxation for Spectral Multigrid Methods", *J. Comp. Phys.*, Vol. 77, pp. 166-182, 1988.
- Hutchinson, B. R., Galpin, P. F., Raithby, G. D., 1988, "Application fo Additive Correction Multigrid to the Coupled Fluid Flow Equations", *Num. Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 133-147.
- Hutchinson, B. R., Raithby, G. D., 1986, "A Multigrid Based on the Additive Correction Strategy", *Num. Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 511-537.
- Karki, K. C., Patankar, S. V., Mongia, H. C., 1990, "Three-dimensional Fluid Flow Calculations Using a Flux-Spline Method", *AIAA J.*, Vol. 28, No. 4, pp. 631-634.
- Karki, K. C., Sathyamurthy, P. S., Patankar, S. V., 1996, "Performance of a Multigrid Method with an Improved Discretization Scheme for Three-dimensional Fluid Flow Calculations", *Num. Heat Transfer B*, Vol. 29, pp. 275-288.
- Karki, K. C., Vanka, S. P., Mongia, H. C., 1989, "Fluid Flow Calculations Using a Multigrid Method and an Improved Discretization Scheme", *Num. Heat Transfer B*, Vol. 16, pp. 143-159.
- Mavriplis, D. J., Venkatakrisnan, V., 1995, "Agglomerations Multigrid for Two-dimensional Viscous Flow", *Comp. and Fluids*, Vol. 25, No. 5, pp. 553-570.
- Molenaar, J., 1996, "A Simple Cell-centered Multigrid Method for 3D Interface Problems", *Comp. Math. Appl.*, Vol. 31, No. 9, pp 25-33.
- Osterlee, C. W., Washio, T., 1998, "An Evaluation of Parallel Multigrid as a Solver and a Preconditioner for Singularly Perturbed Problems", *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, Vol. 19, No. 1, pp. 87-110.
- Varejão, L. M. C., 1979, "A Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer", Tese de Doutorado, Univ. de Minnesota, EUA.
- Varejão, L. M. C., Patankar, S. V., Karki, K. C., 1991a, "Método *Flux-Spline* para Problemas Difusivos", *Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, pp. 161-174.
- Varejão, L. M. C., Patankar, S. V., Karki, K. C., 1991b, "Método *Flux-Spline* para Problemas de Difusão-Convecção", *Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, pp. 175-184.
- Wesseling, P., 1992, "An Introduction to Multigrid Methods", John Wiley and Sons, Chichester, EUA.
- de Zeeuw, P. M., 1990, "Matrix Dependent Prolongations and Restrictions in a Black-Box Multigrid Solver", *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 33, pp. 1-27.

A Comparison of Some Multigrid Techniques with a High Order Interpolation Scheme

Hélio Carlos Bortolon

Dept. of Thermal and Fluids Eng., Faculty of Mechanical Engineering, Unicamp, Brazil
heliocb@fem.unicamp.br

Luiz Felipe Mendes de Moura

Dept. of Thermal and Fluids Eng., Faculty of Mechanical Engineering, Unicamp, Brazil
felipe@fem.unicamp.br

Abstract. The numerical solution of complex transport phenomena needs a framework in which it be feasible, specially in the matter of time consumption, to allow the use of, for instance, automatic design. This article analyses some forms of multigrid, with a high order interpolation scheme in finite volume method, for convective and diffusive problems. The variations includes the way to calculate the coefficients matrices in the coarser levels (coarse matrices) and to transfer the solutions to the finer levels (projection). New ways to make the coarse matrix calculation and projection are proposed and compared with traditional techniques in problems ranging from diffusion, with strong variations in coefficients, to convection with moderate to high cell Péclet numbers.

Keywords. *Multigrid, Convection-Difusion, Operator dependent projection*

CÁLCULO DO ESCOAMENTO EM TUBEIRAS PARA TURBINAS CROSS-FLOW

Nuno Humberto Costa Pereira

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
Instituto Politécnico de Setúbal
Campus do IPS, Estefanilha
2914-508 SETÚBAL - PORTUGAL
npereira@est.ips.pt

João Eduardo Barros Teixeira Borges

Secção de Termofluidos e Energia
Departamento de Engenharia Mecânica
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais
1049-001 LISBOA - PORTUGAL
tborges@hidro1.ist.utl.pt

Resumo: Neste artigo descreve-se um método computacional, que permite a análise do escoamento em tubeiras de forma assimétrica, do tipo que se encontra nas turbinas Cross-Flow, supondo que o escoamento é bidimensional, incompressível e irrotacional. Este método considera automaticamente a influência introduzida no escoamento interno pelo jacto livre que sai da tubeira, o qual tem uma geometria que não é conhecida inicialmente, sendo esta forma um resultado dos cálculos a efectuar. Para a concretização deste objectivo, recorre-se ao plano do potencial complexo de velocidade e ao plano definido pelo logaritmo do conjugado da velocidade. O escoamento, nestes planos é representado por polígonos, sendo estes transformados no semi-plano superior do plano complexo, através duma transformação de Schwarz-Christoffel. Neste semi-plano o escoamento é de fácil determinação, dado que é um escoamento causado por uma singularidade do tipo poço. Usando esta informação e as várias transformações de planos consegue-se determinar completamente o escoamento no interior da tubeira e a forma do jacto livre. Apresentam-se os resultados da aplicação do programa de computador desenvolvido a alguns casos teste e a geometrias típicas de tubeiras para turbinas Cross-Flow. Serão também efectuados alguns cálculos do desenvolvimento das camadas limites nas paredes das tubeiras. Finalmente, far-se-á uma breve comparação dos resultados numéricos com alguns resultados experimentais conhecidos. O programa desenvolvido poderá ser utilizado para comparar geometrias alternativas de tubeiras a usar numa turbina Cross-Flow.

Palavras chave: Turbina Cross-Flow, Jacto livre, Método computacional, Schwarz-Christoffel, Camada Limite

1. Introdução

O correcto funcionamento da turbina Cross-Flow está dependente, em grande parte, do desempenho da sua tubeira. Esta tem que assegurar, à sua saída, um dado ângulo da velocidade, de acordo com os triângulos de velocidade. Além disso, é conveniente obter uma velocidade o mais uniforme possível, imediatamente à saída da tubeira. Para garantir estas condições, a sua geometria tem que ser cuidadosamente projectada. Neste estudo é necessário considerar a influência do jacto livre (cuja forma não é conhecida no início, o que dificulta os cálculos) no escoamento e a geometria complexa da tubeira, a qual pode apresentar uma forma bastante assimétrica. Actualmente na maioria dos projectos de tubeiras recorre-se à análise unidimensional, obtendo-se uma geometria com as paredes em forma de espiral logarítmica.

Estudos experimentais efectuados (Haimerl, 1960 e Nakase et al., 1982) revelaram que a presença do rotor induz um aumento de pressão à saída do jacto (a pressão à saída da tubeira, não é igual à pressão no interior da caixa da turbina, ou seja, a turbina não é de acção). No entanto, este aumento de pressão é relativamente pequeno, pelo que, em geral, se despreza o seu efeito (Fukutomi et al, 1985). Com base nesta aproximação pode-se efectuar o estudo da tubeira como estando isolada.

A aplicação dos métodos numéricos convencionais (diferenças finitas, elementos finitos, etc.), torna-se muito difícil, devido ao desconhecimento da forma do jacto livre. Este problema é evitado no método que aqui se expõe, o qual usa transformações de Schwarz-Christoffel. Com efeito, uma vez que o escoamento é tratado em conjunto, não é necessária qualquer informação adicional relativa à geometria do jacto que se forma.

2. Formulação Matemática

No desenvolvimento do método numérico de cálculo do escoamento em tubeiras de forma assimétrica, introduzem-se várias simplificações. Assim, considera-se o escoamento no interior da tubeira, como sendo bidimensional, incompressível, irrotacional e estacionário. A eventual variação de cotas existentes no escoamento não é tomada em linha de conta, assim como a influência do rotor no escoamento da tubeira.

O escoamento com jacto livre apresenta características muito próprias. Com efeito, pode deduzir-se que o módulo da velocidade na fronteira do jacto é constante, uma vez que a pressão imposta pelo meio envolvente é constante. Por outro lado, na zona do escoamento em contacto com as paredes sólidas, o ângulo da velocidade é igual ao da parede. O ângulo da parede sólida pode ser obtido a partir da geometria da tubeira (a geometria será aproximada por segmentos de recta). Daqui conclui-se que, se usarmos como variáveis independentes o módulo e o ângulo da velocidade, o escoamento será representado por uma forma poligonal. O escoamento também é representado por um polígono no plano do potencial complexo de velocidade $W(W)$, em que W é definida por (Milne-Thomson, 1968 e Batchelor, 1967):

$$W = \Phi + i\Psi \tag{1}$$

sendo Φ o potencial de velocidade e Ψ a função de corrente. Uma vez que as fronteiras do escoamento são linhas de corrente, tem-se para essas fronteiras $\Psi = cte$, sendo portanto o escoamento limitado por duas rectas horizontais. Derivando o potencial complexo de velocidade, obtém-se o conjugado da velocidade complexa \bar{V} :

$$-\frac{dW}{dz} = \bar{V} = u - iv = q \exp(-i\beta) \tag{2}$$

onde z é a variável complexa do plano físico, u e v são as componentes da velocidade segundo x e y , q é o módulo e β o ângulo da velocidade. O plano físico (plano da tubeira) é representado por $Z(z)$, em que $z = x + iy$.

Para representar o escoamento através dum polígono, no plano definido pelas variáveis independentes módulo e ângulo da velocidade, define-se:

$$\Omega = \ln\left(-V \frac{dz}{dW}\right) = \ln\left(\frac{V}{q \exp(-i\beta)}\right) = \ln\left(\frac{V}{q}\right) + i\beta \tag{3}$$

onde V é o módulo da velocidade no jacto a infinito. A este plano dá-se o nome de plano $\mathcal{H}(\Omega)$.

O plano \mathcal{H} tem a particularidade de permitir representar por rectas horizontais ($\beta = cte$), todas as linhas de corrente com ângulo constante (linhas de corrente rectilíneas) no plano Z (plano físico). As superfícies livres dos jactos (onde como se viu, a velocidade é constante), são representadas no plano \mathcal{H} através de rectas verticais ($\ln(V/q) = cte$). Estas características do plano complexo \mathcal{H} , permitem representar através de polígonos, escoamentos com elevado grau de complexidade no plano Z .

Por exemplo, o escoamento numa tubeira elementar constituída unicamente por duas paredes planas, pode ser representado no plano \mathcal{H} por um polígono. O polígono resultante tem dois vértices a infinito, ficando por isso, definido somente por dois pontos, correspondentes aos pontos em que o escoamento sai da tubeira (Milne-Thomson, 1968). Como se sabe, existe uma transformação de Schwarz-Christoffel que transforma o interior dum polígono, num dado plano complexo, no semi-plano superior de outro plano complexo. A este semi-plano auxiliar complexo, atribui-se a denominação de plano $\mathcal{T}(\zeta)$, em que $\zeta = \xi + i\eta$. A transformação de Schwarz-Christoffel que permite passar do semi-plano superior de \mathcal{T} para o polígono no plano \mathcal{H} , é definida pela expressão (Milne-Thomson, 1968):

$$\Omega = 2B \ln\left(\sqrt{\zeta - a} + \sqrt{\zeta - b}\right) + C \tag{4}$$

a qual permite obter Ω em função de ζ , sendo B e C constantes que podem ser complexas, e a e b os vértices do polígono representados no plano \mathcal{T} .

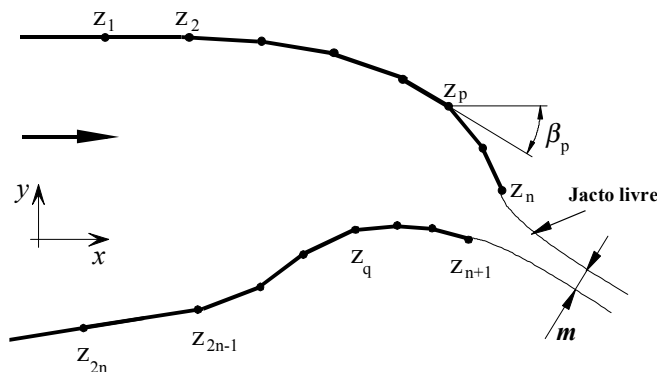


Figura 1. Plano físico Z e geometria da tubeira

Uma vez que numa tubeira real as paredes são superfícies curvas, como se pode observar na Fig. (1) onde é representada uma geometria genérica, não se pode aproximá-las unicamente por dois segmentos de recta, ou seja, com um único polígono no plano \mathcal{H} . Por esse motivo, discretiza-se a tubeira através $2n$ pontos (n pontos em cada parede), ou seja através de $(2n - 2)$ segmentos de recta. Assim, a representação da tubeira no plano $\mathcal{H}(\Omega)$ é obtida a partir da soma de vários polígonos elementares, $(2n - 1)$ no total (observar Fig. (2)):

$$\Omega = \sum_{k=1}^{2n-1} \Omega_k \tag{5}$$

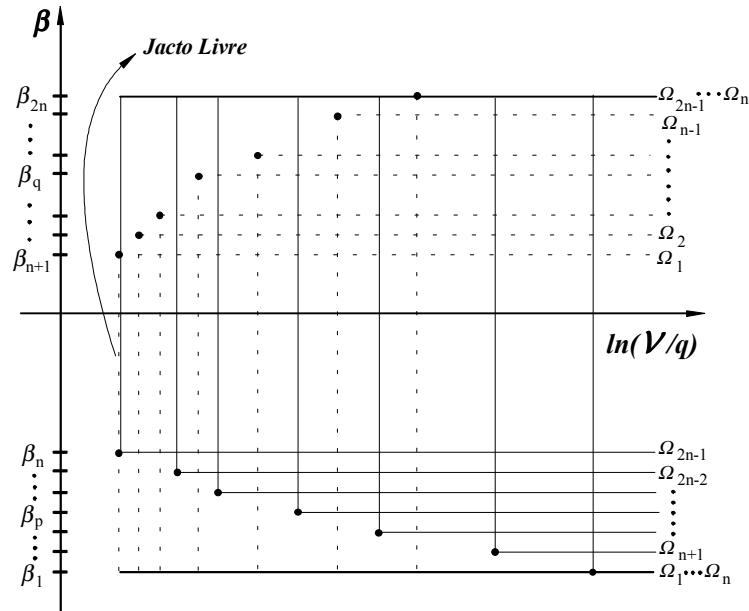


Figura 2. Plano hodógrafo \mathcal{H}

Em todos os planos em que se representa o escoamento, a fronteira tem que ser discretizada de forma que, ao se caminhar do ponto 1 para o ponto $2n$, o interior do escoamento fique à direita. Esta característica é mantida pela transformação de Schwarz-Christoffel, pelo que no plano \mathcal{T} , os pontos estão dispostos na recta real no sentido dos $\zeta = \xi$ decrescentes. Os n primeiros pontos encontram-se na semi-recta real positiva, enquanto os restantes pontos se encontram na semi-recta real negativa.

Como se pode observar na Fig. 3 a cada intervalo de valores ζ na recta real do plano \mathcal{T} (imagem da parede sólida e fronteira do jacto livre), corresponde uma parte da parede da tubeira, no plano \mathcal{Z} . Por razões de simplicidade impõe-se $A_n \equiv 1$ e $A_{n+1} \equiv -1$.

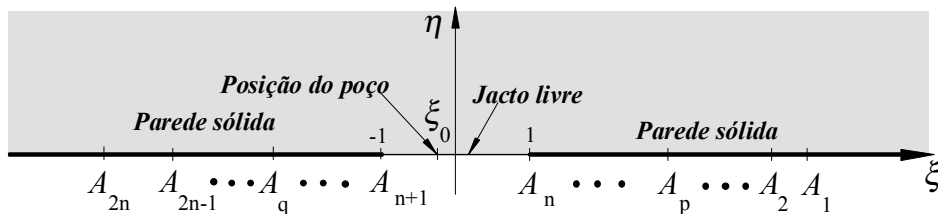


Figura 3. Semi-plano superior complexo \mathcal{T}

Introduzindo na Eq. (5), a Eq. (4) válida para cada um dos polígonos elementares, obtém-se:

$$\Omega = 2 \sum_{k=1}^n B_k \ln(\sqrt{\zeta - A_1} + \sqrt{\zeta - A_{n+k}}) + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} B_k \ln(\sqrt{\zeta - A_{k-n+1}} + \sqrt{\zeta - A_{2n}}) + \ln(\tau) - i\alpha \tag{6}$$

em que $\ln(\tau) - i\alpha = \Sigma C_k$ sendo τ e α constantes a determinar posteriormente e que correspondem a uma translação e uma rotação respectivamente. O ângulo β que a parede da tubeira faz com a horizontal (do plano \mathcal{Z}), nos sucessivos

pontos, é igual ao ângulo da velocidade na parede (a parede é uma linha de corrente), que por sua vez é igual à parte imaginária de Ω , de acordo com a Eq. (3). Então:

$$\zeta = \xi = A_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = -\alpha \quad (7a)$$

$$\zeta = \xi = A_p \quad (2 \leq p \leq n) \quad \Rightarrow \quad \beta_p = -\alpha + 2 \sum_{k=1}^n B_k \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{A_1 - A_p}}{\sqrt{A_p - A_{n+k}}} \right) + 2 \sum_{k=n+1}^{n+p-2} B_k \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{A_{k-n+1} - A_p}}{\sqrt{A_p - A_{2n}}} \right) \quad (7b)$$

$$\zeta = \xi = A_q \quad (n+1 \leq q \leq 2n-1) \quad \Rightarrow \quad \beta_q = -\alpha + \pi \sum_{k=1}^{q-n} B_k + 2 \sum_{k=q-n+1}^n B_k \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{A_1 - A_q}}{\sqrt{A_q - A_{n+k}}} \right) + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} B_k \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{A_{k-n+1} - A_q}}{\sqrt{A_q - A_{2n}}} \right) \quad (7c)$$

$$\zeta = \xi = A_{2n} \quad \Rightarrow \quad \beta_{2n} = -\alpha + \pi \sum_{k=1}^{2n-1} B_k \quad (7d)$$

Com estas expressões constroi-se um sistema de equações de dimensão $(2n - 1)$ para determinação dos valores de B_k . Para isso, basta admitir $2n$ valores iniciais para os pontos A_k , uma vez que os β_k são os ângulos das paredes com a horizontal, nos pontos do plano Z correspondentes aos A_k . A constante $\alpha = -\beta_1$ corresponde a uma rotação de eixos.

Tal como a parte imaginária de Ω é o ângulo da velocidade junto à parede, também a parte real de Ω é o logaritmo da razão entre o módulo da velocidade no jacto a infinito e o módulo da velocidade no ponto. Assim, vem:

$$\zeta = \xi = A_1 \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{V}{q_1} \right) = 2 \sum_{k=1}^n B_k \ln(\sqrt{A_1 - A_{n+k}}) + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} B_k \ln(\sqrt{A_1 - A_{k-n+1}} + \sqrt{A_1 - A_{2n}}) + \ln(\tau) \quad (8a)$$

$$\zeta = \xi = A_p \quad (2 \leq p \leq n) \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{V}{q_p} \right) = 2 \sum_{k=1}^n B_k \ln(\sqrt{A_1 - A_{n+k}}) + 2 \sum_{k=n+1}^{p+n-2} B_k \ln(\sqrt{A_{k-n+1} - A_{2n}}) + 2 \sum_{k=p+n-1}^{2n-1} B_k \ln(\sqrt{A_p - A_{k-n+1}} + \sqrt{A_p - A_{2n}}) + \ln(\tau) \quad (8b)$$

$$\zeta = \xi = A_q \quad (n+1 \leq q \leq 2n-1) \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{V}{q_q} \right) = 2 \sum_{k=1}^{q-n} B_k \ln(\sqrt{A_1 - A_q} + \sqrt{A_{n+k} - A_q}) + 2 \sum_{k=q-n+1}^n B_k \ln(\sqrt{A_1 - A_{n+k}}) + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} B_k \ln(\sqrt{A_{k-n+1} - A_{2n}}) + \ln(\tau) \quad (8c)$$

$$\zeta = \xi = A_{2n} \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{V}{q_{2n}} \right) = 2 \sum_{k=1}^n B_k \ln(\sqrt{A_1 - A_{2n}} + \sqrt{A_{n+k} - A_{2n}}) + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} B_k \ln(\sqrt{A_{k-n+1} - A_{2n}}) + \ln(\tau) \quad (8d)$$

Para a determinação da constante τ utilizar-se-á a condição do módulo da velocidade no ponto $\zeta = \xi = A_n$ ser igual ao módulo da velocidade no jacto a infinito, ou seja $q_n = V$. Deste modo, a partir da Eq. (8b), chega-se a:

$$\tau = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\sqrt{A_1 - A_{n+k}})^{2B_k} \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1} (\sqrt{A_{k-n+1} - A_{2n}})^{2B_k}} \quad (9)$$

em que a constante τ é um factor de escala que fixa os valores do módulo das velocidades.

Para fechar o problema, recorre-se novamente ao plano do potencial complexo de velocidade, representado por $\mathcal{W}(W)$, em que W é dado pela Eq. (1). Uma vez que o plano \mathcal{W} tem uma forma poligonal, também pode ser transformado no plano \mathcal{T} , por uma transformação de Schwarz-Christoffel, obtendo-se deste modo uma relação entre o plano \mathcal{W} e o plano Z , por intermédio de \mathcal{T} . Na verdade, como se pode verificar na Fig. 4, o plano \mathcal{W} é representado por um polígono com os quatro vértices em infinito, em que o poço se encontra na posição $\Phi = -\infty$.

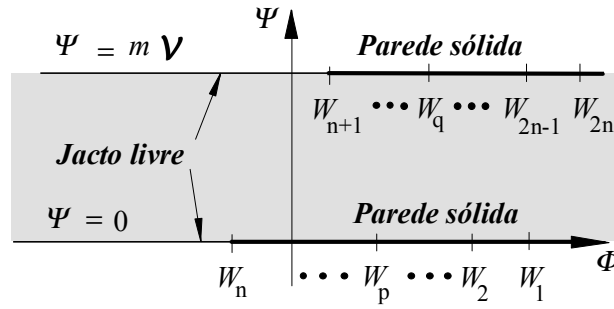


Figura 4. Plano do potencial complexo de velocidades W

Neste caso a transformação de Schwarz-Christoffel é (Milne-Thomson, 1968):

$$\frac{dW}{d\zeta} = K(\zeta - \xi_0)^{-1} = \frac{K}{\zeta - \xi_0} \tag{10}$$

em que $\zeta = \xi_0$ é a posição do poço no eixo real do plano \mathcal{T} , ver Fig. 2. Integrando, considerando zero a constante de integração (o potencial é definido a menos duma constante) e determinando a constante K , obtém-se:

$$W = \frac{mV}{\pi} \ln(\zeta - \xi_0) \tag{11}$$

onde m é a dimensão final do jacto. Deste modo, a determinação do escoamento resume-se a encontrar os valores correctos para m , ξ_0 , B_k e A_k . Estes valores são calculados iterativamente, pois os seus valores estão interligados.

No plano \mathcal{Z} , o comprimento entre dois pontos genéricos z_k e z_{k+1} que discretizam a parede, é dado pelo módulo do vector que os une, o que atendendo à relação de comprimentos $|dz|$ e $|d\zeta|$ e às Eqs. (2) e (11), pode ser obtido através de:

$$L = \int_{z_k}^{z_{k+1}} |dz| = \int_{A_k}^{A_{k+1}} \left| \frac{dz}{dW} \right| \left| \frac{dW}{d\zeta} \right| |d\zeta| = \int_{A_k}^{A_{k+1}} \frac{m}{\pi} \frac{V}{q} \left| \frac{1}{\zeta - \xi_0} \right| d\zeta \tag{12}$$

onde V/q é a parte real de Ω , dado pela Eq. (8). Então o comprimento L_{p-1} entre dois pontos A_{p-1} e A_p com $2 \leq p \leq n$ é dado por¹.

$$L_{p-1} = \frac{m}{\pi} \int_{A_p}^{A_{p-1}} \left| \frac{1}{\zeta - \xi_0} \right| \prod_{k=p+n-1}^{2n-1} \left(\sqrt{\frac{\zeta - A_{k-n+1}}{A_{k-n+1} - A_{2n}}} + \sqrt{\frac{\zeta - A_{2n}}{A_{k-n+1} - A_{2n}}} \right)^{2B_k} d\zeta \tag{13}$$

e de forma semelhante o comprimento L_q entre dois pontos A_q e A_{q+1} com $n+1 \leq q \leq 2n-1$ é dado por:

$$L_q = \frac{m}{\pi} \int_{A_{q+1}}^{A_q} \left| \frac{1}{\zeta - \xi_0} \right| \prod_{k=1}^{q-n} \left(\sqrt{\frac{A_1 - \zeta}{A_1 - A_{n+k}}} + \sqrt{\frac{A_{n+k} - \zeta}{A_1 - A_{n+k}}} \right)^{2B_k} d\zeta \tag{14}$$

Conhecendo o valor dos parâmetros A_k , B_k , m e ξ_0 , pode-se calcular a posição do ponto z_{n+1} relativamente a z_n (plano \mathcal{Z}). Na verdade, considerando que:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(\frac{dz}{dW} \right) \left(\frac{dW}{d\zeta} \right) \tag{15}$$

pode-se combinar a Eq. (3) e a derivada da Eq. (11) em ordem a ζ , para se chegar a:

¹ Substitui-se τ pela Eq. (9) e tem-se $\zeta = \xi$, dado que se está a trabalhar na recta real do plano \mathcal{T}

$$dz = -\frac{m}{\pi} \frac{\exp(\Omega)}{\zeta - \xi_0} d\zeta \quad (16)$$

Substituindo Ω pelo valor indicado na Eq. (6) e integrando, obtém-se finalmente:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{m}{\pi} \exp(-i\alpha) \int_{A_n}^{A_{n+1}} \frac{1}{\zeta - \xi_0} \prod_{k=1}^n \left(\sqrt{\frac{\zeta - A_1}{A_1 - A_{n+k}}} + \sqrt{\frac{\zeta - A_{n+k}}{A_1 - A_{n+k}}} \right)^{2B_k} \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(\sqrt{\frac{\zeta - A_{k-n+1}}{A_{k-n+1} - A_{2n}}} + \sqrt{\frac{\zeta - A_{2n}}{A_{k-n+1} - A_{2n}}} \right)^{2B_k} d\zeta \quad (17)$$

em que z_n é a posição do ponto n no plano Z . É de referir que esta expressão é também válida para o cálculo da posição no plano Z , de pontos situados fora da recta real do plano T (ζ genéricos), permitindo por exemplo a determinação das linhas de corrente do escoamento.

O cálculo dos parâmetros A_k , B_k , m e ξ_0 é dado como concluído quando, tanto os comprimentos como a posição do ponto z_{n+1} calculados, coincidirem com os dados obtidos a partir da geometria da tubeira.

O módulo da velocidade num ponto ζ genérico do escoamento é dado pela parte real de Ω , e o ângulo da velocidade é dado pela parte imaginária, ou seja, tem-se:

$$q = V \exp(-\Re(\Omega)) \quad e \quad \alpha = \Im(\Omega) \quad (18)$$

em que $\Re(\Omega)$ e $\Im(\Omega)$ são respectivamente a parte real e imaginária de Ω .

Num dado ponto, a diferença de pressão ΔP em relação à atmosférica, pode ser obtida usando a equação de Bernoulli, chegando-se a:

$$\frac{\Delta P}{\rho g h} = \left[1 - \left(\frac{q}{V} \right)^2 \right] \quad (19)$$

em que ρ é a massa específica do fluido, h a altura piezométrica à entrada da tubeira e g a aceleração da gravidade.

Há interesse em determinar a coordenada do ponto imagem ζ no semi-plano superior complexo T correspondente a um qualquer ponto z do plano físico Z , o que consiste no cálculo em sentido inverso e que pode ser usado por exemplo para determinar a velocidade à entrada do rotor da turbina. Esse objectivo é conseguido integrando a Eq. (16), onde se substituiu previamente Ω pela Eq. (6), chegando-se após algumas manipulações algébricas, à seguinte expressão:

$$\zeta = \zeta_1 + \frac{\pi \cdot (\zeta_1 - \xi_0)}{m \cdot \tau \cdot \exp(-i\alpha)} \cdot (z_2 - z_1) \cdot \prod_{k=1}^n \left(\sqrt{\zeta_1 - A_1} + \sqrt{\zeta_1 - A_{n+k}} \right)^{2B_k} \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(\sqrt{\zeta_1 - A_{k-n+1}} + \sqrt{\zeta_1 - A_{2n}} \right)^{2B_k} \quad (20)$$

em que ζ_1 é a imagem do ponto z_1 , e $\zeta = \zeta_2$ é a imagem que se pretende conhecer correspondente ao ponto z_2 . Esta função terá que ser integrada numericamente, devido à sua elevada complexidade.

3. Resultados

Usando as expressões apresentadas na secção anterior, foi desenvolvido um programa de computador em FORTRAN. Como dados iniciais, considera-se a geometria da tubeira e o módulo da velocidade imposta na fronteira do jacto. Os valores de A_k , B_k , m e ξ_0 são determinados iterativamente. Após a convergência, obtém-se o escoamento resultante na tubeira.

Com a finalidade de validar numericamente o programa desenvolvido, foram testados vários escoamentos com jactos livres, em que a solução analítica é conhecida (Birkhoff, 1957). Os casos considerados correspondem a jactos originados em aberturas colocadas em paredes planas. Para comparação dos resultados utilizou-se o factor de contracção (razão entre a dimensão final do jacto e a dimensão da saída do orifício) e o ângulo do jacto com a horizontal a grandes distâncias do orifício. A Fig. (5) mostra três casos típicos das geometrias analisadas, onde também se compara a forma da superfície livre do jacto calculada analiticamente (Milne-Thomson, 1968) com a calculada numericamente.

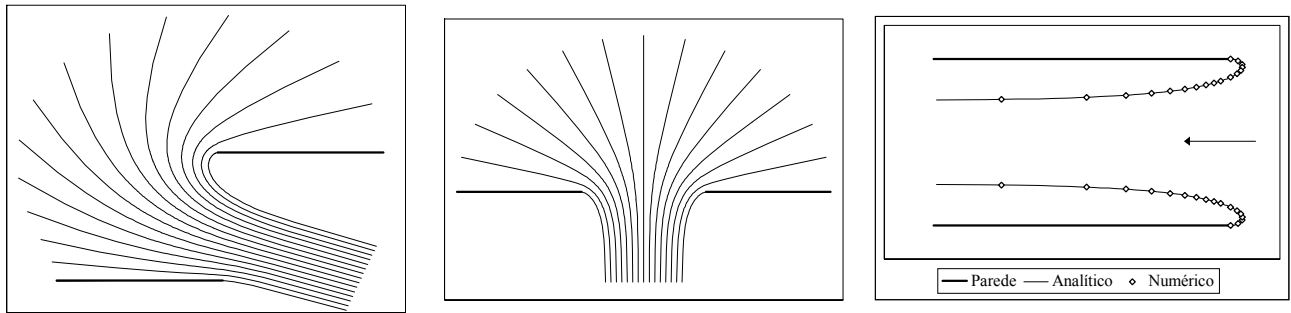


Figura 5. Resultados numéricos de escoamentos e comparação com solução analítica

A comparação realizada confirmou que os resultados numéricos e analíticos são idênticos, demonstrando que o algoritmo implementado no programa de computador é válido para todos os casos teste utilizados, ver Pereira (1993), podendo também ser encontrado nesta referência um fluxograma do programa desenvolvido.

Este programa foi utilizado para analisar uma possível geometria de tubeira para turbina Cross-Flow, em que ambas as paredes são formadas por uma espiral logarítmica seguida de um segmento de recta, como mostrado na Fig. (6).

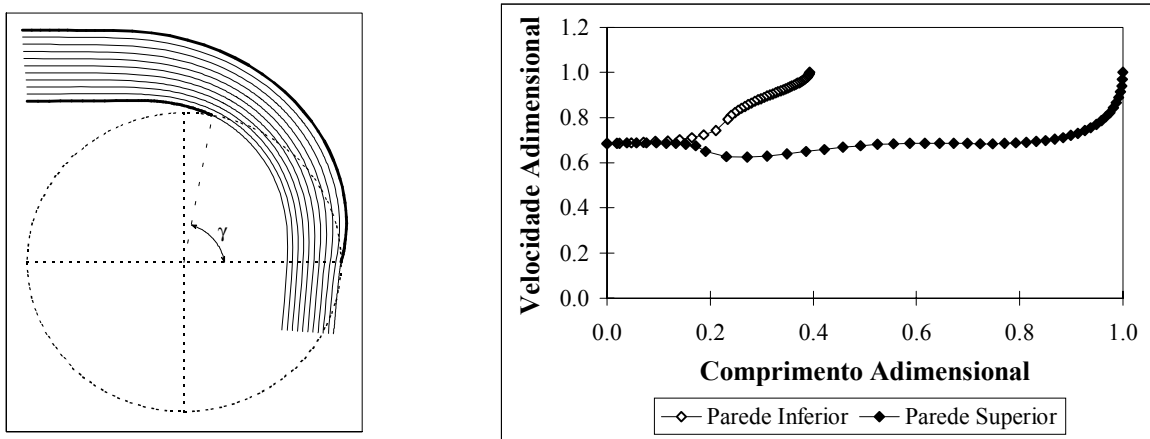


Figura 6. Geometria, linhas de corrente e velocidade nas paredes da tubeira com dupla espiral logarítmica

Esta figura também apresenta a posição do rotor (círculo a tracejado) a utilizar com esta tubeira. O ângulo que define as duas espirais logarítmicas usadas é igual a 15°, sendo o ângulo de recobrimento γ igual a 80°. De entre os resultados obtidos pelo programa, escolheram-se as linhas de corrente e a distribuição de velocidade nas paredes da tubeira para mostrar na Fig. (6). Verifica-se que as evoluções da velocidade nas paredes da tubeira são suaves e sem desacelerações significativas, correspondendo a distribuições de pressão sem grandes gradientes adversos.

Com o objectivo de avaliar eventuais efeitos viscosos no interior da tubeira foi decidido calcular a evolução da camada limite ao longo das paredes desta, usando as distribuições de velocidade já apresentadas. O método de cálculo da camada limite empregue foi o método integral de Head, em que se considerou que o escoamento separava se o factor de forma H da camada limite fosse superior a 2.4, interrompendo-se os cálculos neste caso (Brederode, 1997).

Uma vez que as condições iniciais da camada limite não são conhecidas, pois dependem da instalação, decidiu-se fazer um estudo paramétrico onde se variou os valores iniciais. Considerou-se que os valores iniciais do factor de forma H variavam entre 1.4 e 2.0 e que a espessura da quantidade de movimento θ , adimensionalizada pelo comprimento da parede maior (0.454 m), variava entre 8.81×10^{-4} e 2.20×10^{-3} .

Os resultados obtidos para a parede maior, e apresentados na Fig. (7), mostram que a evolução da camada limite não é muito sensível ao factor de forma inicial. O valor inicial da espessura da quantidade de movimento tem uma maior influência nos resultados, verificando-se no entanto, que a espessura de deslocamento da camada limite à saída da tubeira é pouco afectada, o que pode ser justificado tendo em atenção o elevado gradiente favorável de pressão que se tem nesta zona da saída. Adicionalmente, verifica-se que a forma da evolução da espessura da camada limite depende pouco das condições iniciais consideradas, tendo-se constatado que o valor máximo da espessura da camada limite é originado pela desaceleração provocada pela transição entre o segmento de recta e a espiral logarítmica, ver Fig. (6).

Representou-se na Fig. (7) a espessura do deslocamento obtida com a evolução de camada limite mais desfavorável do estudo paramétrico, que corresponde a $\theta = 2.20 \times 10^{-3}$ e $H = 2.0$, verificando-se que as espessuras do deslocamento das camadas limites nas paredes têm dimensões reduzidas. Considerando que ocorre relaminarização da camada limite para valores do parâmetro de aceleração da ordem de 3×10^{-6} (Brederode, 1997), indica-se com setas na Fig. (7) a zona das paredes onde ocorrem as relaminarizações.

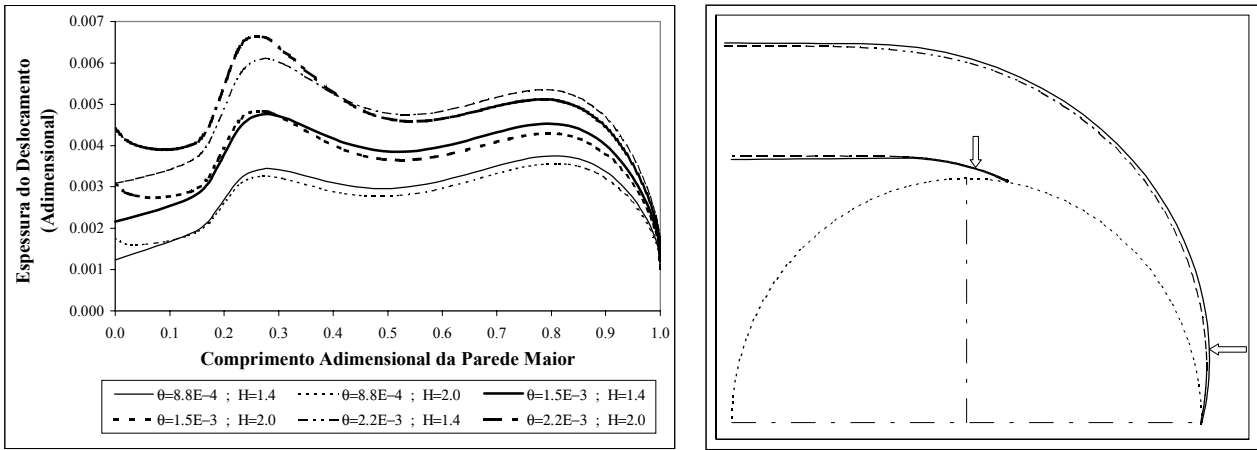


Figura 7. Estudo paramétrico da evolução da camada limite e representação da espessura do deslocamento obtida

Outro parâmetro que tem influência no desempenho da tubeira Cross-Flow, e que convém analisar quando se projecta a tubeira consiste no valor do ângulo à saída desta, i.e., à entrada do rotor. Com efeito, convém que este valor não varie apreciavelmente ao longo do arco de recobrimento, a fim de se evitar incidências excessivas nas pás do rotor, originando assim perdas adicionais (Pereira e Borges, 1996).

Para avaliar o desempenho da tubeira a ser analisada sob este ponto de vista, calculou-se o ângulo absoluto da velocidade à saída da tubeira e a partir do triângulo de velocidades, o ângulo da velocidade relativa à entrada do rotor, evoluções que são apresentadas na Fig. (8), juntamente com os valores nominais a tracejado. A análise da figura mostra uma diferença máxima que pode ser considerada baixa, sendo portanto, o escoamento bem orientado à entrada do rotor.

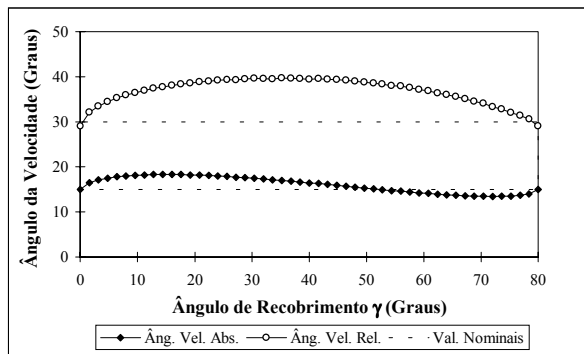


Figura 8. Evoluções dos ângulos da velocidade absoluta e relativa à entrada do rotor

Como aplicação final decidiu-se estudar a geometria de uma tubeira projectada antes deste método ter sido desenvolvido e para a qual se tem alguns resultados experimentais, na forma de distribuições de pressão em ambas as paredes. A geometria da tubeira usada pode ser observada na Fig. (9), onde também se mostra a posição das tomadas de pressão estáticas utilizadas nas medições experimentais. Igualmente são apresentados nesta figura as linhas de corrente e distribuições de velocidade nas paredes da tubeira, calculadas pelo programa.

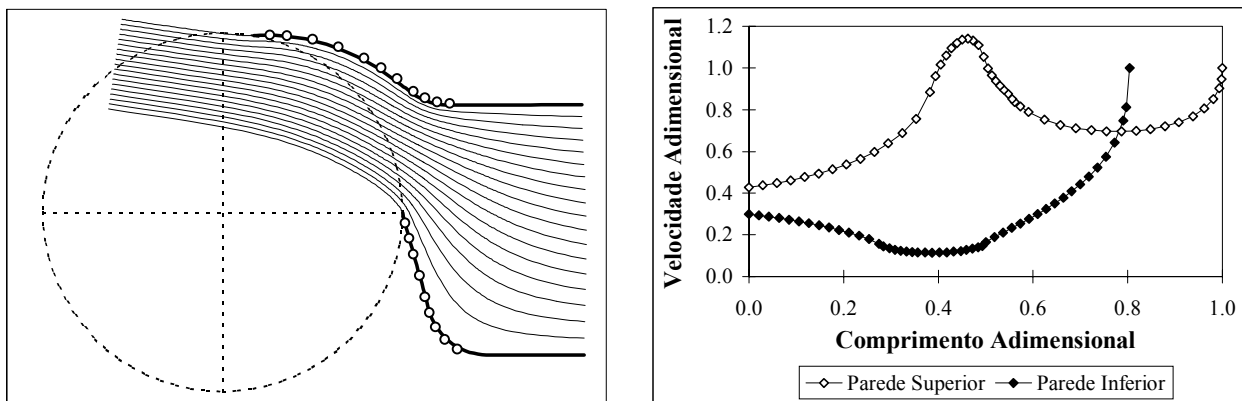


Figura 9. Geometria, linhas de corrente, posição das tomadas de pressão e distribuição de velocidade nas paredes

A Fig. (10) compara as previsões numéricas com os valores experimentais, para ambas as paredes e várias alturas piezométricas à entrada da tubeira. Na parede superior, quer os resultados numéricos, quer os resultados experimentais, indicam que existe uma zona sujeita a um forte gradiente de pressão adverso. Este gradiente é causado pela concordância entre dois segmentos de recta, na parede superior. O estudo da evolução da camada limite mostrou que esta se separa em ambas as paredes, devido aos gradientes de pressão adversos existentes, o que sugere que esta tubeira apresentará um mau desempenho.

Comparando os valores experimentais e numéricos, observa-se uma razoável aproximação entre ambos, podendo as diferenças ser explicadas por erros na geometria da tubeira testada, assim como eventuais separações localizadas.

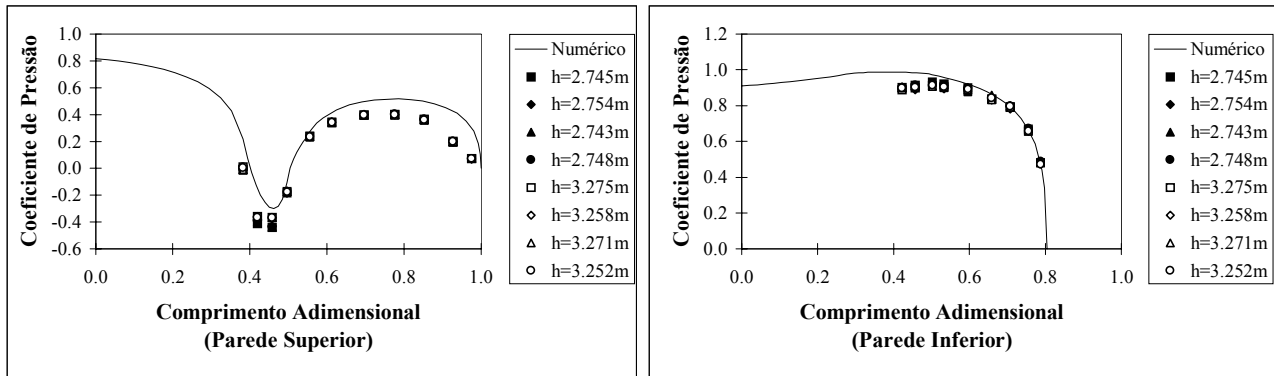


Figura 10. Distribuições de pressão em ambas as paredes (adimensionalizados pelo comprimento da parede maior)

A conclusão relativa ao eventual mau desempenho da tubeira é reforçada pela análise dos ângulos à saída da tubeira, entrada no rotor, cujos resultados são mostrados na Fig. (11). Na verdade, observa-se que a diferença entre o valor do ângulo da velocidade relativa e o valor nominal atinge valores de 40 graus, o que é claramente excessivo.

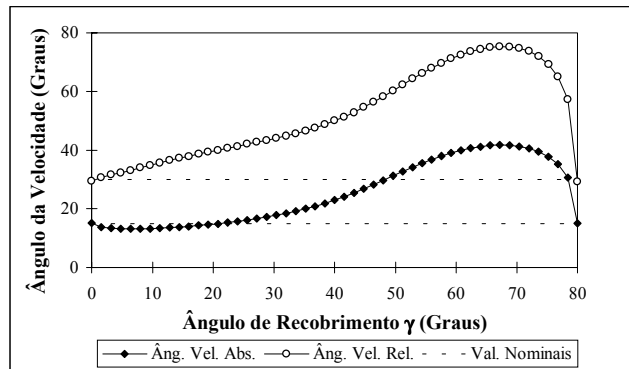


Figura 11. Evolução dos ângulos da velocidade absoluta e relativa à entrada do rotor

As suspeitas de deficiente desempenho desta tubeira foram confirmados experimentalmente, uma vez que foram baixos os rendimentos obtidos para a turbina Cross-Flow ensaiada com esta tubeira (Pereira e Borges, 1996). Se a ferramenta de cálculo do escoamento aqui descrita já estivesse desenvolvida, teria sido possível projectar uma geometria de tubeira com melhor desempenho, como por exemplo a geometria apresentada na Fig. (6), o que demonstra assim a utilidade destes cálculos, os quais não requerem grandes recursos computacionais.

4. Conclusões

Neste artigo discutiu-se a aplicação das transformações de Schwarz-Christoffel aos escoamentos que apresentam um jacto livre, e descreveu-se um algoritmo para o seu cálculo numérico.

Com base neste algoritmo desenvolveu-se um programa de computador escrito na linguagem FORTRAN.

Este programa de computador foi aplicado ao cálculo de alguns casos teste teóricos, que permitiram realizar a sua validação, e à análise do escoamento em duas tubeiras para turbina Cross-Flow. O escoamento obtido nas tubeiras de turbinas Cross-Flow foi analisado e comparado em termos de ângulo à saída da tubeira e em termos de desenvolvimento das camadas limites em ambas as paredes. Uma vez que não são conhecidas as condições das camadas limites à entrada das tubeiras efectuou-se um estudo paramétrico na primeira tubeira, que permitiu concluir que as condições da camada limite à saída da tubeira não são muito afectadas pelas condições à entrada.

Sob o ponto de vista dos parâmetros analisados, as duas tubeiras apresentavam um comportamento bastante diferente, pois a segunda tubeira analisada apresenta uma grande diferença entre o ângulo à saída e o ângulo nominal, prevendo-se ainda que ocorra separação da camada limite em ambas as paredes. A comparação entre os resultados

experimentais para a distribuição de pressão obtidos nesta tubeira e os resultados numéricos do programa mostram uma razoável concordância.

Este estudo mostrou a utilidade em se usar uma ferramenta de cálculo como a descrita neste artigo no projecto de tubeiras para turbinas do tipo Cross-Flow, podendo ser utilizado com vantagem para comparar geometrias alternativas.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios recebidos por parte da JNICT (através da atribuição de uma bolsa de mestrado) e pelo IDMEC (organismo que é financiado por verbas do Programa Operacional Ciência, Tecnologia e Inovação (POCTI), do Quadro Comunitário de Apoio III, da Comunidade Europeia).

6. Referências

- Batchelor, G. K., 1967, *"An Introduction to Fluid Dynamics"*, Cambridge University Press.
- Birkhoff, G., 1957, *"Jet, Wakes and Cavities"*, Academic Press.
- Brederode, V., 1997, *"Fundamentos de Aerodinâmica Incompressível"*, Vasco de Brederode, 1ª Edição, Lisboa, 1997.
- Fukutomi, J.; Nakase, Y.; Watanabe T., 1985, *"A Numerical Method of Free Jet from a Cross-Flow Turbine Nozzle"*, Bulletin of JSME, Vol. 28, Nº 241, July.
- Haimerl, L. A., 1960, *"The Cross-Flow Turbine"*, Water Power, January, p.5-13
- Milne-Thomson, L. M., 1968, *"Theoretical Hydrodynamics"*, MacMillan Press Ltd, 5th Edition.
- Nakase, Y.; Fukutomi, J.; Watanabe, T.; Suetsugu, T., 1982, *"A Study of Cross-Flow Turbine (Effects Of Nozzle Shape On Its Performance)"*, Small Hydro-Power Fluid Machinery, presented at the annual winter meeting, ASME, Phoenix, Arizona, November 14-19, p. 13-18.
- Pereira, N. H. C., 1993, *"Estudo Numérico e Experimental de Tubeiras para Turbinas Cross-Flow"*, Dissertação para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico.
- Pereira, N. H. C.; Borges, J.E., 1996, *"Study of the Nozzle Flow in a Cross-Flow Turbine"*, International Journal of Mechanical Science, Vol. 38, Nº 3, pp. 283-302.

FLOW CALCULATION IN THE NOZZLE OF A CROSS-FLOW TURBINE

Nuno Humberto Costa Pereira

Mechanical Engineering Departement
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
Instituto Politécnico de Setúbal
Campus do IPS, Estefanilha
2914-508 SETÚBAL - PORTUGAL
npereira@est.ips.pt

João Eduardo Barros Teixeira Borges

Secção de Termofluidos e Energia
Mechanical Engineering Departement
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais
1049-001 LISBOA - PORTUGAL
tborges@hidro1.ist.utl.pt

Abstract: A computational method for the evaluation of the flow through asymmetric nozzles, typical of those found in Cross-Flow turbines, is proposed in this paper. The flow is assumed to be two-dimensional, steady and irrotational of an incompressible fluid. This method automatically takes into account the influence introduced in the flow by the free-jet that issues from the nozzle. This jet has a geometry which is not known initially, and so must be evaluated during the calculations. This method works in the plane of the complex potential and in the hodograph plane defined by the logarithm of the conjugate of the velocity, where the flow is represented by polygons. These polygons can be transformed into the upper half-plane of an auxiliary complex variable, by means of a Schwarz-Christoffel transformation. In this auxiliary plane the flow can be easily calculated, since it is the flow caused by a sink. Using the relations between the several planes involved, it is possible to evaluate completely the flow and the geometry of the free-jet. The results of the application of this method to some test-cases and geometries typical of nozzles used in Cross-Flow turbines are presented. Some calculations of the development of the boundary-layer on the walls of the nozzles will also be discussed. Finally the numerical predictions will be briefly compared with some known experimental measurements. The developed computer code could be used with advantage for comparing alternative geometries for the nozzles of Cross-Flow turbines.

Key Words: Cross-Flow Turbine, Free Jet, Computational Method, Schwarz-Christoffel, Boundary-Layer

SENSITIVITY COMPUTATIONS USING PERTURBATIVE METHODS FOR THE ADVECTION-DIFFUSION-REACTION MODEL OF POLLUTANT TRANSPORT

Fraidenraich, A.

Universidad de Buenos Aires – Facultad de Ingeniería – Departamento de Matemática
Paseo Colón, 850, 1063, Buenos Aires– Argentina
afraide@tron.fi.uba.ar

Jacovkis, P. M.

Universidad de Buenos Aires – Facultad de Ingeniería – Departamento de Matemática y Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Departamento de Computación
Ciudad Universitaria, 1428, Buenos Aires Argentina
jacovkis@dc.uba.ar

Lima, F. R. A.

Universidade Federal de Pernambuco – Departamento de Energia Nuclear
Av. Prof. Luiz Freire, 1000
50740-540 – CDU - Recife – PE – Brasil
f_andradelima@uol.com.br

Summary. *This work aims to apply the disturbance theory to accomplish sensitivity computations in problems of pollutant transported in liquid media modeled through the advection-diffusion-reaction equation. The numerical solution of the differential equation that describes the behavior of the system is found via the SUPG (“Streamline Unwinding Petrov Galerkin”) finite element technique. Simulations were done for different Péclet numbers. Then, the adjoint equation of the advection-diffusion-reaction equation was derived for the one-dimensional case and the expression of the coefficient of sensitivity of a generic functional related to a generic parameter was obtained. The sensitivities of the mean and instantaneous pollutant rates were analyzed with relation to the following parameters: drag speed of the flowing current and Péclet number. Results of the sensitivity coefficient obtained via the perturbative methodology satisfactorily matched the same values calculated by the direct method, that is, by means of the direct solution of the advection-diffusion-reaction equation by changing the values of input data parameters.*

Keywords: *sensitivity analysis, SUPG method, advection-diffusion-reaction.*

1. Introduction

Problems of dispersions and transport of substances immersed in a fluid medium, such as water, can be modelled by means of the advection-diffusion-reaction partial differential equation. The numerical solution can be obtained, for instance, via the “Streamline Upwinding Petrov-Galerkin (SUPG)” technique (Brooks and Huges, 1982; Codina, 1993).

With the purpose of quantifying the amount of dispersed substance, the variations of two functionals are analyzed in this work: the mean value, in the time-space domain of the transported substance, and its instantaneous value, with relation to variations of the following parameters of system definition: drag speed of the fluid, Péclet mesh number and isotropic diffusivity coefficient.

These variations can be quantified by determining the so-called sensitivity coefficients, which can be obtained directly through a new solution of the advection-diffusion-reaction differential equation, by changing the parameter in the input data. This is the technique known as Construction of Response Surfaces. Another alternative is the broadly used methodology of Sensitivity Analysis via Perturbative Methods widely used in physics and thermal-hydraulics of reactors (Gandini, 1981 and 1987; Oblow, 1976 and 1978; Cacuci et al., 1980; Lima and Alvim, 1986; Lima, 1990; Lima et al., 1993). Recently, the advances in perturbative methods applied to nuclear engineering problems were compiled as a review paper (Lima et al., 1998) and sensitivity analysis for waterhammer problems in hydraulic networks was performed using the differential perturbative method (Baliño et al., in the press). It was not found at the literature applications of perturbative methods to perform sensitivity analysis referring to pollutant transport.

Sensitivity analysis through perturbative methods presents some advantages because it can be accomplished without previously choosing the parameter to be studied, and the calculations are faster and more efficient, as the equation system that describes the physical behavior of the problems is solved only once. However, the main disadvantage of this methodology is that the answer is linearized around a point of interest. However, such disadvantage can be minimized through the application of perturbation methods of higher order (Gandini, 1987), which are outside the scope of this work.

2. Methodology

We study now the transport of a substance in a fluid medium characterized by a field of known scalar speed $u(x, t)$ that satisfies the incompressibility equation.

2.1 Theoretical model

The transport of a substance in a fluid medium can be described by the advection-diffusion-reaction equation, i. e.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \phi - \text{div}(k \underline{\nabla} \phi) - \gamma \phi = f \quad \text{in } \Omega \times I \quad (1)$$

where ϕ is the concentration of the transported substance, u is the drag speed of the substance in the fluid (m/s), k is the constant isotropic diffusivity coefficient (m^2/s), γ is the absorption coefficient (s^{-1}), f is the source term (s^{-1}). Ω is a domain in \mathbb{R}^d , $d = 1, 2,$ or 3 and I is a time interval $[0, T]$.

We simplify the problem taking $d = 1$ (one-dimensional drainage), $\gamma = 0$ (null absorption) and $f = 0$ (absence of source). Then Eq. (1) can be rewritten as

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \times I \quad (2)$$

where $\Omega = [0, L]$ in \mathbb{R}^1 .

The initial and boundary conditions of the problems are:

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \phi_I(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ \phi(0, t) &= \phi_0(t) \quad 0 \leq t \leq T \\ \phi(L, t) &= \phi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (3)$$

for convenient functions ϕ_I, ϕ_0, ϕ_1 .

2.2 Numeric solution

Eq. (2) with the initial and boundary conditions given by Eq (3) was numerically solved using the ‘‘Streamline Upwinding Petrov-Galerkin (SUPG)’’ technique (Brooks and Huges, 1982; Codina, 1993; Heinrich, 1996). The numerical solution can be written in the following matrix form:

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\phi}} + \underline{\underline{C}} \underline{\phi} + \underline{\underline{K}} \underline{\phi} = \underline{0} \quad (4)$$

where $\underline{\underline{M}}$ is the matrix of the global mass of the system, $\underline{\underline{C}}$ is the global capacitive matrix, $\underline{\underline{K}}$ is the global rigidity matrix, $\underline{\phi}$ is the vector of the unknown values of the global nodes and $\dot{\underline{\phi}}$ is the vector of the speeds of the unknown values of the global nodes. Integrating this equation over time using an implicit finite differences approach, we obtain

$$\frac{\underline{\underline{M}}(\underline{\phi}^{n+1} - \underline{\phi}^n)}{\Delta t} + ((1-\theta)(\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}})\underline{\phi}^n + \theta(\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}})\underline{\phi}^{n+1}) = \underline{0} \quad (5)$$

where $\underline{\phi}^{n+1}$ and $\underline{\phi}^n$ are the values corresponding to times t^{n+1} and t^n respectively, and $0 \leq \theta \leq 1$ is the “implicitness” parameter (for Crank-Nicholson method $\theta = 0.5$).

2.3 Sensitivity Analysis

Eq. (2) can be rewritten as

$$m = H\phi = 0, \tag{6}$$

where

$$H = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{7}$$

By deriving Eq. (6) with relation to a generic parameter p_i , according to the differential formalism (Oblow, 1978; Cacuci, 1980; Lima, 1990), we obtain

$$\frac{\partial \phi / i}{\partial t} + u \frac{\partial \phi / i}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \phi / i}{\partial x^2} = S(i) \tag{8}$$

where:

$$S(i) = - \frac{\partial m}{\partial p_i}. \tag{9}$$

The adjoint operator of H is given by:

$$H^* = - \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + k \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \right] \tag{10}$$

Therefore, the adjoint equation of Eq. (8) can be written as

$$- \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + u \frac{\partial \phi^*}{\partial x} + k \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} \right] = S^+ \tag{11}$$

where S^+ represents the source term of the adjoint equation, related to the functional to be studied. The conditions for the solution of the adjunct equation are chosen in order to cancel the unknown terms of the concomitant bilinear \mathbf{P} between ϕ^* and ϕ/i given by the expression:

$$P(\phi^*, \phi/i) = - \int_x \left[\phi^* \phi/i \right]_0^L dx + k \int_t \left[\phi^* \frac{\partial \phi/i}{\partial x} \right]_0^L dt - k \int_t \left[\phi/i \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right]_0^L dt - u \int_t \left[\phi^* \phi/i \right]_0^L dt \tag{12}$$

3 Applications

To show the use of the perturbative technique in the sensitivity study, we analyzed two results: the mean concentration ϕ_m in the phase space and the instantaneous value ϕ_{r_o} at $t = 0.5$ s and $x = 0.975$ m. This point has been chosen because it belongs to the numerical boundary layer and presents strong gradients of the variable ϕ .

3.1 Sensitivity study of the mean concentration ϕ_m in the phase space

The mean value concentration ϕ_m in the phase space is defined by

$$\phi_m = \frac{1}{LT} \iint_{x,t} \phi(x,t) dt dx \tag{13}$$

where T represents the final time and L represents the length of the channel as indicated in the definition of Ω . From (Cacucci et al, 1980) the following can be concluded:

$$S^+ = 1/LT. \tag{14}$$

Then, Eq. (11) takes the form:

$$-\left[\frac{\partial \phi_m^*}{\partial t} + u \frac{\partial \phi_m^*}{\partial x} + k \frac{\partial^2 \phi_m^*}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{LT} \tag{15}$$

with the following final and boundary conditions chosen to nullify the terms of the concomitant bilinear:

$$\begin{aligned} \phi_m^*(x,T) &= 0, & 0 < x < L \\ \frac{\partial \phi_m^*}{\partial x}(L,t) &= 0, & 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{16}$$

$$\phi_m^*(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

Note that taking the adjoint equation is a “reversal operation” that changes the sign of the time derivative.

3.2 Sensitivity study for the instantaneous value at $t = 0.5$ s and $x = 0.975$ m.

The instantaneous value ϕ_{r_0} at $t = 0.5$ s and $x = 0.975$ m can be defined by

$$\phi_{r_0} = \iint_{x,t} \phi(x,t) \delta(x-0.975) \delta(t-0.5) dt dx \tag{17}$$

where $\delta(x)$ is the Dirac delta.

From Eq. (17) we get

$$S^+ = \delta(x-0.975) \delta(t-0.5). \tag{18}$$

Then, for Eq.(18), Eq. (11) takes the form

$$-\left[\frac{\partial \phi_{r_0}^*}{\partial t} + u \frac{\partial \phi_{r_0}^*}{\partial x} + k \frac{\partial^2 \phi_{r_0}^*}{\partial x^2} \right] = \delta(x-0.975) \delta(t-0.5) \tag{19}$$

with the following final and boundary conditions, chosen to nullify the terms of the concomitant bilinear (Gandini,1987):

$$\phi_{r_0}^*(x,T) = \delta(x-0.975) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\phi_{r_o}^*(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \tag{20}$$

$$k \frac{\partial \phi_{r_o}^*(L - \varepsilon, t)}{\partial x} - u \phi_{r_o}^*(L - \varepsilon, t) = -\delta(t - T) \quad 0 \leq t \leq T$$

with ε arbitrarily small. The numeric treatment of the Eq (20) is made using integration (i. e., as a weak solution), as can be seen for instance in (Jacovkis and Rosales, 1993).

3.3 Sensitivity Coefficients

The sensitivity coefficients with relation to the analyzed parameters, drag speed of the fluid (u), isotropic diffusivity coefficient (k) and Péclet (Pe) number are respectively given by:

$$\frac{\delta R}{\delta u} = \iint_{x,t} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \phi^* dx dt, \tag{21}$$

$$\frac{\delta R}{\delta k} = \left\langle -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \phi^* \right\rangle = -\left\{ \int_0^L \left[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dt - \iint_{x,t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} dx dt \right\}, \tag{22}$$

$$\frac{\delta R}{\delta Pe} = \frac{2 \Delta t}{h} \iint_{x,t} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \phi^* dx dt \tag{23}$$

where Δt is the time step, and h the element length.

4 Results and Discussions

To exemplify the study developed herein, consideration was given to the case of the one-dimensional transport of a pollutant substance in a fluid medium (water), moving in a channel of length L , at speed u . Tab. (1) shows the physical and geometric parameters of the current problem.

Table 1 – Geometrical and physical parameters

Description	Nomenclature	Value
Total simulation time	T	1,0s
Channel length	L	1,0 m
Isotropic diffusivity	K	0,01 m ² /s
Fluid velocity	u	1,0 m/s
Element length	h	0,25 m
Time step	Δt	0,0625 s
Péclet number	$Pe = \frac{u h}{2 k}$	12,5
Implicit mesh parameter	θ	1,0
Coordinates of the observation point	r_o	0,975m, 0,5s

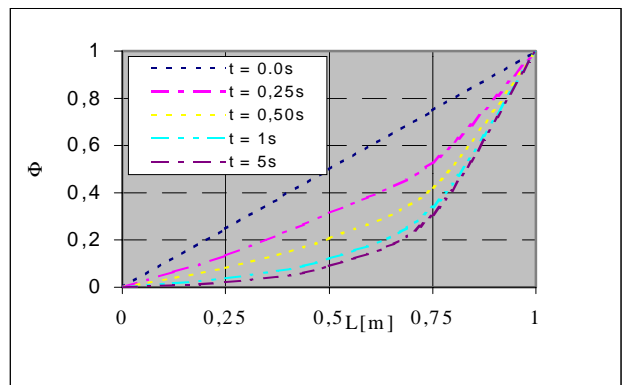


Figure 1-Evolution of the pollutant concentration in the water for a predominantly convective regime

The initial and boundary conditions of the problem are

$$\phi(x, 0) = x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\phi(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\phi(x, 1) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Fig. (1) shows the results of the Eq. (2) that represent the evolution of the pollutant concentration along the channel for several times. These results are very important for obtaining the sensitivity coefficients in the equations (21), (22) and (23). The flux analyzed corresponds to the high Péclet number (12.5) that is significant in the upwinding functions adopted. A migration of the pollutant to the exterior of the channel is due to the principle of mass conservation written in Eq. (2). The initial and boundary conditions of the pollutant concentration are taken as in (Codina, 1993) with the objective of comparing results for both methods. It represents the evolution of the pollutant concentration in the fluid medium when this substance is introduced against the stream and is maintained constant along the time.

Fig. (2) shows the graph of the adjoint function ϕ_m^* (as it can see in Eq.(15) and (16)) wich corresponds to the mean concentration functional of the pollutant in the fluid medium. ϕ_m^* represents the physical contribution (of the increment of the pollutant situated at point r_o) to the functional. In this case the contribution affects the mean concentration of the pollutant given by the Eq.(13) in the phase space.

Fig.(2) shows that, at a certain time, the contribution is more important at the entrance of the channel. This happens because for points that are further from the entrance of the channel, the pollutant remains less time inside it. The negative values of the further solution of the adjoint equation are in agreement to the Eq. (15), that is represented in the graph (2). It can be interpreted as the solution of Eq.(2), to which a constant sink is incorporated and artificial difusivity is extracted. On the other hand, it can be verified that for a certain position inside the channel, the contribution to the mean functional is more significant when the substance increment incorporated is given for lesser times. This contribution will have more interacting time inside the channel.

This justifies the fact that the adjoint function is called “importance function” by some authors (Gandini, 1987; Lima, 1990).

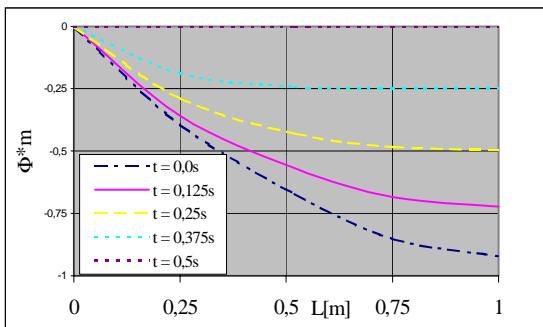


Figure 2 – Adjoint function corresponding to the mean value functional of the contaminant concentration

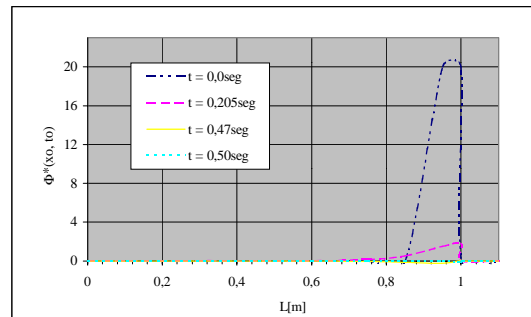


Figure 3 – Adjoint function corresponding to the instantaneous value functional of the contaminant concentration

Fig. (3) shows the graph of the adjoint function $\phi_{r_o}^*$ which corresponds to the instantaneous functional at $t = 0.5s$ and at $x = 0.975m$ due to the instantaneous pollutant concentration in the fluid medium given by the equations (19) and (20). For a time interval the contribution of a pollutant increment will be larger at points closer to the exit of the channel and to the final time. On the other hand, as expected, for fixed points inside the channel, the contribution is more significant when the instant considered is closer to the final time.

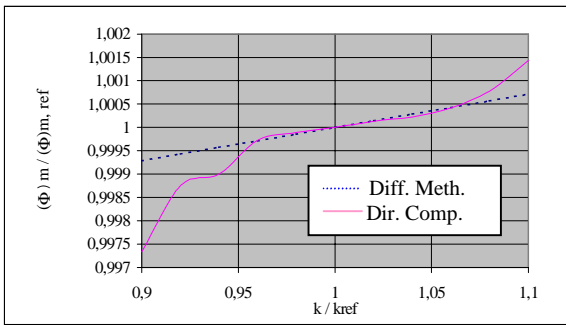


Figure 4 – Mean concentration of pollutant as a function of parameter $k(k_{ref} = 0,01 \text{ m}^2/\text{s})$

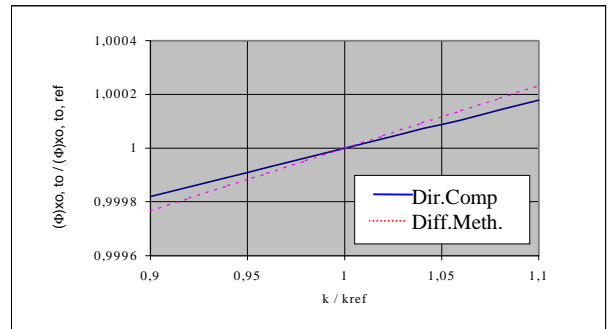


Figure 5 – Instantaneous concentration of pollutant as a function of parameter $k(k_{ref} = 0,01 \text{ m}^2/\text{s})$

Figs. (4) and (5) show the graphs of the mean and instantaneous concentration of the pollutant ϕ_m and ϕ_{r_0} which corresponds to the Eqs.(13) and (17) as a function to the isotropic diffusivity coefficient k , obtained via the disturbance formalism (perturbative method) and by the direct computations (via SUPG method). The difference between the results obtained by the perturbative and direct methods is smaller because the values of Pe gradually decline in order to guarantee the stability of the solution of Eq. (2).

Figs. (6) and (7) show the graphs of the mean and instantaneous concentrations of the pollutant ϕ_m and ϕ_{r_0} as a function of the drag speed of the fluid u , which corresponds to the Eqs. (13) and (17), obtained via the disturbance formalism and via the direct computation. The variation of ϕ_m as a function of parameter u is practically symmetrical with regard to the point of reference. The reduction in the value of ϕ_m as u increases is an expected result due to the increase in Péclet number.

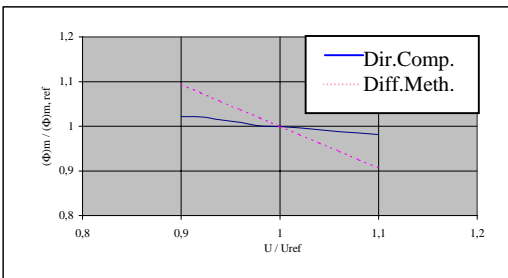


Figure 6 – Mean concentration of pollutant as a function of parameter $u (u_{ref} = 1 \text{ m/s})$

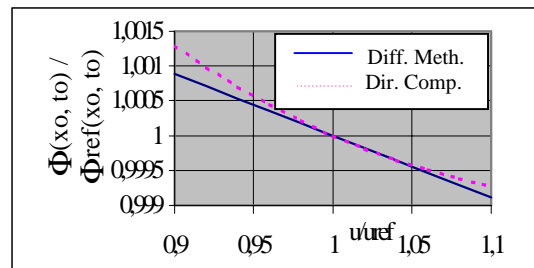


Figure 7 – Instantaneous concentration of pollutant as a function of parameter $u (u_{ref} = 1 \text{ m/s})$

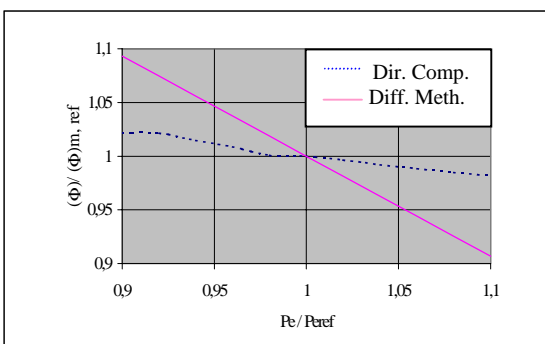


Figure 8 – Mean concentration of pollutant as a function of parameter $Pe (Pe_{ref} = 12,5)$

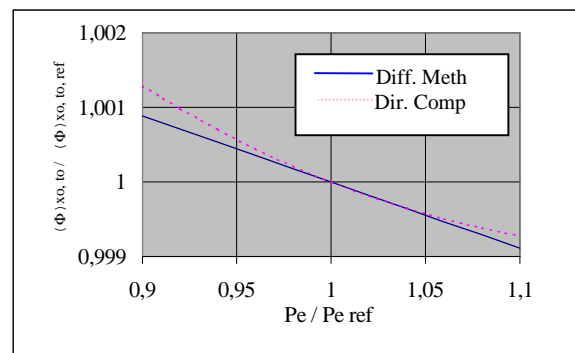


Figure 9 – Instantaneous concentration of pollutant as a function of parameter $Pe (Pe_{ref} = 12,5)$

Figs. (8) and (9) show the graphs of the mean and instantaneous concentrations of the contaminant ϕ_m and ϕ_{r_0} as a function of the Péclet number, which corresponds to the Eqs. (13) and (17), obtained via the disturbance formalism and via the direct computation. The variation of ϕ_m as a function of parameter Pe is also practically symmetrical with

regard to the point of reference. The reduction in the value of ϕ_m as Pe increases is an expected result due to the increase in Péclet number.

Table 2 – Values of the sensitivity coefficients

Functional	k		u		Pe	
	s/m ²	-	s/m	-	-	-
ϕ_m	0,23722	0,00713	-0,31063	-0,93389	-0,02850	-1,07104
ϕ_{r_0}	0,21627	0,00233	-0,00825	-0,00889	-0,00412	-0,05546
	$\phi_{m \text{ ref}}$				0,33262	
	$\phi_{r_0 \text{ ref}}$				0,92866	
	k_{ref}				0,01 m ² /s	
	u_{ref}				1 m/s	
	Pe_{ref}				12,5	

Tab. (2) shows the results of the sensitivity coefficients of the functional analyzed with relation to the three selected parameters. The values considered in the reference solution are also shown in this table. For comparison purposes, the dimensionless sensitivity coefficients were also included. Positive values indicate that the functional increases with the parameter, and negative values indicate a reduction in the functional as the parameter value increases. It should be observed that the Péclet mesh number is the parameter for which both functionals studied present larger sensitivity, and the isotropic diffusivity coefficient is the parameter that has the least influence on the functionals. On the other hand, it is also seen that the instantaneous concentration functional presents less sensitivity to the parameters than the mean concentration functional.

Tab (3) shows the errors found in the sensitivity coefficients of the functionals studied with relation to the chosen parameters. It can be seen that there are major errors of the order of 23.8%, what suggests the use of higher orders for the sensitivity study via perturbative methods, as well as a choice of the function of the form of finite elements of an order higher than the quadratic order.

Table 3 – Errors in the calculations of the sensitivity coefficients

Functional	Parameter variation (%)	Parameter	Relative errors(%)
ϕ_m	5	K	13,9%
		U	3,8%
		Pe	3,8%
ϕ_o	5	K	23,8%
		U	16,7%
		Pe	16,7%

In a first approximation, perturbation method is efficient to compute sensitivity coefficients of the functional ϕ_m in relation to the parameters: drag velocity u and Péclet number Pe. For functional ϕ_o , a higher order approach seems necessary.

Conclusions

The methodology proposed in this paper for the sensitivity analysis, via the differential formalism, allowed us to compute the sensitivity coefficients of the mean and instantaneous concentrations of the pollutant in a fluid medium (water) without having to build the response surfaces imposed by the direct methodology, that is, the solution of the diffusion-convection-reaction equation repeated several times, that describes the physical behavior of the system. Computational saving is a consequence of this approach.

The values that were found demonstrated that the functionals studied present higher sensitivity to variations of the Péclet mesh number. On the other hand, the sensitivity coefficients found correctly indicate the direction of the variations of the answers functional, although with many errors. The magnitude of the relative errors found suggests the choice of a form function of higher order for the solution of the differential equation via the method of finite elements and, also, the extension of the sensitivity analysis via perturbative methods of higher order.

Finally, it is important to emphasize that the problem under discussion in this paper consists of an assay for the application of sensitivity studies via perturbative methods in more complex situations.

6 Acknowledgements

The authors would like to thank the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (National Agency for Technological and Scientific Support)–CNPq and the University of Buenos Aires for the financial support, the Departamento de Energia Nuclear da UFPE (Department of Nuclear Energy of the Federal University of Pernambuco) for their logistic support and to Professors Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira and Dr. Naum Fraidenraich for the countless discussions and suggestions.

7 References

- Baliño, J. L., Larreteguy, A. E., Lorenzo, A. C., Padilla, A. G. and Lima, F. R. A., (no prelo), "The Differential Perturbative Method Applied to Sensitivity Analysis for Waterhammer Problems in Hydraulic Networks", Applied Mathematical Modelling.
- Brooks, A.N. and Huges, T.R.J., 1982, "Streamline Upwinding/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., vol. 32, pp. 199-259.
- Cacuci, D.G., Weber, C.F., Oblow, E.M. and Marable, J.H., 1980, "Sensitivity Theory for General Systems of Nonlinear Equations", Nuclear Science and Engineering, vol. 75, pp. 88-110.
- Codina, R., 1993, "A Finite Element Formulation for the Numerical Solution of the Convection-Diffusion Equation", PhD Thesis International Center for Numerical Methods in Engineering.
- Gandini, A., 1981, "Generalized Perturbation Theory for Nonlinear Systems for the Importance Conservation Principle", Nucl. Sci. Eng., vol. 77, p. 316.
- Gandini, A., 1987, "Generalized Perturbation Theory (GPT) Methods. A Heuristic Approach", Advances in Nuclear Science and Technology, vol. 19, p. 205.
- Heinrich, J.C., Idelsohn, S.R. and Vionnet, C.A., 1996, "Boundary Conditions for Finite Element Simulations of Convective Flows with Artificial Boundaries", International Journal For Numerical Methods In Engineering, vol. 39, pp. 1053-1071.
- Jacovkis, P.M. and Rosales, R.R., 1993, "Análisis Numérico de Ondas de Detonación Retardada", Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 9, pp. 335-356.
- Lima, F.R.A. e Alvim, A.C.M., 1986, "Tempera-V2: Um Programa para Análise de Sensibilidade num Canal Refrigerante de Reatores Nucleares, PEN-139, Programa de Engenharia Nuclear – COPPE/UFRJ.
- Lima, F.R.A., 1990, "Aplicações de Métodos Perturbativos ao Modelo Mult-Canal COBRA IV_1 para Cálculos de Sensibilidade em Núcleos de Reatores Nucleares", Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Brasil.
- Lima, F. R. A., Lira, C.A.B.O. and Gandini, A., 1993, "Sensitivity Analysis of Thermohydraulic Systems via Heuristic Generalized Perturbation Theory (HGPT) Methods", Ann. Nucl. Energy, vol. 20, No 10, pp., 679-690.
- Lima, F.R.A., Gandini, A., Blanco, A., Lira, C.A.B.O., Maciel, E. S. G., Alvim, A.C.M, Silva, F.C., Melo, P.F.F., França, W.F.L, Baliño, J.L., Larreteguy, A.E., Lorenzo, A., França, W.F.L., 1998, "Recent Advances in Perturbative Methods Applied to Nuclear Engineering Problems", Progress in Nuclear Energy, Vol. 33, N 1/2, pp. 23-97.
- Oblow, E. M., 1976, "Sensitivity Theory from a Differential Viewpoint", Nucl. Sci. Eng., vol. 59, p. 187.
- Oblow, E. M., 1978, "Sensitivity Theory for Reactor Thermal-Hydraulics Problems, Nucl. Sci. Eng., vol. 68, p. 322.

POWER CONSUMPTION AND SUSPENSION CRITERIA FOR TWO-PHASE FLOW IN A STIRRED VESSEL POWERED BY AN HYPERBOLOID IMPELLER

F. T. Pinho

Centro de Estudos de Fenómenos de Transferência, DEMEGI, Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, Rua Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal, fpinho@fe.up.pt

A. S. Cavadas

Instituto de Hidráulica e Recursos Hídricos, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Rua Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal, adelio.cavadas@netc.pt

Abstract. Measurements of the power consumption and the determination of the minimum speed and power dissipation for the complete off-bottom suspension of solid particles in a stirred vessel powered by a low consumption hyperboloid agitator was carried out. The particles had a density of 2500 kg/m^3 and average diameters of $289 \mu\text{m}$ and $387 \mu\text{m}$, and were suspended in a Newtonian continuous phase. At high Reynolds number, and at weight concentrations of up to 1.28%, the Newton number was independent of concentration and equal to 0.8. The Zwietering parameter was found to be around 8 to which corresponded an average power dissipation from 0.1 to 0.3 W/kg. Power consumption measurements were also carried out with a standard Rushton impeller which showed results in agreement with literature.

Keywords: stirred vessel, hyperboloid impeller, off-bottom suspension, Newton number, Zwietering parameter

1. Introduction

Mechanically agitated vessels are an essential piece of hardware in waste water treatment plants (Höfken et al, 1994). In a global world where water is becoming a scarcer commodity, and environmental protection is gaining momentum, recycling of water is becoming more important everyday. Waste water is basically a three-phase water suspension containing solid particles, fibres and gas. These can either be present as a result of the action of microorganisms or due to aeration during the treatment processes. Therefore, it is important that the agitation created by the impeller is strong enough to increase mixing rates and heat transfer, whenever processes are to take place together with heating or cooling, but gentle enough to avoid destruction of microorganisms that would stop the process of waste. There is here a similarity of behaviour with mixing aimed at flocculation.

These constraints call for special agitating devices and aeration procedures, and the hyperboloid impeller is one such agitator that was designed from considerations of potential flow theory by Höfken et al (1991), to ensure the complete suspension of particles and a good dispersion of air bubbles. This new hyperboloid impeller was observed to possess a low power consumption, but improvements in the mixing required the presence of shear and transport ribs on its lower and upper surfaces, respectively, especially during aeration.

These features were already present in the first detailed works involving this agitator by Nouri and Whitelaw (1994) and Ismailov et al (1997). Good mixing and overall flow within the vessel required the colocation of the impeller close to the bottom of the vessel, and it was this configuration that was extensively investigated by Pinho et al (1997, 2000) in both their mean and turbulent flow field characteristics, respectively.

To our knowledge, except for the work of Nouri and Whitelaw (1994), all the other investigations carried out so far with the hyperboloid impeller have involved pure water only, and it is thus necessary to extend the research to two- and three-phase fluids, as well as to the case of non-Newtonian fluids since waste water is known to have, at least, a shear-thinning viscosity and yield stresses (Monteiro, 1996).

Before embarking on an extensive research programme on liquid-solid flow in the mixing vessel one should start by assessing the regimes of flow and in particular to identify the conditions under which there is complete suspension of particles (off-bottom suspension) and its relation to geometric and physical quantities, as this is the condition that maximises surface area for chemical reactions in heat and mass transfer. This was done in the past with the Rushton and other impellers by Nienow (1968), Baldi et al (1978) and Oldshue and Sharma (1992), to cite just a few past works. The determination of the value of the velocity for off-bottom suspension allows the determination of the so-called Zwietering parameter S . Nouri and Whitelaw (1994) arrived at $S= 17$ for an hyperboloid impeller of 50 mm of diameter in a tank of diameter of 144 mm (T) and a clearance of $C= T/10$. Their particles had a relative density of 1.18, a volumetric concentration of 2.2% and diameters ranging from 430 to 1000 μm . However, their impeller differs from the present version in two aspects: it lacked the shear ribs on the bottom surface that are present here, which is so important for bubble breakup during aeration, and their off-bottom clearance is still larger than used presently with the hyperboloid.

In this paper, we aim to determine experimentally the power consumption, and especially the minimum agitation speed for the complete suspension of solid particles, at low concentrations, in Newtonian liquids. The next section describes the rig and instrumentation and is followed by the presentation of the results.

2. Experimental set-up

2.1. Stirred vessel

The experimental rig is schematically represented in Fig. 1-a). It consisted of a 292 mm diameter T stirred vessel in acrylic, which was mounted on a support standing directly on a 3-D milling table. The vessel allowed a maximum height H of liquid of 600 mm, but the present measurements refer to $H/T = 1$. The vessel was mounted inside a square trough filled with water, that was part of a heating/ cooling circuit, to help maintain a constant temperature in the bath. Within the tank, four 25 mm wide and 4 mm thick baffles were mounted at 90° intervals to avoid solid-body rotation of the fluid. The baffles were attached to small triangular connectors which separated them by 6 mm from the vessel wall, to eliminate the dead zones normally found behind the baffles. The bottom of the tank was flat and had a bearing embedded in it to support the drive shaft, to minimize shaft wobbling.

Two different impellers of 100 mm diameter D were investigated: the hyperboloid, that constitutes the main focus of interest in this paper, and a standard Rushton impeller that was used for some comparison purposes. The geometric details of the hyperboloid agitator are presented in Fig. 1-b) and Table I and the coordinate system used in is defined in the figure. The transport ribs on the upper surface are 7×3.6 mm and the shear ribs at the bottom are 5 by 3.6 mm. More details can be found in Höfken and Bischof (1993). The hyperboloid was mounted on a 12 mm shaft, which had a small length with 8 mm diameter to fit the hyperboloid, and was positioned with an off-bottom clearance to vessel diameter ratio of $1.3/30$. The six-bladed Rushton impeller is drawn in Fig. 1-c) which was mounted at the standard configuration of $1/3$ off-bottom clearance (C/H).

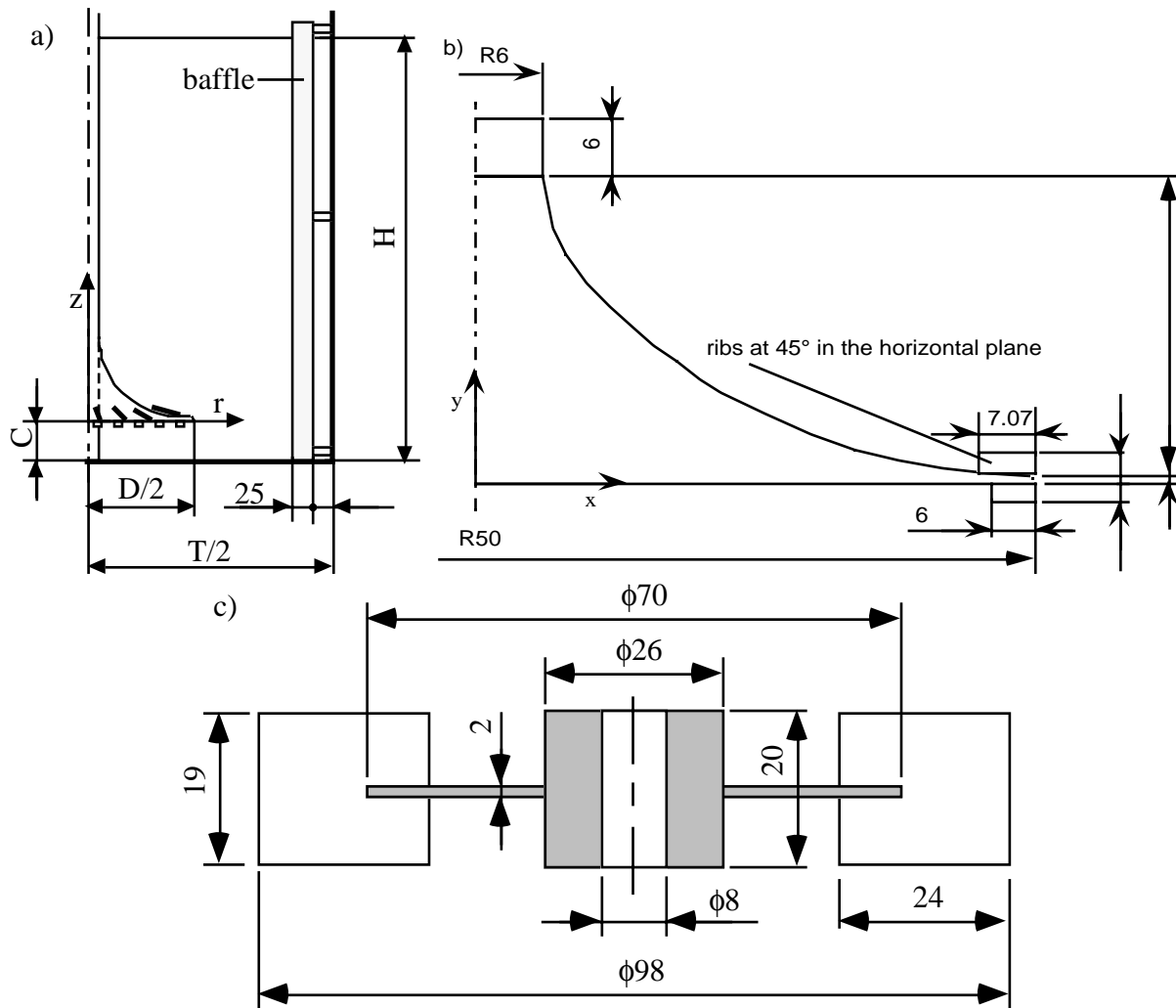


Figure 1. Geometric representation of the stirred vessel and agitators: a) the stirred vessel; b) the hyperboloid impeller (see Table 1 for coordinates); c) the Rushton impeller.

Table 1- Coordinates of the impeller surface of the 100 mm diameter hyperboloid impeller.

x [mm]	6	6	7	8	10	12	14	16	18
y [mm]	38.4	32.4	27	24.2	21	18.5	16.5	14.5	12.7
x [mm]	20	22	26	30	34	38	42	46	50
y [mm]	11.1	9.6	7.2	5.3	3.6	2.2	1.4	1.0	0.6

2.2. Measuring equipment

On top of the structure stood a 600 W DC servomotor controlled by a variable power supply unit, and the velocity could be monitored on a proper display. A tachogenerator gave an electrical impulse proportional to the speed and controlled it together with an amplifier. The analog output, from 0 to 10 V, corresponded to a speed in the range 0 to 3000 rpm. The speed could be kept constant with an uncertainty of around ±1 rpm and it never exceeded 600 rpm, except for very short periods of time, to avoid damage to the baffles.

The torque meter, model T34FN/1 from HBM, had a full range torque of 1Nm and was free from friction losses because it consisted of two distinct components: a rotor (T34r40/1), where the strain gauge bridge was attached, was fixed to the shaft, and a stator (T34ST) which communicated in frequency with the rotor. The output from the torque meter fed an MGC amplifier from HBM, and its output, as well as that from the tachogenerator, was fed to a computer via an A/D converter. Purpose-built software gave all the results, namely, the rotational speed, the torque and the power.

The measured torque included the torque transmitted to the fluid and the torque loss absorbed in the bearings. The torque loss was subtracted from the total torque to yield the net torque, after measurements were carried out with the tank having water above the bottom bearing, without touching the impeller. The uncertainty of the torque measurements is not constant and typically varied from about 7.5% to 0.3% when the impeller rotated from 100 rpm to 550 rpm, which corresponded to the minimum and maximum rotational speeds used for each fluid.

3. Fluid characteristics

Glass particles from S. Lindner (Silibeads, Type S, Art 4500) were separated prior to being suspended in the continuous phase. The separation was performed with a set of sieves from Retsch, calibrated according to DIN-ISO 3310/1, and yielded three classes of particles: class A had diameters from 250 to 315 µm, class B particles had diameters between 315 and 400 µm and class C for particles had diameters in the range 400 to 500 µm. The work to be reported here was carried out with particles of classes A and B. After sieving, small amounts of particles were suspended in water and used in a laser sizer, Malvern 2600 to determine particle distribution and the average diameter. To the distribution of particles was fitted a polynomial equation which yielded average diameters of 289 µm and 387 µm for class A and B particles. A Coulter counter model LS 230 was also used as a check and here the results were of 286 µm and 350 µm, respectively. The density of the particles was measured with a picnometer to be 2,470 ± 124 kg/m³ in both classes (the value quoted by the manufacturer was 2,500 kg/m³).

As continuous phase, water, a glicerine-water mixture and pure glicerine were used, which have the properties listed in Table 2. The viscosities were measured in a Rheometer Rheolab UM/MC100 implementing a double concentric cylinder.

Table 2- Newtonian fluids and its properties at 20°C

Fluid	ρ_l [kg/m ³]	μ [Pa.s]
Water	1,000	0.00102
Glycerin-Water	1,140	0.0117
Pure glicerine	1,200	0.669

The suspensions had thus a density ratio of 2.1, 2.2 and 2.5, depending on the solvent, and suspensions having mass concentrations from 0.1% to 1.28% were prepared.

4. Results and discussion

4.1. Single-phase Newtonian flow

The power consumption in a stirred vessel depends of fluid properties, geometrical parameters and flow quantities and the functional relationship amongst these quantities can be normalised for single-phase fluids as,

$$Ne \equiv \frac{P}{\rho N^3 D^5} = f\left(\frac{\rho N D^2}{\eta}, \frac{N^2 D}{g}, \frac{D}{T}, \frac{C}{T}, \frac{H}{T}, \text{impeller}\right) \tag{1}$$

where Ne is the Newton number (often called also the Power number) and the first and second numbers on the right-hand-side are the Reynolds number and the square of the Froude number, respectively. The Froude number appears here

due to the free-surface, but its influence is eliminated by the presence of the baffles. These, and the low flow velocities at the surface, keep it flat and without vortices.

As a check on the power measuring system we have carried out measurements of the Newton number as a function of the Reynolds number with the Rushton and the hyperboloid impellers, and the results are presented in Fig. 2.

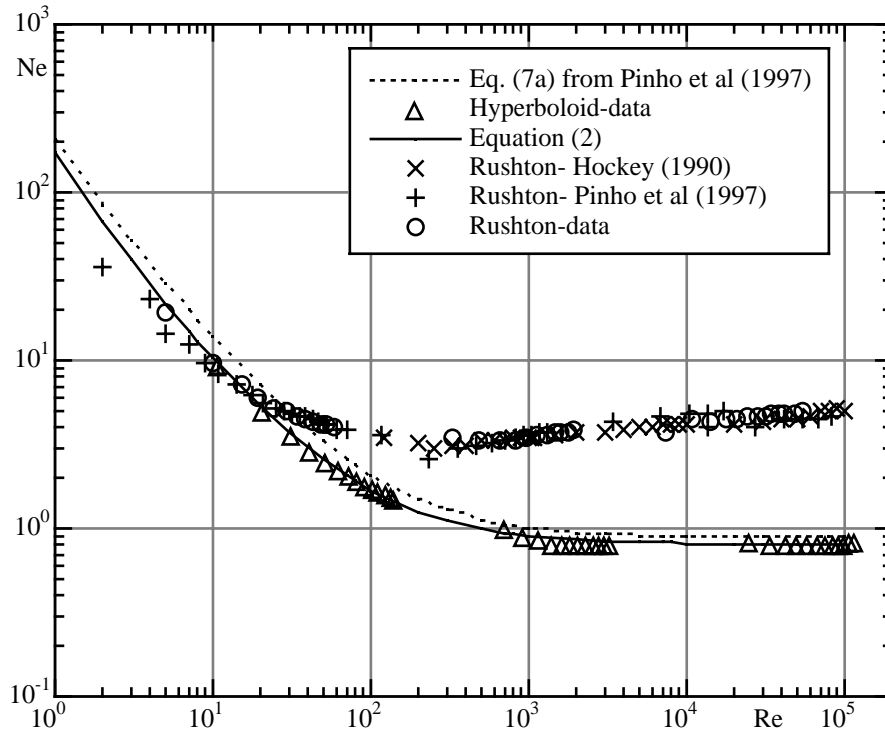


Figure 2- Newton number as a function of Reynolds number for Rushton and hyperboloid impellers with $H/T = 1$ and $D/T = 1/3$.

For the Rushton impeller the present values are in agreement with data in the literature and in particular with the values reported by Hockey (1990) as well as with those obtained by Pinho et al (1997) in the same rig. However, note that the present measurements were obtained with a more accurate torque meter: whereas here the full scale of the torque meter is 1 Nm, the instrument used by Pinho et al (1997) could measure up to 50 Nm with an accuracy of 10^{-2} Nm. The accuracy in Pinho et al was of the order of the present system full scale reading and the consequence is that the present data is far more accurate and data is smoother than the previous data.

The hyperboloid is a low power agitator, with a consumption more than five times lower than that of the Rushton at high Reynolds numbers and this has been confirmed here again. In Fig. 2 we compare the present data with Eq. (7a) of Pinho et al (1997) which was fitted to the extensive set of data for the hyperboloid. The present data is below that of the correlation of Pinho et al (1997) by about 10%, tending to $Ne = 0.8$, whereas the previous data tended to 0.88 at high Reynolds number. As mentioned above, the higher accuracy of the present system and the lower uncertainties associated with the corrections to the net torque lead us to conclude that the present values are to be preferred to those of Pinho et al (1997) and, as a consequence, we fitted to the new data an expression of the same type and obtained

$$Ne = 0.81 + \frac{86.6}{Re} + \frac{87.9}{Re^2} \tag{2}$$

which is represented as a full line in Fig. 2.

4.2. Two-phase flow

Here, we first show the effects of particle size and particle loading upon the Newton number- Reynolds number relation, after which the suspension criteria will be discussed.

4.2.1. Power number

For the suspensions, the Newton number dependency becomes more complicated as we now have the effect of particles. These are under the action of buoyancy forces and the dimensional analysis brings us the following result

$$Ne \equiv \frac{P}{\rho N^3 D^5} = f \left(\frac{\rho N D^2}{\eta}, \frac{N^2 D}{g}, \frac{\rho_l N^2 D}{|\rho_l - \rho_p| g}, \frac{d}{D}, x, \frac{D}{T}, \frac{C}{T}, \frac{H}{T}, \text{impeller} \right) \quad (3)$$

Relative to Eq. (1) there are three extra numbers: the third to fifth numbers on the right-hand-side. The third number is the square of the densimetric Froude number which takes into account the role of buoyancy forces acting upon the particles; the fourth independent parameter is the ratio between the particle and impeller diameters (d and D) and finally, the particle loading is here represented by the mass concentration x .

Again, the free-surface has a negligible effect, i.e., the standard Froude number effect (second term on the right-hand-side) can be dropped. However, there is an alternative representation of Eq. (3), which is not so physically accurate, but is often more convenient, where the densimetric Froude number is substituted by the standard Froude number and the ratio of densities.

$$Ne \equiv \frac{P}{\rho N^3 D^5} = f \left(\frac{\rho N D^2}{\eta}, \frac{\rho_p}{\rho_l}, \frac{d}{D}, x \right) \quad (4)$$

Thus, according to Eq. (4), for the same geometry the Newton number will depend only on the Reynolds number, the density ratio, the particle concentration and particle diameter, which in this case is accounted for in the class of particles.

For the Rushton turbine the power was measured for both class of particles (A and B) and the results are presented in Figs. 3 and 4, respectively. At high Reynolds numbers, Fig. 3 shows that the power number is not affected by the particle concentration in the tested range, even considering the difference in density. As the Reynolds number decreases, and especially for the low Reynolds number range, a decrease in power number is observed with particle concentration: for a concentration of 1.28% the Newton number at a Reynolds number of 20 is 15% lower than for the pure glicerine, and the difference rises to 20% at lower Reynolds numbers. As we will see later, at these low Reynolds numbers most of the particles are not suspended. With the larger particles B the same pattern of behaviour was observed, and Fig. 4 shows the corresponding Newton number versus Reynolds number plot when the suspending medium is water.

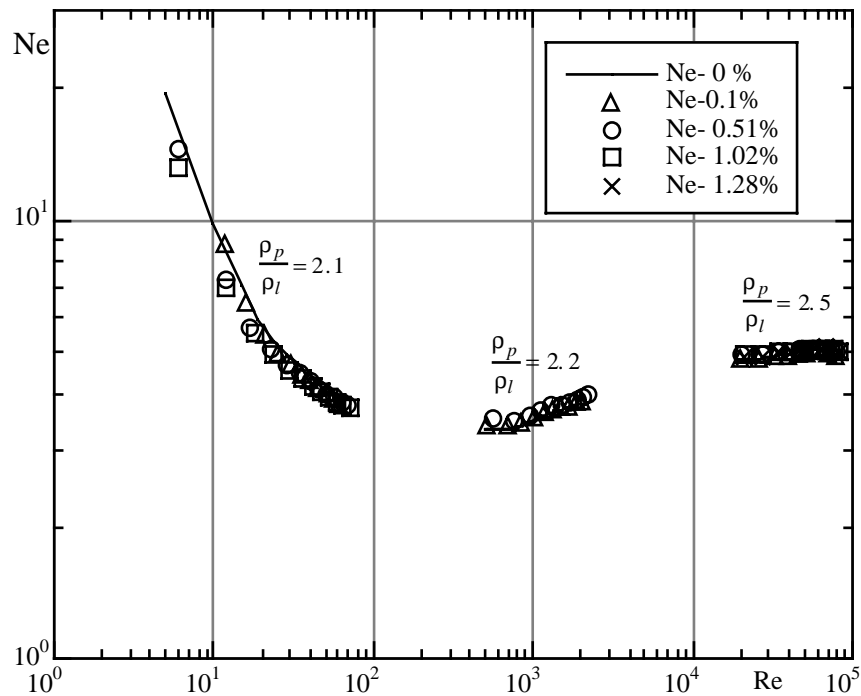


Figure 3- Power number variation for a Rushton turbine with class A particle suspensions. Each set corresponds to a different Newtonian solvent.

Similar measurements were carried out when the fluid was being pumped by the hyperboloid impeller, the results of which are shown in Fig. 5. Again, no effect of particle concentration within the tested range.

It is not unusual that the power drawn remains unaffected by the solids concentration. Nienow (1997) reports such finding for heavier than the liquid particles at weight concentrations of up to 10%.

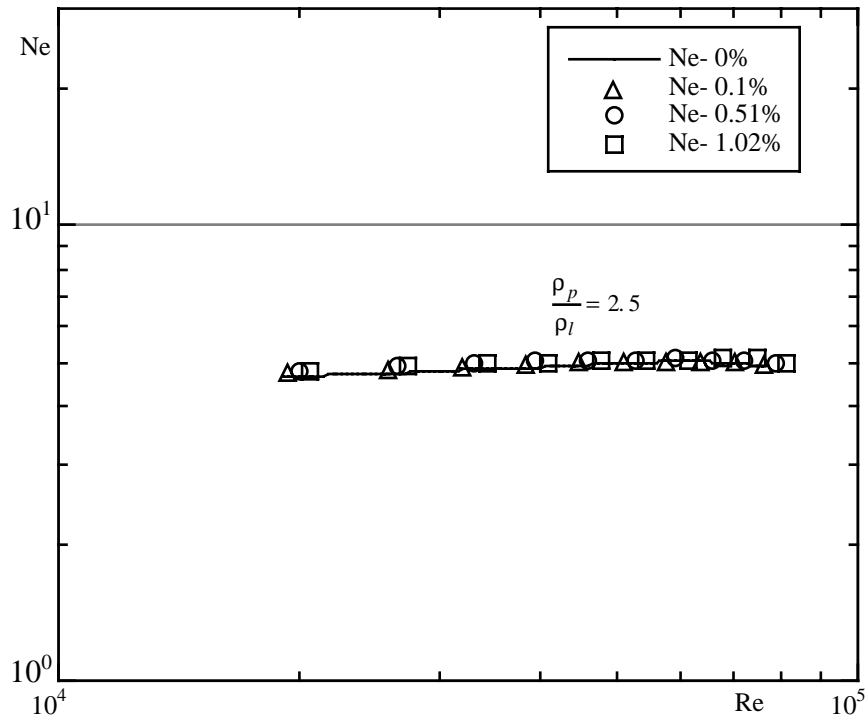


Figure 4- Power number variation for a Rushton turbine with class B particle suspension in water.

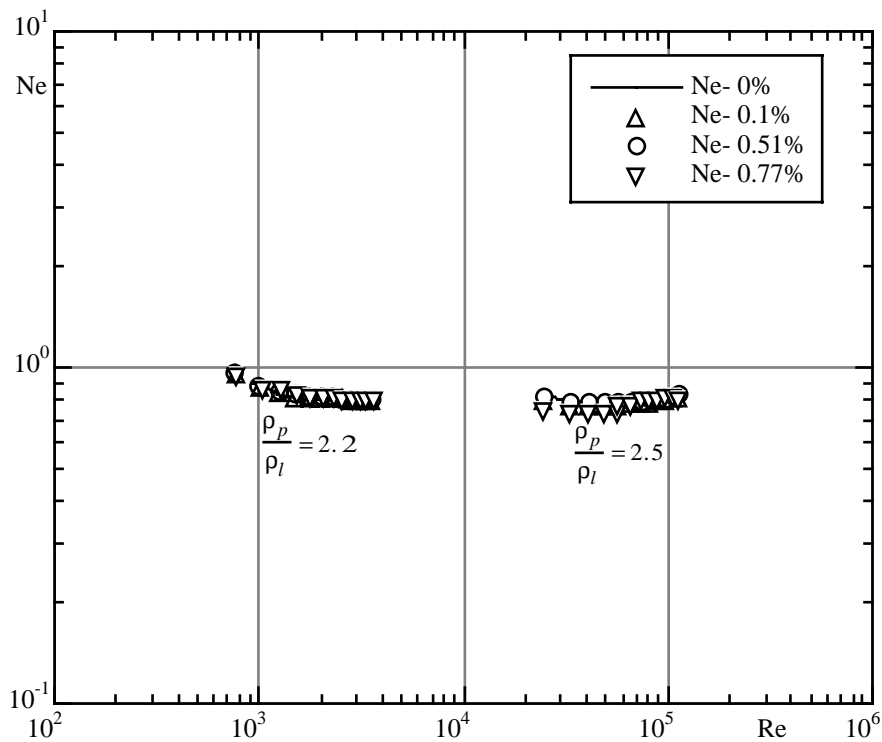


Figure 5- Power number variation for an hyperboloid impeller with class A particle suspensions.

4.2.2. Suspension criteria

The second objective of this work was the determination of the minimum rotation speed for the complete suspension of particles. This is not a completely objective measurement as it is performed visually and its determination is also difficult because, even at high velocities, there are always some particles at the bottom.

Between the incomplete and complete suspension of particles, there is a range of angular speeds where some particles settle temporarily at the bottom of the vessel for a small period of time. Taking these observations into account, our criteria for defining complete suspension was that of Zwietering (1958), who considered that particles should not stay at the bottom for more than 2 seconds, otherwise suspension was to be considered incomplete. In order to observe the suspension, our visual observation concentrated at the bottom of the stirred vessel which was well-

illuminated by an incandescent 100 W lamp. This observation was not difficult to carry out, because the last particles to be suspended were coming, consistently, from directly beneath the impeller, so our attention was concentrated in a very restricted region. Although subjective, this procedure can yield values with $\pm 5\%$ reproducibility as mentioned by Nienow (1997).

The minimum rotation speed for off-bottom suspension of particles is usually quantified by the so-called Zwietering parameter S (Zwietering, 1958), defined by Eq. (5)

$$S \equiv \frac{N_s D^{0.85}}{v^{0.1} d^{0.2} \left(g \frac{\rho_p - \rho_l}{\rho_p} \right)^{0.45} x^{0.13}} \quad (5)$$

or, alternatively, by the similar nondimensional number of Eq. (6) derived by Chapman et al (1983)

$$S_{Ch} \equiv \frac{N_s D^{0.76}}{v^{0.1} d^{0.15} \left(g \frac{\rho_p - \rho_l}{\rho_p} \right)^{0.4} x^{0.12}} \quad (6)$$

In both equations N_s is the rotation speed in rps, x is the mass concentration in percentage and v the kinematic viscosity. All the other quantities are in SI units and both equations were obtained by dimensional analysis arguments.

These measurements were carried out only for the hyperboloid impeller and complete off-bottom suspension was attained only when the suspending medium was water. The main results are listed in Table 3.

Table 3- Zwietering parameter and off-bottom speed for suspension of class A particles in a vessel powered by an hyperboloid impeller.

Re	x [%]	N_s [rpm] (rps)	S	S_{Ch}	$\bar{\epsilon}_s$ [W/kg]
65,700	0.1	400 (6.67)	7.7	7.0	0.12
73,900	0.26	450 (7.5)	7.7	7.1	0.17
82,100	0.51	500 (8.33)	7.8	7.2	0.24
90,300	0.77	550 (9.17)	8.1	7.6	0.32

Equally relevant is the power drawn by the system for the complete suspension of particles. This is determined under the assumption of homogeneous dissipation of power in the vessel using Eq. (7)

$$\bar{\epsilon}_s = \frac{4NeN^3 D^5}{\pi T^3} \quad (7)$$

and the values are also listed in Table III.

The Zwietering parameter varies less with particle concentration than the parameter of Chapman et al. Zwietering (1958) has performed tests with several impellers and different conditions and the present values are not too different: for the same ratio $T/D = 3$ he found S to be around 7.5 for a Rushton impeller very similar to ours in the range $T/C = 1$ to 7, against our value of $T/C = 30/1.3$ for the hyperboloid. However, the Rushton impeller of Zwietering had a Newton number of 6.2 whereas the hyperboloid agitator has $Ne = 0.8$ (for our Rushton $Ne \approx 5$). Relative to other impellers measured by Zwietering we also see that for his vaned disk with $T/C = 6$, S was again around 7.5.

Our measurements are consistent with those of Nouri and Whitelaw (1994) for the hyperboloid impeller. Since this impeller is responsible for a low velocity flow, except in the vicinity of the base of the stirrer (Pinho et al, 1997) there is a strong dependence of S on the off-bottom clearance. With higher clearances of $C/T = 1/3$ to $1/10$, Nouri and Whitelaw saw the parameter S to decrease from 19 to 12, with the latter value still rather high and in spite of their use of lighter particles ($\rho_p/\rho_l = 1.18$). It is necessary to have very low clearances (of the order of $1.3/30$) in order to have a jet of fluid at the base of the vessel that is capable of lifting the particles, thus reducing the Zwietering parameter to values similar to those encountered with classical agitators.

Although the energy input required by the hyperboloid impeller, for complete suspension of particles, is lower than that of the Rushton turbine, it nevertheless increases rather quickly to values typical of severe agitation as is typical with other impellers. For off-bottom suspension in systems powered by the Rushton disc turbine, Nienow (1997) mentions values of the order of 1 W/kg.

5. Acknowledgements

The authors would like to thank financial support of JNICT- Junta Nacional de Investigação Científica- through project PEAM/C/TAI/265/93 and of the scientific committee of the Mechanical Engineering Master Course of Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. A. S. Cavadas has also benefitted from a research scholarship from JNICT.

6. References

- Baldi, G., Conti, R. & Alaria, E. 1978, "Complete suspension of particles in mechanically agitated vessels", *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 33, pp 21.
- Chapman, C. M., Nienow, A. W., Cooke, M. & Middleton, J. C. 1983, "Particle-gas-liquid mixing in stirred vessels", *Chem. Eng. Res. Des.*, Vol. 61, pp. 71.
- Höfken, M, Bischof, F & Durst, F 1991, "Novel hyperboloid stirring and aeration system for biological and chemical reactors", *ASME -FED- Industrial Applications of Fluid Mechanics*, Vol. 132, pp 47.
- Höfken, M & Bischof, F 1993, "Hyperboloid stirring and aeration system. Operating principle, application, technical description", Invent GmbH.
- Höfken, M, Zähringer, K & Bischof, F 1994, "Stirring and aeration system for the upgrading of small waste water treatment plants", *Water Science and Technology*, Vol. 29, 149.
- Ismailov, M, Schäfer, M, Durst, F & Kuroda, M 1997, "Turbulent flow pattern of hyperboloid stirring reactors", *Journal Chem. Eng. Japan*, Vol. 30, pp. 1090.
- Monteiro, P. T. 1996, "Transport of sludge under pressure- The influence of the process of anaerobic digestion" (in portuguese). PhD thesis, University of Porto, Portugal.
- Nienow, AW 1968, "Suspension of solid particles in turbine-agitated, baffled vessels", *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 23, pp 1453.
- Nienow, AW 1997, "The suspension of solid particles", Chapter 16 of "Mixing in the process industries", edited by N. Harnby, M. F. Edwards and A. W. Nienow, Paperback edition, Butterworth Heinemann, Oxford.
- Nouri, JM & Whitelaw, JH 1994, "Flow characteristics of hyperboloid stirrers", *Can. J. Chem. Eng.*, Vol. 72, pp. 782.
- Oldshue, J. Y. & Sharma, R. N. 1992, "The effect of off-bottom distance of an impeller for the "just suspended speed", *NJS. AIChEJ Symp. Series*, Vol. 88, pp. 72.
- Pinho, FT, Piqueiro, FM, Proença, FM & Santos, AM 1997, "Power and mean flow characteristics in mixing vessels agitated by hyperboloid stirrers", *Can. J. Chem.Eng.*, Vol. 75, pp. 832.
- Pinho, FT, Piqueiro, FM, Proença, MF & Santos, AM 2000, "Turbulent flow in stirred vessels agitated by a single, low-clearance hyperboloid impeller", *Chem. Eng. Sci.* Vol. 55 (16), pp 3287.
- Zwietering, Th N 1958, "Suspending of solid particles in liquid by agitators", *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 8, pp. 244-253.

FRICITION AND INERTIA EFFECTS FOR THE EVALUATION OF PRESSURE DROP IN FLOW THROUGH PACKED BEDS OF CORK STOPPERS

N. Rangel

Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Bragança, Campus de Santa Apolónia
5301-857 Bragança, Portugal
nrangel@ipb.pt

A. Santos

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal
ass@fe.up.pt

C. Pinho

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal
ctp@fe.up.pt

Abstract. *Traditional models for pressure drop in flow through packed beds are mainly for deep beds and consequently only consider friction effects, either viscous or turbulent.*

When beds heights are such that, by comparison with the average particle size, they can be considered as shallow beds, sudden contraction effects at the bed entrance and sudden expansion at the bed exit, must be taken into account. In such conditions, the modelling of the total pressure drop for the flow through the packed bed must obey the inertia effects resulting from sudden contraction/expansion of the flow.

In this paper, the pressure drop for the air flow through packed beds of cork stoppers is studied, and the frictional loss term is developed with the theory of the equivalent tortuous passage through the bed. Only turbulent friction effects are considered, due to the order of magnitude of gas flows used in real situations. The sudden contraction /expansion losses term is developed through the analogy with the orifice plate theory.

The relative contribution of the frictional and inertial or local effects is analysed, according to tested bed height, particle size and gas flow-rate. A reference bed height is introduced; below which, for a set of experimental conditions, local pressure drop will dominate whereas for bed heights above it, friction losses will dominate.

Keywords: *pressure drop, frictional effects, inertia effects, reference thickness.*

1. Introduction

In many real situations the important parameters considered by Ergun (1952) in the evaluation of the pressure drop of the air flow through a packed bed of particles are not enough to get an adequate phenomenological model for the description of the involved phenomena for the gas flow through such beds. For packed beds characterised with small thickness or diameters when compared with the order of magnitude of the average particle size composing the bed, usually designated as shallow beds, it is important to take into account either side wall effects or thickness effects in the task of modelling the phenomena.

In a packed bed of solid particles inside a container, the container walls will induce near the bed boundaries (lateral, upper and lower boundaries) some effects and these will impose different behaviours on the bed constituting particles which will depend upon their closeness to the bed boundaries. These effects are generically designated as wall effects and are frequently quantified in terms of their influence upon the bed voidage fraction (Zou and Yu, 1995). These wall effects are normally decomposed into two components, the lateral component or side wall effect and the upper and lower boundaries effects, designated as thickness effects. The side wall effect is dependent upon the container diameter while the thickness effect is dependent upon the packing height of the bed. The bed characteristic dimensions are always related to the particles characteristic dimensions, Kay and Nedderman (1979) and Kunii and Levenspiel (1969).

1.1. Packing of spheres

The quantification of the side wall and thickness effects has been considered an important matter for the precise determination of the packed bed overall voidage fraction and has been an exhaustive research subject since the nineteen thirties. For many years, the side wall effects of packings of uniformly sized spheres has been carefully studied.

Several empirical correlations were developed to quantify this inter-dependence, namely, Carman (1937), Mc Geary (1961), Ayer and Soppet (1965) and Dixon (1988), and the general conclusion was that the global voidage diminishes

with the increase of the diameter ratio d_p/D . D is the internal diameter of the container while d_p is the particle diameter. According to Zou and Yu (1995), previous research works took only into account side wall effects and implicitly assumed negligible thickness effects. Although considering that in several situations the error of such approach is rather small to be ignored, these authors refer that in many other cases the thickness effects upon the voidage fraction has to be considered, essentially in shallow packed beds. So for this last type of packed beds Zou and Yu (1995) studied the importance of the thickness effect on the voidage of packing of spherical particles in cylindrical containers.

To avoid large measuring errors, the relative height of packing, defined as the ratio between the particle diameter d_p and the bed height or thickness L , was always lower than 0.4. According to these authors, the bed voidage ϵ will be dependent upon d_p/D and d_p/L , and this dependence can be mathematically represented as a function $\epsilon(d_p/D, d_p/L)$. Through the plotting of experimental voidage results the dependence of ϵ with d_p/L was clearly shown and it was concluded that by increasing d_p/L i.e., decreasing bed height, the voidage is increased. Zou and Yu (1995) obtained limit results for the bed voidage fraction as $d_p/L \rightarrow 0$ and consequently correlated $\epsilon(d_p/D, 0)$ vs. d_p/D . Identical correlations had already been obtained by Carman (1937).

1.2. Packing of cylindrical particles

The quantification of the importance of side wall effects upon the bed voidage for the packing of cylindrical particles is relatively recent. Dixon (1988) developed a correlation for the average bed voidage for cylindrical particles. Later, Foumeny and Roshani (1991) widened the range of tested container diameters and particle dimensions, length c and diameter d , to cover typical particle sizes. To minimise the effect of the bed thickness the aspect ratio for each tested packing L/D , was maintained above 3. According to these authors, the criterion for a constant overall voidage $D/d_p > 10$ is the same for spherical and cylindrical particles. However the constant voidage value is 0.39 for spheres and 0.30 for cylinders. The variability of ϵ with D/d_p is a function of the container side wall effect and its importance is the smaller the greater is D/d_p . In their work the variation of ϵ with c/d was tested but for the range of covered data, $c/d = 0.5, 1.5$ and 2.0 , the bed voidage is practically independent of c/d .

Zou and Yu (1996) studied the side wall effects on the random packing of cylindrical particles with c/d from 1 to 64. Foumeny and Roshani (1991) previously obtained results on the voidage dependence on this parameter but for a narrower range of c/d , going from 0.5 to 2.0. Zou and Yu (1996) developed a correlation for the bed critical height L_{crit} , Eq.(1), above which a constant voidage fraction is obtained inside a container with internal diameter D , for a bed of particles of a given size d_p .

$$\frac{L_{crit}}{D} = 90.29 \left(\frac{d_p}{D} \right)^{1.41} \quad (1)$$

Foumeny and Roshani (1991) defined previously a limit L/D beyond which the thickness effect could be neglected. However, Zou and Yu (1996) refer that those authors did not consider the importance and influence of particle size and consequently L/D must be larger than 3, if d_p/D is bigger than approximately 0.08, to eliminate this bed thickness effect. In general, Zou and Yu (1996) neglected the thickness effect, assuming that usually bed heights are well above L_{crit} and quantified the side wall effect upon the bed voidage for random packings thick enough to be considered deep.

There is then a field for research, the study of the gas flow pressure drop through shallow packed beds where thickness effects should not be neglected, as well as the definition of bed critical height under which such a given bed must be considered shallow.

2. Pressure drop in shallow beds of cylindrical particles

In the formulation of traditional models for the pressure drop through packed beds only friction effects are considered, viscous friction important at low gas flow rates and turbulent friction important high gas flow rates (Ergun, 1952). But, for packed beds of cork stoppers, which usually have a small thickness compared with the characteristic size of the bed particles, the development of a general expression for the pressure drop of the flow through the bed should also account inertia effects. These are flow head losses at bed entrance and exit, imposed by the relatively large accelerations and decelerations experienced by the gas as it flows through sudden contractions and expansions.

A general expression for the pressure drop for the air flow through a shallow packed bed should be presented in algebraic form as the addition of a local pressure drop, corresponding to bed entrance and bed exit effects, and a friction term, corresponding to the tortuous path pressure drop effects along a porous medium. Viscous effects need not to be

considered in the present situation, for in the normal engineering applications of cork stoppers beds, gas flows are on the turbulent regime and so both terms above mentioned will only consider turbulent effects.

In model developed in Rangel (1998) and Rangel et al (2001) the two terms referring to the local and the friction effects are clearly detailed. The turbulent friction term was developed following the equivalent tortuous channel theory presented in Davidson and Harrison (1963), and is given by,

$$\frac{\Delta P_1}{\rho u_0^2} = K_t \text{Re}^{*-1/4} \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right) L \quad (2)$$

where

$$\text{Re}^* = \frac{\rho u_0}{\mu (1-\varepsilon) (1/2c + 1/d)} \quad (3)$$

is the Reynolds number for the equivalent tortuous passage, ΔP_1 is the turbulent friction pressure drop term, ρ the fluid density, u_0 , the fluid superficial velocity and K_t an experimental fitting parameter.

The local pressure drop term was developed in the assumption that the shallow bed and its equivalent passage could behave as an orifice plate and then,

$$\frac{\Delta P_o}{\rho u_0^2} = \frac{1}{2K_e^2} \left[\left(\frac{D(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right) \right)^4 - 1 \right] \quad (4)$$

where ΔP_o is the local pressure drop and K_e another experimental fitting parameter.

The total pressure drop for the flow across the packed bed, ΔP , is then the addition of the above mentioned terms given by Eqs.(2) and (4) and the relative importance of each one of them is a function of the bed height or thickness.

$$\frac{\Delta P}{\rho u_0^2} = K_t \text{Re}^{*-1/4} \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right) L + \frac{1}{2K_e^2} \left[\left(\frac{D(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right) \right)^4 - 1 \right] \quad (5)$$

3. Relative contribution of the two pressure drop terms

To quantify the weight of both contributions for the total pressure drop, Eq. (4) is divided by Eq. (2), as shown by Eq. (6). Then, if $\Delta P_o/\Delta P_1 \ll 1$ the entrance/exit (or local) pressure drop is negligible when compared with the friction contribution, whereas if $\Delta P_o/\Delta P_1 \gg 1$ the local pressure drop is dominating.

The first situation is found in deep beds while the second situation is found in shallow beds. For intermediate bed heights, both terms can have an important contribution in the total pressure drop. It is then important to find out for a given container with internal diameter D , inside which there is a packed bed of cylindrical particles with known dimensions, c and d , what is the bed reference thickness below which the contribution of the local entrance/exit effects becomes the dominating factor, and above which is the friction effects that will dominate.

$$\frac{\Delta P_o}{\Delta P_1} = \frac{\frac{1}{2K_e^2} \left[\left(\frac{D(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right) \right)^4 - 1 \right]}{K_t \frac{(1-\varepsilon)^{1.25}}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right)^{1.25} \left(\frac{\mu}{\rho u_0} \right)^{0.25} L} \quad (6)$$

Making $\Delta P_o/\Delta P_1 = 1$ in Eq.(6), and solving in order to L , a reference bed thickness L_{ref} is obtained,

$$L_{ref} = \frac{\frac{1}{2K_e^2} \left[\left(\frac{D(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right) \right)^4 - 1 \right]}{K_t \frac{(1-\varepsilon)^{1.25}}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{d} \right)^{1.25} \left(\frac{\mu}{\rho u_0} \right)^{0.25}} \quad (7)$$

For $L \gg L_{ref}$ the friction effects will dominate and Eq. (2) can be used for the calculation of the total pressure drop. In the other extreme situation $L \ll L_{ref}$ and local effects will dominate and Eq. (4) can be used for the calculation of the total pressure drop. Intermediate situations will impose the use of Eq.(5), where both pressure drop terms are taken into account.

In Rangel (1998) and Rangel et al (2001) the model defined by Eq.(5) was applied to five commercially available stoppers sizes, and for each one of these types the experimental fitting parameters K_t and K_e corresponding to a range of tested situations characterised by the equivalent passage Reynolds number, Re^* , and bed thickness, L , were calculated as shown in Tab. (1).

Table 1. Characteristics of studied beds for a container internal diameter of 384.2 mm.

Type (cxd)	38x22	40x30	45x24	38x24	39x26
c/d	1.73	1.33	1.87	1.58	1.50
d_p [mm]	30	38	34	32	34
ϕ	0.847	0.866	0.839	0.854	0.859
ϵ	0.417	0.324	0.403	0.377	0.386
d_p/D	0.078	0.099	0.088	0.083	0.088
K_t	6.664	3.252	5.124	4.638	5.619
K_e	139.1	187.7	110.6	160.7	154.7
u_0 [m/s]	0.35 - 1.05				
Re^*	637 - 2130				
L [mm]	100 - 400				
L_{crit} [m]	0.95	1.33	1.13	1.04	1.13

With data from Tab. (1) and according to Eq. (7) the reference bed thickness are plotted in Fig. (1) for the tested five cork stoppers sizes. It must be stressed that L_{ref} is a function of the bed approach or superficial velocity and consequently the plotting in the figure is carried out as a function of Re^* .

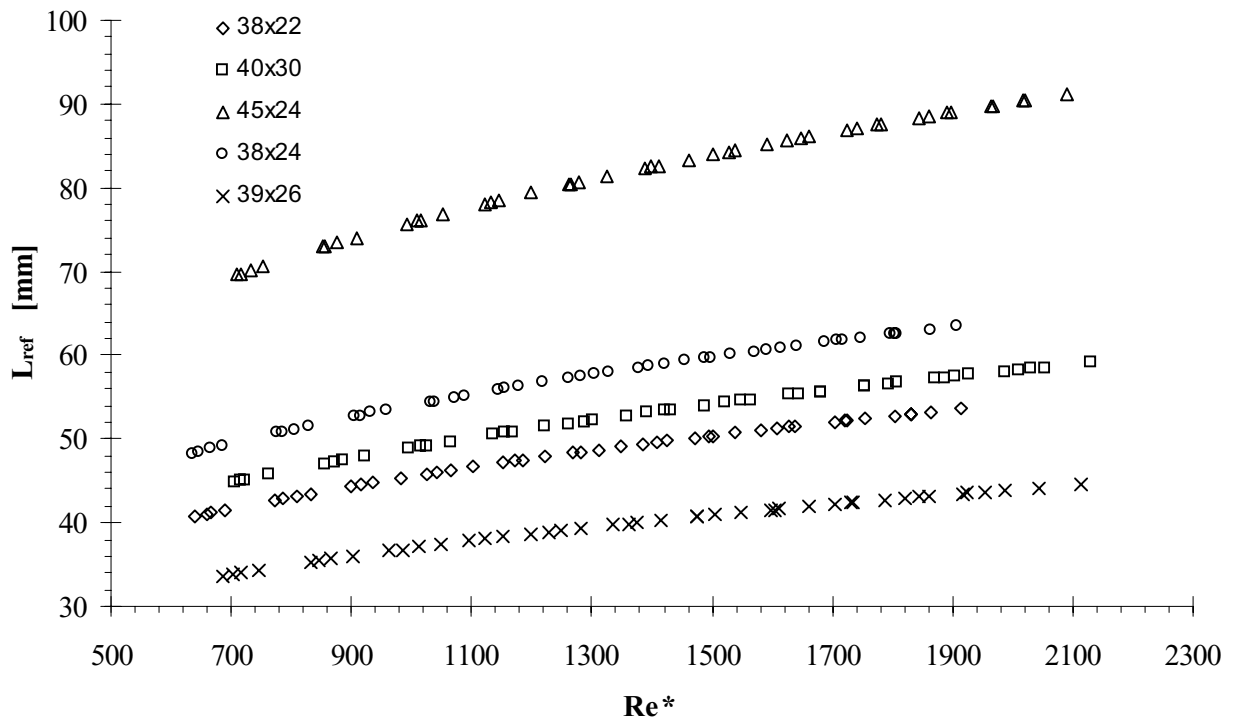


Figure 1. Bed reference thickness, L_{ref} , as a function of Re^* four five commercially available cork stopper types.

4. Conclusions

From the analysis of data shown on Fig.(1) it is found that the tested bed thickness are of the same order of magnitude as the corresponding reference thickness, which means that the experimental results lay in the range where the contribution of both effects, local and friction pressure drop, are equally important.

When, for design purposes it is necessary to define a recommended bed thickness, in order to get a packed bed working such that only one pressure drop effect is the dominating term, for example considering that it is necessary that $\Delta P_o = x \Delta P$ and consequently $\Delta P_l = (1 - x) \Delta P$, where x is the local pressure drop contribution fraction ($0 < x < 1$), the recommended bed thickness will be given by,

$$L_{rec} = \frac{1 - x}{x} L_{ref} \quad (8)$$

For the particular situation of $x = 0.5$, then, $L_{rec} = L_{ref}$. When $x > 0.5$ local effects will dominate and $L_{rec} < L_{ref}$ whereas for $x < 0.5$ friction effects will dominate and $L_{rec} > L_{ref}$.

Viscous friction effects may be neglected in the normal engineering applications of packed beds of cylindrical cork stoppers because gas flows are turbulent.

5. Nomenclature

c	length of a cylindrical particle, m
d	diameter of a cylindrical particle, m
D	diameter of a cylindrical bed, m
d_p	equivalent diameter of a particle, m
K_e	flow coefficient
K_t	turbulent regime parameter
L	bed height, m
L_{crit}	critical bed thickness, m
L_{rec}	recommended bed thickness, m
L_{ref}	reference bed thickness, m
Re^*	equivalent passage Reynolds number
u_0	superficial velocity, m/s
x	fraction of local pressure drop contribution
ΔP	total bed pressure drop, Pa
ΔP_l	friction pressure drop, Pa
ΔP_o	local pressure drop, Pa
ε	mean voidage fraction of packed bed
ϕ	particle sphericity
μ	dynamic viscosity of fluid, Pa·s
ρ	fluid density, kg/m ³

6. References

- Ayer, J.E. and Soppet, F.E., 1965, "Vibratory Compaction: I, Compaction of Spherical Shapes", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 48, pp. 180-183.
- Carman, P.C., 1937, "Fluid Flow through Granular Beds". Trans. Inst. Chem. Engrs., London, Vol. 15, pp. 150-166.
- Davidson J.F. and Harrison D., 1963, "Fluidised Particles", Cambridge University Press.
- Dixon, A.G., 1988, "Correlations for Wall and Particle Shape Effects on Fixed Bed Bulk Voidage", Can. J. Chem. Eng., Vol. 66, pp. 705-708.
- Ergun, S., 1952, "Fluid Flow Through Packed Columns", Chem. Eng. Progress, Vol. 48, pp. 89-94.
- Foumeny E.A. and Roshani S., 1991, "Mean Voidage of Packed Beds of Cylindrical Particles", Chem. Eng. Sci., Vol. 46, N. 9, pp. 2363-2364.
- Kay, J.M. and Nedderman, R.M., 1974, "Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer", 3rd edition, Cambridge University Press, London.
- Kunii, D. and Levenspiel, O., 1969, "Fluidization Engineering", Robert E. Krieger Publishing Co., Inc.
- McGeary, R.K., 1961, "Mechanical Packing of Spherical Particles", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 44, pp. 513-522.
- Rangel, N., Santos, A. and Pinho, C., 2001, "Pressure Drop in Packed Shallow Beds of Cylindrical Particles", Trans IChemE, Vol.79, Part A, pp 547-552.
- Rangel, N., 1998, "Gas Flow Characterisation Through Shallow Beds of Cylindrical Cork Stoppers", (In Portuguese), M.Sc. Thesis, Faculty of Engineering, University of Oporto, Portugal.

- Zou R.P. and Yu A.B., 1995, "The Packing of Spheres in a Cylindrical Container: The Thickness Effect", Chem. Eng. Sci., Vol. 50, No. 9, pp. 1504-1507.
- Zou R.P. and Yu A.B., 1996, "Wall Effect on the Packing of Cylindrical Particles", Chem. Eng. Sci., Vol. 51, No. 7, pp. 1177-1180.

INFLUÊNCIA DA PRESENÇA DE UMA SUPERFÍCIE NO COMPORTAMENTO DAS CARGAS AERODINÂMICAS DE UM AEROFÓLIO

José Eugênio Rios Ricci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Ricci@iem.efei.br

Luiz Antonio Alcântara Pereira

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Luizantp@iem.efei.br

Miguel Hiroo Hirata

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Hirata@iem.efei.br

Nelson Manzanares Filho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Nelson@iem.efei.br

Resumo. *Escoamentos não permanentes em torno de aerofólios, na proximidade de uma superfície sólida, ocorrem com frequência em vários problemas da engenharia. Na aeronáutica o fenômeno é observado nas asas das aeronaves durante as operações de pouso e decolagem. Em outras áreas da engenharia situações análogas ocorrem; pode-se identificar, muitos dos aspectos presentes nas situações acima mencionadas quando o rotor de uma turbomáquina opera no interior de sua voluta. A vorticidade gerada na superfície do aerofólio, interagindo com aquela gerada na superfície sólida, alteram as características aerodinâmicas do aerofólio. Neste trabalho utiliza-se uma nova metodologia, que emprega o Método de Vórtices, para a análise do problema. Esta metodologia considera os efeitos da viscosidade e, como consequência, a dinâmica da vorticidade gerada na superfície do aerofólio e do solo, tornando possível a análise da intensa interação presente na esteira assim formada. Um esquema puramente lagrangiano é adotado para esta simulação. O processo de difusão é simulado usando o Método de Difusão Randômica. Os resultados das simulações numéricas permitem a identificação e análise dos mecanismos presentes, bem como o cálculo das cargas aerodinâmicas, as quais são comparadas com dados disponíveis na literatura.*

Palavras chave. *Método de Vórtices, Métodos Numéricos, Cargas Aerodinâmicas, Efeito Solo.*

1. Introdução

Este trabalho analisa o escoamento ao redor de um aerofólio, nas proximidades do solo, representando as condições observadas em um túnel de vento. O escoamento é modelado como bidimensional, incompressível e não-permanente. Este problema está intimamente relacionado com o pouso e a decolagem de aeronaves, quando a distância entre as asas e o solo é apenas da ordem do comprimento da sua corda. Nestas condições, o escoamento em torno das asas pode ser substancialmente afetado, especialmente quando elas operam com altos coeficientes de sustentação, com conseqüentes possibilidades de descolamento. Outro exemplo relaciona-se com o voo de helicópteros rente ao solo tendo, neste caso, o agravante da vorticidade gerada por uma pá interferir no comportamento das demais. O efeito solo decresce rapidamente com o aumento da altura e vice-versa. O aumento da sustentação observado nas proximidades do solo, bastante familiar aos pilotos de planadores, é explicado com os resultados das simulações numéricas. O problema em estudo pode ser relacionado com diversas outras situações da engenharia onde se verifica a modificação do campo de velocidades ao redor de um corpo causada pela presença de uma superfície em suas vizinhanças. Como exemplos, pode-se citar o deslocamento de veículos nas proximidades do solo, a rotação do rotor de uma turbomáquina no interior da sua voluta, etc.

O cálculo das características aerodinâmicas de uma asa nas proximidades do solo tem sido estudado por vários autores, durante os últimos anos, visando analisar o efeito do solo na sua sustentação. Tomotika et al. (1933) usaram a técnica de transformação conforme para estudar o problema bidimensional em regime permanente de um escoamento potencial em torno de uma placa plana. Eles analisaram os efeitos do solo na sustentação gerada pela asa, quando operando com diferentes ângulos de ataque. Esse trabalho mostra que, para pequenos ângulos de ataque, sempre se

observa o aumento da sustentação e que, para ângulos de ataque maiores, o aumento da sustentação ocorre apenas quando a distância do solo diminui. Para distâncias maiores, observa-se uma diminuição do efeito solo, até o seu completo desaparecimento. Steinbach (1985) utilizou um modelo potencial na análise de perfis aerodinâmicos da classe Clark-Y e apresentou, também, dados experimentais para o perfil NACA 4415 com flap. As conclusões são qualitativamente equivalentes às acima mencionadas. Plotkin e Kennell (1981) utilizaram o modelo potencial para analisar o escoamento ao redor do aerofólio de Joukowski através do método de perturbação. Nesse trabalho, o efeito da superfície sólida concretiza-se com uma diminuição da sustentação, um resultado aparentemente contrário aos observados acima. Chacaltana et al. (1994) consideraram os efeitos da presença de um vórtice livre e o efeito solo em um mesmo escoamento. O efeito solo para aerofólios delgados foi bem analisado, porém, sem considerar a convecção do vórtice. Chacaltana et al. (1995) adotaram o mesmo modelo do trabalho anterior, permitindo ao vórtice convectar por meio de um esquema lagrangiano de avanço no tempo. O problema é formulado sob o ponto de vista potencial. O comportamento observado por estes autores, sem a influência do vórtice livre (vórtice com intensidade nula) é semelhante ao observado por Plotkin e Kennell (1981).

No presente trabalho utiliza-se de uma nova metodologia, que emprega o Método de Vórtices, para a análise do problema. Esta metodologia permite levar em consideração os efeitos da viscosidade. Como consequência, torna-se viável a análise da dinâmica da vorticidade gerada nas superfícies do aerofólio e do solo, bem como a forte interação que se observa nas vizinhanças do corpo e da sua esteira. Dessa análise, identificam-se três aspectos importantes: influência da vorticidade gerada no solo sobre o escoamento na vizinhança da parte do corpo voltada para o solo, a influência desta vorticidade sobre a formação da esteira próxima ao corpo e a modificação da esteira do corpo pela vorticidade gerada junto ao solo. Estes aspectos ajudam a analisar os mecanismos principais que concorrem para o aumento e a diminuição da sustentação induzida pela presença de uma superfície perto de um aerofólio.

2. Formulação do Problema

Considere a situação típica, esboçada na Fig. (1), a qual representa o escoamento em torno de um aerofólio disposto nas proximidades da superfície do solo.

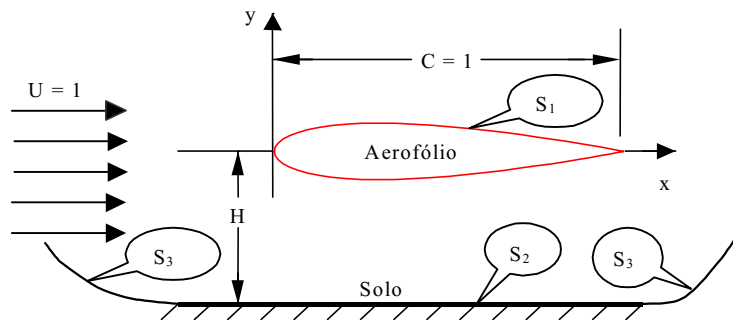


Figura 1. Representação esquemática do problema.

S define as fronteiras da região fluida de modo que

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3, \tag{1}$$

onde S_1 representa a superfície do aerofólio, ou seja,

$$S_1 : f_1(\mathbf{r}, t) = y - \begin{Bmatrix} y_s \\ y_i \end{Bmatrix} = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq C \tag{2}$$

onde y_s representa a ordenada dos pontos da face superior do aerofólio e y_i representa a ordenada da face inferior.

S_2 representa a superfície do solo, ou seja,

$$S_2 : y = -H, \quad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

Na Eq. (3), H representa a distância entre o bordo de ataque do aerofólio e o solo.

S_3 representa a fronteira nos limites do escoamento sendo dada por

$$S_3 : f_3(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \rightarrow \infty \tag{4}$$

2.1. Hipóteses Simplificadoras

Na modelagem do problema, foram impostas as seguintes hipóteses:

- região fluida plana e semi-infinita;
- fluido newtoniano e homogêneo e
- os efeitos da compressibilidade são desprezados.

2.2. Equações que Governam o Movimento

Em toda a região fluida deve ser verificado o princípio da conservação da massa, representado matematicamente pela equação da continuidade, e o princípio da conservação da quantidade de movimento, representado pela equação do movimento. Estas equações foram adimensionalizadas, tomando-se como referência a corda do perfil C e a velocidade do escoamento incidente U , sendo escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor velocidade do escoamento.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (6)$$

onde p representa a pressão adimensional e Re denota o número de Reynolds definido por: $Re = UC / \nu$.

2.3. Condições de Contorno

Uma vez que o fluido é newtoniano, tanto em S_1 quanto em S_2 , deve ser verificada a condição de aderência, ou seja,

$$u_n = 0 \quad (\text{impenetrabilidade}) \text{ e,} \quad u_\tau = 0 \quad (\text{escorregamento nulo}), \quad (7)$$

onde os subscritos n e τ referem-se aos componentes normal e tangencial da velocidade.

Em S_3 assume-se que o escoamento em estudo tende para o escoamento não-perturbado, ou seja,

$$|u| \rightarrow 1, \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty \quad (8)$$

3. Solução Numérica

A solução do problema é fundamentada no método de vórtices, o qual foi convenientemente revisado por Hirata e Pereira (1999). Para a representação do corpo, é adotado o método dos painéis (Katz e Plotkin 1991). Já a parede é simulada pelo Método das Imagens (Panton 1984). O método de vórtices é baseado no algoritmo de separação da parte viscosa, inicialmente proposto por Chorin (1973) com o nome de "Viscous Splitting Algorithm". A grande vantagem deste algoritmo numérico está no fato de se calcular, em separado, os fenômenos de convecção e de difusão, dentro de um mesmo incremento de tempo.

3.1. Convecção da Vorticidade

No "Viscous Splitting Algorithm" a vorticidade é transportada por convecção, comportando-se como uma partícula de fluido, fato já reconhecido por Helmholtz (1858).

O processo convectivo consiste em se determinar a solução da equação

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) \quad (9)$$

Assim sendo, deve-se obter o campo de velocidades, o qual, para um vórtice p disposto na posição $\mathbf{r}_p(t)$, é escrito como

$$\begin{aligned} u_p(\mathbf{r}_p(t), t) &= u^i + u^v + u^{vi} + u^c + u^{ci} \\ v_p(\mathbf{r}_p(t), t) &= v^i + v^v + v^{vi} + v^c + v^{ci} \end{aligned} \quad (10)$$

Na Eq. (10), o sobrescrito i está associado à contribuição do escoamento incidente, v à nuvem de vórtices presente no escoamento, vi à nuvem imagem, c ao corpo e ci à imagem do corpo. Determinado o campo de velocidades, a nova posição de um vórtice discreto, devida ao movimento convectivo, é calculada utilizando o esquema de segunda ordem de diferenças centradas proposto por Lewis (1991).

3.2 Difusão da Vorticidade

De acordo com o algoritmo de separação da parte viscosa, a difusão da vorticidade é governada pela equação da difusão. Diversos algoritmos numéricos podem ser utilizados para se obter a solução desta equação (Lewis, 1991; Hirata e Pereira, 1999). No presente trabalho, é empregado o esquema do “Avanço Randômico” para simular a difusão da vorticidade.

3.3. Implementação das Condições de Contorno Junto ao Corpo

O corpo é representado por M_c painéis planos, sobre cada um é distribuída uma densidade constante de vórtices. Neste modelo simplificado, as condições de contorno, representadas pelas Eq. (7), devem ser verificadas nos pontos de controle situados nos centros dos painéis. Deste modo, impondo a condição de escorregamento nulo, resulta

$$u_\tau = u_\tau^i + u_\tau^v + u_\tau^{vi} + u_\tau^c + u_\tau^{ci} = 0 \quad (11)$$

Se a velocidade induzida pela nuvem de vórtices e suas imagens, no ponto de controle de painel 1 for $(u_v, v_v)_1$, as condições de contorno para este ponto, conforme a Eq.(11), passam a ser escritas como

$$\sum_{j=1}^{M_c} \gamma_j K_{1,j}^c + \sum_{j=1}^{M_c} \gamma_j^i K_{1,j}^{ci} = \sum_{j=1}^{M_c} \gamma_j (K_{1,j}^c - K_{1,j}^{ci}) = \sum_{j=1}^{M_c} \gamma_j K_{c,1,j} = -[(U,0) \cdot \tau_1 + (u_v, v_v)_1 \cdot \tau_1] = Ldc_1 \quad (12)$$

O coeficiente $K_{1,j}^c$ representa o componente da velocidade, tangente ao painel 1, induzida pelo painel j, quando uma distribuição de vórtices, de densidade unitária, é disposta sobre este painel. $K_{1,j}^{ci}$ corresponde à componente tangente ao painel 1, induzido pelo painel j imagem. A densidade de vórtices do painel γ_j^i imagem é igual ao do próprio painel γ_j , apenas com o sinal trocado. τ_1 corresponde ao vetor unitário tangente ao painel 1.

Considerando todos os painéis que representam o corpo e escrevendo em termos matriciais, obtém-se

$$[Kc]\{\gamma\} = \{Ldc\} \quad (13)$$

Na Eq. (13), $[Kc]$ representa a matriz de influência para o corpo e depende exclusivamente da sua geometria, permanecendo inalterada durante toda a simulação. $\{Ldc\}$ corresponde ao vetor lado direito e necessita ser recalculado a cada passo de tempo, em vista da evolução da nuvem de vórtices. O vetor $\{\gamma\}$ é a incógnita do sistema de equações algébricas lineares e será determinado pelo algoritmo de eliminação de Gauss, em cada passo de tempo, conduzindo às densidades de vórtices distribuídas em cada painel.

3.4. Implementação das Condições de Contorno Junto à Parede

O Método das Imagens garante a impenetrabilidade na superfície do solo, porém, o escorregamento nulo não é garantido. De modo a impor esta condição é prevista a geração de vorticidade junto à esta superfície e, com este intuito, a mesma é dividida em M_p pontos de controle. O esquema de geração da vorticidade junto à parede, prevê que os vórtices nos pontos de nascimento e suas imagens, devam anular a componente tangencial da velocidade nos pontos de controle. Sendo assim, a condição de contorno é imposta nestes pontos, resultando em

$$u_\tau = u_\tau^i + u_\tau^v + u_\tau^{vi} + u_\tau^c + u_\tau^{ci} + u_\tau^g + u_\tau^{gi} = 0 \quad (14)$$

Na Eq. (14), o sobrescrito g está associado à velocidade induzida pelos vórtices nascentes, ao passo que g_i à velocidade induzida pelas imagens destes vórtices. Chamando a velocidade induzida no ponto de controle do painel 1, pela nuvem de vórtices e suas imagens mais o corpo e sua imagem, por $(u_c, v_c)_1$, pode-se rescrever estas condições de contorno como

$$\sum_{j=1}^{M_p} \Gamma_j K_{1,j}^p + \sum_{j=1}^{M_p} \Gamma_j^i K_{1,j}^{pi} = \sum_{j=1}^{M_p} \Gamma_j (K_{1,j}^p - K_{1,j}^{pi}) = \sum_{j=1}^{M_p} \Gamma_j K_{p,1,j} = -[U + (u_c)_1] = Ldp_1, \quad (15)$$

onde Γ_j corresponde à intensidade do vórtice nascente e Γ_j^i a intensidade de suas imagens. O coeficiente $K_{1,j}^p$ corresponde ao componente da velocidade, tangente ao ponto de controle 1, induzida pelo vórtice nascente posicionado no ponto de geração j, quando uma intensidade unitária é imposta ao mesmo. $K_{1,j}^{pi}$ é um coeficiente análogo, associado à imagem do mesmo vórtice.

Observe que a parede sendo paralela ao eixo dos x, os componentes da velocidade tangentes à mesma são os próprios componentes na direção x da velocidade. Cada ponto de controle dará origem a uma equação. Considerando os M_p pontos de controle, resultará em um sistema de equações algébricas lineares escrito na forma matricial como

$$[Kp]\{\Gamma\} = \{Ldp\} \quad (16)$$

Nesta equação, $[Kp]$ representa a matriz de influência para a parede e, do mesmo modo que a do corpo, depende exclusivamente da sua geometria, permanecendo inalterada enquanto não for alterada a geometria da mesma. De tempos em tempos, o comprimento da parede é aumentado, de modo a acompanhar a nuvem de vórtices e, neste caso, deve ser recalculada. O vetor lado direito $\{Ldp\}$, como no caso anterior, necessita ser recalculado a cada passo de tempo, em vista da evolução da nuvem de vórtices. O vetor $\{\Gamma\}$, corresponde às intensidades dos vórtices nascentes, é a incógnita do sistema de equações, novamente resolvido pelo algoritmo de eliminação de Gauss.

3.5. Geração de Vórtices Junto ao Corpo

A vorticidade gerada na superfície do corpo é simulada por um número finito de vórtices discretos denominados de vórtices nascentes. O mecanismo da transformação da vorticidade do painel em um vórtice discreto foi denominado por Pereira (1999) de “difusão primária”. Neste mecanismo, a vorticidade distribuída em cada painel é concentrada em um vórtice discreto e posicionada no ponto de geração, o qual está afastado de um deslocamento primário ϵ da superfície do corpo. Observe que, além de satisfazer as condições de contorno, os vórtices nascentes não podem violar o princípio da conservação da vorticidade. Para completar a etapa, dentro do incremento discreto de tempo, os vórtices nascentes são incorporados aos vórtices presentes na nuvem.

3.6. Geração de Vórtices Junto à Parede

Com a incorporação à nuvem dos novos vórtices gerados junto ao corpo, o sistema associado ao mesmo passa a estar desequilibrado, exigindo que as densidades de vórtices distribuídas sobre os painéis, sejam recalculadas. Com o corpo reequilibrado, calcula-se a velocidade nos pontos de controle da parede, chega-se ao vetor lado direito e calcula-se, a intensidade dos vórtices nascentes.

Com a presença destes novos vórtices, o sistema relacionado ao corpo volta a estar desequilibrado. Neste ponto, novas densidades de vórtices são calculadas a fim de equilibrar o corpo. Contudo, com esta operação, quem fica em desequilíbrio é a parede. As intensidades dos vórtices nascentes junto à parede têm de ser recalculadas. Para sair do loop, calcula-se o erro médio quadrático da diferença entre as componentes tangenciais da velocidade nos pontos de controle da parede. Estando abaixo de um valor de referência, os valores são tomados como corretos. A convergência é rápida, normalmente são necessárias duas ou três iterações.

3.7. Convecção dos Vórtices Livres

O esquema adotado para impor o deslocamento convectivo dos vórtices, proposto por Lewis (1991) é bastante oneroso, em termos computacionais, no entanto, os resultados obtidos indicam o acerto de sua adoção. Impõe-se um primeiro avanço aos vórtices, denominado avanço de Euler, chegando-se a um deslocamento intermediário. Com os vórtices na posição intermediária, o corpo é novamente reequilibrado sendo calculada uma nova velocidade total induzida aos vórtices. A velocidade final adotada para impor o deslocamento convectivo é tomada como a média entre as velocidades obtidas a partir da posição inicial e esta obtida na posição intermediária. Em seguida, impõe-se novamente o avanço de Euler, a partir da posição inicial.

Observou-se, durante os experimentos numéricos, que o resultado é fortemente melhorado quando a velocidade induzida pelo corpo e sua imagem é calculada a partir de um esquema bastante simples. Inicialmente a velocidade é calculada considerando o corpo discretizado em painéis de fontes e, em seguida, as velocidades são calculadas considerando o corpo discretizado em painéis de vórtices. A velocidade induzida pelo corpo será então, tomada como a média da velocidade obtida em cada caso. Um artigo com a comprovação deste esquema esta sendo preparado.

3.8. Reflexão dos Vórtices

Em vista do pequeno número de vórtices que passou a entrar no corpo, devido à adoção do esquema para convecção acima citado, optou-se pela reflexão dos vórtices no lugar da sua eliminação. Com este artifício, elimina-se a dificuldade da adoção de um esquema para a conservação da circulação. Os vórtices que entram no corpo são refletidos em relação à superfície do painel adjacente. De modo a facilitar esta operação, trabalha-se com coordenadas locais aos painéis. Durante o desenvolvimento da rotina computacional, observou-se uma grande dificuldade em calcular, com precisão, a velocidade induzida pelo corpo, quando algum vórtice se situava muito próximo da sua superfície. Esta dificuldade foi contornada com a adoção de um núcleo elástico para o vórtice, ou seja, um núcleo de raio σ_c de tal modo que, se o centro do núcleo se aproximar do painel de uma distância inferior a este raio, ele será deslocado para uma posição igual ao raio. Este deslocamento é sempre normal à superfície do painel.

3.9. Cargas Aerodinâmicas

De acordo com argumentação apresentada por Lewis (1991) a pressão pode ser calculada por

$$\nabla p = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma(s)}{\partial t} \quad (17)$$

onde s é a coordenada do contorno do corpo que define um ponto na sua superfície.

Como é de se esperar, esta expressão mantém uma relação direta com aquela que fornece o fluxo da vorticidade através da superfície. O fluxo da vorticidade é calculado como sendo igual a $\partial p / \partial s$. Se a vorticidade por unidade de área, no ponto definido por s , é representada por $\gamma(s)$, então $\partial \gamma(s) / \partial t$ representa, também, o fluxo da vorticidade no ponto definido por s .

Para a implementação numérica, esta expressão é reescrita como

$$\Delta p = -2 \frac{\gamma \Delta s}{\Delta t} = -2 \frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} \tag{18}$$

Cada painel incrementa uma pressão equivalente à vorticidade gerada em sua vizinhança. Deste modo, conhecida a intensidade dos vórtices gerados em cada passo de tempo, pode-se calcular a pressão nos pontos extremos dos painéis e, em seguida, tirando-se a média, determina-se a pressão em seu ponto de controle. No esquema adotado, as forças de arrasto e de sustentação são calculadas pela integração da pressão, o que é feito a cada passo de tempo.

4. Resultados

Para a implementação dos experimentos numéricos, foi escolhido o perfil NACA 0012, o qual foi dividido em 60 painéis. Em princípio, a parede estende-se de $-\infty$ a $+\infty$ e sobre toda ela há a geração de vorticidade. A simulação numérica desta situação torna-se proibitiva e, para contornar este problema, a parede foi dividida em módulos de comprimento igual ao da corda do perfil. No instante inicial são distribuídos três módulos. O primeiro imediatamente à montante do perfil, o segundo abaixo e o terceiro à jusante do mesmo. Em cada módulo são dispostos 16 pontos de geração de vórtices.

À medida que os vórtices da esteira avançam para jusante, novos módulos são anexados aos já existentes, na parede. Quando os vórtices gerados no aerofólio chegam à metade do último módulo, mais um é adicionado à parede, de modo a acompanhar o desenvolvimento da nuvem de vórtices. Com esta providência, garante-se que as condições de impenetrabilidade e de escorregamento nulo (com a conseqüente geração de vorticidade) são satisfeitas na parede.

É recomendado que o incremento de tempo seja fixado, tendo em vista o comprimento médio dos painéis e a velocidade do escoamento incidente. Com este procedimento chega-se a um valor da ordem de $\Delta t = 0.017$, podendo ser aumentado até 0.034. Contudo, avanços no tempo desta ordem, exigiria um tempo computacional extremamente alto para se chegar à solução. Para contornar este problema, adotou-se um incremento de tempo de 0.05, mesmo sabendo das dificuldades de se trabalhar com um valor relativamente grande. Isto exige que se utilize um deslocamento primário $\epsilon = 0.03$ e um raio para o vórtice elástico $\sigma_e = 0.02$. Em todos os experimentos trabalhou-se com o raio do vórtice de Lamb $\sigma_o = 0.005$. O número de passos no tempo foi fixado em $p = 200$ atingindo, deste modo, $t = 10$ unidades de tempo, adimensional, ao fim do processamento.

Os experimentos numéricos, sempre impondo um ângulo de ataque nulo ao perfil, foram realizados em duas etapas. A primeira, sem geração de vorticidade na superfície do solo (impõe-se apenas a condição de impenetrabilidade, prevendo um comportamento potencial para o escoamento nas suas proximidades), permitindo a comparação dos resultados obtidos no presente trabalho com os disponíveis na literatura. A esteira resultante é apresentada na Fig. (2). Na segunda etapa, mais realista, houve a geração de vorticidade no solo (impõe-se as condições de impenetrabilidade e de escorregamento nulo).



Figura 2. Esteira para $H = 0.6$, sem geração de vorticidade na superfície do solo.

Na Fig. (2), observa-se que, para $H = 0.6$, a esteira se mantém praticamente simétrica em relação à linha média do perfil, passando a interferir com a parede já no final da simulação. No diagrama de forças, Fig. (4.a), observa-se que o coeficiente de sustentação oscila em torno de zero, estabilizando-se em um pequeno valor negativo, ao final da simulação. O mesmo comportamento foi observado quando a simulação foi realizada com $H = 0.8$.

A Fig. (3) mostra a evolução da esteira, ao longo da simulação, para o caso da simulação com geração de vorticidade no solo. Os pontos em azul correspondem aos vórtices gerados na superfície do aerofólio, ao passo que os em vermelho, correspondem aos gerados junto ao solo. Observa-se a existência de três fases distintas influenciando na cinemática do escoamento. A primeira, caracterizada por uma forte influência do aerofólio sobre a vorticidade gerada no solo, manifestada como uma sucção da mesma em direção ao aerofólio. Este comportamento tem como resultado um forte aumento na força de sustentação, o que pode ser observado na Fig. (4.b). A segunda fase caracteriza-se por uma forte ação da vorticidade gerada na parede, na forma de uma obstrução ao deslocamento da vorticidade gerada na superfície do corpo. Como resultado pode-se observar uma queda no coeficiente de sustentação. A terceira fase caracteriza-se por um enlace entre a vorticidade gerada nas superfícies do aerofólio e do solo, dando início a uma intensa interação, o que pode ser observado a partir do instante $t = 7$ e persistindo até o final da simulação. Na região

longe do aerofólio, a esteira contém tanto a vorticidade gerada no corpo quanto a gerada na superfície do solo, e se expande, entrando em contato com o solo.

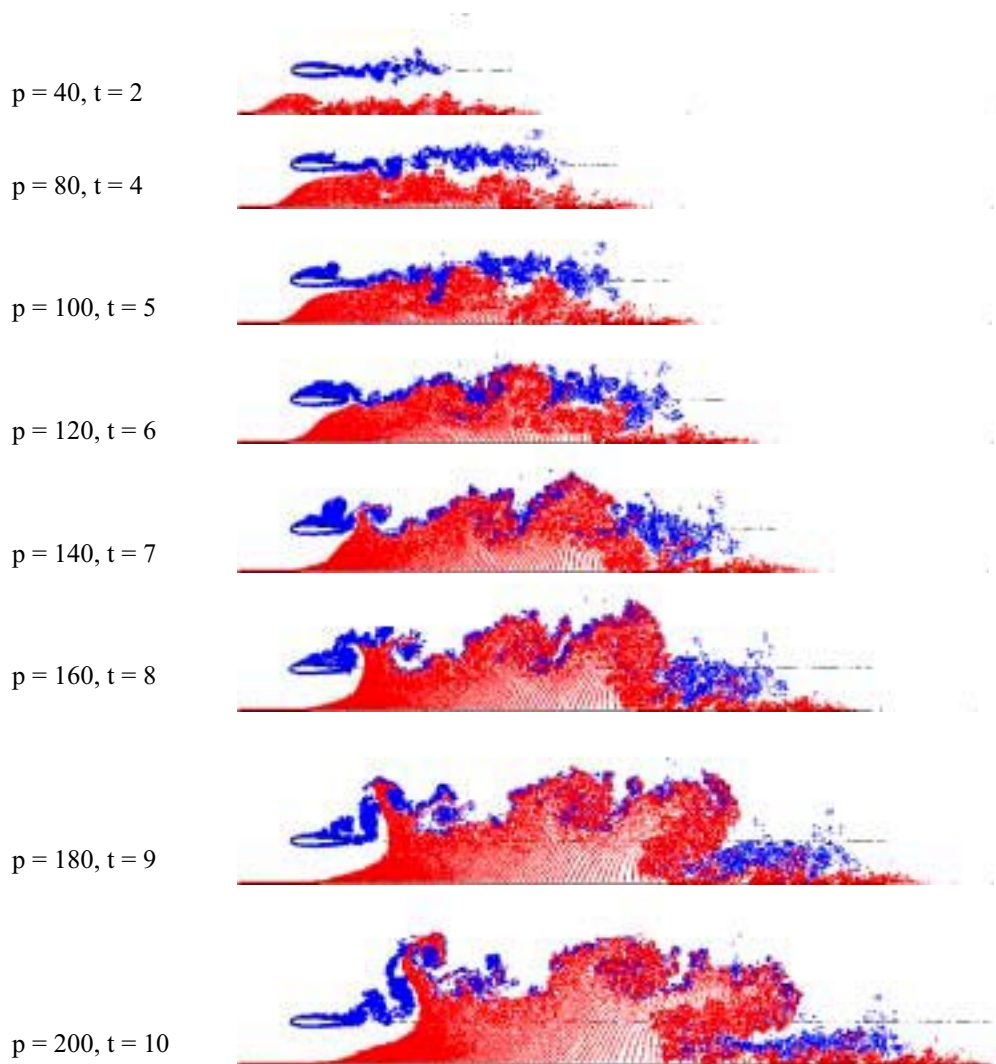


Figura 3. Evolução da nuvem de vórtices nas proximidades do aerofólio e do solo.

Os resultados das simulações numéricas realizadas podem ser utilizados para confirmar o mecanismo puramente potencial o qual tem como consequência uma diminuição da sustentação causada pela presença do solo. Esta diminuição da sustentação resulta do desenvolvimento de baixas pressões na face inferior do aerofólio, associado ao aumento da velocidade do fluido na região compreendida entre o corpo e o solo. Este tipo de comportamento já havia sido observado por Tomotika et al. (1933) utilizando um modelo puramente potencial; para uma placa plana com pequena incidência ($\alpha = 2^\circ$) o efeito mencionado não é observado, mas começa a se manifestar com o aumento do ângulo de ataque.

As simulações numéricas efetuadas permitem, ainda, confirmar os resultados experimentais relatados por Steinbach (1985). Segundo estes resultados pode-se concluir que o mecanismo potencial leva a uma diminuição da sustentação e que este efeito torna-se irrelevante com o aumento da distância entre o aerofólio e o solo; evidentemente o efeito é mais marcante a medida que o corpo passa ser mais rombudo ou com o aumento da incidência. No entanto, o modelo potencial não simula satisfatoriamente os fenômenos quando a distância entre o aerofólio e o solo torna-se pequena e o aerofólio apresenta uma curvatura acentuada.

Quando a distância entre o aerofólio e o solo diminui, o efeito da interação viscosa passa a ser relevante, porque começa a haver uma intensa interação da vorticidade criada na superfície do corpo com aquela gerada no solo; veja a seqüência apresentada na Fig. (3). Esta interação manifesta-se nos coeficientes adimensionais como ilustra a Fig. (4). Nestas condições um novo mecanismo, que sofre influência dos efeitos viscosos, começa a atuar. Ele consiste no deslocamento do ponto de estagnação em direção ao bordo de fuga pela superfície inferior; desenvolve-se uma circulação adicional que resulta no aumento da sustentação, que eventualmente passa a assumir valores positivos. A distância entre o aerofólio e o solo em que isto ocorre diminui a medida que o ângulo de ataque aumenta (isto é, o corpo torna-se mais rombudo). Estes resultados aparentemente já se apresentam nos trabalhos de Plotkin e Kennell (1981) e de Chacaltana et al. (1995).

Resultados preliminares da simulação numérica tendem a indicar que o deslocamento do ponto de estagnação é mais intenso quando a superfície inferior possui uma forma côncava.

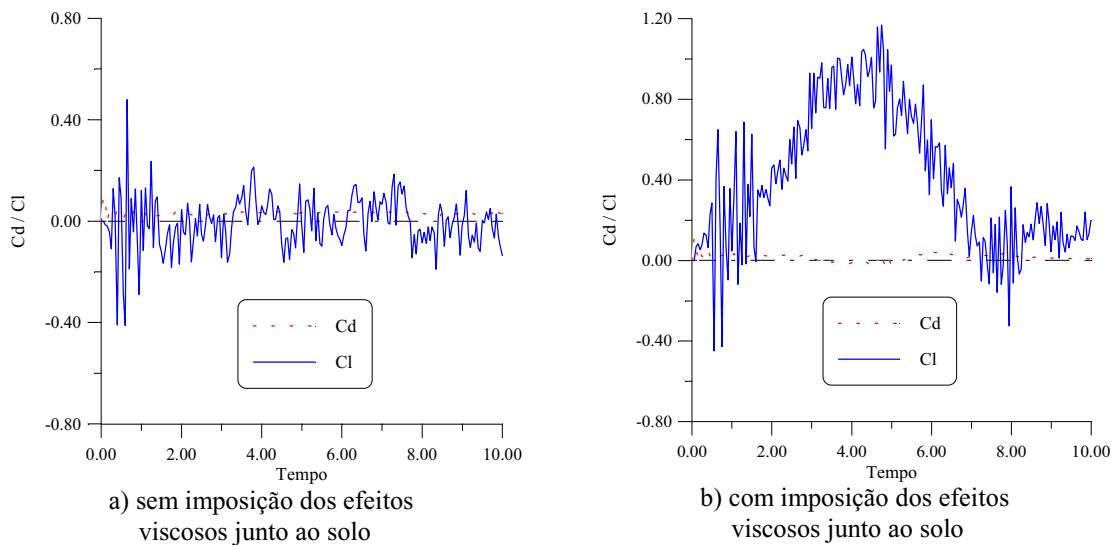


Figura 4. Evolução das forças no tempo.

A comparação dos resultados das simulações numéricas deste trabalho com os dados existentes na literatura indicam que a presente metodologia consegue simular a contento estes aspectos. Deve-se observar, no entanto, que muitos aspectos deste fenômeno foram observados durante as simulações e que carecem, ainda, de uma explicação mais precisa.

Cabe, finalmente, observar que os resultados apresentados neste trabalho simulam as condições reinantes no interior de um túnel de vento com paredes fixas, isto é, sem movimento relativo entre o corpo e as paredes do túnel. Na situação real, ainda não analisada, o solo apresenta um movimento relativo ao corpo, o que, na simulação numérica, se concretizaria com uma simples alteração na condição de escorregamento, especificada na parede. Esta alteração, resultaria na diminuição da vorticidade gerada na parede, reduzindo a circulação (ou o aumento da sustentação) gerada ao redor do perfil.

5. Referências

- Chacaltana, J.T.A., Bodstein, G.C.R., and Hirata, M.H., 1994, "2-D Interaction of a Point-Vortex with a Thin Airfoil Near a Ground Plane". *Anais do V ENCIT*, São Paulo, Brazil.
- Chacaltana, J.T.A., Bodstein, G.C.R., and Hirata, M.H., 1995, "Analytical Study of the Time-Dependent 2-D Interaction of a Thin Airfoil and a Vortex in the Presence of a Ground Plane". *Proceedings, 13^o ABCM-Mechanical Engineering Conference (COBEM)*, Belo Horizonte, Brazil.
- Chorin, A. J., 1973 "Numerical Study of Slightly Viscous Flow" *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 57, pp. 785-796.
- Helmholtz, H., 1858 "On Integrals of the Hydrodynamics Equations which Express Vortex Motion" Translation, P.G., Tait, in *Phil. Mag* (4)1867, vol 33, pp 485-512.
- Hirata, M.H. and Pereira, L.A.A. 1999, "O Método de Vórtices - Algoritmos e Implementação Numérica" *Textos em Engenharia Mecânica*, N^o 04/99 IEM/EFEI Itajubá, Brasil.
- Katz, J. and Plotkin, A., 1991 "Low Speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods" McGraw Hill, Inc.
- Lewis, R. I., 1991 "Vortex Element Method for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems" Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Panton, R.L., 1984 "Incompressible Flow" John Wiley & Sons.
- Pereira, L. A. A., 1999 "Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtices Discretos" Tese de Mestrado aprovada pelo Departamento de Mecânica, IEM/EFEI, Itajubá, Brasil.
- Plotkin, A. and Kennell, C.G., 1981, "Thickness-Induced Lift on a Thin Airfoil in Ground Effect". *AIAA Journal*, Vol. 19, N^o 11, pp. 1484-1486.
- Steinbach, D., 1985, "Experimental and Theoretical Investigations of the Flow Around Airfoil Systems". *DFVLR Institut für Theoretische Strömungsmechanik*, Göttingen.
- Tomotika, S., Nagamiya, T., and Takenouti, Y., 1933, "The Lift on a Flat Plate Placed Near a Plane Wall with Special Reference to the Effect of the Ground Upon the Lift of Monoplane Airfoil". *Aeronautical Research Institute of Tokyo*, Rept. N^o 97.

INFLUENCE OF A GROUND PLANE IN THE AERODYNAMIC LOADS ON AN AIRFOIL

José Eugênio Rios Ricci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Ricci@iem.efei.br

Luiz Antonio Alcântara Pereira

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Luizantp@iem.efei.br

Miguel Hiroo Hirata

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Hirata@iem.efei.br

Nelson Manzanares Filho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. Pinheirinho, 1303 B.P.S. C. Postal 50 – 37500-903 – Itajubá – MG
Nelson@iem.efei.br

***Abstract.** Unsteady flows over airfoils in the vicinity of a ground-plane occurs very often in engineering problems. They are observed, in the wings of an aircraft, during landing and take-off operations. In other areas of the engineering similar situations happen; many aspects of the present situation are encountered when the rotor of a turbomachine operates inside a volute. The vorticity generated in the surface of the airfoil, interacting with that generated in the ground surface, modify the aerodynamic characteristics of the airfoil. In this paper a new methodology that utilizes the Vortex Method is used for the analysis of the problem. This methodology considers the effects of the viscosity and, as a consequence, enables one to take into consideration the dynamics of the vorticity generated in the surface of the airfoils and in the ground, and their intense interaction that occurs in the wake. A purely Lagrangian scheme is used for this simulation. The vorticity diffusion is simulated using the random walk method. The results of the numeric simulations allow the identification and analysis of the present mechanisms, as well as the calculation of the aerodynamic loads, which are compared with data available in the literature.*

Key Words. Vortex Method, Numerical Method, Aerodynamic Loads, Ground Effect.

NUMERICAL SIMULATION OF UNSATURATED FLOW IN POROUS MEDIA USING A MASS-CONSERVATIVE MODEL

Carlos Alexandre Bastos de Vasconcelos

Instituto Militar de Engenharia, Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
cabvasc@vetor.com.br

José Carlos Cesar Amorim

Instituto Militar de Engenharia, Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
jcamorim@ime.eb.br

Abstract. *Water flow into unsaturated porous media is governed by the Richards' partial differential equation expressing the mass conservation law and the Darcy's law. This equation may be written in three standard forms: the "h-based" form, the " θ -based" form, and the "mixed" form. Numerical approximations based on different forms of this one-dimensional nonlinear equation can lead to significantly different results for unsaturated flow problems. In the h-based form generate poor results characterized by large mass balance errors and erroneous estimates of infiltration depth; whereas on the mixed form the mass is perfectly conserved, improving the accuracy of the results without requiring any additional computational effort. However, it is shown to be insufficient to guarantee good numerical solutions. In the present paper, the Richards' equation is modeled in mixed form discretized by finite differences techniques using a backward Euler time-marching coupled with modified Picard method, and arithmetical mean in estimating of the hydraulic conductivity (K) between neighbors points of the mesh. Starting from this model, simulations were made to Dirichlet and Neumann boundary conditions, soil initially very dry and types of soil with different permeability. Besides, were tested interblocks weighting for estimating of K using experimental data and comparing them with quasi-analytical solution.*

Keywords. *Porous media, Unsaturated flow, Richards' Equation, Finite difference, Infiltration*

1. Introduction

The water unsaturated zone of the earth's crust remains an enigma to scientific understanding and technological management. This zone, also called vadose zone, is a region of the underground limited at its top by the soil surface and below by the ground water table, where happened many physical phenomena such as: infiltration, evaporation, groundwater recharge, soil moisture storage and others. Prediction of fluid movement in unsaturated porous media is an important problem in many branches of science and engineering, such as the soil mechanics, the fluid mechanics, the agricultural engineering, the environmental engineering and others.

The equations that govern this phenomenon are Darcy's law and the mass conservation law. The unsaturated flow involves a two-phase flow of air and water, however only the flow of the water has been considered, where the air phase is continuous and is at atmospheric pressure, and it does not affect the dynamics of the water phase. The media is treated as isotropic and homogeneous, the flow is supposed one-dimensional and transient, the water density varies only with capillary pressure, and the thermal and salinity effects are neglected; thus the fluid motion is assumed to obey the classical Richards' equation.

2. Background

Numerical simulation of unsaturated flow has a significant history in the fields of soil science and groundwater hydrology. General overviews and thorough reviews of the literature may be found in the works of Nielsen et al. (1986) and Milly (1988). Almost all unsaturated flow simulations use either the h-based form of Richards' equation or the θ -based form. A variety of finite difference and finite element solution techniques have been used with each of these equation forms (Freeze, 1971; Neumann, 1973; Narasimhan and Witherspoon, 1976; Haverkamp et al., 1977; Hayhoe, 1978; Haverkamp and Vauclin, 1979; van Genuchten, 1980 and Huyakorn et al., 1984).

Therefore later, Allen and Murphy (1986) and Celia et al. (1987) used a mixed form of Richards' equation to derive numerical solution algorithms. These algorithms used collocation approximations in space, with Celia et al. using an alternating-direction version. Allen and Murphy called their approximation a "quasi-Newton" method while Celia et al. referred to the method as a "modified Picard" method. Both demonstrated excellent mass balance in their numerical solutions. Zarba (1988) used the modified Picard iteration method with both finite difference and finite element approximations in space and demonstrated perfect mass balance. However, conservation of mass is shown to be insufficient to guarantee good numerical solutions. For infiltration into dry soils finite element approximations produce oscillatory solutions even while conserving mass (Celia et al., 1990).

Recently, Ross and Bristow (1990) used the Kirchhoff transformation to simulate water flow, however this procedure increased the computational effort. Srivastava and Yeh (1991) proposed an analytical solution using exponential function to linearize the Richards' equation. Zaidel and Russo (1992) used an asymptotic weighting scheme based on the behavior asymptotic of the hydraulic conductivity function. Gottardi and Venutelli (1993) presented a program, which integrates the three standard forms of this equation using finite difference and finite element

techniques. Finally, Huang et al. (1996) proposed a new convergence criterion for the modified Picard iteration method to improve the computational efficient of the algorithm of Celia et al. (1990).

The purpose of this paper is to present a versatile numerical model which is able to solve the one-dimensional Richards' equation with an accurate mass balance and which converges rapidly to the theoretically correct solution. The numerical model is able to handle short duration infiltration and is relatively easy to implement.

3. Governing partial differential equation

The governing equation may be written in several forms, where the dependent variable will be the pressure head $h(z,t)$ [L] or moisture content $\theta(z,t)$ [L^3/L^3], and the constitutive relationships between θ and h allow for conversion of one form into the other.

Three standard forms of the unsaturated flow equation may be identified: the "h-based" form, the "θ-based" form, and the "mixed" form. These equations are written as

H-based form

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(h)}{\partial z} \quad (1)$$

θ-based form

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (2)$$

Mixed form

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (3)$$

where $K(h)$ or $K(\theta)$ [L/T] is the unsaturated hydraulic conductivity, $C(h)=d\theta/dh$ [1/L] is the moisture capacity, $D(\theta)=K(\theta)/C(\theta)$ [L^2/T] is the unsaturated diffusivity and z denotes the vertical coordinate assumed positive downward.

The terms on the left side of Eq. (1), (2) and (3) describe the effects of draining and filling pores, so statement in terms of the temporal change in moisture content is more appropriate than description via the pressure. In other words, the term $(d\theta/dh)\partial h/\partial t$ is more appropriately written in its simpler form: $\partial\theta/\partial t$.

On the right side of Eq. (1), (2) and (3), it noted that the spatial derivative of the hydraulic head is used to describe the driving force for fluid movement. This is the most direct mathematical statement of the fact that head differences do indeed supply the energy required to move fluid. Specification of the hydraulic conductivity as a function of the pressure head, $K(h)$, is, however, not directly representative of the underlying physics. It is water-filled pores which facilitate transmission of water through a porous medium. The fact that, in modeling water behavior in the unsaturated zone, is secondary to the underlying physics of the flow, because water content and pressure are directly related. Consequently, the hydraulic conductivity, formally, should be expressed in terms of the moisture content, $K(\theta)$. Besides, $K(h)$ typically exhibits hysteresis, whereas in $K(\theta)$ is generally less pronounced (Nielsen et al., 1996).

Hence, the most direct mathematical expression of the physics of unsaturated flow, given the considerations above, is the mixed form presented in the Equation (3).

It was considered the problem of solving for equations above given the following initial and boundary conditions:

Dirichlet type (constant h or θ):

$$\begin{cases} h(z,0) = h_{\text{initial}}, & 0 < z < L \\ h(0,t) = h_0, & t > 0 \\ h(L,t) = h_{\text{initial}}, & t > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Neumann type (constant flux):

$$\begin{cases} h(z,0) = h_{\text{initial}}, & z \neq 0 \\ h(0,0) = h_0 \\ h(L,t) = h_{\text{initial}}, & t > 0 \\ q(0,t) = q_0, & t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

4. Numerical approach

In this section, the numerical approximation used in the model for solving three forms of the Richards' equation is given. The numerical discretization of these three partial differential equations by finite difference method (FD) leads to a tridiagonal nonlinear set of equation, which can be written in matrix form as

$$\begin{bmatrix}
 \beta_1^m & \gamma_1^m & 0 & 0 & 0 & \gg & \gg & 0 & 0 & 0 \\
 \alpha_2^m & \beta_2^m & \gamma_2^m & 0 & 0 & \gg & \gg & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \alpha_3^m & \beta_3^m & \gamma_3^m & 0 & \gg & \gg & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \alpha_4^m & \beta_4^m & \gamma_4^m & \gg & \gg & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \alpha_5^m & \beta_5^m & \gg & \gg & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \gg & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gg & \gg & \beta_{N-2}^m & \gamma_{N-2}^m & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gg & \gg & \alpha_{N-1}^m & \beta_{N-1}^m & \gamma_{N-1}^m \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gg & \gg & 0 & \alpha_N^m & \beta_N^m
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta_1^{m+1} \\
 \delta_2^{m+1} \\
 \delta_3^{m+1} \\
 \delta_4^{m+1} \\
 \delta_5^{m+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \delta_{N-2}^{m+1} \\
 \delta_{N-1}^{m+1} \\
 \delta_N^{m+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 R_1^m \\
 R_2^m \\
 R_3^m \\
 R_4^m \\
 R_5^m \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 R_{N-2}^m \\
 R_{N-1}^m \\
 R_N^m
 \end{bmatrix}
 \quad (6)$$

where the coefficients $\alpha_i^m, \beta_i^m, \gamma_i^m$, and R_i^m ($i = 1, 2, \dots, N$; where N is the number of nodes) are nonlinear function of the variables h or θ . The dependent variables are the increment of the variables h or θ for passing from the iteration level m to the iteration level $m+1$ and are written as

$$\delta_j^{m+1} = h_j^{m+1} - h_j^m \quad \text{or} \quad \delta_j^{m+1} = \theta_j^{m+1} - \theta_j^m, \quad (j = i - 1, i, i + 1) \quad (7)$$

However the superscript n refer to time, where $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Then, the Eq. (7) can be rewritten as

$$\delta_j^{n+1, m+1} = h_j^{n+1, m+1} - h_j^{n+1, m} \quad \text{or} \quad \delta_j^{n+1, m+1} = \theta_j^{n+1, m+1} - \theta_j^{n+1, m}, \quad (j = i - 1, i, i + 1) \quad (8)$$

In this paper, the set of nonlinear algebraic Equations (6) is solved by using a standard fully implicit Picard iterative technique and the algorithm of Thomas. The models for the three forms of Richards's equation are given in the following.

H-based approximation

The standard FD approximation for the h -based form (HFD) of the Richards' equation (1) obtained by a backward Euler method for temporal discretization is

$$C_i^{n+1, m} \frac{h_i^{n+1, m+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{K_{i-1/2}^{n+1, m}}{(\Delta z)^2} (h_{i-1}^{n+1, m+1} - h_i^{n+1, m+1}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1, m}}{(\Delta z)^2} (h_{i+1}^{n+1, m+1} - h_i^{n+1, m+1}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1, m} - K_{i-1/2}^{n+1, m}}{\Delta z} \quad (9)$$

where $K_{i\pm 1/2}^{n+1, m}$ indicate the interblock hydraulic conductivities. Substituting the increment of pressure head at two subsequent iteration levels, Eq. (8), in the equation above we obtain

$$\begin{aligned}
 C_i^{n+1, m} \frac{\delta_i^{n+1, m+1}}{\Delta t} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1, m}}{(\Delta z)^2} (\delta_{i-1}^{n+1, m+1} - \delta_i^{n+1, m+1}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1, m}}{(\Delta z)^2} (\delta_{i+1}^{n+1, m+1} - \delta_i^{n+1, m+1}) &= \frac{K_{i-1/2}^{n+1, m}}{(\Delta z)^2} (h_{i-1}^{n+1, m} - h_i^{n+1, m}) + \\
 + \frac{K_{i+1/2}^{n+1, m}}{(\Delta z)^2} (h_{i+1}^{n+1, m} - h_i^{n+1, m}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1, m} - K_{i-1/2}^{n+1, m}}{\Delta z} - C_i^{n+1, m} \frac{h_i^{n+1, m} - h_i^n}{\Delta t} &\equiv (R_i^{n+1, m})
 \end{aligned} \quad (10)$$

where $(R_i^{n+1, m})$ is defined as the residual associated with the Picard iteration. Upon convergence in iteration, both $(R_i^{n+1, m})$ and the difference in iteration, Equation (8), approach zero. The Equation (10) can be put in the form of Equation (6) where

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i^{n+1,m} = -\frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ \beta_i^{n+1,m} = \frac{C_i^{n+1,m}}{\Delta t} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ \gamma_i^{n+1,m} = -\frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ R_i^{n+1,m} = \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i-1}^{n+1,m} - h_i^{n+1,m}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i+1}^{n+1,m} - h_i^{n+1,m}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} - C_i^{n+1,m} \frac{h_i^{n+1,m} - h_i^n}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (11)$$

θ -based approximation

The standard FD approximation for the θ -based form (TFD) of the Richards' equation (2) obtained by a backward Euler method for temporal discretization is

$$\frac{\theta_i^{n+1,m+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = \frac{D_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\theta_{i-1}^{n+1,m+1} - \theta_i^{n+1,m+1}) + \frac{D_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\theta_{i+1}^{n+1,m+1} - \theta_i^{n+1,m+1}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} \quad (12)$$

where $D_{i\pm 1/2}^{n+1,m}$ indicate the interblock unsaturated diffusivities. Substituting the increment of moisture content at two subsequent iteration levels, Eq. (8), in the equation above we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{D_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\delta_{i-1}^{n+1,m+1} - \delta_i^{n+1,m+1}) + \frac{D_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\delta_{i+1}^{n+1,m+1} - \delta_i^{n+1,m+1}) = \frac{D_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\theta_{i-1}^{n+1,m} - \theta_i^{n+1,m}) + \\ & + \frac{D_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\theta_{i+1}^{n+1,m} - \theta_i^{n+1,m}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} - \frac{\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n}{\Delta t} \equiv (R_i^{n+1,m}) \end{aligned} \quad (13)$$

The Equation (13) can be put in the form of Eq.(6) where

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i^{n+1,m} = -\frac{D_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ \beta_i^{n+1,m} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{D_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} + \frac{D_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ \gamma_i^{n+1,m} = -\frac{D_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ R_i^{n+1,m} = \frac{D_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\theta_{i-1}^{n+1,m} - \theta_i^{n+1,m}) + \frac{D_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\theta_{i+1}^{n+1,m} - \theta_i^{n+1,m}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} - \frac{\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (14)$$

Mixed approximation

The standard FD for the mixed-based form (MFD) of the Richards' equation (3) obtained by a backward Euler method for temporal discretization is

$$\frac{\theta_i^{n+1,m+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i-1}^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m+1}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i+1}^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m+1}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} \quad (15)$$

where $K_{i\pm 1/2}^{n+1,m}$ indicate the interblock hydraulic conductivities. The key to the method is expansion of $\theta_i^{n+1,m+1}$ in a truncated Taylor series with respect to h , about the expansion point $h_i^{n+1,m}$, namely,

$$\theta_i^{n+1,m+1} = \theta_i^{n+1,m} + \left. \frac{d\theta}{dh} \right|^{n+1,m} (h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) + O(\delta^2) \quad (16)$$

If all terms higher than linear are neglected in Eq.(16), and this equation is substituted into Eq. (15), it results

$$\left(\frac{1}{\Delta t} C_i^{n+1,m} \right) \delta_i^{n+1,m} + \frac{\theta_i^{n+1,m+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i-1}^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m+1}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i+1}^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m+1}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} \quad (17)$$

Substituting the increment of pressure head at two subsequent iteration levels, Eq. (8), in the equation above we obtain

$$C_i^{n+1,m} \frac{\delta_i^{n+1,m}}{\Delta t} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\delta_{i-1}^{n+1,m+1} - \delta_i^{n+1,m+1}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (\delta_{i+1}^{n+1,m+1} - \delta_i^{n+1,m+1}) = \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i-1}^{n+1,m} - h_i^{n+1,m}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i+1}^{n+1,m} - h_i^{n+1,m}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} - \frac{\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n}{\Delta t} \equiv (R_i^{n+1,m}) \quad (18)$$

where $(R_i^{n+1,m})$ is defined as the residual associated with the Modified Picard iteration (Celia et al. ,1990). The Equation (18) can be rewritten and the coefficients of Equation (6) become

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_i^{n+1,m} &= \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ \beta_i^{n+1,m} &= \frac{C_i^{n+1,m}}{\Delta t} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ \gamma_i^{n+1,m} &= -\frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2}; \\ R_i^{n+1,m} &= \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i-1}^{n+1,m} - h_i^{n+1,m}) + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} (h_{i+1}^{n+1,m} - h_i^{n+1,m}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} - \frac{\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n}{\Delta t} \end{aligned} \right. \quad (19)$$

4.1. Discretization of boundary conditions

In the present paper, Dirichlet and Neumann boundary conditions are allowed. For each, the Eq. (6) is modified in the top and bottom node. In the Dirichlet condition, where the pressure head are known, the coefficients $\alpha_2^m, \alpha_n^m, \gamma_1^m, \gamma_{n-1}^m, R_1^m$ and R_n^m of matrix of Eq. (6) are equaled to zero, and β_1^m and β_n^m are equaled to unity. On the other hand, the Neumann condition, where the flux is known on the top node, is given by imposing

$$q = -\left(K \frac{\partial h}{\partial z} + K \right) \quad \text{or} \quad q = -\left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} + D \right) \quad (20)$$

where q is the prescribed flux. So doing, the coefficients in Eq. (6) for the first block are obtained from those of the generic internal *i*th-block as follows

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1^m &= 0; \\ \beta_1^m &\text{ from } \beta_i^m \text{ by putting : } K_{i-1/2}^m = 0 \text{ or } D_{i-1/2}^m = 0; \\ \gamma_1^m &\text{ from } \gamma_i^m; \\ R_1^m &\text{ from } R_i^m \text{ by putting : } \frac{K_{i-1/2}^m}{(\Delta z)^2} (h_0^m - h_1^m) + \frac{K_{i-1/2}^m}{\Delta z} = 0 \text{ or } \frac{D_{i-1/2}^m}{(\Delta z)^2} (\theta_0^m - \theta_1^m) + \frac{D_{i-1/2}^m}{\Delta z} = 0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

4.2. Estimating of interblock nonlinear functions

The application of finite difference operator provokes the problem of approximating the $i\pm 1/2$ level in space, referred to as “weighting” necessary for the determination of interblock hydraulic conductivity values $K_{i\pm 1/2}$ or unsaturated diffusivity values $D_{i\pm 1/2}$. Different weighting formulas for estimating interblock quantities from the available grid point are proposed (Haverkamp and Vauclin, 1979):

Arithmetic mean

$$K_{i\pm 1/2} = \frac{K_i + K_{i\pm 1}}{2} \quad \text{and} \quad D_{i\pm 1/2} = \frac{D_i + D_{i\pm 1}}{2} \quad (22)$$

Harmonic mean

$$K_{i\pm 1/2} = \frac{2K_i K_{i\pm 1}}{K_i + K_{i\pm 1}} \quad \text{and} \quad D_{i\pm 1/2} = \frac{2D_i D_{i\pm 1}}{D_i + D_{i\pm 1}} \quad (23)$$

Geometric mean

$$K_{i\pm 1/2} = \sqrt{K_i K_{i\pm 1}} \quad \text{and} \quad D_{i\pm 1/2} = \sqrt{D_i D_{i\pm 1}} \quad (24)$$

Upstream method

$$\begin{cases} K_{i\mp 1/2} = K_{i\mp 1} \quad \text{or} \quad D_{i\mp 1/2} = D_{i\mp 1} & \text{if} \quad h_{i\mp 1} > h_i \quad \text{or} \quad \theta_{i\mp 1} > \theta_i \\ K_{i\mp 1/2} = K_i \quad \text{or} \quad D_{i\mp 1/2} = D_i & \text{if} \quad h_{i\mp 1} < h_i \quad \text{or} \quad \theta_{i\mp 1} < \theta_i \end{cases} \quad (25)$$

4.3. Evaluation of mass balance error

One measure of a numerical simulator is its ability to conserve global mass over the domain of interest. Adequate conservation of global mass is a necessary but not sufficient condition for acceptability of a numerical simulator (Celia et al., 1990). To measure the ability of the simulator to conserve mass, let a mass balance measure be defined as follows

$$MB(t) \equiv \frac{\text{total additional mass in the domain}}{\text{total net flux into the domain}} \quad (26)$$

where the additional mass is measured with respect to the initial mass in the system. For the finite difference approximation with Dirichlet boundary conditions, this is evaluated as

$$MB(t^{n+1}) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^0) (\Delta z)}{\sum_{j=1}^{n+1} \left\{ K_{1/2}^j \left[\frac{h_2^j - h_1^j}{\Delta z} + 1 \right] - K_{N-1/2}^j \left[\frac{h_N^j - h_{N-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] \right\} (\Delta t)} \quad (27)$$

where N is the number of nodes whose coordinates are $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, and constant nodal spacing Δz is assumed. The global mass balance error is calculated by

$$MBE(\%) = 100 |1 - MB(t)| \quad (28)$$

5. Experimental constitutive relationships

The constitutive relationships between θ , h and K are given by experimental functions, that describe the soil properties. In this paper, three usual types of constitutive relationships $K=K(h)$ and $\theta = \theta(h)$ can be used to characterize the different soil. The first and second type were used by Haverkamp et al. (1977) for a sand and for the Yolo light clay, whereas the third type have been used by van Genuchten (1980) to model the Glendale clay loam. The numerical values of the parameters for these types of soils are given in Table 1 (Gottardi and Venutelli, 1993).

Type 1

$$K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\phi}; \quad \theta(h) = \frac{\lambda(\theta_s - \theta_r)}{\lambda + |h|^\psi} + \theta_r \quad (29)$$

Type 2

$$K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\phi}; \quad \theta(h) = \frac{\lambda(\theta_s - \theta_r)}{\lambda + (\ln|h|)^\psi} + \theta_r \quad (30)$$

Type 3

$$K(S_e) = K_s S_e^{1/2} \left[1 - (1 - S_e^{1/\mu})^\mu \right]^2; \quad \theta(S_e) = S_e(\theta_s - \theta_r) + \theta_r \quad (31)$$

where

$$S_e(h) = [1 + (\rho h)^\eta]^{-\mu}; \quad \mu = 1 - \eta^{-1} \quad (32)$$

where $A, \phi, \lambda, \psi, \eta, \mu$ are dimensionless parameters, $\rho [L^{-1}]$ is a measure of the pore size density function, $\theta_s [L^3/L^3]$ is the moisture content at saturated conditions, $\theta_r [L^3/L^3]$ is the residual moisture content and S_e is effective saturation.

Table 1. Parameter values for three types of soil.

Soil	Type	K_s (cm/s)	A	λ	ϕ	ψ	ρ (cm ⁻¹)	η	θ_s (cm ³ /cm ³)	θ_r (cm ³ /cm ³)
Sand	1	9.44 10 ⁻³	1.18 10 ⁶	1.61 10 ⁶	4.47	3.96	-	-	0.287	0.075
Yolo	2	1.23 10 ⁻⁵	1.25 10 ²	7.39 10 ²	1.77	4.00	-	-	0.495	0.124
Glendale	3	1.52 10 ⁻⁴	-	-	-	-	1.04 10 ⁻²	1.395	0.469	0.106

6. Test cases and results

Infiltration simulations in homogeneous soils are present in the following test cases. The simulations were carried out using the theory described in the previous sections where all three numeral approximations methods were used.

Test case 1

This test case consists of infiltration into an unsaturated soil (Sand, type 1 - Table 1) column with a depth $L=120$ cm. The simulation was made at Dirichlet conditions, with a depth interval $\Delta z = 1.0$ cm and a time step varying from $\Delta t = 10^{-6}$ s during 4000 s (1,11 h). The arithmetical mean was used for estimating K . The results of this simulation are in the Fig. 1, and the initial and boundary conditions for this test were

$$\begin{cases} h(z,0) = -100 \text{ cm} \quad (\theta = 0.07903 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3), & 0 < z < 120 \\ h(0,t) = -20 \text{ cm} \quad (\theta = 0.269 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3), & t > 0 \\ h(120,t) = -100 \text{ cm}, & t > 0 \end{cases} \quad (33)$$

Test case 2

This test case consists of infiltration into an unsaturated soil (Glendale clay loam, type 3 - Table 1) column with a depth $L=200$ cm. The simulation was made at Neumann conditions, with a depth interval $\Delta z = 2.0$ cm and a time step varying from $\Delta t = 10^2$ s during 1.5×10^5 s (41.67 h). The arithmetical mean was used for estimating K . The results of this simulation are in the Fig. 2, and the initial and boundary conditions for this test were

$$\begin{cases} h(z,0) = -600 \text{ cm}, & z \neq 0 \\ h(0,0) = -20 \text{ cm} \quad (\theta = 0.4579 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3) \\ h(200,t) = -600 \text{ cm} \quad (\theta = 0.2781 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3), & t > 0 \\ q(0,t) = 0.0001 \text{ cm/s}, & t > 0 \end{cases} \quad (34)$$

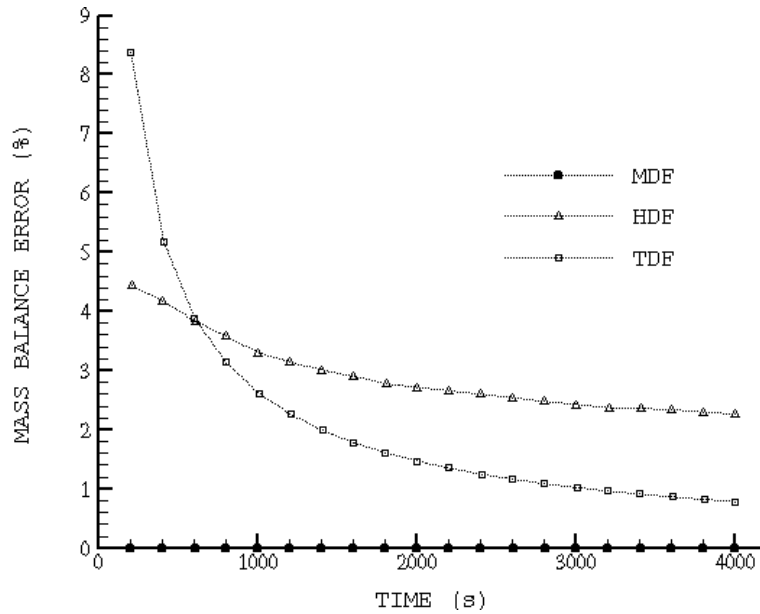


Figure 1. Mass balance error versus time for MDF, HDF and TDF methods.

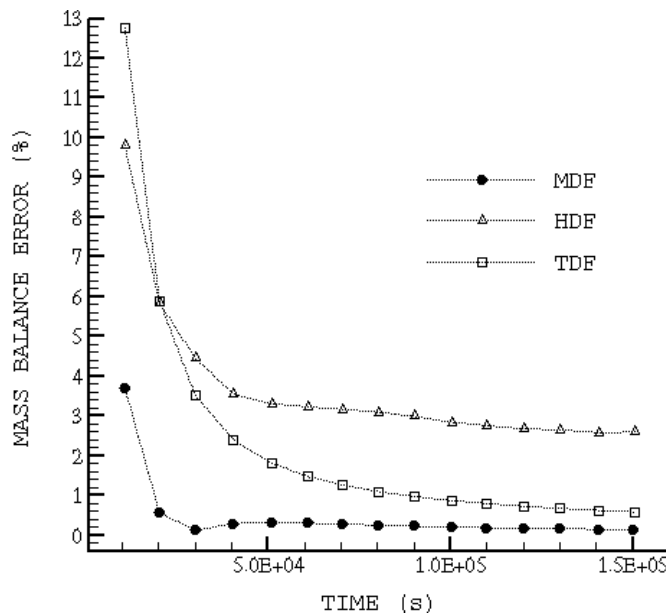


Figure 2. Mass balance error versus time for MDF, HDF and TDF methods.

Test case 3

This test case consists of infiltration into an unsaturated soil (Sand, type 1 – Table 1) column with a depth $L=100\text{cm}$. The simulation was made at Dirichlet conditions, with a depth interval $\Delta z = 1.0\text{ cm}$ and a time step varying from $\Delta t = 10^{-6}\text{ s}$ during 3600s (1.0 h). The MDF method with four types for estimating K were used and compared with the quasi-analytical solution by Philip (Kaverkamp et al., 1977). The results of this simulation are in the Fig. 3, and the initial and boundary conditions for this test were

$$\begin{cases} h(z,0) = -61.50\text{ cm} \quad (\theta = 0.100\text{ cm}^3 / \text{cm}^3), & 0 < z < 100 \\ h(0,t) = -20.73\text{ cm} \quad (\theta = 0.267\text{ cm}^3 / \text{cm}^3), & t > 0 \\ h(100,t) = -61.50\text{ cm}, & t > 0 \end{cases} \quad (35)$$

Test case 4

This test case consists of infiltration into an unsaturated soil (Yolo light clay, type 2 – Table 1) column with a depth $L=220\text{cm}$. The simulation was made at Dirichlet conditions, with a depth interval $\Delta z = 1.0\text{ cm}$ and a time step varying from $\Delta t = 10^2\text{ s}$ during $4.0 \times 10^6\text{ s}$ (46.3 days). The MDF method and geometric mean for estimating K was used and compared with the quasi-analytical solution by Philip. The results of this simulation are in the Fig. 4, and the initial and boundary conditions for this test were

$$\begin{cases} h(z,0) = -600.0\text{ cm} \quad (\theta = 0.2376\text{ cm}^3/\text{cm}^3), & 0 < z < 220 \\ h(0,t) = -1.0\text{ cm} \quad (\theta = \theta_s = 0.4950\text{ cm}^3/\text{cm}^3), & t > 0 \\ h(220,t) = -600.0\text{ cm}, & t > 0 \end{cases} \quad (36)$$

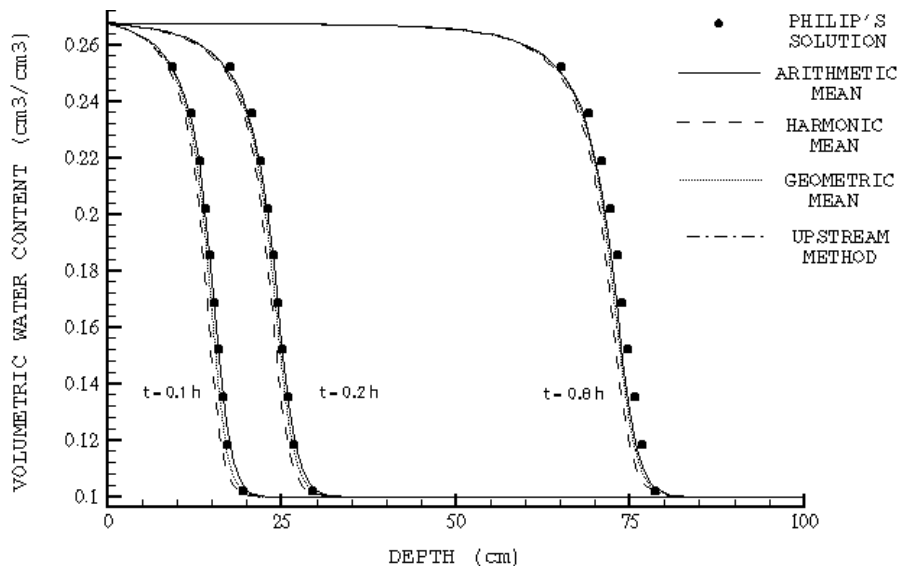


Figure 3. Moisture profiles at times: 0.1, 0.2 and 0.8 h for four estimates of K using MDF method and for quasi-analytical solution by Philip.

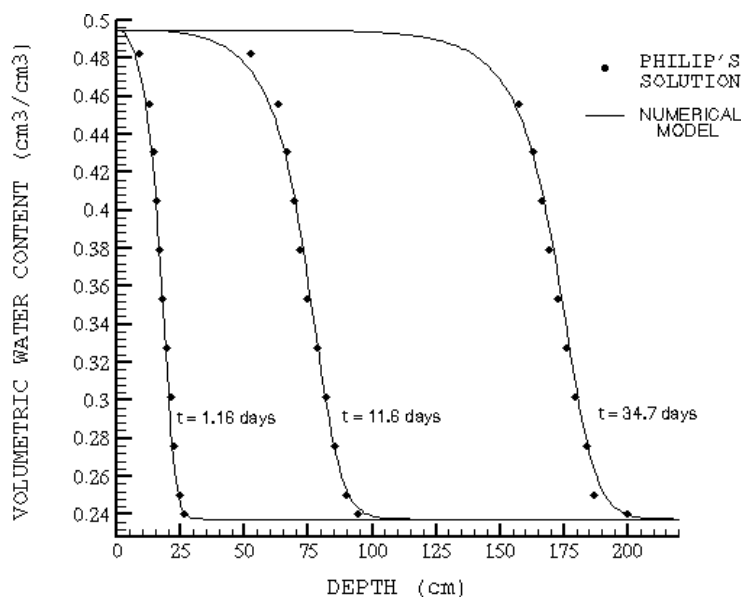


Figure 4. Moisture profiles at times: 1.16, 11.6 and 34.7 days for the most mass-conservative numerical model and for quasi-analytical solution by Philip.

7. Conclusion

The comparison of the performance of the methods on the basis of mass-balance errors, the analyze of estimating nonlinear functions and the confirmation of the validity of numerical solution were allowed by tests cases.

In the test cases one and two were shown that the mixed form of the Richards' equation is the most mass conservative solution for sandy and loamy soils, besides Dirichlet and Neumann boundary conditions. This result checks in another way the solution obtained by Celia et al. (1990). In the test case three it was shown that the geometric mean is the solution more accurate in the estimate of the hydraulic conductivity in relation to the quasi-analytic solution by Philip. And, in the last test case was used the best results of the test case previous to model a well-known clay of the literature (Yolo light clay). The good match obtained confirms the validity of the numerical method employed.

However, this paper presented a versatile numerical model which was able to solve the one-dimensional Richards' equation with an accurate mass balance and which converges rapidly to the theoretically correct solution. The numerical model was able to handle short duration infiltration and was relatively easy to implement.

One reason why research continues on the numerical solution of the Richards' equation is the computational time needed to achieve to accurate solution for heterogeneous soils with abruptly changing wetness conditions. Therefore, this work will continue in search of those objectives.

8. References

- Allen, M.B. and Murphy, 1996, "A Finite Element Collocation Method for Variable Saturated Flow in Two Dimensions", *Water Resour. Res.*, Vol. 22, pp 1537-1542.
- Bear, J., 1972, "Dynamics of Fluids in Porous Media", Elsevier Science New York, 764 p.
- Bear, J., 1979, "Hydraulics of Groundwater", McGraw-Hill, International Book Co., 567 p.
- Celia, M.A., Ahuja, L.R. and Pinder, G.F., 1987, "Orthogonal Collocation and Alternating-direction Procedures for Unsaturated Flow Problems", *Adv. Water Resour.*, Vol. 10, pp 178-187.
- Celia M.A., Bouloutas, E.T. and Zarba, R.L., 1990, "A General Mass-Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation", *Water Resour. Res.*, Vol. 26, No.7, pp 1483-1496.
- Gottardi, G. and Venutteli, M., 1993, "Richards: Computer Program for the Numerical Simulation of One-dimensional Infiltration into Unsaturated Soil", *Computers and Sciences*, Vol. 19, No. 9, pp 1239-1266.
- Frezze, R.A., 1971, "Three-Dimensional, Transient, Saturated-Unsaturated Flow in a Groundwater Basin", *Water Resour. Res.*, Vol. 7, No. 2, pp 347-366.
- Hayhoe, H.N., 1978, "Study of the Relative Efficiency of Finite Difference and Galerkin Techniques for Modeling Soil-water Transfer", *Water Resour. Res.*, Vol. 14, 97-102.
- Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P. and Vachaud, G., 1977, "Comparison of Numerical-simulation Models for One-dimensional Infiltration", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 41, No. 2, pp 285-294.
- Haverkamp, R. and Vauclin, M., 1979, "A Note on Estimating Finite Difference Interblock Hydraulic Conductivity Values for Transient Unsaturated Flow Problems", *Water Resour. Res.*, Vol. 15, pp 181-187.
- Huang, K., Mohanty, B.P. and van Genuchten, M.T., 1996, "A New Convergence Criterion for the Modified Picard Iteration Method to Solve the Variably Saturated Flow Equation", *J. Hydrol.*, Vol. 178, pp 69-91.
- Huyakorn, P.S., Thomas, S.D. and Thompson, B.M., 1984, "Techniques for Making Finite Elements Competitive in Modeling Flow in Variably Saturated Media", *Water Resour. Res.*, Vol. 20, pp 1099-1115.
- Milly, P. C. D., 1988, "Advances in Modeling of Water in the Unsaturated zone", *Transp. Porous Media*, 3, pp 491-514.
- Narasimhan, T.N. and Witherspoon, P.A., 1976, "An Integrated Finite Difference Method for Analyzing Fluid Flow in Porous Media", *Water Resour. Res.*, Vol. 12, pp 57-64.
- Neuman, S.P., 1973, "Saturated-unsaturated Seepage by Finite Elements", *J. Hydraul. Div. Am. Civ. Eng.*, Vol. 99, No. HY12, pp 2233-2250.
- Nielsen, D. R., van Genuchten, M.T. and Biggar, J.W., 1986, "Water Flow and Solute Transport Processes in the Unsaturated Zone", *Water Resour. Res.*, 22(9), pp 89S-108S.
- Ross, P.J. and Bristow, K.L., 1990, "Simulating Water Movement in Layered and Gradational Soils using the Kirchhoff Transform", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 54, pp 1519-1524.
- Srivastava, R. and Yeh, T.J., 1991, "Analytical Solutions for One-dimensional, Transient Infiltration toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soils", *Water Resour. Res.*, Vol. 27, No. 5, pp 753-762.
- van Genuchten, M.T., 1980, "A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 44, No. 5, pp 892-898.
- Zaidel, J. and Russo, D., 1992, "Estimation of Finite Difference Interblock Conductivities for Simulation of Infiltration into Initially Dry Soils", *Water Resour. Res.*, 28(9), pp 2285-2295.
- Zarba, R.L., 1988, "A Numerical Investigation of Unsaturated Flow", M.S. Thesis, Dep. of Civ. Eng., Mass. Inst. of Technol., Cambridge.

9. Copyright Notice

The authors are the only responsible for the printed material included in their paper.

MODELOS LAGRANGIANOS DE PARTÍCULAS APLICADOS A DISPERSÃO DE POLUENTES NA ATMOSFERA

Maxsuel M. R. Pereira ⁽¹⁾

e-mail: maxsuel@model.iag.usp.br

Amauri P. Oliveira ⁽¹⁾

e-mail: apdolive@usp.br

Hugo A. Karam ⁽¹⁾

e-mail: hakaram@model.iag.usp.br

Edson P. M. Filho ⁽¹⁾

e-mail: emarques@model.iag.usp.br

⁽¹⁾ Grupo de micrometeorologia, Departamento de Ciências atmosféricas, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, Rua do Matão, 1226, 05508-900, São Paulo, SP,

Resumo. Os modelos lagrangianos de partículas têm se tornado uma importante ferramenta na descrição dos processos de dispersão de poluentes na Camada Limite Planetária. Neste trabalho, é apresentada uma revisão dos principais aspectos teóricos deste tipo de modelo, que envolvem as equações de Langevin e de Fokker-Planck. São derivadas as soluções para a equação de Langevin considerando as acelerações determinísticas e aleatórias dadas por: (a) não-linear e assimétrica; (b) linear e assimétrica e (c) linear e gaussiana, respectivamente. Faz-se também uma aplicação de um modelo lagrangiano de partículas, acoplado a um modelo numérico meteorológico de mesoescala, para estimar a dispersão de um poluente inerte e passivo, emitido continuamente por uma fonte pontual, localizada na superfície, em uma área com topografia e ocupação da superfície complexa.

Palavras chave: Equação de Langevin; Equação de Fokker-Planck; Modelo lagrangiano de partículas; Dispersão de poluentes.

1. Introdução

Os modelos lagrangianos de partículas (MLP) ou modelos estocásticos lagrangianos estão baseados na equação de Langevin. Trabalhos pioneiros na abordagem estocástica do processo de difusão molecular em um fluido começaram no início do século XX por Einstein (1905; 1906), Smoluchowski (1906) e Langevin (1908). Langevin introduziu a abordagem estocástica lagrangiana considerando o movimento browniano como resultante da ação das forças aleatórias e de arrasto sobre um conjunto de partículas imersas em um fluido em repouso. Taylor (1921) foi o primeiro a aplicar a abordagem estatística lagrangiana para a dispersão turbulenta. Obukhov (1959) propôs uma descrição da evolução da posição e da velocidade de uma partícula através das respectivas funções densidade de probabilidade (fdp) descritas pela equação de Fokker-Planck. A partir da década de 70, considerável progresso foi feito na teoria e nas aplicações de modelos estocásticos lagrangianos de partículas para descrever a dispersão de poluentes na atmosfera. Revisões dos MLP foram feitas por Durbin (1983), Sawford (1985; 1993), Thomson (1987), Pope (1987; 1994), Wilson e Sawford (1996) e Rodean (1994; 1996). Neste trabalho são apresentadas as descrições da equação de Langevin (seção 2), da equação de Fokker-Planck (seção 3), de três formas de solução da equação de Langevin (seção 4), e uma aplicação de um MLP acoplado a um modelo de mesoescala (seção 5).

2. A equação de Langevin

O movimento irregular dos grãos de pólen imerso em um fluido foi descoberto e caracterizado pelo botânico inglês Robert Brown em 1827. Neste movimento, conhecido como movimento browniano, as partículas são continuamente bombardeadas pelas moléculas do fluido. Einstein (1905; 1906) publicou a primeira explicação satisfatória do movimento browniano, considerando-o um processo aleatório. Os principais pontos de sua proposta foram: (1) o movimento é ocasionado por freqüentes impactos das moléculas do fluido sobre os grãos de pólen suspensos nesse meio; (2) a complexidade do movimento das moléculas somente pode ser descrita probabilisticamente considerando os impactos com as partículas independentes e com grande freqüência de ocorrência; (3) cada partícula executa um movimento independente das outras partículas presentes no meio; e (4) os movimentos de uma partícula em diferentes e consecutivos intervalos de tempo são processos independentes. A hipótese 4 é válida desde que estes intervalos de tempo sejam suficientemente grandes em relação a tempo médio entre dois impactos consecutivos com moléculas. Uma explicação similar foi desenvolvida independentemente por Smoluchowski (1906).

Langevin (1908) publicou uma proposta alternativa a de Einstein, onde aparece o primeiro exemplo de equação diferencial estocástica e pode ser apresentada da seguinte forma (van Kampen, 1992):

$$\frac{du_i}{dt} = a(u_i) + \Lambda(t). \quad (1)$$

Onde u_i ($i = 1, 2, 3$) é a velocidade da partícula nas direções x_1, x_2 e x_3 e t é o tempo.

A equação (1), conhecida como equação de Langevin, indica que a velocidade de uma partícula sofre um decaimento exponencial resultante da perda de momento (quantidade de movimento) para o meio turbulento, e adquire uma certa aceleração através de um impulso determinado pela natureza aleatória do escoamento turbulento. Assim, a aceleração de uma partícula em um escoamento turbulento é constituída por uma parte determinística, $a(u_i)$, que é função de u_i , e de uma parte aleatória, $\Lambda(t)$, independente de u_i . $\Lambda(t)$ possui as seguintes propriedades:

$$\langle\langle \Lambda(t) \rangle\rangle = 0, \quad (2)$$

pois, em média, a força devida às moléculas é nula, e

$$\langle\langle \Lambda(t_1) \Lambda(t_2) \Lambda(t_3) \dots \Lambda(t_n) \rangle\rangle = \Gamma_n \mathbf{d}(t_1 - t_2) \mathbf{d}(t_1 - t_3) \dots \mathbf{d}(t_1 - t_n), \quad (3)$$

uma vez que os impactos são assumidos independentes. Em (2) e (3), $\langle\langle \rangle\rangle$, denota o cumulante de uma quantidade (van Kapen, 1992; Gardiner, 1990); Γ_n , é um conjunto de coeficientes obtidos a partir das propriedades estatísticas da velocidade de fluido e $n = 1, 2, \dots$.

A posição da partícula pode ser estimada através da equação de velocidade da partícula:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad (4)$$

onde x_i é a posição da partícula.

A trajetória de uma partícula (u_i, x_i), é completamente determinada pela velocidade da partícula, u_i , obtida pela solução da equação de Langevin (1), e pela posição da partícula, $x_i(t)$, obtida pela solução da equação da velocidade (4). Para tanto, torna-se necessário estimar $a(u_i)$ e $\Lambda(t)$.

Apesar de sua utilização generalizada o sistema de Eqs. (1) e (4) descreve a evolução de u_i e x_i de uma partícula imersa em um fluido como um processo estocástico considerando somente os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem. Para levar em conta os momentos estatísticos de ordem superior torna-se necessário utilizar também uma equação que descreve a evolução temporal e espacial da fdp condicional da posição e velocidade da partícula $P(u, x, t | u_0, x_0, t_0)$, onde $u_0 = u_i(0)$ e $x_0 = x_i(0)$. Esta fdp descreve a probabilidade da partícula no instante t_i ocupar a posição x_i com velocidade u_i , dado que, a partícula encontrava-se no instante t_0 na posição x_0 com velocidade u_0 .

3. Equação de Fokker-Planck

A equação que descreve a evolução temporal e espacial de $P(u, x, t | u_0, x_0, t_0)$ é denominada de Equação de Fokker-Planck. Esta equação é um caso particular da expansão de Kramers-Moyal (Gardiner, 1990; van Kampen, 1992). Ela descreve o processo estocástico de dispersão de uma partícula em um fluido de forma equivalente à equação de Langevin quando as acelerações aleatórias são descritas por distribuições gaussianas e/ou assimétricas.

A expansão de Kramers-Moyal pode ser escrita como (Gardiner, 1990; van Kampen, 1992):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i P) - \frac{\partial}{\partial u_i}[a(u_i) P] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial u_i^n}(\Gamma_n P). \quad (5)$$

onde P é a fdp descrita acima e $a(u_i)$, é a aceleração determinística.

A equação de Fokker-Planck é obtida considerando $n = 2$ na equação (5), ou seja:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i P) - \frac{\partial}{\partial u_i}[a(u_i) P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2}(\Gamma P), \quad (6)$$

onde $\Gamma \equiv \Gamma_2$.

4. Soluções para a equação de Langevin

A solução da equação de Langevin (Thomson, 1984; van Dop et al., 1985; de Baas et al., 1986; Sawford, 1986; Sawford e Guest, 1987) não obtiveram sucesso no encontro da condição de boa mistura (Thomson, 1987) para a turbulência não homogênea. Como discutido por Thomson (1984, 1987), Sawford (1986) e Sawford e Guest (1987), aparecem vários problemas com a formulação e aplicação destes modelos na fronteira do escoamento. A aplicação destes tipos de modelos requer o conhecimento prévio de todos os cumulantes da aceleração aleatória, dificultando a geração da aceleração aleatória. Para turbulência não homogênea, esta dificuldade não foi superada até o momento. Porém, para a hipótese de turbulência homogênea, as soluções da equação de Langevin descritas abaixo apresentam resultados satisfatórios e satisfazem a condição de boa mistura.

Neste trabalho são descritas três maneiras de estimar as acelerações determinísticas e aleatórias considerando-se:

- (i) $a(u_i)$ como uma função não linear de u_i e $\Lambda(t)$ é como uma função densidade de probabilidade que representa um processo gaussiano em x_1, x_2 e x_3 ;
- (ii) $a(u_i)$ como uma função linear de u_i e $\Lambda(t)$ como uma função densidade de probabilidade que representa um processo não gaussiano em x_3 ;
- (iii) $a(u_i)$ como uma função linear de u_i e $\Lambda(t)$ como uma função densidade de probabilidade que representa um processo gaussiano em x_1, x_2 e x_3 .

A equação de Langevin empregada para descrever o caso (i) é denominada de não linear-gaussiana, o caso (ii), de linear-assimétrica e o caso (iii), linear-gaussiana.

4.1. Equação de Langevin não linear-gaussiana

Integrando a Eq. (1) entre 0 e Δt , e considerando que: (a) a aceleração determinística, $a(u_i)$, depende somente de u_i e não de x_i ou t ; (b) o coeficiente do termo de aceleração aleatória, Γ_n , não depende de x_i ou t e (c) a aceleração aleatória, $\Lambda(t)$, tem média zero, obtém-se a expressão para a mudança de velocidade sofrida por uma partícula em um escoamento turbulento entre o instante 0 e Δt :

$$\Delta u_i \equiv a(u_{0i})\Delta t + r_G(\Delta t), \tag{7}$$

onde $r_G(\Delta t) \equiv \int_0^{\Delta t} \Lambda(t) dt$. As hipóteses (a)-(c) são válida para a turbulência homogênea, estacionária e isotrópica; i.e., as propriedades estatísticas da velocidade do fluido, u_{if} , são funções independentes do tempo e posição.

Dado que $\Lambda(t)$ representa um processo gaussiano, as propriedades estatísticas de $r_G(\Delta t)$ são determinadas somente pelos dois primeiros momentos estatísticos de $\Lambda(t)$. Impondo a condição (c), $\overline{\Lambda(t)} = 0$, então o primeiro momento é:

$$\overline{r_G(\Delta t)} = 0. \tag{8}$$

e o segundo momento assume a seguinte forma

$$\overline{r_G^2(\Delta t)} = \overline{\left[\int_0^{\Delta t} \Lambda(t) dt \right]^2} = \Gamma \Delta t. \tag{9}$$

Na derivação de (9) foi utilizada a seguinte propriedade: $\overline{\Lambda(t)\Lambda(t')} = \Gamma \mathbf{d}(t-t')$.

Para $\Delta t \ll 1$ a função de estrutura lagrangiana, definida como $\overline{(\Delta u_i)^2}$, correspondente a (7) é:

$$\overline{(\Delta u_i)^2} = \overline{\left[a(u_{0i})\Delta t + r_G(\Delta t) \right]^2} = \overline{r_G^2(\Delta t)}. \tag{10}$$

Comparando (9) e (10) verifica-se que

$$\overline{(\Delta u_i)^2} = \Gamma \Delta t. \tag{11}$$

Para escoamentos com números de Reynolds altos, o coeficiente Γ pode ser especificado usando a relação entre função de estrutura lagrangiana de velocidade e a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa, $\bar{\epsilon}$, obtida a partir da segunda hipótese de similaridade de Kolmogorov (Monin e Yaglom, 1975, p. 359):

$$\overline{(\Delta u_i)^2} = C_0 \bar{\epsilon} \Delta t. \quad (12)$$

Comparando (11) e (12) obtém-se a seguinte expressão para o coeficiente \tilde{A}

$$\Gamma = C_0 \bar{\epsilon}, \quad (13)$$

onde C_0 é a constante universal de Kolmogorov. A relação (13) fornece uma maneira de estimar coeficiente de aceleração aleatória Γ em função de propriedades estatísticas do fluido turbulento. Deve ser enfatizado que a segunda hipótese de Kolmogorov é válida deste que Δt esteja localizado na região correspondente ao subintervalo inercial.

A aceleração determinística, $a(u_i)$, pode ser obtida integrando a Eq. (6) entre $-\infty \leq x_i \leq \infty$ e considerando que as propriedades estatísticas de u_i são independentes de x_i , obtém-se a seguinte versão da Equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (a(u_i)P(u_i)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\Gamma P(u_i)). \quad (14)$$

Integrando a Eq. (14) em x e assumindo condições estacionárias:

$$a(u_i) = \frac{1}{2P(u_i)} \frac{\partial (\Gamma P(u_i))}{\partial x_i}. \quad (15)$$

A expressão (15) pode ser utilizada para estimar a aceleração determinística sofrida por uma partícula em um escoamento turbulento desde que $P(u_i) = P_f(u_i)$, onde $P_f(u_i)$ é a fdp da velocidade do escoamento (Thomson, 1987). Dessa forma, a descrição estocástica da partícula é determinada pelas características estatísticas do escoamento.

Em resumo, dados os momentos de velocidade do fluido, este modelo não linear-gaussiano é completamente definido pela Eq. (7),

$$\Delta u_i \cong \frac{1}{2P(u_i)} \frac{\partial (\Gamma P(u_i))}{\partial x_i} \Delta t + r_G(\Delta t).$$

Onde o termo aleatório, $r_G(\Delta t)$, possui distribuição gaussiana com propriedades estatísticas fornecidas pelas Eqs. (8), (9) e (13), e $a(u_i)$, é dada pela distribuição gaussiana de $P_f(u_i)$.

4.2. Equação de Langevin linear -assimétrica

Para o caso da equação de Langevin linear-assimétrica, a aceleração determinística é uma função linear da velocidade,

$$a(u_i) = -\mathbf{a}u_i, \quad (16)$$

onde parâmetro \mathbf{a} é inversamente proporcional a escala de tempo lagrangiana, \mathbf{t}_L (Legg e Raupach, 1982).

A integração equação (1) assume a seguinte forma

$$u_i(t) = u_i(0) e^{-\mathbf{a}t} + r_s(t), \quad (17)$$

onde $r_s(t) = \int_0^t e^{\mathbf{a}(s-t)} \Lambda(s) ds$ e $\Lambda(t)$ é representado por uma distribuição assimétrica na vertical e gaussiana na direção horizontal. A parte gaussiana correspondente à direção horizontal será abordada na próxima seção (4.3).

As propriedades estatísticas de $u_3(t)$ e $r_s(t)$ podem ser determinadas a partir dos momentos estatísticos e da função de autocorrelação da velocidade. Neste caso, utiliza-se (17) e as hipóteses de homogeneidade e estacionariedade. O n -ésimo momento de u_3 pode ser determinado através do valor médio da n -ésima potência da Eq. (17). Tendo em

vista que os momentos estatísticos podem ser mais convenientemente escritos usando a notação de cumulante (Nasstrom, 1998), o n -ésimo momento de u_3 assume a seguinte forma:

$$\langle\langle u_3^n(t) \rangle\rangle = \langle\langle u_{3_0}^n \rangle\rangle e^{-na_3 t} + \langle\langle r_s^n(t) \rangle\rangle, \quad (18)$$

onde $n = 1, 2, \dots$, e $u_{3_0} = u_3(0)$.

Repetindo-se o mesmo procedimento para o n -ésimo momento estatísticos de r_s obtém-se:

$$\langle\langle r_s^n(t) \rangle\rangle = \frac{\Gamma_n}{n\mathbf{a}} (1 - e^{-na_3 t}). \quad (19)$$

Conforme postulado por Thomson (1987) a fdp da velocidade da partícula, $u_3(t)$, pode ser obtida a partir da fdp de velocidade do escoamento, $u_{3_f}(t)$, logo, vale a seguinte relação:

$$\langle\langle u_3^n(t) \rangle\rangle = \langle\langle u_{3_0}^n \rangle\rangle = \langle\langle u_{3_f}^n \rangle\rangle. \quad (20)$$

Analogamente, $r_s(t)$ da partícula, também pode ser obtido a partir das propriedades estatísticas do escoamento:

$$\langle\langle r_s^n(t) \rangle\rangle = \langle\langle u_{3_f}^n \rangle\rangle (1 - e^{-na_3 t}). \quad (21)$$

De (19) e (21) temos:

$$\langle\langle u_{3_f}^n \rangle\rangle = \frac{\Gamma_n}{n\mathbf{a}_3}. \quad (22)$$

Assim, os cumulantes da aceleração aleatória, Γ_n , e o incremento da velocidade aleatória, $r_s(t)$, são agora definidos em termos de um número infinito de cumulantes da velocidade do escoamento.

A interpretação do coeficiente \mathbf{a}_3 na aceleração determinística pode ser visto como uma função de autocorrelação da velocidade. Multiplicando a equação da velocidade (17) por u_{3_0} e passando a média no conjunto temos:

$$\overline{u_{3_0} u_3(t)} = \overline{u_{3_0}^2} e^{-a_3 t}. \quad (23)$$

Em resumo, o modelo da equação de Langevin linear-assimétrica assume que a aceleração determinística é uma função linear da velocidade, e que a aceleração aleatória é representa por uma fdp assimétrica na vertical. A equação resultante pode ser expressa como

$$u_3(t) = u_{3_0} e^{-t/t_i} + r_s(t), \quad (24)$$

onde $r_s(t)$ é assimétrica na vertical e pode ser gerada utilizando a distribuição bi-gaussiana (Baerentsen e Berkowicz, 1984; Luhar e Britter, 1989; Weil, 1989 e 1990) ou a distribuição de Gram-Charlier (Ferrero e Anfossi, 1998).

4.3. Equação de Langevin linear-gaussiana

Para o caso especial no qual a distribuição de velocidade do fluido, $P_f(u_i)$, é gaussiana e portanto, $\langle\langle u_{i_f}^n \rangle\rangle = 0$, para $n > 2$, a equação de Langevin (1) pode ser integrada analiticamente (vide seção 4.2) de modo a velocidade da partícula pode ser expressa como

$$u_i(t) = u_i(0) e^{-t/t_i} + r_g(t), \quad (25)$$

onde $r_g(t)$ é gaussiana em todas as direções com as seguintes propriedades estatísticas:

$$\overline{r_g(t)} = 0 \text{ e} \tag{26}$$

$$\overline{r_g^2(t)} = \overline{u_{ij}^2} (1 - e^{-2t/t_L}) . \tag{27}$$

A função estrutura la grangiana para pequenos incrementos de tempo, dt , é,

$$\overline{(du_i)^2} \approx \frac{2\overline{u_{ij}^2}}{t_L} dt . \tag{28}$$

onde $du_i = u_i(t+dt) - u_i(t)$.

De acordo com a segunda hipótese Kolmogorov,

$$C_0 \overline{\epsilon} = \frac{2\overline{u_{ij}^2}}{t_L} = \Gamma . \tag{29}$$

Esta equação mostra uma relação entre t_L , $\overline{u_{ij}^2}$, e $\overline{\epsilon}$, para turbulência gaussiana. Isto indica que a escala de tempo lagrangiana, associada com os movimentos de grande escala, também pode ser pensada como uma escala de tempo de dissipação para a energia cinética turbulenta associada com os movimentos mais energéticos (Nasstrom, 1998).

5. Uma aplicação de um modelo lagrangiano de partículas acoplado a um modelo de mesoescala

Para demonstrar a capacidade de simular dispersão de poluentes na CLP utilizou-se a equação de Langevin linear-gaussiana (Eq. 25) acoplada ao modelo 3-D de mesoescala “Topographic Vorticity Mesoscale model Non-Hydrostatic” (TVMnh) para descrever a trajetória de partículas em uma área de 10.000 km² distribuída sobre uma região de terreno complexo. Nesta área esta localizada as instalações nucleares do Centro Experimental de Aramar (CEA), situada no centro do domínio (23°23’36’S, 47°35’58’W), indicada nas Figuras (2) e (3).

O modelo TVMnh está baseado na solução numérica das componentes horizontais da vorticidade em coordenadas generalizadas (Thunis, 1995). A evolução espacial e temporal da CLP é estimada usando o fechamento de uma ordem e meia e a teoria da similaridade de Monin-Obukhov na superfície. A altura da CLP é estimada como a altura onde a energia cinética turbulenta por unidade de massa (e_T) atinge 10% do valor de superfície. As variâncias da componente da velocidade do vento são calculadas de $s_{u_i}^2 = 2e_T / 3$.

Os parâmetros de entrada do TVMnh correspondem aos de período de verão. O domínio na horizontal corresponde a uma área de 100×100 km em uma grade de 51 por 51 pontos, resultando em uma resolução de 2 km. Na vertical, o domínio é variável, distribuído logaritmicamente em 25 níveis, resultando em uma resolução vertical de 30 m na superfície e 1200 m no topo. As condições de fronteira e forçantes externas são simuladas considerando condições de céu claro e vento geostrófico com velocidade 1 m/s de direção NE. O passo de tempo utilizado é de no máximo 60 s. A topografia é obtida do “Global Topographic 30 arc seconds” (GTOPO30), que é um modelo de elevação topográfica digital com espaçamento da grade horizontal de arco de 30 s (~1 km) e a ocupação da superfície é obtida do “International Geosphere Biosphere Programme” (IGBP), ambos disponíveis no portal <http://edcdaac.usgs.gov/>. Desta maneira, o campo do vento é gerado levando em conta efeitos topográficos e a ocupação do solo de forma bastante realística.

O acoplamento do modelo de dispersão ao modelo de mesoescala foi feito de forma direta, utilizando transferência de variáveis entre as sub-rotinas, permitindo uma maior precisão no cálculo das trajetórias. Esta forma difere da metodologia de cálculo de trajetórias obtida em pós-processamento, a qual é feita após a solução do escoamento.

O modelo que descreve as trajetórias das partículas é baseado na equação de Langevin linear-gaussiana na forma proposta por Legg e Raupach (1982) para turbulência não homogênea na CLP, cuja forma discretizada é:

$$u_i(t + \Delta t) = au_i(t) + bs_{u_i}z + (1-a)t_L \frac{\partial}{\partial x_i} (s_{u_i}^2) d_{i3}, \tag{30}$$

onde u_i é a velocidade nas direções x_1, x_2 e x_3 no tempo t ; z é um número aleatório com média zero e variância unitária; t_L é a escala de tempo Lagrangiana e igual a 200 s para as direções x_1 e x_2 e 20 s para direção x_3 (Zannetti, 1990); Δt é o passo no tempo da equação de Langevin (máximo de 6 s); $a = \exp(-\Delta t / t_L)$; $b = (1 - a^2)^{1/2}$; e d_{i3} é o delta de Kronecker. A Eq. (30) é resolvida numericamente usando o método de diferenças finitas avançado no tempo.

Nas simulações apresentadas aqui, as partículas são emitidas de uma fonte pontual a 15 m de altura (550 m amsl) a partir da qual foram liberadas 20.000 partículas a uma taxa de emissão constante durante 24 horas (~14 partículas por minuto). Nesta simulação, o poluente foi considerado inerte, não sendo removido da atmosfera, nem depositado na superfície.

6. Resultados

A Figura 1 mostra a natureza aleatória do movimento da partícula liberada no centro do domínio geográfico da simulação. A fonte está localizada no ponto (50000,50000,15). Nota-se dois regimes de dispersão influenciando a trajetória mostrada. No primeiro regime, a ocorrência de grandes flutuações do movimento da partícula nas primeiras horas de integração esta relacionado às condições de convecção térmica da atmosfera. Neste período, a estrutura vertical da turbulência na CLP (1800 m) é dominada por vórtices com escala de comprimento da ordem da altura da camada de mistura. Com o resfriamento da superfície no final da tarde e início da noite, a turbulência torna-se menor (menos intensa) e o movimento aleatório da partícula fica confinado em uma extensão muito menor que a do período diurno.

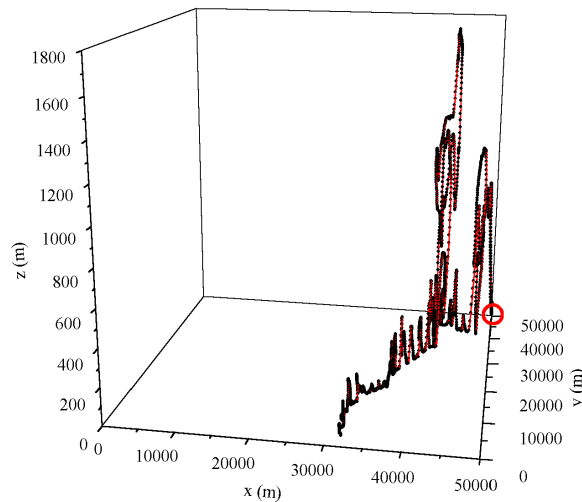


Figura 1: Trajetória da primeira partícula lançada pela fonte pontual localizada no centro do domínio de 100×100 km para o período de 24 horas de simulação. O círculo em vermelho representa a fonte pontual de 15 m de altura.

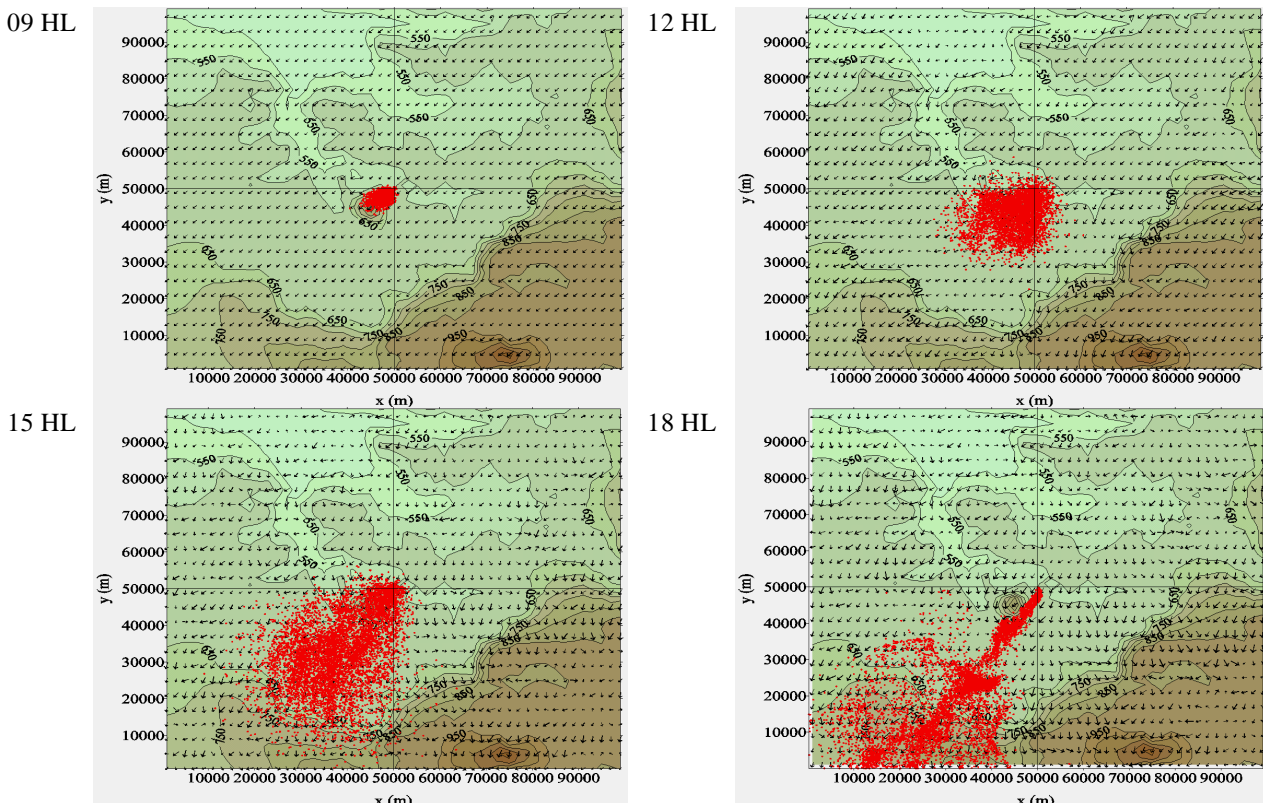


Figura 2: Vista superior da dispersão e do campo do vento a 15 de altura para o período convectivo. O período de simulação é de 12HL com início às 6HL. A fonte de emissão se localiza no centro do domínio no CEA.

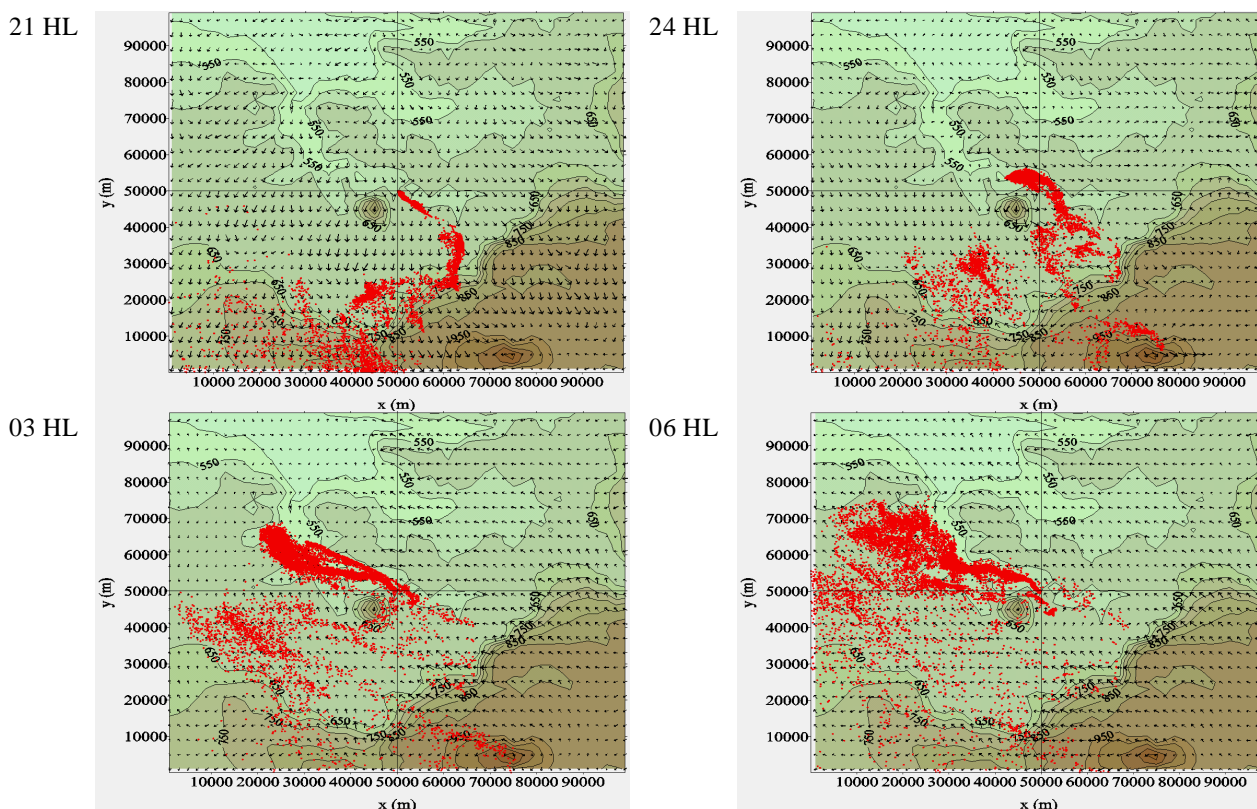


Figura 3: Vista superior da dispersão e do campo do vento a 15 de altura para o período estável. O período de simulação é de 12HL com início às 18HL. A fonte de emissão se localiza no cento do domínio no CEA.

As Figuras 2 e 3 mostram a posição das partículas e o campo do vento horizontal, de 3 em 3 horas, durante o período convectivo e estável, respectivamente. Durante o período convectivo, das 09 às 18HL, o escoamento muda de NE-SW para N-S, em razão do efeito térmico da topografia, que gera uma circulação anabática na direção da região mais elevada ao Sul do domínio (Fig. 2). Como resultado da atividade convectiva, observa-se neste período, uma mistura das partículas igualmente intensa nas direções horizontal e vertical. Após as 15HL, as partículas encontram a região de maior elevação, no quadrante Sul, onde ocorre uma intensificação da dispersão na horizontal em virtude do efeito da topografia mais acidentada. Às 18HL, observa-se a formação de uma pluma, orientada na direção SW, indicando que a CLP já se encontra em condições estáveis, enquanto o escoamento médio ainda reflete o acoplamento com a atmosfera livre, onde a direção é de NE.

Durante a noite, a dispersão é mais complexa por causa do efeito topográfico ser mais dominante quando a CLP, estável, apresenta uma pequena extensão vertical. Além disso, o ar acima da Camada Limite Noturna (CLN), passa a oscilar inercialmente, gerando mudanças na direção do vento bastante significativa. Por exemplo, às 21HL a pluma está orientada na direção NW-SE, indicando um vento de NW (Fig. 3). Às 06HL, a pluma orienta-se na direção ESE-WNW, indicando um vento de ESE (Fig. 3). Verifica-se neste período que a dispersão na vertical fica confinada a CLN (300 m). A partir das 24HL, as partículas contornam a montanha, próxima a fonte a SE, se dirigindo para as áreas mais baixas da região (circulação catabática). Apesar desta montanha ter uma extensão vertical de 400 m, ela consegue bloquear o escoamento horizontal, aumentando a dispersão horizontal do poluente.

7. Conclusão

Os resultados da simulação mostram que os MLP são eficientes na descrição da dispersão de poluentes em áreas de topografia complexa, sob condições de turbulência não isotrópica, não homogênea e não estacionária. Estas condições são comumente observadas na atmosfera em regiões tropicais e subtropicais do Brasil (Oliveira e Soares, 2001; Oliveira et al., 1998). Portanto, na maior parte das aplicações, a trajetória das partículas é complexa e não acessível a outros modelos operacionais mais usuais (baseado na solução do tipo pluma gaussiana).

Apesar da habilidade em reproduzir os padrões diurnos e noturnos de dispersão em uma área de topografia complexa, o modelo de dispersão lagrangiano utilizado neste trabalho deverá ser aprimorado, de modo a incluir uma descrição mais adequada da turbulência na CLP, através do acoplamento do MLP e do TVMnh com um modelo de fechamento de segunda ordem (Oliveira e Soares, 2000). Para aplicarmos este modelo à dispersão de radionuclídeos, torna-se necessário também incluir a força de empuxo para gases pesados e os mecanismos de deposição na superfície.

Deve ser enfatizado que os modelos numéricos de mesoescala acoplados a MLP são os mais adequados para avaliar a dispersão de poluentes atmosféricos em escalas de espaço 2 a 1000 km (Karam et al., 2001; Pereira et al., 2000 e 2001). Para escalas menores do que 2 km, a forma mais adequada de simular o escoamento turbulento na CLP

atmosférica é através de modelos do tipo LES (Large Eddy Simulation). Neste tipo de modelo, a turbulência de grande-escala é resolvida diretamente (Deardorff, 1972; Moeng, 1984). Portanto, a utilização de MLP acoplados a modelos LES representa um considerável avanço (Nieuwstadt e Meeder, 1997; Lamb, 1984; Marques Filho et al., 2001), que num futuro próximo, permitirá a geração de escoamento turbulentos com resolução suficiente para descrever a dispersão de poluentes em ambientes fechados e industriais.

8. Agradecimentos

Este trabalho recebeu apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) conforme Processos N^o. 99/02406-5 e 97/02843-0 e do CNPq, Processos n^o. 300561/91-1 e 140702/2000-8.

9. Bibliografia

- Baerentsen, J.H. e Berkowicz, R., 1984, "Monte Carlo Simulation of Plume Dispersion in the Convective Boundary Layer", *Atmos. Env.* Vol. 18, pp. 701-712.
- De Baas, Van Dop e Nieuwstadt, 1986, "An Application of the Langevin Equation for Inhomogeneous Conditions to Dispersion in a Convective Boundary Layer", *Quart. J. R. Met. Soc.*, Vol. 112, pp. 165-180.
- Deardorff, J. W., 1972, "Numerical Investigation of Neutral and Unstable Planetary Boundary Layers", *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 29, pp. 91-115.
- Durbin, P.A., 1983, "Stochastic Differential Equations and Turbulent Dispersion", NASA Reference Publication 1103. (Available from NTIS as N8322546). 69 p.
- Einstein, A., 1905, "Über die von der Molekularkinetischen Theorie der Wärme Geforderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten Suspendierten Teilchen", *Annalen der Physik*, Vol. 17, pp. 549-560.
- Einstein, A., 1906, "Zur Theorie der Brownschen Bewegung", *Annalen der Physik*, Vol. 19, pp. 371-381.
- Ferrero, E. e Anfossi, D., 1998, "Comparison of PDFs, Clousures Schemes and Turbulence Parameterizations in Lagrangian Stochastic Models", *Internat. J. Environ and Pollut.*, Vol. 9, pp. 384-410.
- Gardiner, C. W., 1990, "Handbook of Stochastic Method for Physics, Chemistry and Natural Sciences", 2. ed., Ed. Springer-Verlag, 442 p.
- Karam, H. A., Oliveira, A. P. e Pereira, M. M. R., 2001, "Application of a Lagrangian Model to Investigate Patterns of Radionuclides Dispersion Over Complex Terrain –Part 1: The Impact of Low-Level Jet in the Trajectories", 7th Int. Conf. On Harmonization within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes. Italia. pp.395-399.
- Lamb, R. G., 1984, "Diffusion in the Convective Boundary Layer", Nieuwstadt, F. T. M., van Dop, H. Ed. *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling*, Reidel:Dordrecht, pp.159-229.
- Langevin, P., 1908, "Sur la Théorie du Mouvement Brownien", *Comptes Rendus*, Vol. 146, pp. 530-533.
- Legg, B. J. and Raupach, M. R., 1982, "Markov-Chain Simulation of Particle Dispersion in Inhomogeneous Flows: The Mean Drift Velocity induced by a Gradient in Eulerian Velocity Variance", *Boundary Layer Meteorology*, Vol. 24, pp. 3-13.
- Luhar, A. K. e Britter, R. E., 1989, "A Random Walk Model for Dispersion in Inhomogeneous Turbulence in a Convective Boundary Layer", *Atmos. Environ.* Vol. 23, pp. 1911-1924.
- Marques Filho, E. P., Oliveira, A. P., Karam, H. A. e Rizza, U., 2001, "Dispersão de Poluentes na Camada Limite Planetária: Simulação Numérica de Grande Escala", Submetido à Revista Brasileira de Oceanografia.
- Moeng, C. H., 1984, "A large-Eddy Simulation Model for the Study of Planetary Boundary-Layer Turbulence", *Journal Atmospheric Sciences*, Vol. 41, pp. 2052-2062.
- Monin, A.S. e Yaglom, A.M, 1975, "Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Vol. 2", (Ed. J.L. Lumley), The MIT Press, Cambridge, 874 p.
- Nasstrom, J. S., 1998, "A Langevin Model Dispersion in the Convective Boundary Layer", PhD Dissertation, University of California, 182 p.
- Nieuwstadt, F. T. M. e Meeder, J. P., 1997, "LES of Air Pollution Dispersion", Métais, O e Ferziger, J. Ed. *New Tools in Turbulence Modeling*. Les Éditions de Physique: Les Ulis, pp. 265-279.
- Obukhov, A.M., 1959, "Description of Turbulence in Terms of Lagrangian Variables", *Atmospheric Diffusion and Air Pollution* (Ed. F.N. Frenkiel e P.A. Sheppard.), Proceedings of symposium held at Oxford, August 24-29, 1958, pp. 113-116, Academic Press, New York
- Oliveira, A. P. and Soares, J., 2001, "Observational investigation of PBL parameters required to air pollution dispersion modeling over complex terrain in a subtropical region: Iperó Experiment". (Submetido ao "Annalles Geophysicae").
- Oliveira, A. P., J. Soares, T. Tirabassi and U. Rizza, 1998, "A surface energy-budget model coupled with a Skewed Puff Model for Investigating the Dispersion of radionuclides in a Subtropical area of Brazil", *Il Nuovo Cimento*, 21C, pp. 631-647.
- Oliveira, A. P. e Soares, J., 2000, "Nocturnal Planetary Boundary Layer: Numerical Simulations and Observations", XI Congresso Brasileiro de Meteorologia, Rio de Janeiro de 16 a 20 de outubro de 2000. pp. 2486-2495.
- Pereira, M. M. R. Oliveira, A. P. e Karam, H. A., 2000, "Estudo Numérico da Dispersão de Poluentes sobre uma Região de Topografia Complexa", XI Congresso Brasileiro de Meteorologia, Brasil. pp. 2270-2277.

- Pereira, M. M. R., Oliveira, A. P. e Karam, H. A., 2001, "Application of a Lagrangian Model to Investigate Patterns of Radionuclides Dispersion Over Complex Terrain – Part 2: The Impact of Low-Level Jet in the Concentration Field", 7th Int. Conf. On Harmonization within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes, Italia, pp. 400-404.
- Pope, S.B., 1987, "Consistency Conditions for Random-Walk Models of Turbulent Dispersion", Phys. Fluids, Vol. 30, pp. 2374-2379.
- Pope, S.B., 1994, "Lagrangian PDF Methods for Turbulent Flows", Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 26, pp. 23-63.
- Rodean, H. C., 1994, "Notes on the Langevin Model for Turbulent Diffusion of 'Marked' Particles", National Technical Information Service (NTIS), 122 p.
- Rodean, H.C., 1996, "Stochastic Lagrangian Models of Turbulent Diffusion", Meteorological Monograph No. 48, Am. Meteor. Soc., Boston, MA.
- Sawford, B. L. e Guest, F. M., 1987, "Lagrangian Stochastic Analysis of Flux-Gradient Relationships in the Convective Boundary-Layer", J. Atmos. Sci. Vol. 44, pp. 1152-1165.
- Sawford, B.L., 1985, "Lagrangian statistical simulation of concentration mean and fluctuation fields", Climate and Appl. Meteo., Vol. 24, pp. 1152-1166.
- Sawford, B.L., 1986, "Generalized Random Forcing in Random-Walk Turbulent Dispersion Models", Phys. Fluids Vol. 29, pp. 3582-3585.
- Sawford, B.L., 1993, "Recent Developments in the Lagrangian Stochastic Theory of Turbulent Dispersion", Boundary-Layer Meteorol., Vol. 62, pp. 197-215.
- Smoluchowski, M, 1906, "Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen", Annalen der Physik, Vol. 19, pp. 756-780.
- Taylor, G.I., 1921, "Diffusion by Continuous Movements", Proc. Lond. Math. Soc. Ser., Vol. 2 20, pp. 196-211.
- Thomson, D. J., 1984, "Random Walk Modeling of Diffusion in Inhomogeneous Turbulence", Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 110, pp. 1107-1120.
- Thomson, D. J., 1987, "Criteria for the Selection of Stochastic Models of Particle Trajectories in Turbulent Flows", J. Fluid Mech., Vol. 180, pp. 529-556.
- Thunis, P., 1995, "Formulation and Evaluation of a non-Hydrostatic Vorticity Mode Mesoscale Model", Ph.D. dissertation, Université Louvain-la-Neuve, Catholique de Louvain, Belgium, 116 p.
- Van Dop, Nieuwstadt e Hunt, 1985, "Random Walk Models for Particle Displacements in Inhomogeneous Unsteady Turbulent Flows", Phys. Fluids, Vol. 28, pp. 1639-1653.
- Van Kampen, 1992, "Stochastic Process in Physics and Chemistry", North-Holland, 466 p.
- Weil, J. C., 1989, "Stochastic Modeling of Dispersion in the Convective Boundary Layer. EUA: Air Pollution Modeling and Its Application VII", Ed. van Dop, Ienun, New York, pp. 437-449.
- Weil, J. C., 1990, "A Diagnosis of the Asymmetry in Top-Down and Bottom-Up Diffusion using a Lagrangian Stochastic Model", J. Atmos. Sci., Vol. 47, pp. 501-515.
- Wilson, J.D. e Sawford, B.L., 1996, "Review of Lagrangian Stochastic Models for Trajectories in the Turbulent Atmosphere", Bound.-Layer Meteorol., Vol. 78, pp. 191-210.
- Zannetti, P., 1990, "Air Pollution Modeling – Theories, Computational Methods and Available Software", Ed. Van Nostrand Reinhold, 444 p.

Lagrangian Particles Models Applied to Atmospheric Dispersion of Pollutants

Maxsuel M. R. Pereira ⁽¹⁾

e-mail: maxsuel@model.iag.usp.br

Amauri P. Oliveira ⁽¹⁾

e-mail: apdolive@usp.br

Hugo A. Karam ⁽¹⁾

e-mail: hakaram@model.iag.usp.br

Edson P. M. Filho ⁽¹⁾

e-mail: emarques@model.iag.usp.br

⁽¹⁾ *Group of Micrometeorology – Department of Atmospheric Science - IAG – USP
Rua do Matão, 1226, Cidade Universitária, São Paulo, SP, 05508-900*

Abstract. *The Lagrangian Particles Models becomes an important tool for the description of atmospheric dispersion of pollutant in the Planetary Boundary Layer. In this work, it is carried out a review of the main theoretical features of this modeling technique which concerning the Langevin and Fokker-Planck equations. It was derived solutions for Langevin equation considering the deterministic and random accelerations as: (a) non-linear and asymmetric; (b) linear and asymmetric; (c) linear and gaussian, respectively. It is shown also an application of a Lagrangian Particle Model coupled to a mesoscale meteorological model for an inert and passive pollutant, released continuously by a point source at the surface, over an area of complex topography and land use area.*

Keywords. *Equation of Langevin; Equation of Fokker-Planck; Lagrangian particle model; Pollution dispersion.*

Alloy Solidification in Square Section

Carlos Hernán Salinas Lira

Departamento de Ingeniería Mecánica – Universidad del Bío-Bío
Av. Collao N° 1202, Casilla 5-C, Concepción-Chile, CP: 4081112
Fax: (56) (41) 321503
Email: casali@ubiobio.cl

Claudio Correa Rogel and Juan C. Figueroa Barra

Departamento de Ingeniería Mecánica – Universidad del Bío-Bío
Av. Collao N° 1202, Casilla 5-C, Concepción-Chile, CP: 4081112

Abstract. The objective of the present work is to develop a numerical model to analyze melting solidification process considering the forced and natural convection phenomena to a pure and alloy metal in a square section. Physical medium is taken as incompressible Newtonian fluid with isotropy thermal properties where the heat is transferred by conduction and convection, included de thermal phase change phenomenon. The last one is modeled by the improvement procedure, called Enthalpy Model, based on the fraction solid function which liberates the latent heat according to fraction of solid particles generated using as parameter the temperature level. The mathematical model is based on a non-linear second order differential partial equation system: Momentum, continuity, heat transfer equations and a set of auxiliary expressions with the purpose of equation system closure or applied the boundary and interface condition. The numerical model is based on Volume Finite Method in body fitted coordinates with a SIMPLER scheme to join pressure and velocities. The strategy study allows the two-dimensional solidification of alloy (Non-Isothermal Solidification) and pure aluminum (Isothermal solidification) in square section and a case where the mould is considered. Unsteady steady results are showed in the way: Streamlines and isotherms compared with available data

Keys words: *Phase Change, Natural Convection, Alloy Aluminum, Enthalpy Model, Finite Volume Method.*

1. Introduction

This paper presents a study about solidification of pure and alloy aluminum that is known in the literature as solid-liquid phase-change problem. Considerable research has been focused in this problem because of their scientific and practical significance in material processing: Purification of metal, continuum casting, high temperature superconducting crystals, etc. (See Rohatgi, 1988 and Murphy et al., 1988). The physical aspect of solidification process are reviewed by Bekerman and Viskanta (1993) with a discussion of the principal topic in numerical simulation at macroscopic scale, explicit modeled for average volume method are given.

The classical analytical analysis for the solidification problem is so called Stephan Problem, which accept solution for few limited cases that are reviewed by Alexiades and Solomon (1993). The most general problem the numerical analysis has been used. The simplest problem is to study heat transfer by conduction without convection effects (Lazaridis, 1970, Hsiao 1985). Today with improvement of computational fluid dynamics has been possible to analyze the convection effects through direct numerical simulation using several finite methods Kurz and Fisher, 1998). One of the first investigations in this line was presented by Sparrow et al. (1977).

The historical of finite methods have two basic direction: The fixed grid methods is easier which are used principally by researchers who work with Finite Difference and Finite Volume (Wolff and Viskanta, 1988) techniques. The second direction is multi domain method naturally preferred by investigation that used Finite Elements Analysis (McDaniel and Zabarar, 1994). Adaptive grid techniques and explicitly determination of interface is required in last case. Furthermore, the most recent research using mixed numerical model like Average Volume Method Bekerman and Viskanta, 1993) or by explicit determination of interface using a fixed grid as presented by Chun and Park (2000). Relative merit of fixed grid and multi domain method has been discussed in the literature Salcudean, 1988, Lacroix and Voller, 1990).

Of course, the simple domain solution in a fixed grid for any kind of numerical method is most easy to work and save computer time. The problem with explicit determination of front tracking are convection effects of grid moving and high curvature of interface position which can produced instability in the numerical solution and introduced unnecessary errors. However the problem is not how to discrete the mathematical model, but how to simulate the latent heat liberation, that happened at micro scales, to produce desirable macroscopic physical effects. This specially import in mushy zone for non-isothermal solidification and capturing front tracking for isothermal solidification. For this instance the Enthalpy Method like presented by Swaminathan and Voller (1993) gives same tools to work in simple and consistent way for macroscopic formulation.

In this work the improvement enthalpy method is used for modeling the interchange of latent heat where the sensible heat is increased by latent heat liberated according to a liquid-solid phase-change fraction as function of temperature. The domain is discrete in a fixed grid without explicit formulation for interface. The mushy zone is modeled by partial latent heat liberation and modification the viscosity according to an inverse relation of solid-fraction in the solid-liquid temperature range. Solid boundaries are fixed to finite volumes, which has temperature under solid temperature.

Two dimension non-linear heat transfer, momentum and continuity equations form a second order non-linear partial differential system equation which is solved by numerical procedure using finite volume method with algorithms development by authors in Salinas (1996) and Moraga and Salinas (1999). For instance, three problems are solved: a) Non-isothermal solidification of alloy aluminum in square section, b) Isothermal solidification of alloy aluminum in square section and c) Non-isothermal solidification of alloy aluminum included the mould. Results are showed of unsteady isothermal and streamline previous grid size consistency analysis.

2. The Physical Problems

The physical liquid-solid phase-change problem for alloy or pure aluminum in square section studied are showed in the Fig.(1) with properties summarized in table 1. The Fig.(1a) shows a schematic view of alloy or pure aluminum solidification in square section considering as boundary condition three adiabatic wall and fourth left vertical wall depending on of the kind of problems. For alloy aluminum (Non-isothermal phase-change) the initial condition are the rest flow and temperature equal to 700 [°C] considering at left vertical wall an imposed cold temperature equal to 500 °C. For pure aluminum (Isothermal phase-change), the initial condition are the rest flow too and temperature equal to 860 [°C], now boundary condition at fourth left vertical wall is a convection heat transfer coefficient equal to 757 [W/m²°C] at environment temperature equal to 25 [°C].

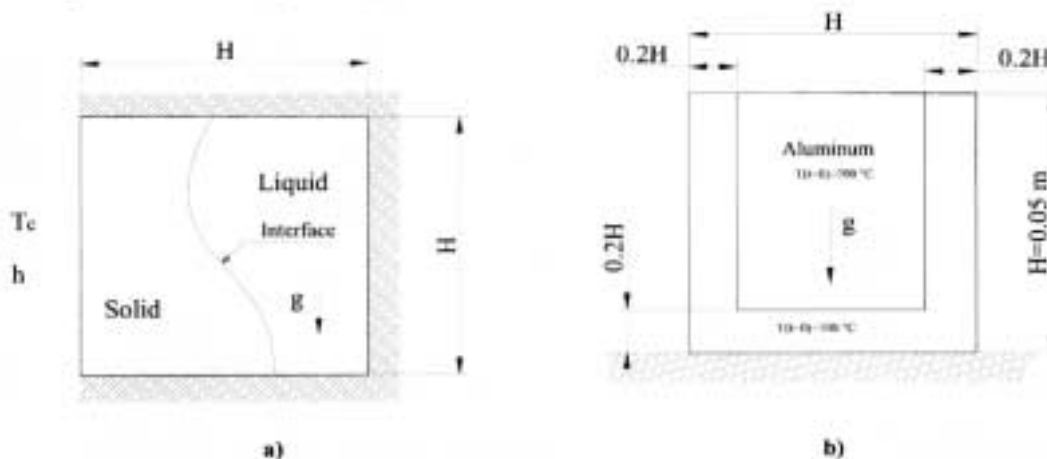


Figure 1. Scheme of liquid-solid phase-change problems: a) Alloy or pure aluminum in square section, b) alloy aluminum in mould

Figure 1b. shows a schematic view liquid-solid phase-change problem of alloy aluminum in mould. Heat conduction is account by heat conduction coefficient equal to 1 [W/m°C] which is two orders minor than heat conduction of alloy aluminum equal to 100 [W/m°C]. The initial conditions are the rest flow with temperature equal to 100 [°C] and 700 [°C] for mould and alloy aluminum respectively. The boundary conditions are imposed at external wall according to global convection heat transfer coefficient equal to 100 [W/m²°C] at environment temperature equal to 25 [°C].

Table 1. Physical properties of materials

Thermal Properties	Alloy Aluminum	Pure Aluminum	Mould
Density	2500 [kg/m ³]	2650 [kg/m ³]	1000 [kg/m ³]
Conductivity	100 [W/m °C]	229.28 [W/m °C]	1.0 [W/m °C]
Specific heat	1000 [W/Kg °C]	1056.88 [W/Kg °C]	1000 [W/Kg °C]
Phase-change enthalpy	4.0*10 ⁵ [J/kg °C]	3.975*10 ⁵ [J/kg °C]	
Solid temperature	550 [°C]	-	
Liquid Temperature	650 [°C]	-	
Phase-change temperature	-	660 [°C]	
Dynamic viscosity	2.5*10 ⁻³ [kg/m s]	3.233*10 ⁻³ [kg/m s]	
Thermal expansion coefficients	4.0*10 ⁻⁵ [1/°C]	3.84*10 ⁻⁵ [1/°C]	

3. The Mathematical Model

The mathematical model for two dimension liquid-solid phase-change problem, included the natural convection, in a simple domain solution considering alloys or pure aluminum material is based on the Continuity, Linear Momentum and energy equations is presented by Eqs(1-4).. It is supposed incompressible Newtonian fluid with properties constants (See table 1) except the density evaluated as linear function of temperature by Boussinesq approximation. The enthalpy method (Swaminathan and Voller, 1993) is used to model the phase-change latent heat liberation by using a liquid-solid fraction function (Raw and Lee, 1991). For the isothermal solidification case the latent heat liberation is performed in small range of temperature (two order minor than range of temperature process). This way the liberation of latent heat can be performed like non-isothermal solidification process.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + g\beta(T - T_{ref}) \quad (3)$$

$$\rho \left(c_p + L \frac{\partial f_{pc}}{\partial T} \right) \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \kappa \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

Where: u , v , p and T are the dependent variables for the velocity components, pressure and temperatures respectively, and μ , ρ , κ , L , f_{pc} and c_p are the material properties of dynamic viscosity, density, thermal conductivity, phase-change enthalpy, liquid-solid fraction function and specific heat, respectively.

In the mould, the conduction is predicted by means of the linear heat diffusion equation, where the density ρ_m and the thermal conductivity κ_m are considered constant.

$$\rho_m c_{p_m} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_m \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5)$$

3.1. Initial and Boundary Conditions

The initial and boundary condition are given below according to three physical problem studied: Solidification of alloy Aluminum (Non-isothermal Solidification in Square Section), pure aluminum (Isothermal Solidification in Square Section) and alloy aluminum with mould (Non-isothermal Solidification in Mould). For all of them a linear liquid-solid fraction function is used with increased of viscosity in mushy zone according to inverse function of liquid-solid fraction value.

3.1.1. Non-isothermal Solidification in Square Section

$$\text{Initial Condition} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ T = 700 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$\text{Boundary Condition} \begin{cases} u = 0; v = 0 \text{ to } \begin{cases} x = 0.0, x = 0.05 \text{ m}; 0.0 \leq y \leq 0.05 \text{ m} \\ y = 0.0, y = 0.05 \text{ m}; 0.0 \leq x \leq 0.05 \text{ m} \end{cases} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0,0.05 \text{ m}} = 0 \text{ to } 0.0 \leq x \leq 0.05 \text{ m} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0.05 \text{ m}} = 0 \text{ to } 0.0 \leq y \leq 0.05 \text{ m} \\ T = 500 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ to } 0.0 \leq y \leq 0.05 \text{ m} \end{cases}$$

3.1.2. Isothermal Solidification in Square Section

$$\text{Initial Condition} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ T = 860 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$\text{Boundary Condition} \begin{cases} u = 0; v = 0 \text{ to } \begin{cases} x = 0.0, x = 1.0 \text{ m}; 0.0 \leq y \leq 1.0 \text{ m} \\ y = 0.0, y = 1.0 \text{ m}; 0.0 \leq x \leq 1.0 \text{ m} \end{cases} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0,1.0 \text{ m}} = 0 \text{ to } 0.0 \leq x \leq 1.0 \text{ m} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x=1.0 \text{ m}} = 0 \text{ to } 0.0 \leq y \leq 1.0 \text{ m} \\ k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h[T - T_{\text{env}}] \text{ to } 0.0 \leq y \leq 1.0 \text{ m} \end{cases}$$

3.1.3. Non-isothermal Solidification in Mould

$$\text{Initial Condition} \begin{cases} u = 0; v = 0 \\ T = 700 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ to Melt} \\ T = 100 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ to Mould} \end{cases}$$

$$\text{Boundary Condition} \begin{cases} u = 0; v = 0 \text{ to } \begin{cases} x = 0.01 \text{ m}, x = 0.04 \text{ m}; 0.01 \leq y \leq 0.05 \text{ m} \\ y = 0.01 \text{ m}; 0.01 \leq x \leq 0.04 \text{ m} \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; v = 0 \text{ to } y = 0.05 \text{ m}; 0.01 \leq x \leq 0.04 \text{ m} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ to } 0.0 \leq x \leq 0.05 \text{ m} \\ k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0,0.05 \text{ m}} = -h[T - T_{\text{env}}] \text{ to } 0.0 \leq y \leq 0.05 \text{ m} \\ k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=0.05 \text{ m}} = -h[T - T_{\text{env}}] \text{ to } 0.0 \leq x \leq 0.05 \text{ m} \end{cases}$$

When the conductivity is space variable then is necessary an improvement procedure to model correctly the heat transfer conduction (Solidification in mould) which is performed by introduction next effective conductivity obtain of conductivity boundary condition in interfaces (See Moraga and Salinas, 1999):

$$T_w = \frac{\Delta n_p k_s T_s + \Delta n_s k_p T_p}{\Delta n_p k_s + \Delta n_s k_p} \tag{6}$$

$$k_e = \frac{\Delta n_p k_s k_p}{\Delta n_p k_s + \Delta n_s k_p} \tag{7}$$

When k_e is used in Eq.(5), then the heat flow will be evaluated in a conservative form in each face of the finite volumes including the ones located in the interface between the aluminum and mould.

The Eqs.(1-5) form a system of five partial differential equations that model fluid mechanics and heat transfer of liquid-solid phase-change process under initial and boundary condition described above. This mathematical model is solved in a numerical form as explained in the next section.

4. Numerical Model

The computational fluid dynamics algorithm was developed by one of authors in Salinas (1996) and modified to include the calculation of heat transfer in Moraga and Salinas (1999). In this section the main aspect of the algorithms, particular values of parameters are given.

The algorithm is developed in body fitted coordinates system generated by a Poisson equation with the stretching function described in Thompson (1985) and implemented in Salinas (1996). After transforming the system of equations

the Finite Volumes Method (FVM) is applied to obtain the discrete system of equations. To couple the continuity and Navier-Stokes equations the SIMPLER algorithm (Patankar, 1980) is used. A staggered grid is used to represent the variables considering T , p and physical properties in the center of each control volume while the velocity components and heat fluxes are calculated in the faces of the finite volumes. The terms of diffusion (second order derivatives) and Laplacian operator are calculated through a central difference scheme, the convection terms (first order derivatives) are evaluated through the power law interpolation (Patankar, 1980), and the transient terms are calculated in an implicit way by using a backwards difference procedure. The non-linear system equation is linearized by using values of the properties obtained in the previous iteration and Crank-Nicolson procedure for the convection terms (Lapidus, 1982). Afterwards the linear systems of equations are solved by the iterative Gauss-Seidel method with successive relaxation. Relaxation factors equal to 0.65, 0.55 and 0.55 for p , T , u and v , respectively are used. Generally not more than three SIMPLER cycles and around 10^3 iterations for each linear system are adequate in order to obtain convergence with maximum local deviation for u , v , p and T equal to $7.0E-3$ %.

5. Validations of Fluid Mechanics and Heat transfer Calculations

The transient evolution of natural convection of air in a square cavity (Satya Sai and Seetharamu, 1994) was used to validate the fluid mechanics and heat transfer. The results for Rayleigh numbers equal to 10^4 , 10^5 and 10^6 are presented in Moraga and Salinas (2000).

A consistence analysis is performed to study convergence. For this instance non-isothermal solidification problem is used showing results in the Figs(2-4). In the Fig.(2) and Fig.(3) can see a good convergence in relation to grid size 40×40 in relation to coarse grid 20×20 and fine grid 60×60 when is analyzed local center vertical velocity and centerline temperature at indicated time. In transient temperature at center point, showed by Fig(4) for several grid size, is observed a convergence to grid size 40×40 too which is very close to temperature curve obtained with grid size equal 60×60 . This convergence study can be concluded that a grid size 60×60 is good grid to used.

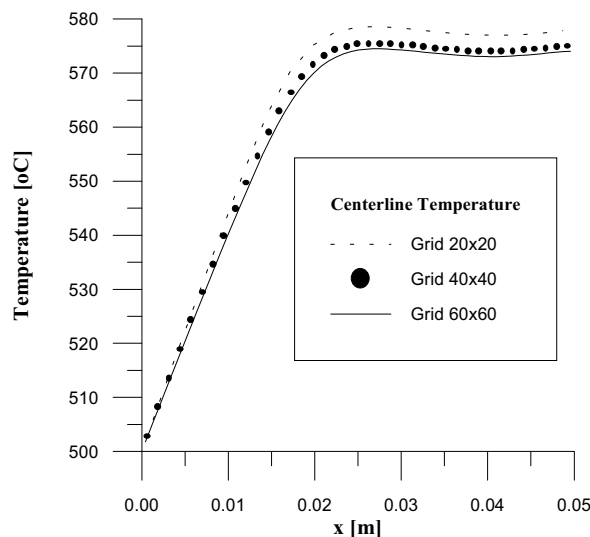


Figure 2. Centerline temperature v/s grid size at $t=50$ s.

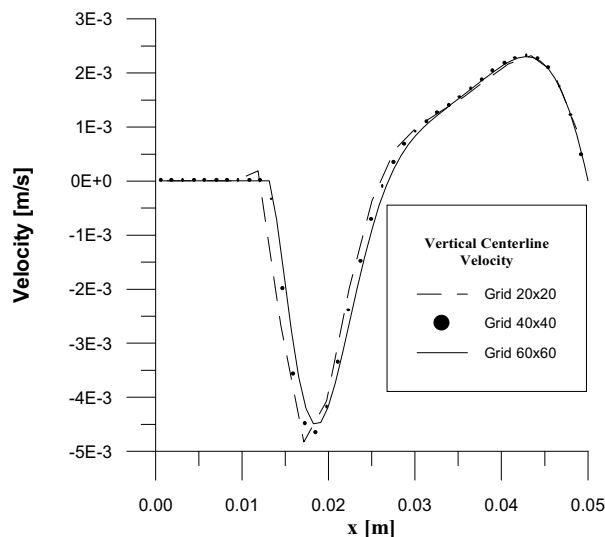


Figure 3. Vertical centerline velocity v/s grid size at $t=50$ s.

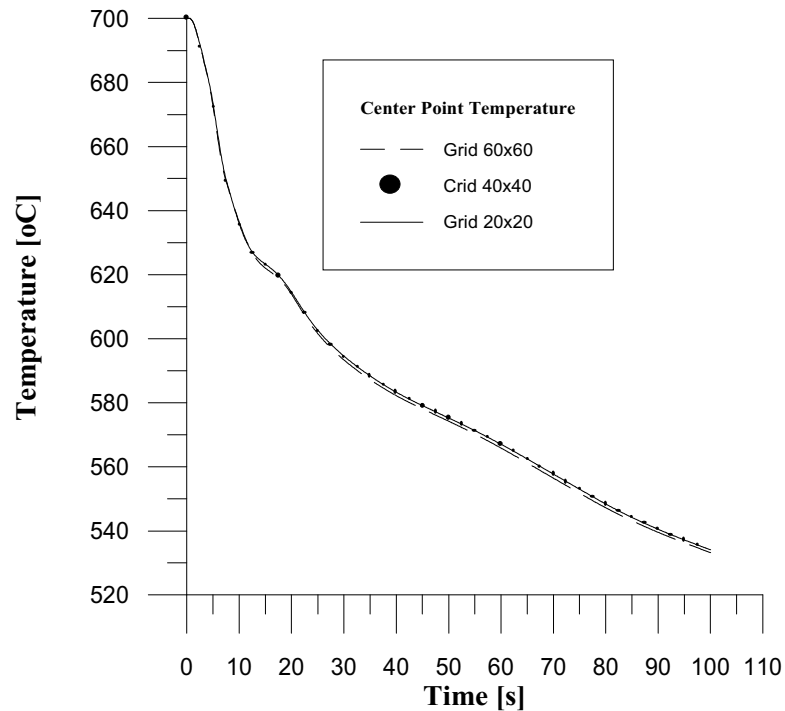


Figure 4. Center time temperature v/s grid sizes.

6. Results and Discussion

After the consistency analysis was performed the prediction for natural convection and heat transfer for three liquid-solid phase-change problems was accomplished. For all problem a uniform grid size 60x60 with constant time step are used

Unsteady results of Non-isothermal solidification in square section obtained by the present model are presented in Fig.(5). It shows streamlines and isotherms for $Gr=1.0e7$, $Pr=0.025$, $St=0.5$ at $t=10, 40$ and 80 s. Can be observed that fluid flow have a complex and strongly unsteady development with secondary vortex in upper region and right under corner for initial times (showing at $t=10$ s). After that only one vortex is formed as showed in the figure at $t=40$ s and $t=80$ s. This results are very similar to the one presented by Cruchaga and Celentano (1997), Nevertheless in this work is not predicted the secondary vortex.

Results of isothermal solidification in square section obtained by the present model are presented in the Fig(6). In this Figure can be observed the streamline and isothermal for $Ra=1.0e5$, $Pr=0.0149$, $St=0.53$ at $t=610, 4275.25$ and 7329 s using time step equal 1 s. This pitcher shows the transient fluid flow and heat transfer performed having a large vortex at initial time (showing to time at $t=610$ s). After that, upper secondary vortex is noticed (See streamline at $t=4275.25$ s) which growing to generate a two vortex system like observed in figure at $t=7329.0$ s. This results are comparable those presented in McDaniel and Zabarás (1994). Observe same irregular performed for isothermal $T=660$ (solid temperature) for time about $t=4275.25$ s. This aspect is object of study, we believe that it happen because artificial mushy zone introduced in the model according to liberated the latent heat.

Numerical results of non-isothermal solidification in mould obtain by the present model are presented inFig(7). In this Figure can be observed the streamline and isothermal for $Gr=1.12e6$, $Pr=0.025$ at $t=10, 40$ and 100 s using time step equal 0.01 s. The figure shows the transient fluid flow and heat transfer performed having symmetrical configuration with one vortex wich has movement to upper caused by minor heat transfer in the mould than alloy aluminum material and buoyant force. The center of mushy zone (smallest temperature) has dawn movement to center melt. The numerical results in general do not have any singular performer.

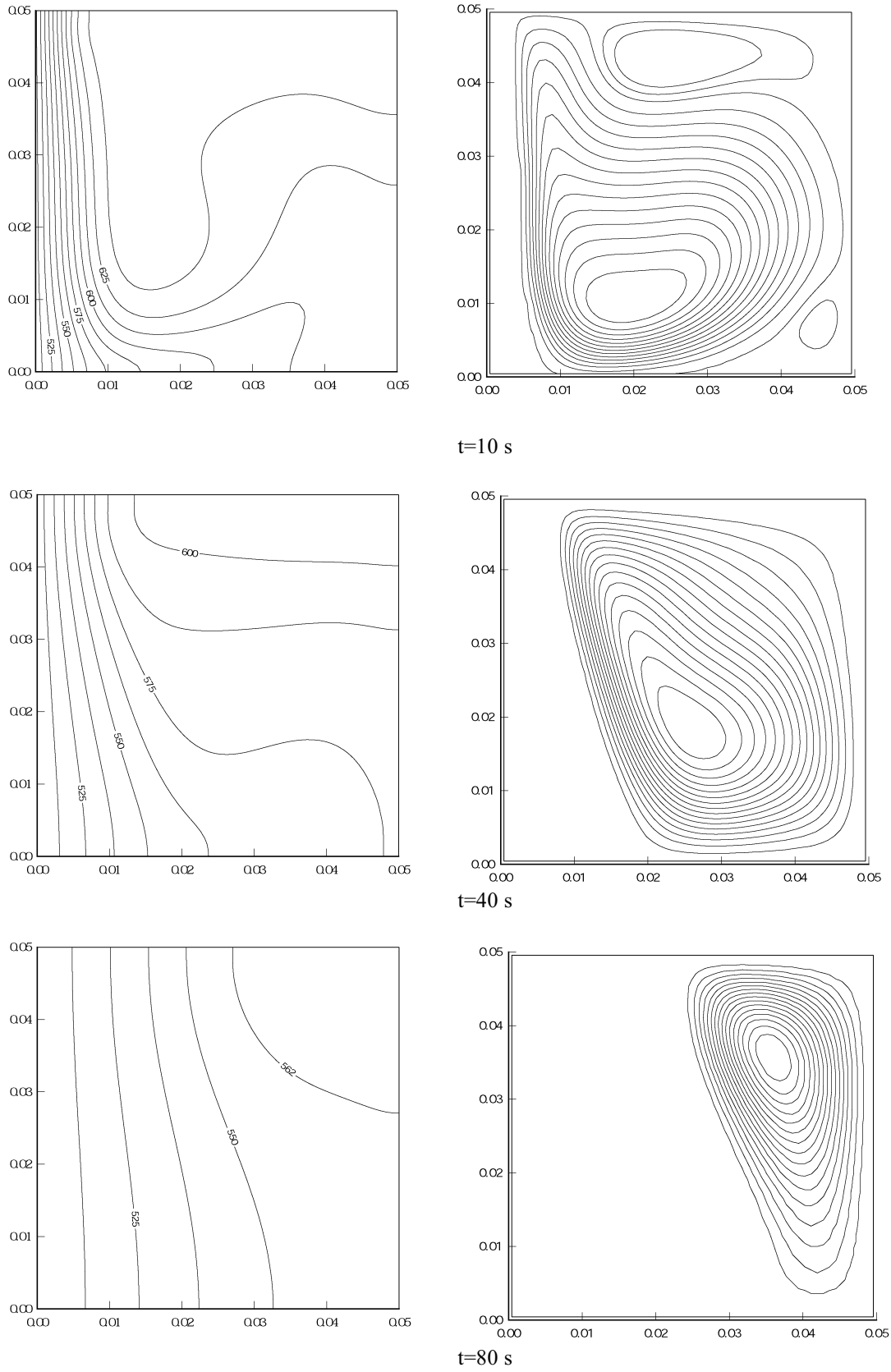
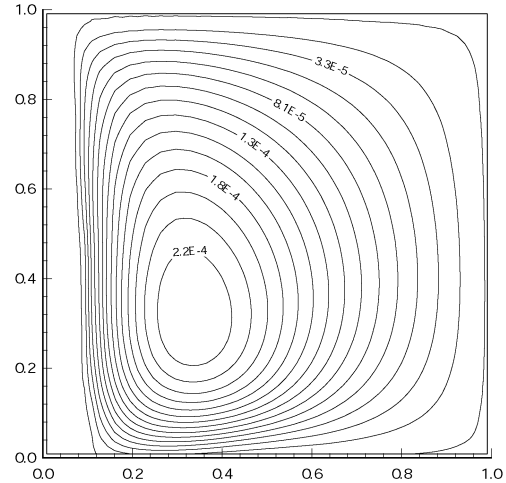
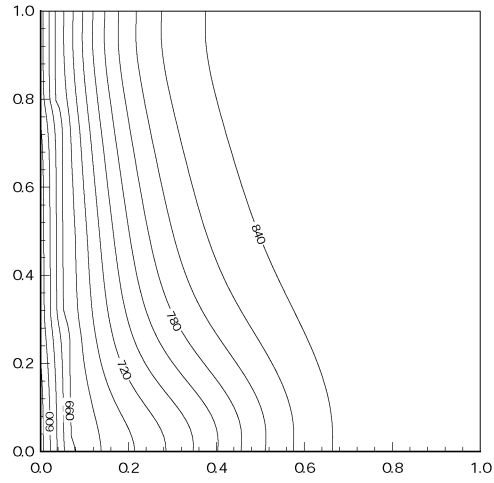
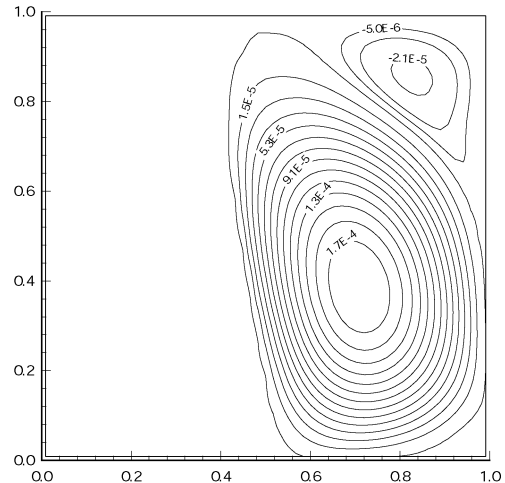
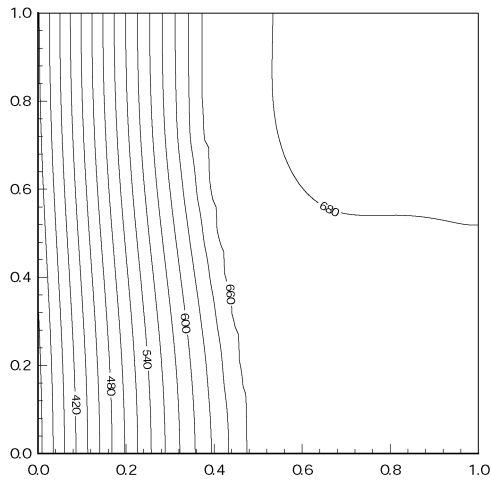


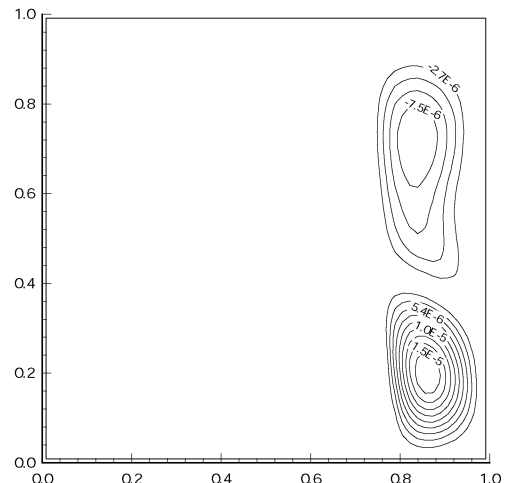
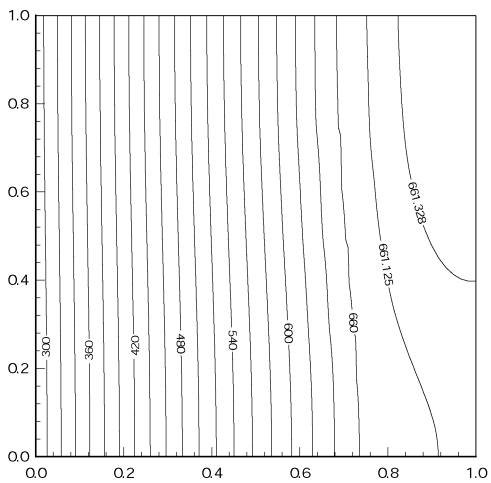
Figure 5. Isotherms and streamline for alloy aluminum solidification ($Gr=1.0e7$, $t=10,40$ y 80 s, $Pr=0.025$, $St=0.5$, Grid size 60×60 , $dt=0.01$ s)



t=610 s



t=4275.25 s



t=7329.0 s

Figure 6. Isotherms and streamlines for pure aluminum solidification ($Ra=1.0e5$, $Gr=6.710e6$, $t=610, 4275.25$ y 7329.0 s, $Pr=0.0149$, $St=0.53$, Grid size 60×60 , $dt=1$ s).

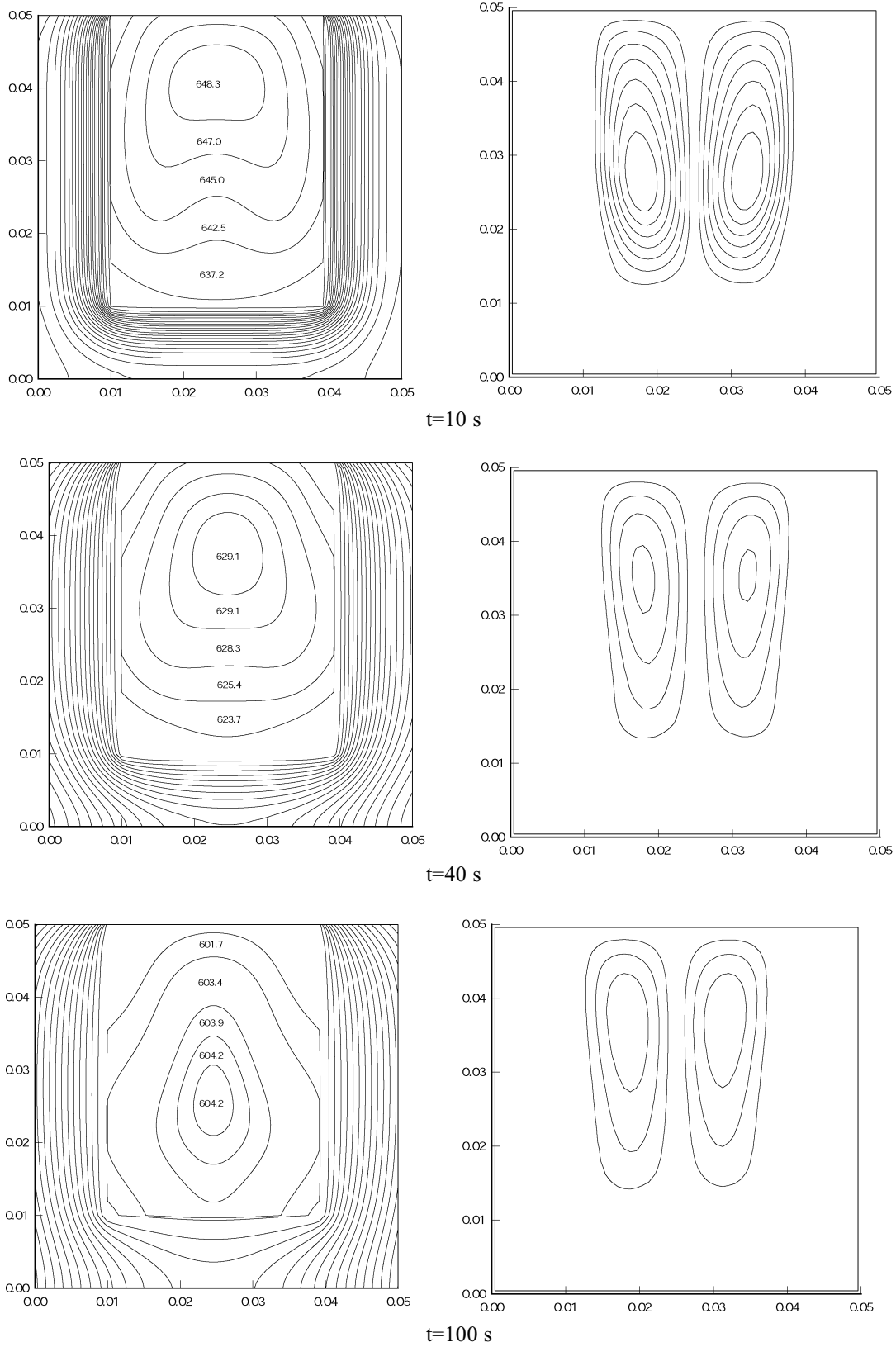


Figure 7. Isotherms and streamlines for alloy aluminum solidification in mould ($Gr=5.12e6$, $t=10,40$ y 100 s, $Pr=0.025$, Grid size 60×60 , $dt=0.01$ s).

7. Conclusion

A numerical model has been developed to solve the liquid-solid phase change problem for non-isothermal, isothermal solidification process included the simple application where the mould is considered was presented.

Numerical results of non-isothermal and isothermal solidification process in square section are similar to available numerical data. Nevertheless for isothermal solidification have irregular perform at interface front. When the mould has been included numerical results of solidification process has a good perform without irregularity.

8. References

- Alexiades, V. and Solomon, A.D., 1993, "Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes", chap. 2, Hemisphere Publishing Corporation, Washington.
- Beckermann C. and Viskanta R., 1993, "Mathematical Modeling of Transport Phenomena During Alloy Solidification", *Appl. Mech. Rev.*, vol 46, N° 1, pp 1-27.
- Chun, C.K. and Park, S.O., 1999, "A Fixed Grid Finite-Difference Method for Phase-Change Problems", *Numerical Heat Transfer, Part B*, 38:59-73,200.
- Cruchaga M. And Celentano D., 1997, "Thermally Coupled Incompressible Flow Formulation With Phase-Change Effects", Tenth International Conference on Thermal Problem, U.K.
- Hsiao, J.S., 1985, "An Efficient Algorithm for Finite Difference Analyses of Heat Transfer with Melting and Solidification", *Numer. Heat Transfer*, 8: 653-666.
- Kurz, W. and Fisher, D., 1998, "Fundamentals of Solidification", Trans Tech Publications, Aedermannsdorf, Switzerland.
- Lacroix, M. And Voller, V.R., 1990, "Finite Difference Solution of Solidification Phase Change Problems: Transformed versus Fixed Grids", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 17, pp. 25-41.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering", John Wiley & Sons, Inc.
- Lazaridis, A., 1970, "Numerical Solution of the Multidimensional Solidification (or Melting) Problems", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 13, pp 1459-1477.
- McDaniel, D.J. and Zabarar, N., 1994, "A Least-squares Front-Tracking Finite Element Method Analysis of Phase Change with Natural Convection", *Int. J. For Num. Methods in Engineering*, Vol. 37, 2755-2777,
- Moraga, N.O. and Salinas, C. H., 1999, "A Numerical Model for Heat and Fluid Flow in Food Freezing", *Numerical Heat Transfer*", Part A, 35: 495-518.
- Moraga, N.O. and Salinas, C. H., 2000, "Numerical Study of Unsteady 2d Natural Convection and Solidification of a Food Inside a Freezing Chamber", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 37: 755-777.
- Murphy, D.W., Johnson, D.W., Jin, S. And Howard R.E., 1988, "Processing Techniques for the 93K Superconductor $Ba_2YCu_3O_4$ ", *Sci* 241, 922-930.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, Washington, DC.
- Raw, W.Y. and Lee, S.L., 1991, "Application of Weighting Function Scheme on Convection-Conduction Phase Change Problems", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, N° 6, pp. 1503-1513.
- Rohatgi, P., 1988, "Foundry Processing of Metal Matrix Composites", *Modern Casting*, April, pp 47-50.
- Salcudean, M. And Aduallah Z, 1988, "On the Numerical Modeling of Heat Transfer During Solidification Processes", *Int. J. Numer. Methods Engineering*, Vol. 25, pp. 445-473.
- Salinas, C.H., 1996, "Modelação de escoamentos Tridimensionais em Geometrias Complexas", D. Sc. Thesis, COPPE/PENQ, UFRJ, RJ-Brazil.
- Satya Sai, B.V.K. and Seetharamu, K.N., 1994, "Solution of Transient Laminar Natural Convection in a Square Cavity by an Explicit Finite Element Scheme", *Numerical Heat Transfer. Part A*, 25, 593-609.
- Sparrow, M., Patankar, S.V., Ramadhyani, S., 1977, "Analysis of Melting in Presence of natural Convection in the Melt Region", *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 520-526.
- Swaminathan, C.R. and Voller, V.R., 1993, "On the Enthalpy Method", *Int. J. of Num. Heat Fluid Flow*. 3: 233-244.
- Thompson, J.F., Warsi, A. and Mastin, C.W., 1985, "Numerical Grid Generation", Elsevier Science. Publishing.
- Wolff, F. And Viskanta, R., 1988, "Solidification of a Pure Metal at a Vertical Wall in the Presence of Liquid Superheat", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, N° 8, pp. 1735-1744.

9. Acknowledgment

Financial support for this study provided by Universidad del Bío-Bío through grant FPI N° 0152112 is greatly appreciated.

TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS OF THE MICROFLUIDIC OSCILLATORS

Eliphás Wagner Simões

Laboratório de Vazão - Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, São Paulo - S.P. – Brazil - C.E.P 05508-901 – - Fax: +551137663572, and Laboratório de Sistemas Integráveis Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo - S.P. - Brazil - C.E.P 05508-900 - Fax: +551138185665
e-mail: eliphás@lsi.usp.br

Rogério Furlan

Laboratório de Sistemas Integráveis Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo - S.P. - Brazil - C.E.P 05508-900 - Fax: +551138185665
e-mail: furlan@lsi.usp.br

Marcos Tadeu Pereira

Laboratório de Vazão - Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, São Paulo - S.P. – Brazil - C.E.P 05508-901 – - Fax: +55113766-3572
e-mail: marcostp@ipt.br

Abstract. *This paper describes the initial project and development of a microfluidic oscillator, which can be fabricated in silicon by using micromachining techniques, and that can be used in the measurement and control of low flows of liquids or gases. The possible applications include automatic control in industries, medical diagnostics, chemical and biological analysis, among several others areas. In this case, the devices should possess easy maintenance, easy manipulation, and rapid response time. Also, it can be advantageous that the output of the flowmeter can be transformed in an electric signal to facilitate the reading process of the total flow rate. The microfluidic device described in this work presents potential to address all these requirements. Thus, in this stage of project, microfluidic oscillators were simulated using the commercial ANSYS (FLOTRAN) 5.4 package with a two-dimensional finite element model and devices dimensions derived from those of the typical wall attachment microfluidic amplifier (control nozzle width of 50 micrometers). The results of these calculations indicate that conventional steady state and dynamic transient analysis are useful tools for evaluating fluidic oscillator systems in micro dimension range.*

Keywords: *fluidic, microfluidic oscillators, microflowmeter, fluid flow, and simulation*

1. Introduction

Miniaturized devices and systems have been the focus of intense interest and development in the past decade (Heuberger, 1993; Frazier et al., 1995; Gravesen et al., 1993; Zemel and Bau, 1994; and Zemel and Furlan, 1996). Their minute dimensions allow large scale integration and low cost batch production (Petersen, 1995). Operation with smaller samples quantities, reduced dead volume, easy fluid injection and manipulation are some of the advantages gained by their use (Wegeng et al., 1996; and Fujita, 1997). Microscaling of nozzles, valves, pumps and others fluidic devices are the subjects of renewed study and development (Banks, 1997). In this case, the operating speeds of the micro-devices are increased over those of their macroscopic counterparts due to the reduced inertia of their parts, often becoming less sensitive to external noise (Yamasaki and Honda, 1980). Sensors (transducers of ever increasing variety) and actuators (motors and mechanisms), aimed at a wide range of applications, are fabricated nowadays using techniques from the microelectronics industry and from precision mechanics technology (Madou, 1997).

A subgroup of such devices can be identified, that is characterized by the absence of moving parts (Kirshner, 1966, Furlan, 1998; Furlan and Simões, 1999; and Simões, 2000). The advantages from the standpoint of simplicity and reliability are obvious. For example, Fig. (1a) shows a typical wall-attachment fluidic amplifier, which has at least four basic functional parts: (1) a supply port, (2) control ports, (3) output ports, and a (4) interaction region. The operation is based in the following behavior: A turbulent jet emerging from the supply port interacts with flows from the control ports in the interaction region. As a result, the jet from the supply nozzle is directed to one or another output, depending on the pressure or flow of the control inputs. In this way, the jet attaches itself to a wall, thereby causing the device to be bistable (Davies, 1970; Foster et al., 1970; Kirshner, 1966; and). This effect is referred to as the “Coanda effect” (Kirshner, 1966). The fluidic oscillator proposed in this project and presented schematically in Fig. (1b), consists of a bistable wall-attachment fluidic amplifier, which is made to oscillate interconnecting the two control ports. This provides a feedback loop, see Fig. (1b), from each output receiver to its corresponding control port (Deadwyler, 1969; Gaylord and Carter, 1969; Yasuda et al., 1989; Gebhard et al., 1996; and Zipser, 2000). A fluid jet, which is injected into the oscillator, bends due to small fluctuations towards one of the attachment walls. The fluid flow on the bent side of the jet is restricted and a low-pressure regime is created, which causes the jet to attach to the wall (Coanda effect) and exit through one of the output ports (Kirshner, 1968). By feeding back part of the output power the jet can be switched to the other attachment wall. A periodic and oscillatory switching of the jet between the output ports can be achieved (Gebhard et al., 1996). This type of device, usually known as feedback fluidic oscillator, can be used in the direct flow

metering of liquids (as Water), gases (as Nitrogen), and several other types of Newtonian fluids. The possible applications include fluidic flowmeters to automatic control in industries, measurement in domestic gas storing, medical diagnostics, chemical and biological analysis, among several others areas. However, as fluidic flowmeters are not as rapid as electronic ones, it is unlikely to compete in fields with ultrahigh speed requirements, typical operation with pure fluidic devices involving response time between 0.01 to 100 milliseconds. On the other hand, in many applications fluidics based flowmeter is advantageous. The elimination of electrical contacts prevents a possible fire hazard in several cases. Also, this type of flowmeter possesses easy maintenance and easy manipulation. (Yasuda et al., 1989; Gebhard et al., 1996; and Zipser, 2000).

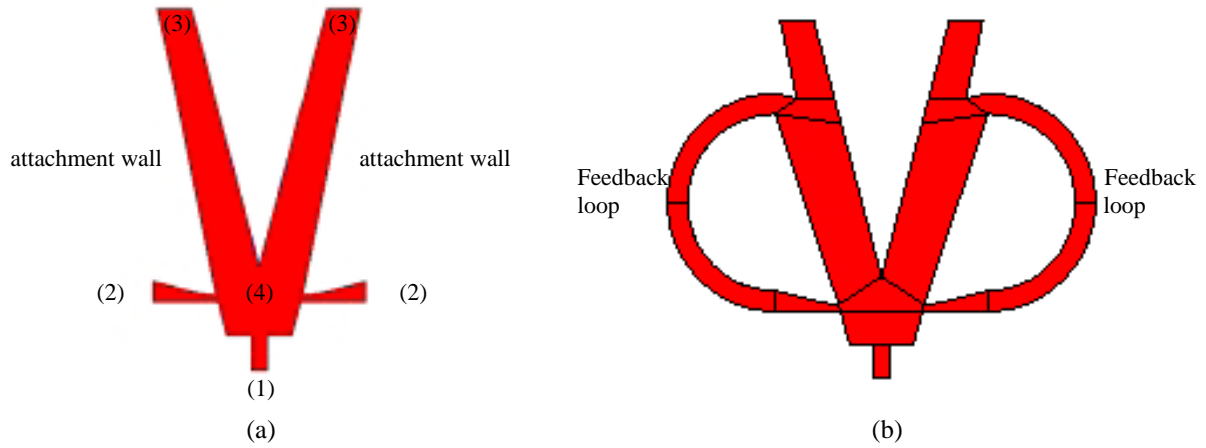


Figure 1. Functional parts of the bistable wall-attachment fluidic amplifier are illustrated in (a): (1) a supply port, (2) control ports, (3) output ports, and (4) interaction region. In (b) is presented a typical feedback oscillator configuration derived from fluidic amplifier illustrated in (a).

With the device operating in incompressible to moderate compressible regime, the frequency of oscillation is determined by the time of inertance of the fluid in the control port interconnection (feedback loop), by the amplifier switching dynamics, and by the flow-rate (Tippetts et al., 1973). Also, the feedback oscillator can be designed to give a long linear range of frequency - velocity and tends to provide a cleaner signal at low velocities. The reason for the cleaner signal is that feedback oscillator has few modes of oscillation competing for the energy at low velocities (Tippetts et al., 1973). The period of oscillation, T , is given in expression (1) as (Tippetts et al., 1973; and Gebhard et al., 1996):

$$T = 2(\tau_t + \tau_s) = 2\left(\frac{l}{c} + \frac{\xi L}{u}\right) \tag{1}$$

where: τ_t is the transmission time; τ_s is the switching time; l is the length of one loop; c is the speed of wave propagation (if the duct is not small, the speed of wave propagation tends to speed of sound); L is the nozzle-to-splitter distance; u is jet velocity; and, finally, ξ is an empirical constant. A fast switching device has a value of ξ between one and two.

For liquids, generally the frequency of oscillation, f in expressions (2), is strongly dependent on the switching time, because the speed of wave propagation is very higher than the jet velocity in nozzle-to-splitter path (Deadwyler, 1969; and Tippetts et al., 1973). Typically, the transmission time for operation with liquids is approximately two or four order less than switching time. For gases, expression (3), the frequency of oscillation depends of both transmission time and switching time.

$$f = \frac{1}{2\tau_s} = a + bQ \text{ (for liquids)} \tag{2}$$

$$f = \frac{1}{2(\tau_t + \tau_s)} = a + bQ \text{ (for gases)} \tag{3}$$

where a and b are constants and Q the volume flow.

The oscillator frequency increases linearly with increasing volume flow and this behavior favors the feedback fluidic oscillator to be used in the flow measurement of Newtonian fluids. Furthermore, the linear regime between frequency and volume flow is due to a faster compensation of the low-pressure regime with a higher flowrate. In this case, the volume flow can be varied by changing the geometry of the supply nozzle, i.e., the flow resistance and the given supply pressure (Gebhard et al., 1996).

In light to obtain an understanding of the flow features inside the microfluidic feedback oscillators, operating with gases, a Computational Fluid Dynamics (CFD) (Davies, 1970; Boucher, 1988; Reddy, 1993; Freitas, 1995; and Athavale et al., 1998) was realized according to the following topic.

2. Simulation Procedures

Many of the simulations presented in the literature (Zienkiewicz and Taylor, 1994) use the ANSYS finite-element program - which presents a specific module (or library) for dynamic simulations in fluids, denominated FLOTRAN. We wish to emphasize that in order to simplify the computational process, we assumed a two-dimensional analysis would be adequate to test the oscillator operation. This is valid because of the probable experimental aspect ratio (width to height) of the implemented devices (Simões and Mansano et al., 1998; and Simões and Furlan et al., 1998). The device geometry used in the analysis using the finite element ANSYS/FLOTRAN 5.4 package (ANSYS, 1996; and Ocampo et al., 1999) is presented in (Fig. 2a). The basic oscillator is 5775 μm long and 3175 μm wide, and has a control nozzle width, which is a characteristic dimension of 50 μm. Its length of the feedback channels and width were 2515 μm and 150 μm, respectively. In this case, we manually defined the mesh configuration, the number and the aspect ratio of the nodes for each region, as shown in (Fig. 2b).

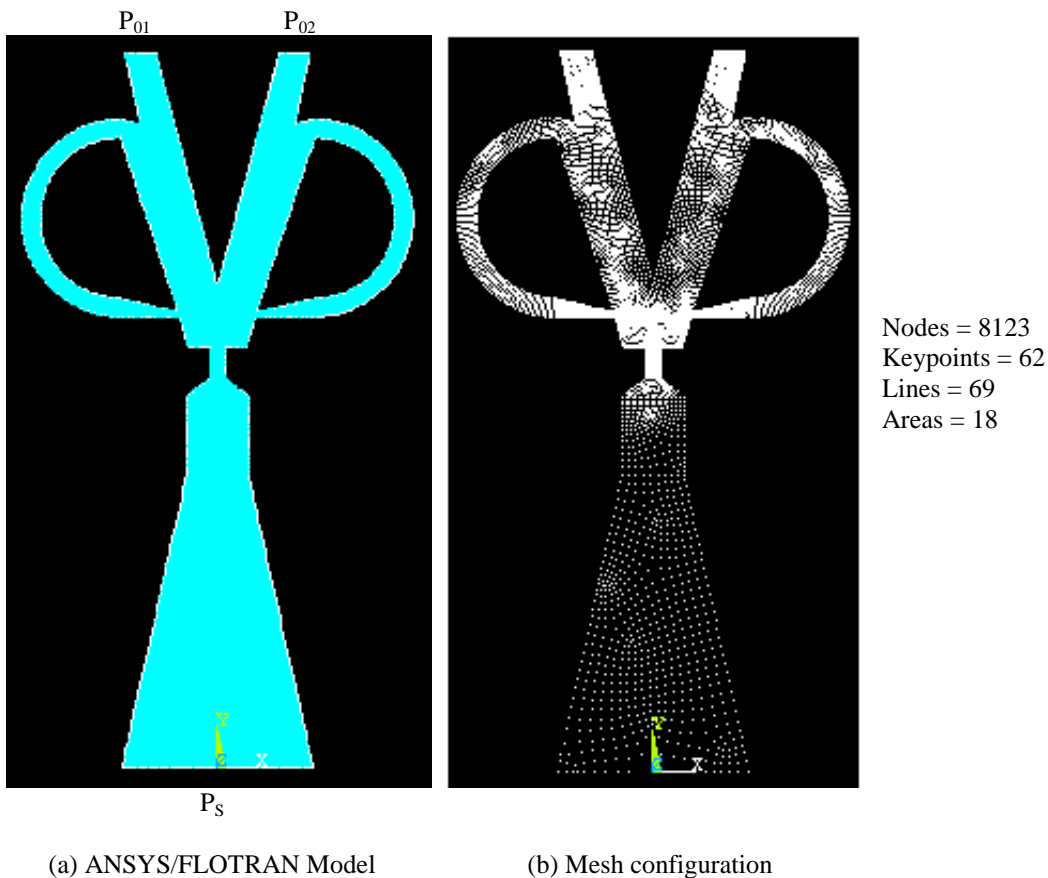


Figure 2. Device geometry and mesh configuration adopted in the two-dimensional analysis of the feedback microfluidic oscillator: (a) ANSYS/FLOTRAN model and (b) mesh configuration.

We found out that this defined configuration with 8123 nodes resulted suitable in terms of computational resources (PC platform with a Pentium III, 450 MHz, and 256 MB of RAM) and simulation time. We used standard two-equation κ - ϵ turbulent models (the general case) and FLUID141 elements (rectangular form, 4 nodes, and 2D space). A minimum of 1500 iterations for steady state analysis and 25000 iterations for transient analysis were necessary to obtain the desired convergence for the results. A value lower than 10^{-6} was adopted for the convergence monitors, calculated as E, in expression 4:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{|\phi_i^k - \phi_i^{k-1}|}{|\phi_i^k|} \tag{4}$$

where ϕ is a degree of freedom (pressure, velocity, temperature, etc.), N is the total number of nodes, i is the iteration number and k is the number of iterations.

The internal flow (velocity) behavior was analyzed as a function of the absolute supply pressure, P_s , considering values between 125 kPa to 400 kPa, which lead to reasonable velocity and associated oscillation frequencies. The reference pressure was assumed to be 101.35 kPa. The output pressures (P_{O1} and P_{O2}) were assumed to be slightly higher than the reference pressure. The physical gas parameters (density (ρ), viscosity (μ), etc.) employed to Nitrogen (N_2), Argon (Ar), and Carbon Dioxide (CO_2) were those indicated in Tab. (1). Also, in the table, T is the reference temperature, R is the gas constant, C_p is the specific heat at a constant pressure, C_v is the specific heat at a constant volume, γ is the ratio between C_p and C_v , and finally the sound velocity, C , is defined in expression 5 as (Kirshner, 1966):

$$C = \sqrt{\gamma RT} \tag{5}$$

Table 1. Physical fluid parameter employed in simulations (Vollmer et al., 1994 and Fox and McDonald, 1994):

Gas	Nitrogen (N_2)	Argon (Ar)	Carbon Dioxide (CO_2)
Reference pressure (kPa)	101.35	101.35	101.35
Reference temperature (K)	298.15	298.15	298.15
Density in reference condition (Kg/m^3)	1.15	1.63	1.81
Viscosity in reference condition ($\mu Pa \cdot s$)	17.8	22.8	14.8
Sound velocity in reference condition (m/s)	351.9	322.9	269.5
R - Gas constant (J/Kg.K)	296.8	209.9	188.9
γ (C_p/C_v)	1.4	1.667	1.29

We should keep the fact that the speed of sound, depends on the temperature and therefore, in general, on the local pressure and density (Kirshner, 1966).

The goal of the study was to determine how microfluidic oscillators using different supplied fluids would operate in different pressure regimes and oscillation frequencies. The following topics indicate the results obtained by steady state analysis and transient analysis based in the simulations procedure described above.

2.1 Steady State Analysis

Steady state analyses were used to determine the operation range of transient simulations and typical behavior inside the microfluidic oscillators.

The behavior of the Mach number (M - ratio between local velocity and speed of sound), at the interaction region as a function of supply pressure is presented in (Fig. 3) for all supply fluids simulated. For $P_s > 125$ kPa the Mach number becomes higher than 0.3, revealing that compressibility effects can influence the flow inside the microfluidic oscillators for the proposed design conditions. The flow in the interaction region, with the diverging shape, becomes supersonic for $P_s > 250$ kPa for Nitrogen, and $P_s > 300$ kPa for both Argon and Carbon Dioxide, as can be seen in (Fig. 3). Also, reaches Mach 1.5 for Nitrogen and Mach 1.1 for Argon and Carbon Dioxide, for $P_s \sim 400$ kPa. Thus, shock waves can be formed in the interaction region in this condition and that will have a significant influence on the oscillator flow behavior. Because the formation of shock waves results in higher density and pressure local gradients degenerate the principal flow jet and the control input feedback. These results are supported by previous work about microfluidic amplifier reported by (Simões and Furlan, 1998) where can be seen that a choked flow condition can be reached at the output of the supply nozzle of microfluidic devices. Thus, after reaching this condition, further increases in the supply pressure only increase the density in the supply nozzle, as is well known.

The Reynolds numbers at the output of the supply nozzle of the microfluidic oscillators, calculated as function of supply pressure and hydraulic diameter, according with expression 6 to 8, are presented in (Fig. 4).

$$Re = \frac{\rho D_h u}{\mu} \tag{6}$$

ρ is the density; μ is the absolute viscosity; u is the cross-sectional average velocity; and D_h is the hydraulic diameter, described in expression (7):

$$D_h = \frac{4A}{P} \tag{7}$$

where A is the cross-sectional area and P is the wetted perimeter, defined in expression (8):

$$P = W_s + 2h \tag{8}$$

where W_s is the supply nozzle width and h supply nozzle depth.

The values of density and viscosity were obtained by simulation. For a hydraulic diameter of $\sim 90 \mu\text{m}$, considering a width of output supply nozzle of $130 \mu\text{m}$ and a depth of $67 \mu\text{m}$, a transition to turbulent regime can occur at high supply pressures. It is important to notice also that for a supply pressure less than 175 kPa the devices can operate with compressible flow with an essentially laminar regime.

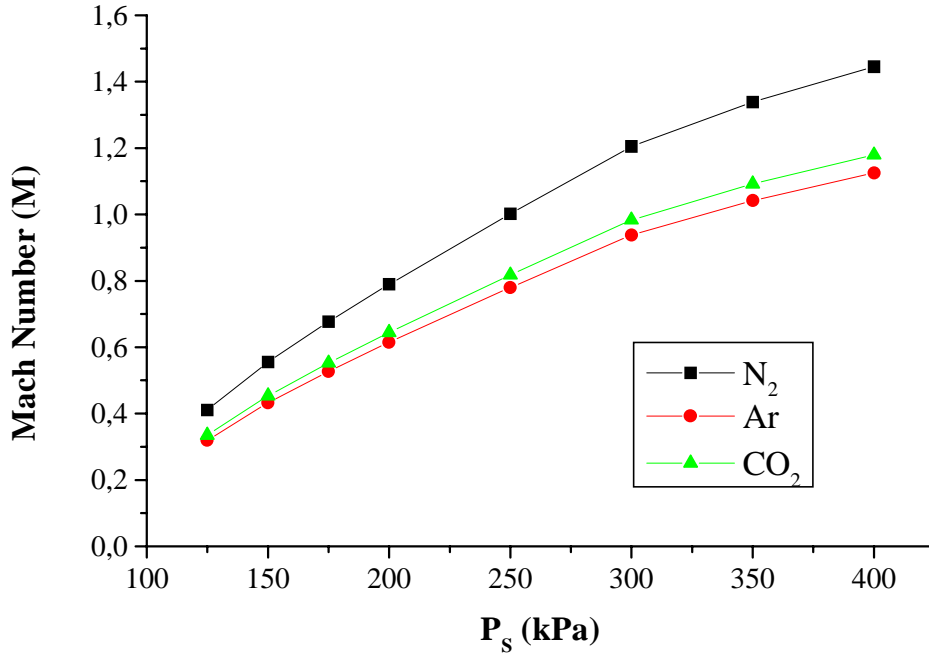


Figure 3. Maximum Mach number at the interaction region as a function of supply pressure for all fluids simulated, with $P_{O1} = P_{O2} = 101.85 \text{ kPa}$.

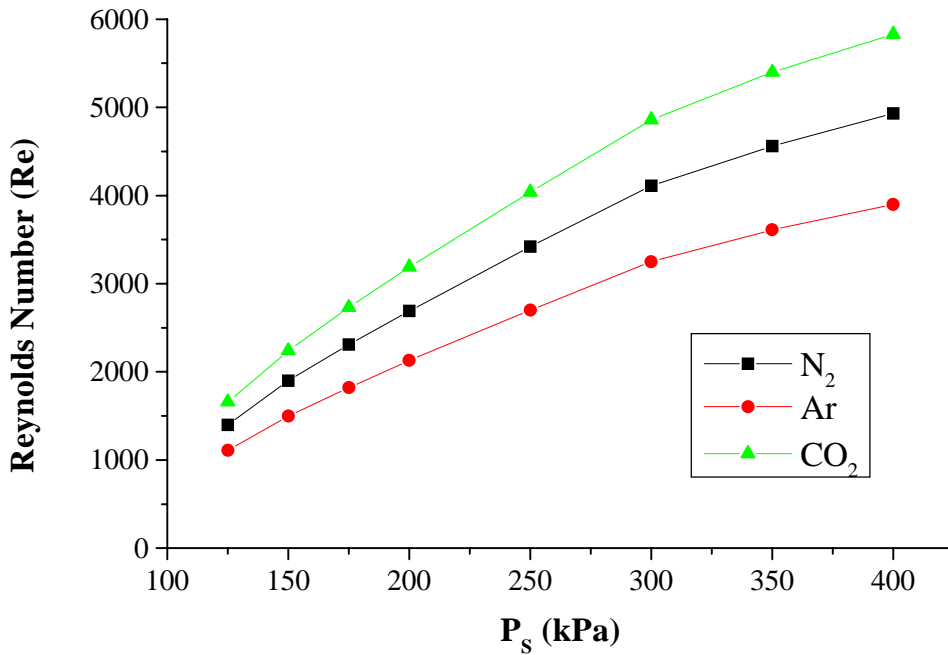


Figure 4. Reynolds number at the output of the supply nozzle of the microfluidic oscillator as a function of supply pressure, with $P_{O1} = P_{O2} = 101.85 \text{ kPa}$.

Figure 5 display the nitrogen velocity profile at the device for $P_S = 202.7$ kPa, $P_{O1} = 102.35$ kPa, and $P_{O2} = 101.85$ kPa i.e. a value lower than that necessary to reach the onset of supersonic flow in interaction region. In this case, the initial process of feedback loop and the diverging behavior of principal formed jet (from supply nozzle) can be observed.

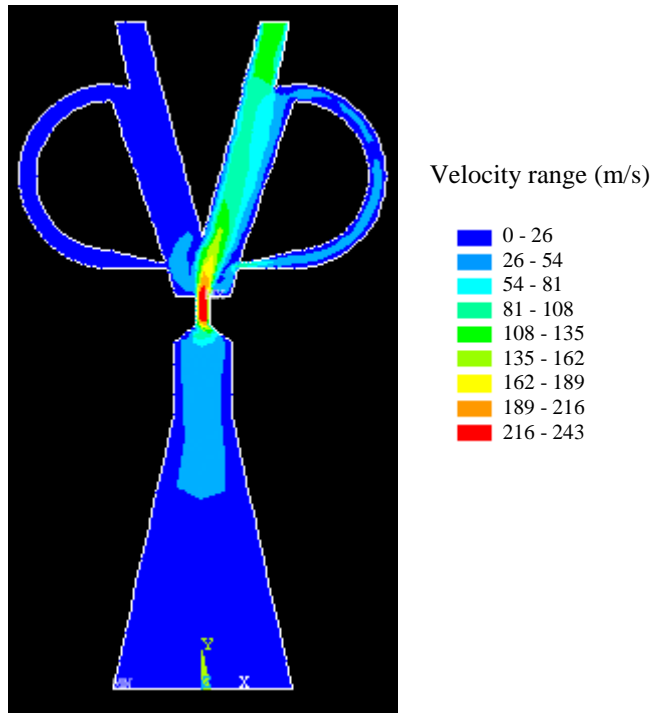


Figure 5. Nodal solution for steady state internal flow using nitrogen with $P_S = 202.7$ kPa, $P_{O1} = 102.35$ kPa, and $P_{O2} = 101.85$ kPa.

Figure 6 displays the volume flow as a function of the supply pressure for all supply fluids gauged. Where the volume flow was determined using the velocity profiles of the simulations. The cross section area was obtained considering the hydraulic diameter, using expression 7, with a width of output supply nozzle of $130 \mu\text{m}$ and a depth of $67 \mu\text{m}$. This probable depth was established assuming a high-density plasma etching process, according to experimental results indicated in (Simões, 2000) and (Simões and Mansano et al., 1998).

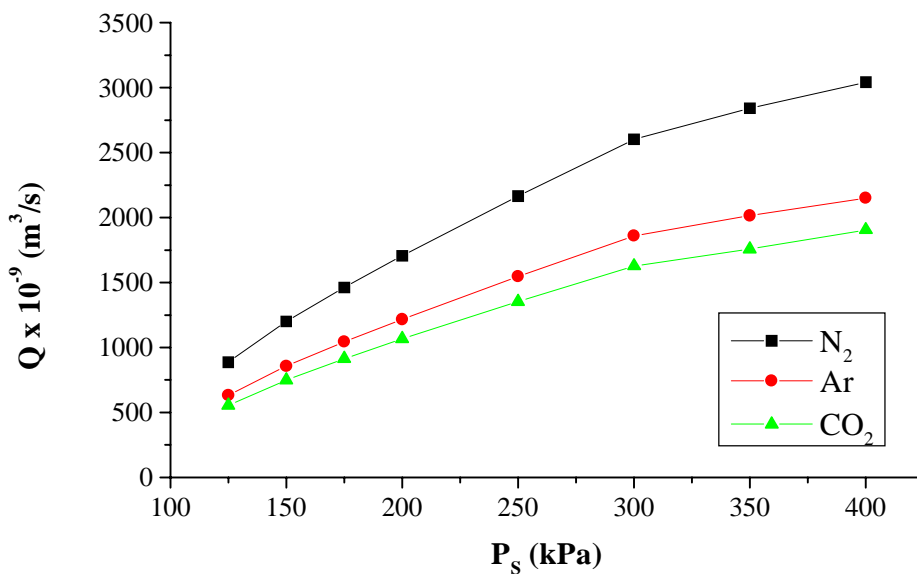


Figure 6. Volume flow as a function of supply pressure, with $P_{O1} = P_{O2} = 101.85$ kPa.

The maximum volume flow corresponds to nitrogen with $P_s = 400$ kPa. However, this conditions is associated with Reynolds Number higher than 4000, i.e. the fluid flow regime is turbulent, also the velocity in interaction region is supersonic and shock waves can be formed. Comparing (Fig. 3) to (Fig. 6) the best range for transient analysis corresponds to pressures between 125 kPa to 250 kPa, for all supply fluids simulated.

Thus, our results indicate that for supply pressures less than 175 kPa, for all different fluids analyzed, the microfluidic oscillator can operate with compressible and subsonic flow at the interaction region with a laminar regime. This condition is usually the range of operation used in the transient analysis, as shows the following topic.

2.2 Transient Analysis

The transient analysis adopted the steady state simulation as initial step. In this case, we used a total number of 25000 iterations (250 iterations per step), the time step was defined in the range between 1 to 10 μ s. With a given difference between the input supply and output ports pressures, a transient calculation was performed to determine the pressure and velocity distribution inside the microfluidic oscillator. The probable switching and transmission times were obtained using the expression (1) and compared with the frequency, which was calculated by analyzing the volume flow time-dependence at output ports.

Figures 7a to 7c display the variation of the frequency with volume flow for all supply fluids simulated. For comparison we included an approximately linear fit expected for a correlation between frequency and volume flow for this oscillator operation range. The typical variation of the frequency with volume flow presents a range close to tens thousands of Hz. Furthermore, the angular coefficient of straight line is strongly dependent of transmission time (proportional to feedback loop and local sound velocity).

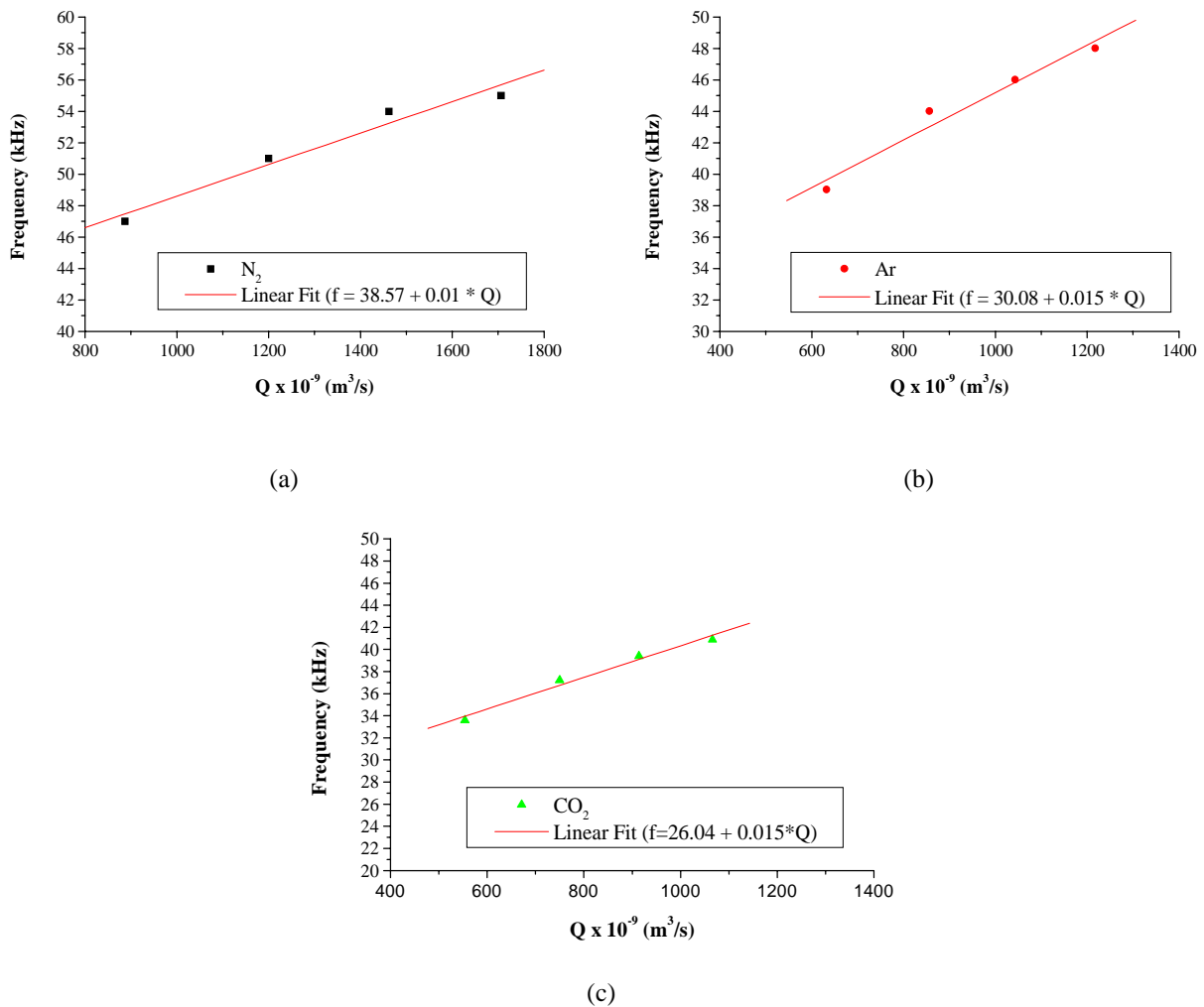


Figure 7. Variation of the frequency with volume flow for microfluidic oscillators simulated. (a) Nitrogen Supply, (b) Argon Supply, and (c) Carbon Dioxide Supply.

Thus, the initial project and development of a microfluidic oscillator by using simulations, permits to find future and promising applications, involving the measurement and control of gases flows in the micro scale range.

3. Conclusions

The performance of the microfluidic oscillator with dimensions derived from those of the typical wall attachment microfluidic amplifier (control nozzle width of 50 micrometers) were simulated using the commercial ANSYS (FLOTTRAN) 5.4. The results of these calculations, with a two-dimensional finite-element model, indicate that conventional steady state and dynamic transient analysis are useful tools for evaluating fluidic oscillator systems at rapid response time. Using steady state analysis, the internal flow behavior inside the microfluidic oscillators, operating with different supply fluids, was calculated as a function of supply pressure. The simulations reveal that for supply pressures less than 175 kPa, for all different fluids analyzed (i.e Nitrogen, Argon, and Carbon Dioxide), the microfluidic oscillator can operate with compressible and subsonic flow at the interaction region with a laminar regime. This range of operation used in the transient analysis corresponds to a linear dependence between the frequency of oscillation and volume flow. Also, the typical variation of the frequency with volume flow presents a range close to tens thousands of Hz. Thus, the initial project and development of a microfluidic oscillator by using simulations, permits to find future and promising applications, involving the measurement of gases flows in the micro scale range.

4. Acknowledgements

The authors would like to acknowledge the financial support of FAPESP (Proc. Number 00/04218-0), PADCT, and CNPq. The authors thank the discussions with Mauricio Massazumi Oka.

5. References

- ANSYS, 1996, Inc. Revision 5.4, Houston, SAS IP.
- Athavale, M. M., Li, H. Y., and Przekwas, A. J., 1998, "Modeling 3-D Fluid Flow for a MEMS Laminar Proportional Amplifier", Proceedings of the International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems Semiconductors, pp. 522 - 527.
- Banks, D., 1997, "Microfluidic Systems - An Emerging Technology", University of Surrey, UK.
- Boucher, R. F., Boysan, F., and Haider, M. H. S., 1988, "Theoretical Computer Simulations of Swirling Flow in a Vortex Amplifier Chamber", Proceedings of FLUCOME, pp. 370 - 374.
- Davies, R. C., 1970, "Functional Characteristics of Fluid Elements", Fluidics Quarterly, v. 2, n° 2, 43 pp..
- Deadwyler, R., 1969, "Fluierics: 26 Theory of Temperature and Pressure Insensitive Fluidic Oscillators", Harry Diamond Laboratories - report HDL - TR-1422.
- Foster, K., and Parker, G. A., 1970, "Fluidics: Components and Circuits", (New York, Wiley Science).
- Fox, R.W. and McDonald, A. T., 1994, "Introduction to Fluid Mechanics", John Wiley & Sons. Inc., fourth edition.
- Frazier, A. B., Warrington, R. O., and C. Friedrich, , 1995, "The miniaturization technologies: past, present and future", IEEE Transactions on Industrial Electronics, v.42, n° 5, pp. 423 - 430.
- Freitas, C. J., 1995, "Perspective: Selected Benchmarks From Commercial CFD Codes", Journal of Fluids Engineering, vol.117, pp. 208 - 218.
- Fujita, H., 1997, "A decade of MEMS and its future", 10 th annual International IEEE Workshop on MEMS.
- Furlan, R. and Simões, E. W., 1999, "Introdução à Microfluídica" , 14 pp., 5ª Escola Brasileira de Microeletrônica, Campinas (São Paulo).
- Furlan, R., 1998, "Microdispositivos Fluídicos Implementados em Silício", Tese (Livre Docência), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Gaylord, W. and Carter, V., 1969, "Fluierics: 27. Fluieric Temperature-Sensing Oscillator Design", Harry Diamond Laboratories - report HDL, TR-1428.
- Gebhard, U., Hein, H., and Schmidt, U., 1996, "Numerical investigation of fluidic micro-oscillators", Journal of Micromechanical and Microengineering, v. 6, pp. 115-117.
- Gravesen, P., Branbjerg, J., and Jensen, O., 1993, "Microfluidics -A Review", Journal of Micromechanical and Microengineering, v 3, pp. 168- 82.
- Heuberger, A., 1993, "Silicon microsystems", Microeletronic Engineering, 21, pp. 445 - 458.
- Kirshner, J. M. editor, 1966, "FLUID AMPLIFIERS", McGraw Hill Book Company.
- Kirshner, J. M., 1968, "Introduction to Fluidics"; Fluidics Quarterly, v.1, n.2, 93 pp.
- Madou, M., 1997, "Fundamentals of microfabrication", CRC Press.
- Ocampo, J. M. J., Simões, E. W., Furlan, R., and Rodriguez, E. C., 1999, "Simulação de Microestruturas Mecânicas", 5ª Escola Brasileira de Microeletrônica, Campinas (São Paulo), 15 pp.
- Petersen, K., 1995, "MEMS: What Lies Ahead?", Digest of Technical Papers, The 8th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, Eurosensors IX, June 25 - 29, Stockholm, Sweden, Vol. 1, pp. 894.
- Reddy, J. N., 1993, "An Introduction to the Finite Element Method", New York, MacGraw-Hill.
- Simões, E. W., 2000, "Estudo de Dispositivos Miniaturizados para o Controle do Escoamento de Fluidos", Tese (Doutorado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Simões, E. W., Mansano, R. D., Furlan, R., and Verdonck, P. B., 1998, "Microfluidic amplifiers fabricated in silicon", XIII SBMicro - International Conference on Microelectronics and Packaging ICMP'98, pp. 175 - 181.

- Simões; E. W., Furlan, R., and Zemel, J. N., 1998, "Computational two - dimensional finite - element analysis of flow behavior inside microfluidic amplifiers", Proceedings of the International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems Semiconductors, pp. 480 - 485.
- Tippetts, J. R., Ng, H. K., and Royle, J. K., 1973, "An Oscillating Bistable Fluid Amplifier for Use as a Flowmeter", Fluidics Quarterly, v.5, n°1.
- Vollmer, J.; Hein, H.; Menz, W. and Walter, F., 1994, "Bistable Fluidic Elements in LIGA Technique for Flow Control in Fluidic Microactuators", Sensors and Actuators A, v. 43, pp. 330 – 334.
- Wegeng, R. S., Call, J. C., and Drost, M. K., feb 1996, "Chemical system miniaturization", Proceedings of the 1996 Spring national meeting of the institute of chemical engineering.
- Yamasaki, and Honda, 1980 (report), "A unified approach to hydrodynamic oscillator type flowmeters" – on the complementary relations between fluidic flowmeters and vortex flowmeters.
- Yasuda, H., Sakai, K., and Okabayashi, M., November 1989, "Development of small-sized fluidic gas flowmeter" - International gas research conference.
- Zemel, J. N., and Bau, H. H., 1994, "Fluid Transport in Microchannels", Proceedings of the Symposium on Microstructures and Microfabricated Systems, Proceedings Vol. 94 -14, The Electrochemical Society, pp. 210.
- Zemel, J. N., and Furlan, R., 1996, "Microfluidics, Handbook of chemical and biological sensors", edited by Taylor, R. F. and Schultz, J.S., Bristol and Philadelphia, Institute of Physics Publishing, cap. 12, pp. 317 - 347.
- Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., 1994,- "The Finite Element Method", Volume 1, New York, MacGraw-Hill.
- Zipser, L., Wächter, F., and Franke, H., 2000, "Acoustic gas sensors using airborne sound properties", Sensors and Actuators B, v.68, pp. 162-167.

INFLUÊNCIA DO ÂNGULO DE DERRAPAGEM SOBRE A ESTEIRA DE MODELOS DE ÔNIBUS

Roberto da Mota Girardi

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Praça Mal. Eduardo Gomes, 50, 12.200-900, São José dos Campos, SP.
Email:

Luís Carlos Pires Videira

Empresa Brasileira de Aeronáutica (EMBRAER), Av. Brigadeiro Faria Lima, 2170, 12.227-901, São José dos Campos, SP, Brasil.
Email

Resumo. *O presente trabalho faz parte de uma pesquisa ampla sobre o escoamento em veículos terrestres, mais especificamente ônibus. Verificou-se em trabalhos anteriores que para diferentes configurações geométricas da parte frontal do veículo, pode-se obter uma variação acentuada do coeficiente de arrasto em função do ângulo de derrapagem, indicando que a superfície frontal do veículo pode estar influenciando nas características da esteira. O escopo deste trabalho é investigar o efeito da inclinação da superfície frontal na esteira do modelo de ônibus. Para tanto foram realizados mapeamentos dos campos de velocidade média e flutuante (valor "rms") utilizando-se um anemômetro de fio quente, conectado a um sistema de posicionamento de três eixos. Duas configurações foram ensaiadas, cada uma com uma forma diferente para a parte frontal do modelo de ônibus. Diferentes ângulos de guinada β , na faixa entre 0 e 9 graus, foram usados para se obter os campos de velocidade média e de flutuação. Os resultados são apresentados na forma gráfica e mostraram parte da estrutura da esteira e como a mesma é alterada a medida que o ângulo de derrapagem é modificado.*

Palavras-chave: Aerodinâmica de veículos, Corpo rombudo, Esteira de Ônibus, Métodos experimentais.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Hucho W.H. et al, 1987, para um caminhão trafegando em uma estrada plana e com velocidade de 100Km/h, a economia seria de 7% no consumo de combustível devido à uma redução no coeficiente de arrasto de 20%. Esta informação mostra a importância de se fazer esforços para o aprimoramento do projeto aerodinâmico de um veículo de transporte de passageiros e de cargas, devido às velocidades desenvolvidas serem elevadas, e também devido à grande área frontal. Para ônibus urbano não há razão para se preocupar com a aerodinâmica, por desenvolver baixas velocidades, porém, nos demais casos (transporte intermunicipal e interestadual) esta questão tem impacto significativo sobre a economia das empresas de transporte.

O coeficiente de arrasto de um ônibus é cerca de 1,5 vezes maior que o de um veículo de passeio, e seu valor varia na faixa entre 0,5 e 0,8, dependendo do projeto aerodinâmico de sua carroceria. O coeficiente de arrasto de um ônibus é função da forma da parte frontal, onde fica posicionada a cabine do motorista. Nesta superfície do veículo, existe uma região de estagnação, caracterizada por valores de coeficiente de pressão muito próximos da unidade, a qual deve ser minimizada para reduzir o arrasto e portanto a potência requerida. Esta minimização pode ser realizada através da inclinação da parte frontal do veículo, como mostrado por Moreira (1996) e por Videira & Girardi (2000). A região da junção entre a superfície frontal e as superfícies laterais e superior também pode ter grande impacto na redução do C_d , como pode ser visto nos trabalhos de Hucho (1987) e Câmara (1999). Esta junção deve ser arredondada de maneira a minimizar o descolamento que normalmente ocorre nesta região. A superfície traseira do veículo é responsável por grande parte do arrasto, devido aos valores relativamente baixos de pressão (o coeficiente de pressão é normalmente negativo), os quais estão fortemente correlacionados com o escoamento na esteira do veículo. Este tipo de escoamento é muito complexo, sendo caracterizado pela formação e liberação de vórtices, os quais são originados pelo desprendimento de vorticidade gerada nas superfícies laterais, superior e inferior do veículo.

A esteira de um corpo rombudo bidimensional é caracterizada por um escoamento relativamente mais simples, resultante do enrolamento de duas camadas de cisalhamento livre, que interagem entre si e com a base do corpo, dando origem à vórtices que giram com sentidos opostos e que formam uma configuração de vórtices alternados, conhecida na literatura (Kovazsnay, 1949, e Fage & Johansen, 1927) como avenida de vórtices de von Kármán ("Kármán vortex street"). O trabalho de Roshko (1954) teve grande importância porque mostrou que o escoamento na esteira mais afastada ("far wake") é simplesmente uma consequência do escoamento na região próxima a base do corpo, conhecida como região de formação, na qual ocorre a formação dos dois vórtices. Esta região é delimitada pela posição onde ocorre o desprendimento dos vórtices, quando os mesmos alcançam intensidade máxima (o maior valor de circulação), a qual é correlacionada com o máximo valor de velocidade flutuante na esteira de um corpo rombudo (Bearman, 19).

Na esteira tridimensional de um veículo (tipo ônibus), existem quatro estruturas vorticiais (Girardi & Câmara, 1993, e Câmara, E.F. & Girardi, R.M., 1995): Dois vórtices com origem nas superfícies laterais do modelo e dois outros com origem nas superfícies superior e inferior. O escoamento que sai do canal formado pela superfície inferior e pelo solo tem menor velocidade, devido às obstruções encontradas neste canal. Desta forma, o vórtice formado por este escoamento tem menor intensidade e se desprende em uma posição mais próxima da base que os demais. Esta questão torna mais complexa a delimitação da região de formação e a influência da mesma na distribuição de pressão na base do veículo.

O coeficiente de arrasto (C_d) de um veículo é incrementado a medida que o ângulo de derrapagem (β) é aumentado, isto é, a medida que aumenta a intensidade de ventos laterais em relação à velocidade do veículo. No trabalho de Moreira (1996) foi mostrado que este incremento de arrasto é causado por alterações na distribuição de pressão na base do modelo de ônibus e que esta alteração é causada por modificações na topologia dos vórtices na esteira do veículo. Videira e Girardi (2000) mostraram que a modificação na forma da parte frontal do modelo pode acarretar uma menor variação do coeficiente de arrasto com relação ao ângulo de derrapagem. No presente trabalho tem-se o objetivo de verificar a topologia da esteira e sua variação com o ângulo de derrapagem do modelo, para o qual o C_d apresenta pouca sensibilidade com relação a β , e compara-la com uma configuração convencional de ônibus.

O objetivo mencionado acima é alcançado através do mapeamento do campo de velocidades média e flutuante (valor "rms") no planos de simetria vertical e horizontal do modelo. Estes parâmetros são medidos com um anemômetro de fio quente (1 canal), cuja sonda é instalada em um dispositivo de posicionamento de três eixos, controlado manualmente. Um sistema de aquisição de dados é usado para realizar as leituras e o pós processamento dos dados.

2. APARATO E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O túnel de vento utilizado neste trabalho é do tipo soprador e circuito aberto (vide figura 1). Este túnel aerodinâmico subsônico opera na faixa de 6 a 30 m/s, possui seção de ensaio com dimensões 460 x 460 x 1200 mm, sendo que a área real de ensaio, isto é, a área descontada dos cantos da seção de ensaio é 0,2027m². O nível de turbulência é de aproximadamente 0,5%, para a máxima velocidade.

O modelo utilizado nos ensaios de anemometria de fio quente foi construído em madeira e tem semelhança geométrica com o ônibus modelo Mercedes-Benz O 400 RSD. As dimensões do modelo (vide tabela 1) foram escolhidas para se ter uma razão de bloqueio inferior a 5%, de maneira a minimizar as interferências provocada pela fronteira do fluxo de ar proveniente do túnel de vento.

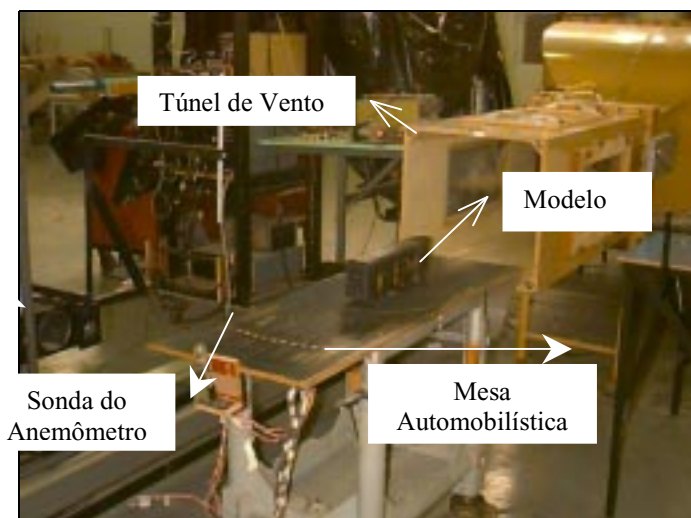


Figura 1. Aparato experimental utilizado neste trabalho.

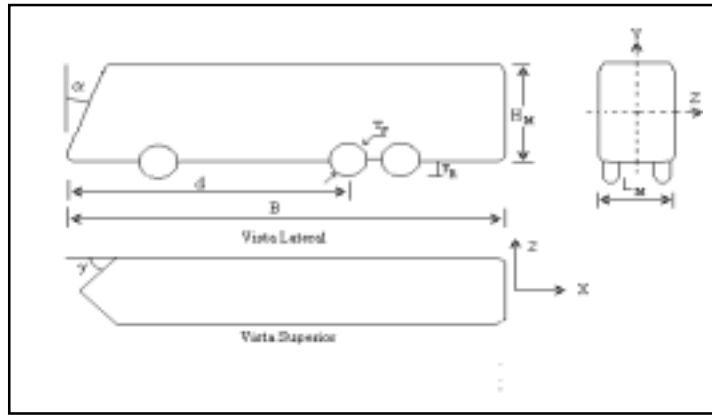


Figura 2: Forma geral dos modelos de ônibus ensaiados e definição do sistema de referência usado.

Tabela 1. Dimensões do modelo com a configuração 1 (básica).

Dimensão	Valores (mm)
Largura (L_M)	72,6
Altura (H_M)	105,7
Comprimento (B_M)	392,4
Vão ao solo (F_R)	10,0
Balanço dianteiro (G_M)	76,5
Espessura do pneu (S_{PM})	10,5
Diâmetro do pneu (T_P)	21,0
Raio de arredondamento das arestas do modelo básico	10,0
Distância da superfície frontal ao ponto de fixação na balança (d)	262,4

Tabela 2. Ângulos de inclinação frontal (α) e lateral (γ) para as diferentes configurações do modelo.

Modelo	Ângulo de inclinação frontal (α)	Ângulo de inclinação lateral (γ)
Configuração 1	0°	0°
Configuração 3	0°	40°
Configuração 5	40°	40°

O modelo na mesa automobilística foi posicionado na saída da seção de testes do túnel de vento (vide figura 1). A superfície da mesa automobilística foi posicionada um pouco acima da superfície inferior do túnel de vento. Desta forma, a camada limite na superfície da mesa é pouco espessa e desta forma, minimiza a interferência nos resultados (maiores detalhes podem ser encontrados na referência Videira & Girardi, 2000).

Conforme mencionado anteriormente, a superfície frontal do modelo básico (denotado como modelo 1), foi modificada sistematicamente, alterando-se os ângulos com relação ao plano horizontal (α) e com relação ao plano de simetria vertical (γ), como mostrados na figura 2. Na tabela 2 são fornecidos valores de α e γ para as configurações dos modelos considerados neste trabalho. A variação do C_d com relação ao ângulo de derrapagem (β) é menos acentuada para a configuração 3 do que para a configuração 1 (modelo básico).

As configurações 1, 3 e 5 foram ensaiadas com o objetivo de analisar as possíveis influências das diferentes geometrias da parte frontal na esteira do modelo do ônibus. Para todas as configurações, foram realizados mapeamentos da esteira num plano vertical (X,Y) para $Z=0$ (vide fig. 2) e para ângulo de derrapagem (β) nulo. Para as configurações 1 e 3, foram realizados, também, mapeamentos no plano horizontal (X,Z) para $Y=0$, tomando valores de β no intervalo de 0 a 12° variando de 3 em 3 graus. A figura 3 mostra a região usada para a realização do mapeamento com a sonda do anemômetro de fio quente e na fig. 2 pode-se observar a origem do sistema de referência, a qual esta posicionada na na posição central da superfície traseira do modelo.

Para o cálculo do número de Reynolds (Re), mediu-se a pressão total e a estática em tomadas de pressão instaladas no início da seção de testes do túnel de vento. Com isso, é possível obter a pressão dinâmica lida por um transdutor de pressão, cujo sinal é amplificado, filtrado e, em seguida, transmitido para o sistema de aquisição de dados. Este sistema foi constituído por um micro computador, placa de aquisição de dados da *National Instruments* e pelo programa *LabView*, que controla o processo de medida e executava o pós processamento dos dados.

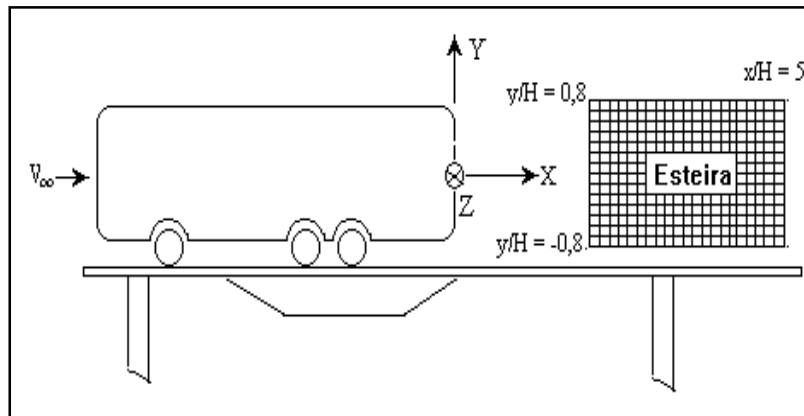


Figura 3. Esquema do posicionamento da sonda do anemômetro de fio quente na traseira do modelo.

Todos os ensaios foram realizados com aproximadamente o mesmo valor de pressão dinâmica, de maneira a se obter o mesmo Reynolds, permitindo assim a comparação dos resultados dos modelos ensaiados. O comprimento característico adotado para o cálculo do número de Reynolds é a altura do modelo ($H_M = 105,7\text{mm}$) como pode ser visto na figura 3.

O procedimento adotado para realizar os ensaios foi o seguinte: (i) após o alinhamento inicial do modelo com o auxílio de um teodolito, foi realizado o ajuste da pressão dinâmica do túnel de vento. (ii) O posicionamento da ponta de prova na região da esteira foi realizada com o posicionador de três eixos DANTEC que apresenta uma precisão de 0,01 mm. Este equipamento permite que a sonda seja deslocada em três direções (x, y, z) para que se pudesse realizar um mapeamento da esteira. Em todos os ensaios foi verificado o alinhamento do sistema de posicionamento em relação ao escoamento. (iii) Durante os ensaios de anemometria, também foram medidas a pressão e a temperatura ambiente, com o objetivo de se calcular a densidade do ar.

Para realizar os mapeamentos foi empregada uma sonda utilizada nos ensaios de camada limite. A vantagem na utilização desta sonda consiste na detecção das velocidades média e de flutuação em regiões muito próximas a superfície da mesa, sem que a sonda toque na mesma.

Tanto o anemômetro de fio quente quanto o transdutor de pressão, usado para a medida da pressão dinâmica, foram calibrados antes de cada experimento, para garantir a confiabilidade dos resultados experimentais.

A análise das incertezas dos resultados apresentados neste trabalho, foram tratadas segundo a metodologia apresentada por Kline & McClintock (1953). Nos cálculos de propagação de incertezas fez-se uso do critério da distribuição Gaussiana para um valor de desvio padrão (σ) de 95%, ou seja, $\pm 2\sigma$.

3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados dos mapeamentos são apresentados na forma de figuras coloridas, obtidas com o código computacional comercial "Tecplot", onde podem ser vistas com facilidade as variações nos campos de velocidade média e flutuante (valor "rms").

A figura 4 mostra uma vista superior do modelo e da região onde foi feito o mapeamento dos campos de velocidade médio e de flutuação, com relação ao escoamento do túnel de vento. Para se obter os campos de velocidade média e de flutuação, para um ângulo de derrapagem diferente de zero, o posicionamento inicial (na origem do sistema de referência) da sonda do anemômetro de fio quente foi realizado para o modelo com $\beta = 0^\circ$ e em seguida, foi ajustado o ângulo desejado. Como o modelo é girado em torno de um ponto próximo ao centro do mesmo, a superfície traseira sofre um deslocamento em relação à origem do sistema de referência usado para o posicionamento inicial da sonda, como mencionado acima. Esta informação e o esquema mostrado na Fig. 4 são muito importante para auxiliar o entendimento dos resultados apresentados quando $\beta \neq 0^\circ$.

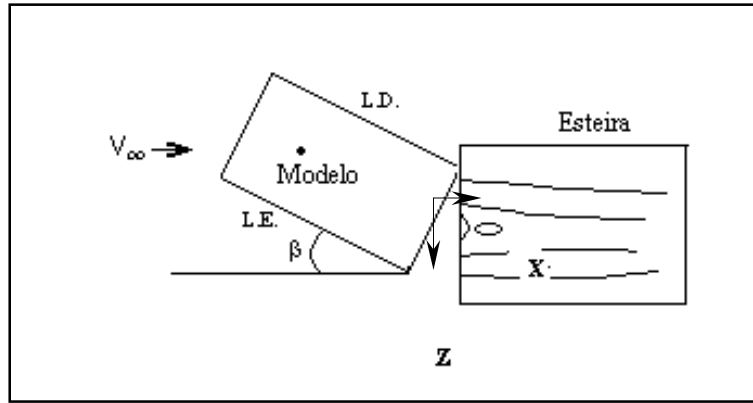


Figura 4. Esquema da esteira mapeada do modelo com ângulo de derrapagem (β) em relação ao escoamento não perturbado. Os símbolos LD e LE indicam lado direito e esquerdo, respectivamente.

3.1 – Configuração 1

Antes de iniciar a análise dos resultados é importante deixar claro que o parâmetro “comprimento da região de formação (L_F)” é definido como a distância da base do modelo ao pico de velocidade de flutuação (valor “rms”). Esta definição é aplicada a cada uma das estruturas vorticais mencionadas na introdução do presente trabalho.

Com base no mapeamento vertical realizado na esteira do modelo com a configuração 1, com $\beta=0^\circ$, pôde-se verificar, conforme a figura 6, que o comprimento da região de formação (L_F) é igual a 0,67 para o vórtice emitido na superfície superior e 0,48 para o emitido na superfície inferior (onde os valores fornecidos são o resultado de uma adimensionalização pela altura “H” do modelo).

Em $y/H=0,5$, isto é, no nível da superfície superior do modelo, observa-se valores relativamente elevados de u_{RMS} , os quais estão relacionados com a presença da camada de cisalhamento que se desprende da referida superfície. Como em corpos rombudos bidimensionais, deve ocorrer enrolamento desta camada de cisalhamento e a formação de uma grande estrutura vortical.

Ao longo da camada de cisalhamento que sai da parte inferior do modelo (isto é, para $y/H < -0,5$), observa-se um aumento do nível de turbulência até alcançar um máximo próximo de $y/H = -0,6$. Este resultado é semelhante ao relatado no parágrafo anterior, porém com intensidade de turbulência menor. Isto ocorre devido aos menores valores de velocidade média (vide figura 5) do escoamento na região abaixo do modelo.

Na figura 5 observa-se um aumento na velocidade média na esteira (entre $0,3 \leq X \leq 0,5$) sendo a causa provável deste, a interação entre os vórtices superior e inferior do modelo. Verifica-se também que para $X > 3,5$ o escoamento apresenta baixos valores de velocidade de flutuação como pode ser visto na figura 6.

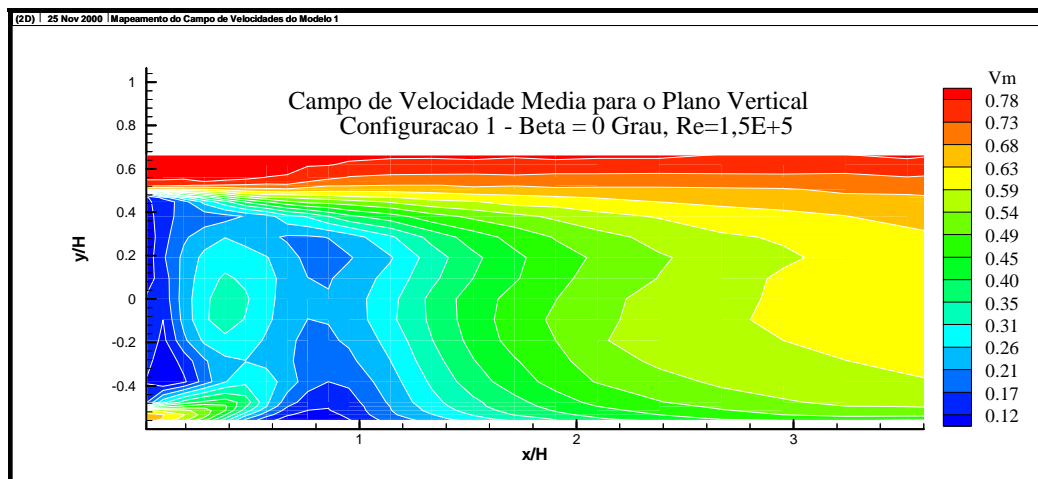


Figura 5. Campo de velocidade média (u_M) para o Modelo 1 com o ângulo de derrapagem $\beta=0^\circ$.

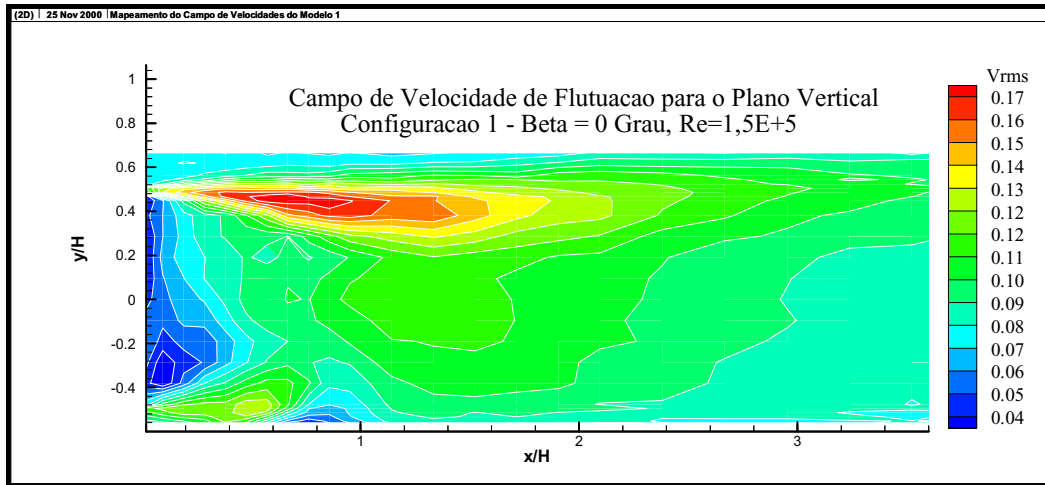


Figura 6. Campo de velocidade de flutuação (u_{RMS}) para o Modelo 1 com o ângulo de derrapagem $\beta=0^\circ$.

Em seguida são apresentados os mapeamentos no plano horizontal para o campo de velocidade média e de flutuação para diferentes ângulos de derrapagem. Definiu-se a largura da esteira (d) como a distância entre os picos de velocidade de flutuação, a qual foi adimensionalizada pela altura do modelo.

No mapeamento do campo de velocidade média apresentado na figura 7, verifica-se novamente a presença da região de baixa velocidade média, isto é, quase nulas, atrás da superfície traseira do ônibus.

É importante salientar que $z/H = 0,36$ e $z/H = -0,36$ correspondem às arestas laterais do modelo, onde há a presença da camada de cisalhamento livre. Ressalta-se que z corresponde à largura e é adimensionalizada pela altura “H” do modelo.

Com relação ao mapeamento da velocidade de flutuação (valor “rms”), apresentado na figura 8, realizado no plano XY (horizontal) da esteira do modelo, obteve-se que o comprimento da região de formação para os vórtices emitidos nas superfícies laterais foi $L_F = 0,57$ para a lateral direita, enquanto o valor obtido para a lateral esquerda foi $L_F = 0,76$. Aparentemente houve algum problema no ajuste do ângulo de derrapagem, pois os dois vórtices mencionados acima deveriam ser simétricos para $\beta = 0^\circ$. Por outro lado, a posição média destes vórtice ($x/H = 0,67$) coincide com a posição do vórtice que tem origem na superfície superior, como relatado acima. Analisando a distância entre os picos no campo de velocidade de flutuação, o valor obtido foi $d=0,55$ (definido como largura da esteira).

Após a realização do mapeamento do campo de velocidade média e de flutuação para um ângulo de guinada nulo, o modelo era girado em torno de um ponto próximo ao centro do mesmo, portanto, a base sofreu um deslocamento com relação a origem do sistema de referência, como mencionado anteriormente.

Para o modelo 1 com ângulo de guinada igual a 6° , $L_F = 1,13$ para o vórtice emitido na lateral direita e $L_F = 0,48$ para a superfície esquerda (vide fig. 10). Quando comparado ao mapeamento do campo de velocidade de flutuação para $\beta=0^\circ$ (figura 8), nota-se uma aproximação expressiva do vórtice emitido na lateral esquerda e o afastamento do vórtice desprendido na superfície direita.

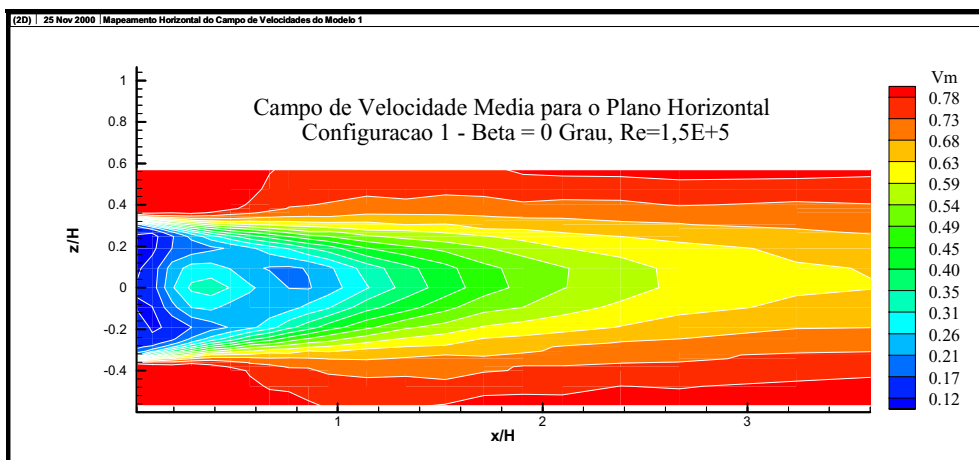


Figura 7: Mapeamento horizontal da velocidade média para o modelo 1 com ângulo $\beta= 0^\circ$.

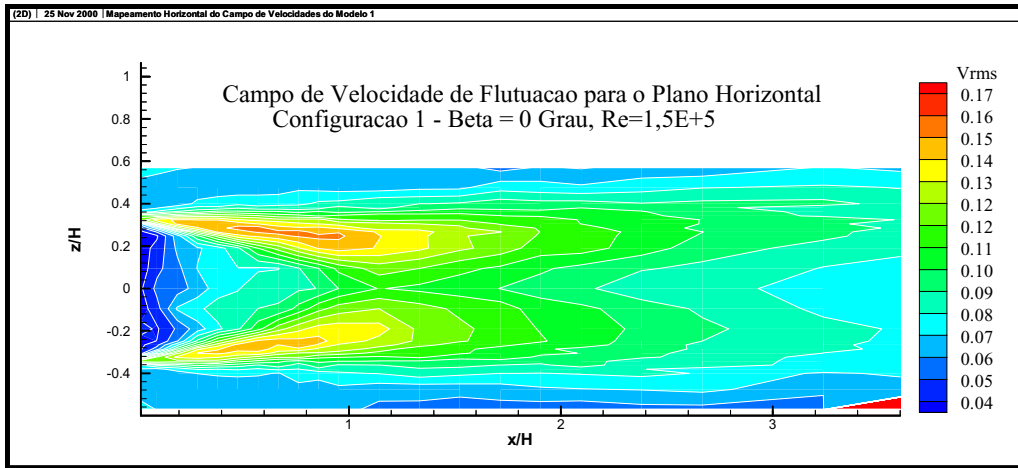


Figura 8: Mapeamento horizontal da velocidade de flutuação para o modelo 1 com ângulo $\beta = 0^\circ$.

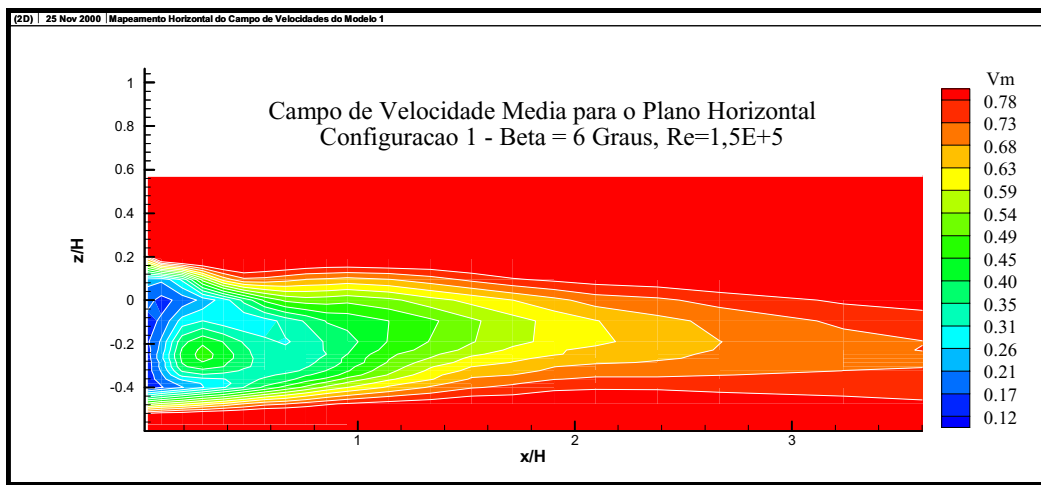


Figura 9: Mapeamento horizontal da velocidade média para o modelo 1 com ângulo $\beta = 6^\circ$.

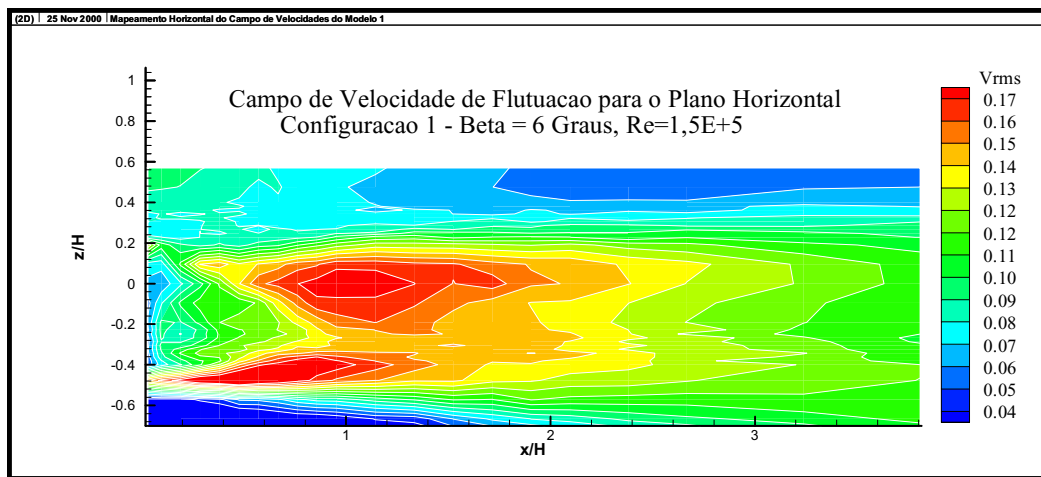


Figura 10: Mapeamento horizontal da velocidade de flutuação para o modelo 1 com ângulo $\beta = 6^\circ$.

No mapeamento do campo de velocidade média para a configuração 1 com ângulo de guinada $\beta = 9^\circ$, a estrutura citada anteriormente desloca-se acentuadamente para a esquerda, indicando que esta está ligada aos vórtices laterais e não ao vórtice emitido na região inferior como considerado em trabalhos anteriores (Moreira, 1996).

Como mostrado nos mapeamentos anteriores, os vórtices emitidos na lateral esquerda do modelo se aproximam da superfície traseira do modelo enquanto os emitidos na lateral direita se afastam. Entretanto, o mesmo não ocorreu para a situação onde o modelo se encontrava com um ângulo de guinada $\beta = 9^\circ$, pois, neste caso, $L_F = 0,68$ para o vórtice emitido na lateral esquerda enquanto que para o vórtice emitido na lateral direita, este valor foi 0,85.

3.2 – Configuração 3

A esteira da configuração 3 foi escolhida para ser melhor analisada por ter esta configuração apresentado o menor coeficiente de arrasto e principalmente, por apresentar pequenas variações deste parâmetro com o ângulo de guinada β . Como a variação de C_D com β foi associado, por Moreira (1996), ao incremento do arrasto de base do modelo, seria interessante verificar se a estrutura da esteira é diferente daquela observada no modelo 1, para o qual o C_D varia de forma mais acentuada com β .

Para $\beta=0^\circ$, os resultados obtidos para o campo de velocidade média, no plano horizontal, da configuração 3 permaneceram praticamente inalterados quando comparada aos resultados relativos à configuração 1. O mesmo ocorreu para a configuração 5, que apresentou um estrutura da esteira muito semelhante a mostrada na fig. 7.

Para $\beta \neq 0^\circ$, pode-se observar que o campo de velocidade média (vide Fig. 11) possui uma região de maior magnitude próxima a traseira do modelo e que esta região foi deslocada para o lado esquerdo (parte inferior da fig. 11). Este deslocamento parece estar correlacionado com a nova topologia dos vórtices na esteira, onde o vórtice do lado esquerdo aproximou-se do modelo enquanto o do lado direito se afastou, como pode ser visto na fig. 12 (lembrar que a posição de máximo valor “rms” mostra a posição do vórtice no final do processo de formação).

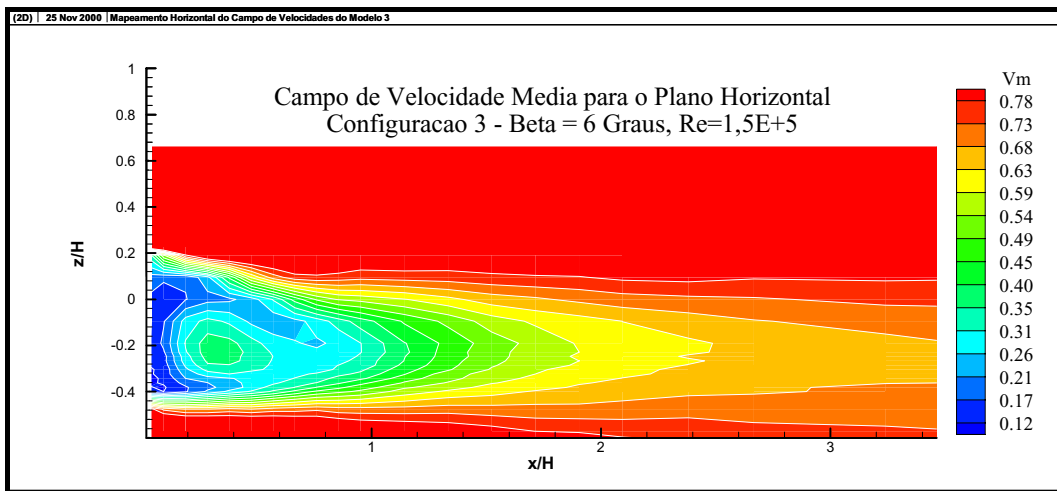


Figura 11. Campo de velocidade média (u_M) para o Modelo 3 com o ângulo de derrapagem $\beta=6^\circ$.

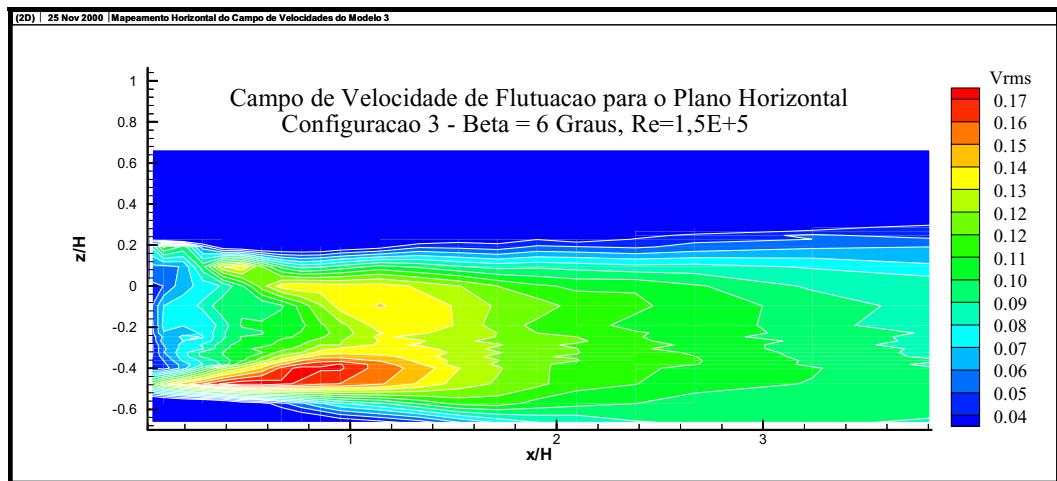


Figura 12. Campo de velocidade de flutuação (u_{RMS}) para o Modelo 3 com o ângulo de derrapagem $\beta=6^\circ$.

Analisando-se a figura 12, pode-se verificar que a camada de cisalhamento livre na lateral esquerda (parte inferior da figura) está praticamente alinhada à direção do escoamento não perturbado (o qual é paralelo à fronteira da região mapeada). Por outro lado, na lateral direita, a camada de cisalhamento possui uma inclinação considerável para o interior da esteira, a qual é responsável pela posição do vórtice que tem origem no enrolamento da citada camada de cisalhamento. Configuração semelhante pode ser observada na fig. 11, pois a fronteira da esteira na lateral esquerda está praticamente paralela à direção do escoamento não perturbado, enquanto do lado oposto existe uma inclinação para o interior da esteira.

A figura 13 mostra o comportamento da largura da esteira para os modelos 1 e 3:

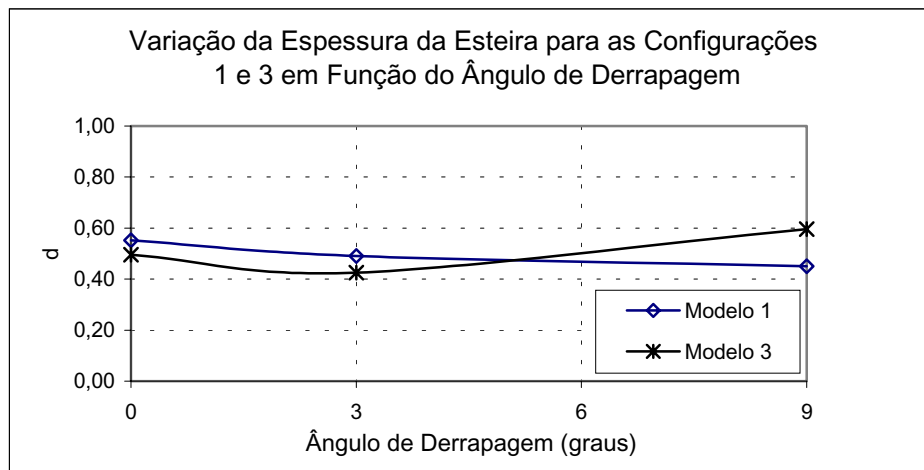


Figura 17: Variação da espessura devido à variação do ângulo de derrapagem (ou guinada).

De posse do gráfico acima pôde-se constatar que não houve uma grande variação na espessura “d” para baixos valores do ângulo de guinada (β). A maior variação ocorreu para $\beta=9^\circ$ onde esta diferença alcançou um valor de aproximadamente 24%. Deve-se lembrar que esta espessura foi obtida através da distância entre os picos de velocidade flutuante.

4. CONCLUSÕES

Próximo à superfície traseira do modelo, verificou-se, como era esperado, a presença de uma região com velocidades médias baixas. Esta região de baixa velocidade é conhecida como “região de água morta” e para escoamento sobre corpos rombudos bidimensionais, esta característica está associada ao valor constante encontrado para a pressão na base. No entanto, para um veículo como o estudado no presente trabalho, existe uma região localizada na parte inferior da superfície traseira que possui coeficiente de pressão mais negativo. Esta região parece estar associada ao vórtice gerado na superfície inferior, o qual se forma mais próximo da base que as demais estruturas vorticais, que se originam nas outras superfícies do modelo, como pode ser visto nos resultados apresentados acima.

Desta forma, para ângulo de guinada nulo, poder-se-ia definir duas regiões de formação: Uma caracterizada pelo vórtice desenvolvido a partir da superfície inferior e a outra que contém os demais vórtices, os quais estão localizados a uma distância maior da base do veículo. Para ângulo de guinada diferente de zero a configuração do escoamento fica mais complexa, pois os vórtices que tem origem nas superfícies laterais se estabelecem em posições distintas com relação à superfície traseira do modelo, como mostrado anteriormente. Esta assimetria nas posições dos vórtices parece estar correlacionada com uma assimetria na distribuição de pressão na superfície traseira, como relatado por Moreira (1996). Além disto, o incremento do ângulo de guinada esta relacionada com a variação na topologia da esteira, existindo uma tendência que o sistema de vórtices como um todo se aproxime da traseira do veículo, acarretando redução do coeficiente de pressão na base do modelo e, conseqüente, incremento no coeficiente de arrasto do veículo, como foi mostrado por Videira & Girardi (2000).

Em trabalhos futuros serão realizadas medidas do campo de pressões na superfície traseira do modelo juntamente com um mapeamento mais refinado, de maneira que se possa fazer uma correlação mais precisa entre o arrasto de pressão da base do veículo com a topologia da esteira.

5. AGRADECIMENTOS

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelos recursos disponibilizados para a aquisição de equipamentos usados nesta pesquisa (processo 95/05569-1) e a Coordenadoria de Apoio a Pesquisa de Nível Superior (CAPES) pelo suporte do primeiro autor, na forma de bolsa de estudo.

6. REFERÊNCIAS

- Bearman, P.W., 1967, On vortex street wake, *Journal Fluid Mechanics*, vol 28, pp 625-634.
- Câmara, E.F. & Girardi, R.M., 1995, "On the Aerodynamic Analysis of a Bus Model". SAE Technical Paper 952265 E. (Artigo apresentado no IV Congresso e Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade, São Paulo, SP, Out. 1995.)
- Câmara, E.F., 1993 “*Estudo Aerodinâmico do Escoamento sobre o Modelo de um Ônibus*”, Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP.

- Girardi, R.M. & Câmara, E.F., 1993, "Estudo Experimental do Escoamento sobre um Modelo de Ônibus". XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (XII COBEM), Brasília, DF.
- Hucho, W.H. et al., 1987, "Aerodynamics of Road Vehicle", Butterworths Co
- Kline, S.J. and McClintock, F.A., 1953, "Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments", Mechanical Engineering, Jan.
- Manual – "Dados Técnicos de Ônibus Rodoviários, O 400R, O 400RS, O 400RSL e O400RSD" Mercedes Benz do Brasil S.A.
- Moreira, O. Jr., 1996, "Estudo Experimental do Escoamento sobre Modelos de Ônibus com Diferentes Inclinações da Superfície Frontal", Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP.
- Roshko, A., 1954, "On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies", NACA TN 3169.
- Videira, L.C.P., & Girardi R.M., 2000, "Influência da parte frontal de um modelo de ônibus sobre os seus coeficientes aerodinâmicos", XX Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, CONEM 2000.
- White, F. M., 1994, "Fluid Mechanics", Mc Graw Hill Inc., 3 ed., pp 420-422.

YAW ANGLE INFLUENCE ON WAKES OF BUS MODELS

Roberto da Mota Girardi

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Praça Mal. Eduardo Gomes, 50, 12.200-900, São José dos Campos, SP.
Emai

Luís Carlos Pires Videira

Empresa Brasileira de Aeronáutica (EMBRAER), Av. Brigadeiro Faria Lima, 2170, 12.227-901, São José dos Campos, SP, Brasil.
Email

Abstract The present work is part of a wide research concerned to the flow on ground vehicles, more specifically buses. According to previous study, it was observed that the front geometric configuration of the model has influence on the function relating the drag coefficient with the yaw angle. This result indicates that the wake flow can be influenced by the model front surface shape. The present research's objective is to investigate the effect of the angle of the front surface on the wake formation of the bus model. This objective is accomplished by performing wake flow mappings (average and fluctuating velocities), by using a hot wire anemometer fixed at a three axis traversing system. Two model configurations were tested, each one with a different front surface geometry. Several yaw angles, in the range between 0 and 9 degrees, were used to obtain the average and fluctuating (rms value) velocity fields. The results are presented by means of color graphics to show, in a global manner, the variations detected in the experiments. Only small variations were observed between the models used in the present work.

Keywords: Aerodynamics of Vehicles, Blunt Body, Wake of Bus, Experimental Methods.

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF DROP FORMATION OVER A SPRAY NOZZLE-PLATE SYSTEM

Marcelo Bacci da Silva

School of Mechanical Engineering
Federal University of Uberlândia
e-mail: mbsilva@mecanica.ufu.br

Alexandre Antônio Santana

School of Mechanical Engineering
Federal University of Uberlândia
e-mail: xande-santana@bol.com.br

Marcos Antônio de Souza Barrozo

School of Chemical Engineering
Federal University of Uberlândia
e-mail: masbarrozo@ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

School of Mechanical Engineering
Federal University of Uberlândia
e-mail: aristeus@mecanica.ufu.br

Abstract. *A fundamental knowledge of drop formation in a spray nozzle-plate system permits reduction of water and energy consumption, thus improving the agricultural production. The object of this study is to present an experimental methodology that conducts to analysis of parameters that influence the drop generation over a spray nozzle-plate system. The methodology used to quantify the drop spectrum is based on high speed images recording technique to capture the high frequency phenomena in order to better understand the physics aspects involved. By means of this methodology, it is possible to characterize the drop spectrum of the existing spray-nozzle systems and also to suggest new types of these systems. Preliminary results demonstrate the viability of this methodology, which, in turn, can lead to broad practical application.*

Keywords. *drop spectrum, mean drop size, high speed recording, spray nozzle-plate, experimental design*

1. Introduction

The object of this study is to present an experimental methodology that permits analysis of parameters that influence the drop generation over a spray nozzle-plate system. An experimental investigation of drop formation mechanisms, drop diameter distributions, and spray distributions for spray nozzle-plate system was conducted. This generic type of nozzle is used for center pivot agricultural irrigation, and a fundamental knowledge of drop formation in a spray nozzle-plate system can help reduction of water and energy consumption, and therefore permits the optimization of spray nozzle-plate designs.

Reviews of drop formation mechanisms and drop size distribution for spraying are given by McCreery and Stoots (1996), van Der Geld and Vermeer (1994), and Hsing and Tankin (1996). According to these authors, the process is governed by surface tension, aerodynamic and liquid viscous forces and in all of these tests, drop diameter distributions were obtained with a phase Doppler particle analyzer, or by means of photograph techniques. Drop mean diameters are quantified.

Phenomena like the turbulence structure of the outside surface of the liquid jet, the flow of liquid across the plate, the free liquid sheet, liquid sheet instabilities, and the breakup of the liquid sheet into drops, was observed and described by Tarqui (1996) and Amorim et al. (1999).

In this article, the experimental methodology used to quantify the drop spectrum is based on high speed recording technique to capture the high frequency phenomena in order to determine drop diameter and better understand the physics question involved. A quantitative study of high frequency phenomena, as in the case of drop formation on nozzle-plate systems, is necessary to specify the structure and geometry of drops, as mentioned by McCreery and Stoots (1996). This specification demands maximum accuracy, due to the quality of soil wetting is directly affected by the size, quantity and distribution of drops, according to Kincaid & Lingley (1993).

Experimental methodology and experimental results are also described. To better understand how spray nozzle-plate parameters influence the drop diameter distribution, an experimental design was applied. This article concentrates on drop diameter distributions of one type of spray nozzle-plate.

2. Experimental Method and Apparatus

A spray nozzle-plate system investigated on this study is composed of an injection nozzle which projects a jet of water against a plate, as illustrated in Fig. (1). The jet is concentric to the plate and a liquid sheet forms after the plate. The liquid sheet flows in a radial direction outward from the plate, and breaks-up into drops.

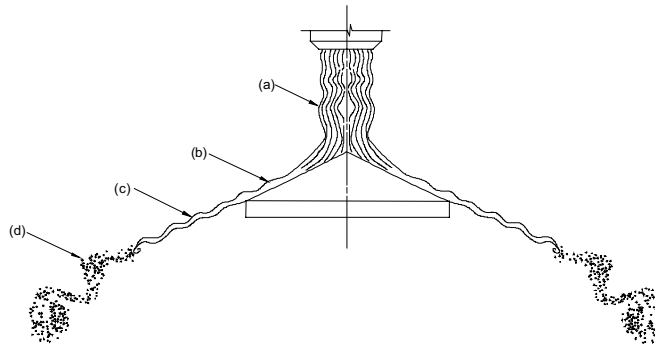


Figure 1. Spray nozzle-plate system; (a): liquid jet; (b): liquid film over the plate; (c): free liquid film; (d): drop formation.

A fundamental knowledge of drop formation in a spray nozzle-plate system is very important for the reduction of water and energy consumption, improving the uniformity of the irrigation area by reducing the undesirable effects of soil erosion and drop evaporation, thus optimizing the agricultural production. This improvement depends on the drop distribution and the physical phenomena that determine drop formation mechanisms and the drop size distribution. In this study the influence of 4 variables on drop diameter and on the drop size distribution were investigated: the diameter of the injection nozzle, the flow rate of the system, the nozzle-to-plate spacing, and the type of plate surface. A spray nozzle-plate system used on this study is shown in Fig. (2).

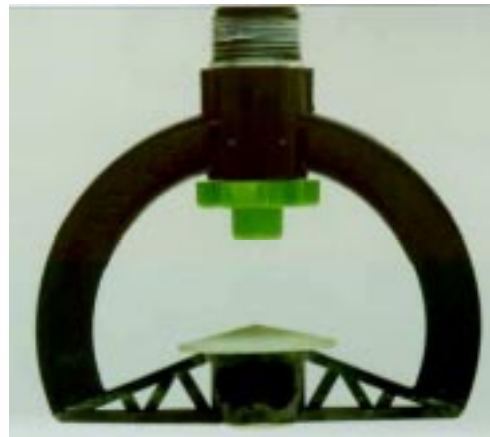


Figure 2. A typical nozzle-plate system investigated in the present study.

The experimental setup used to investigate the drop formation is shown in Fig. (3). At the start, water flows from a source to the injection nozzle which projects a jet against a conical plate and then the drops are formed. The images of the drops were captured by a high speed camera and were digitalized to permit treatment by software. A table of results is then obtained and transferred to software to be manipulated.

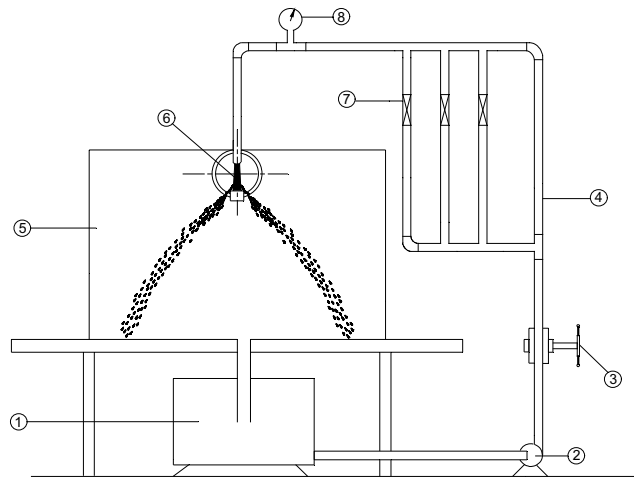


Figure 3. Experimental apparatus; 1: water source; 2: 2,24 kW pump; 3: valve; 4: PVC piping 25 mm diameter; 5: collector chamber; 6: injection nozzle and plate; 7: flow meters; 8: manometer.

A schematic diagram of experimental apparatus is shown in Fig. (4). To get the results in an unit system that is adequate to the applications, the software needs to be calibrated. For this, it is necessary to provide a reference element with the image, for example, a small sphere whose diameter is known. Therefore, when the image is taken, this reference element will appear and can be measured by the software, with which the drop size is compared.

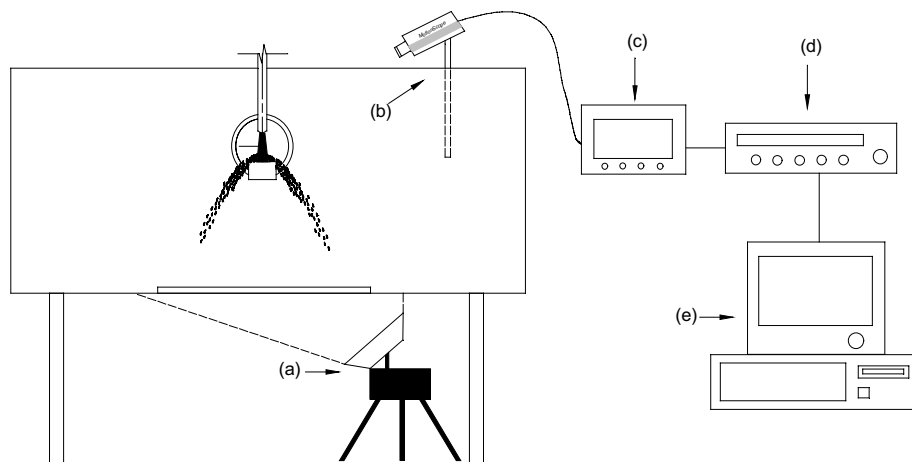


Figure 4. Schematic diagram of experimental apparatus. (a): two lamps of 1 kW; (b): high speed CCD camera; (c): camera monitor; (d): super VHS video; (e): frame grabber software (image analysis).

A typically drop size spectra produced by this spray nozzle-plate system is shown in Fig. (5).

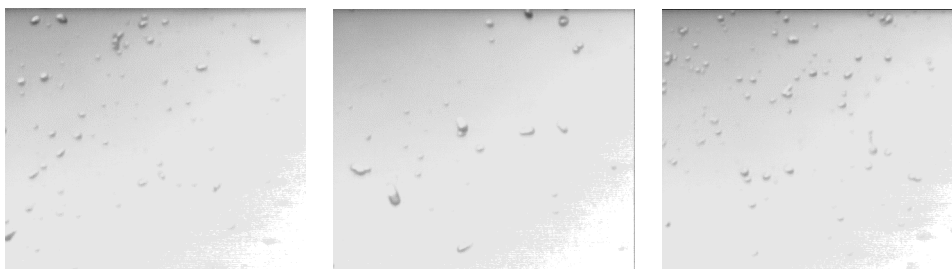


Figure 5. Three typically images captured using the described system.

Three images detailing drops formation process, are presented in Fig. (6).

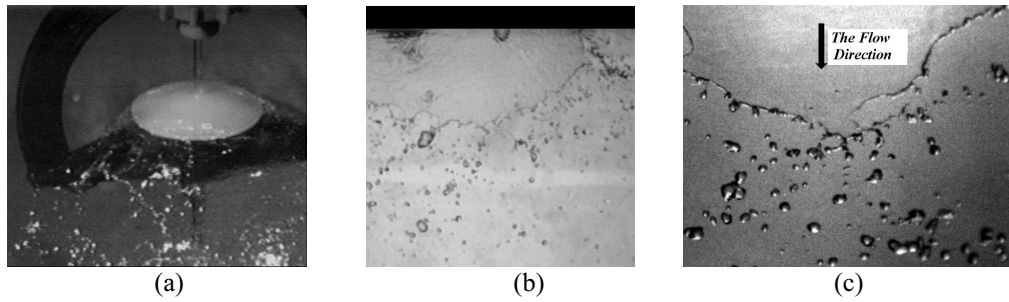


Figure 6. Sequential images of the system investigated: (a): injection nozzle and plate surface; (b): liquid sheet formed after the plate; (c): detailed image of the drops formation.

To calibrate the software in order to measure drop diameters, an image of drop spectra with a spherical body 4 mm in diameter was taken, as can be seen in Fig. (7).

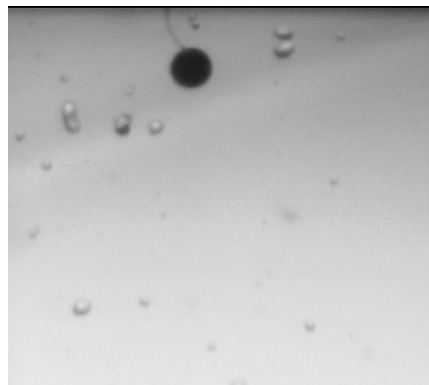


Figure 7. Drop spectra with a spherical body used in the calibration tool.

In the sequence, the images of the drops were digitalized and, after digital filtering, it was possible to determine the drops diameters. The software Global Lab used on this study, determine each drop diameter, according to the calibration system. The image showing the drops numbered is presented in Fig. (8).

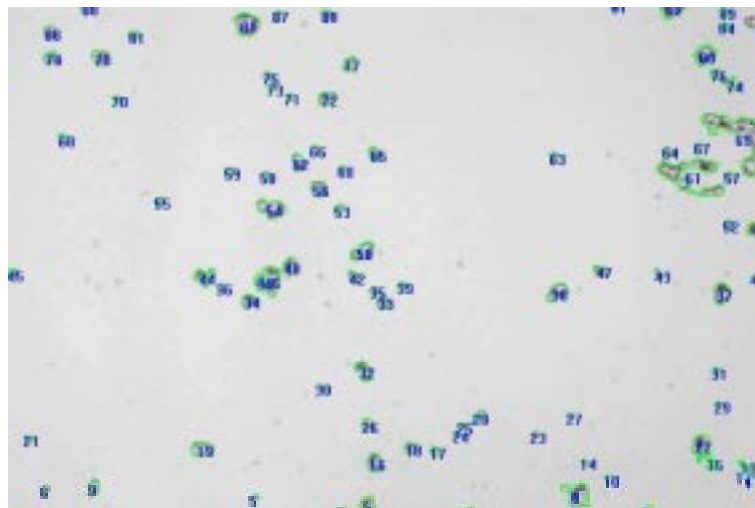


Figure 8. A typical image showing the drops numbered.

Experiments were performed to measure the effects of the control variables on a response. By using experimental design before conducts experiments, the confusing effects of experimental results can greatly help the investigator on identification and quantification of relevant variables on the process. The net effect is to increase greatly the probability that the investigator will be led along a true rather than a false path. Factorial designs are extremely useful for this purpose, especially two-level factorial designs, because they are economical and easy to use and can provide a great deal of valuable information, according to Box et al. (1978). In order to conduct the experiments and better understand the experimental results, a 2^4 factorial design was performed, according to Box et al. (1978). The levels of the 4

variables selected on this study, the diameter of the injection nozzle (d_b), the flow rate of the system (Q), the nozzle-to-plate spacing (h), and the geometry of plate, are presented in Table (1). The values appearing in Table (1) represents the maximum and minimum values concerned to the experimental setup. In the case of water flow rate, the maximum value depends on the pump capacity, which, in this study, is supplied by a 2,24 kW pump.

Table 1. Design Matrix of a Two-Level Factorial.

Variable	Level (+)	Level (-)
$X_1 : d_b$ [mm]	8.73	5.15
$X_2 : Q$ [cm ³ /s]	208.33	87.5
$X_3 : h$ [mm]	40	24
$X_4 : geometry of plate$	conical	plane

Table (1) shows a 2^4 factorial experiment in which there are three quantitative variables, diameter of the injection nozzle (d_b), flow rate of the system (Q), nozzle-to-plate spacing (h) and a single qualitative variable, the geometry of plate.

3. Results

Using a two-level factorial design to estimate the main effects of the variables, one can decide what type of plate geometry will be used on the tests and the influence of interaction of variables. After the experimental runs and software treatments, the results are the mean drop diameters in an adequate unit system, mm for example. Table (2) shows the recorded data with the levels coded so that for the quantitative variables a minus sign represents the low level and a plus sign the high level, and for a qualitative variable the two levels or versions can also be conveniently coded by minus and plus signs.

Table 2. Data from a 2^4 factorial design.

Experiment	X_1	X_2	X_3	X_4	Drop Diameter [mm]
1	-	-	-	-	1.063
2	+	-	-	-	1.820
3	-	+	-	-	0.674
4	+	+	-	-	0.940
5	-	-	+	-	1.781
6	+	-	+	-	3.390
7	-	+	+	-	0.990
8	+	+	+	-	2.360
9	-	-	-	+	1.180
10	+	-	-	+	2.090
11	-	+	-	+	0.622
12	+	+	-	+	1.000
13	-	-	+	+	1.823
14	+	-	+	+	2.668
15	-	+	+	+	0.913
16	+	+	+	+	1.885

As can be seen, each line in Table (2) represents an experimental condition, or a test to be realized in the experimental setup shown in Fig. (4). The result of each test is a frame sequence with images of the drops. In this experimental investigation, 16 sets of data were acquired. Each set consisted of 10 frames resulting in a total of 160 frames. Then, after software treatment, the final result of each test is the mean drop diameter, as presented in Table (2). The effects of the variables on the drop diameter and the significance level (α) of the variables, are presented in Table (3), and this is the final result of a statistical software.

Drop formation mechanism is governed by many parameters. An important aspect of the drop formation mechanism is the knowledge of the physical interaction between the gas and liquid phases, according to McCreery and Stoots (1996). Also, it is important to know how the flow characteristics influence the drop diameter. The flow rate and geometric conditions, like the diameter of the injection nozzle and nozzle-to-plate spacing, have an influence on the drop formation, as can be observed in Table (3), and the types of plate geometry used on the tests, do not influence the diameter of the drop.

Table 3. Significance level of the variables.

Factor	Effects	Significance Level (α)
X_1	0.888	0.0003
X_2	-0.804	0.0005
X_3	0.803	0.0006
X_4	-0.105	0.3560
$X_1.X_2$	-0.141	0.2260
$X_1.X_3$	-0.311	0.0295
$X_2.X_3$	-0.112	0.3250
$X_1.X_4$	-0.075	0.5010
$X_2.X_4$	-0.031	0.7720
$X_3.X_4$	-0.203	0.1050

As can be observed in Table (3), the variables that strongly influence the drop diameter are, in order of importance, the diameter of the injection nozzle (d_b), the water flow rate (Q) and the nozzle-to-plate spacing (h). This result was observed by a hypothesis test, where maximum probability error admitted is 5%, or, $\alpha < 0,05$. According to the results, the mean drop diameter remains the same for the two types of plate geometry investigated in this study. The qualitative variable plate geometry does not significantly influence the drop diameter ($\alpha = 0,36$). The results presented in Table (3) show that the dependence of drop diameter distribution on nozzle-to-plate spacing is less dramatic than the dependence on nozzle diameter and water flow rate.

Figure (9) shows the dependence of mean drop diameter on the injection nozzle diameter, and, as can be seen, there is a linear relation that was quantified.

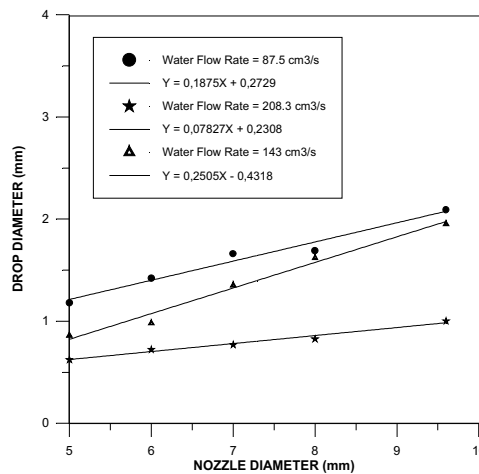


Figure 9. The effect of the nozzle diameter in the drop diameter.

After choosing an appropriate test condition, images of the drop field can be acquired and manipulated by software and the result is the mean drop diameter. A type of plate geometry can be used in an experimental run and, for a specific diameter of the injection nozzle, the study and analysis of the water flow rate (Q) as this affects drop size is demonstrated by the following histograms, according to Fig. (10) and (11).

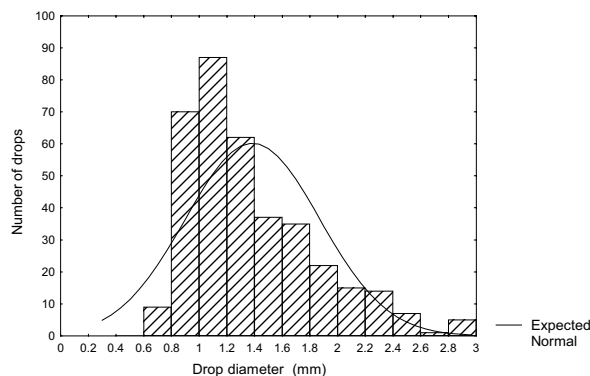


Figure 10. Drop diameter distribution – $Q = 47.2 \text{ cm}^3/\text{s}$

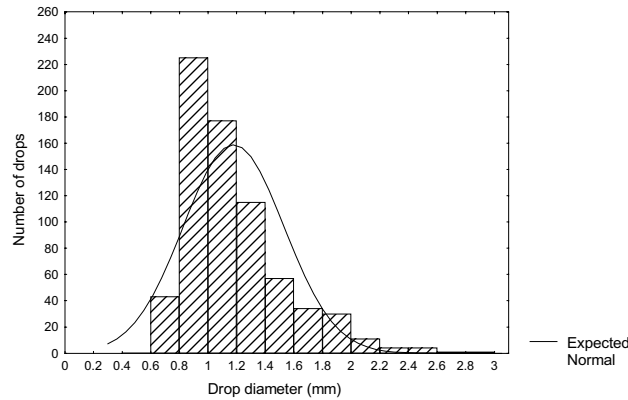


Figure 11. Drop diameter distribution – $Q = 69.4 \text{ cm}^3/\text{s}$

It can be noted that there is a strong tendency for the formation of drops having a diameter of 1 to 2 mm. It can be seen that, by increasing the water flow rate, an increase in the number of drops is achieved, which is to be expected. In Fig. (10) and (11), it can be noted that, when the drop diameter shrinks to zero, the number of drops likewise zeroes, an expected physical reaction. It can also be observed that in the case of diameters larger than the maximum in the spectrum, once again the number of drops falls to zero, indicating a limit to the number of drops that can be formed by this system.

After the 2^4 experimental design runs, the results indicated that it is possible to expand the analysis to other values of the three remaining variables, in order to better understand the variables interactions and to quantify that. To do this, a 3^3 experimental design should be applied to future work, to quantify the dependence of drop diameter distribution on these variables more strongly, and to permit the quantification of this dependence by means of surface response methodology.

4. Concluding Remarks

Drop diameter distribution data for a spray nozzle-plate system were measured using a high speed recording technique, and a mean diameter was calculated for each distribution.

A 2^4 experimental design was performed and the experiments quantify the influence of nozzle diameter, nozzle-to-plate spacing, water flow rate of the system and type of plate geometry on the drop diameter.

In general, drop diameter increases with nozzle diameter and decreases with increasing water flow rate. The dependence of drop diameter distribution on nozzle-to-plate spacing is less dramatic than the dependence on injection nozzle diameter and water flow rate. The plate geometry does not influence the drop diameter. The diameter of the spherical body used to calibrate the software is higher than the smallest drops obtained during the experiments. Therefore, the results should be confirmed with a new calibration, using a 2 mm diameter sphere, which will be done in further experiments.

A 3^3 experimental design should be applied to future work, to quantify the dependence of drop diameter distribution on nozzle diameter, water flow rate and nozzle-to-plate spacing, by means of surface response methodology.

5. References

- Amorim, L.M., Silva, M.B. and Silveira Neto, A., 1999, "Experimental Investigation of the Flow Transition Over a Spray Nozzle-Plate System", *Two-Phase Flow Modelling and Experimentation*, Vol. 3, Pisa, Italy, pp. 1929 – 1935.
- Box, G.E.P., Hunter, W.G., Hunter, J.S., "Statistics for Experimenters – An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building", 1978, John Wiley & Sons, Inc.
- Hsing, P.C. and Tankin, R.S., 1996, "Measurement of Droplet Size, Velocity, and Temperature Distributions in Rayleigh Flow", *Experiments in Fluids*, 22, pp. 144-152.
- Kincaid, D.C., 1993, "Sprinkler Droplet Kinetic Energy and Erosion Potential", ASAE paper 93102, American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, MI.
- McCreery, G.E. and Stoots, C.M., 1996, "Drop Formation Mechanisms and Size Distributions for Spray Plate Nozzles", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 22, N° 3, pp. 431-452.
- Van Der Geld, C.W.M. and Vermeer, H., 1994, "Prediction of Drop Size Distributions in Sprays Using the Maximum Entropy Formalism: The Effect of Satellite Formation", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 20, N° 2, pp. 363-381.
- Tarqui, J.L.Z., 1996, "Desenvolvimento de um Método de Fotografia para o Estudo de Fenômenos de Altas Frequências em Aspersores Jato-Placa", Master of Science Dissertation, Federal University of Uberlândia.

FLOW AND PARTICLE TRAJECTORIES SIMULATION WITHIN AN INERTIAL AEROSOL SAMPLER

Renata S. Cardoso

Dept. de Eng. Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, DEM/PUC-Rio
CEP 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Marcos Sebastião de Paula Gomes

Dept. de Eng. Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, DEM/PUC-Rio
CEP 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
e-mail: mspgomes@mec.puc-rio.br

The work presents numerical simulation results obtained for the flow field and the particle trajectories inside a multiple stage cascade impactor. The instrument is widely employed in the sampling and characterization of particulate pollutants suspended in the air (aerosols), in the range of aerodynamic diameters between 0,5 and 17 microns. After the determination of the particle trajectories, it is possible to evaluate the sampling and collection efficiencies for the different particle sizes, as well as to identify regions of undesirable deposition outside the instrument substrates, which are a frequent source of data misinterpretation. This type of information is highly relevant to the development and optimization of such instruments, and will be taken into account in the design of the next prototype to be assembled at the Laboratório de Engenharia Ambiental – Poluição Atmosférica do DEM/PUC-Rio.

Keywords: *Aerosol Technology, Instrumentation, Air Pollution, Atmospheric Aerosols, Environmental Assessment.*

1. Introduction

Inertial impactors, also known as cascade impactors, are devices with the ability of classifying suspended particles in particulate laden gases (aerosol systems), based in their inertia (or size). They have been used for some time (May introduced the first cascade impactor in 1945) in obtaining the mass-size distribution of airborne contaminants. Some of the applications of such instruments are in the areas of: (i) air pollution studies, (ii) in the evaluation of occupational hazards, and (iii) in bio-aerosols sampling (Cox and Wather, 1995).

In cascade impactors, the size fractionation is achieved by drawing the particulate contaminated gas through the consecutive stages of the instrument. Generally speaking, each stage is composed by a “nozzle” (one or more orifices) and an “impaction plate” (where the material will collect) placed perpendicularly and just underneath the jet stream. The aerosol (gas + airborne particles) impinges against the collection plate and is forced to go around it, with increasing velocities from one stage to the next (the nozzle diameter is reduced from one stage to the next, and therefore we may catch smaller particles at each stage, when moving along the instrument).

In each stage, the inertia force is responsible for causing a deviation in the trajectories of the large particles with respect to the gas streamlines, forcing them to impact on top of the plate. The finer particulate proceed to the next stage. If no significant bouncing occurs, and if no deposit overload is observed in the collection surface, it is theoretically possible to assume a cut-off size for the retention of particles in every stage. Above this theoretical size limit, all particles will be collected in that stage. Therefore, one may obtain the mass-size distribution for a particular aerosol by weighing the collection plates, before and after sampling. The mass concentration may be calculated by taking into account the sampling time and flow rate.

Although several instruments have been constructed based in the above principle since its first introduction by May, there is much space for development. Present research interests focus on the steepness of the collection efficiency curves for each stage, and on the minimization of entrance and inter-stage losses (Marple et al., 1993). In the development of such instruments it is used both the experimental and the numerical approach.

Impactor model results, which represent the numerical solution of the fluid dynamic and particle trajectory equations for the jet-plate geometry, have been previously used as a guideline during the design process (Marple and Liu, 1974; Rader and Marple, 1985). The present work describes a series of flow and particle trajectories simulations with the main purpose of identifying recirculation regions where the particles have a greater probability for depositing in the wall of the instrument. These depositions, as they are not accounted for during the weighing of the substrates, represent a loss of information and hence should be avoided. Once again, the numerical simulations of the flow field and particles trajectories are employed as a tool for developing and improving the performance of such instruments.

2. Flow Field and Particle Trajectories

The commercial code FLUENT was employed in obtaining the numerical solution of the flow field and in the calculations of the particle trajectories within the cascade impactor. For calculating the flow field, it was solved the equation of continuity and the equation for the conservation of linear momentum in cylindrical coordinates. On top of that, the k- ϵ model of turbulence was employed for providing the closure to the turbulent flow problem.

In addition to solving the flow field relative to the continuous phase, the behavior of the airborne particles within the instrument (dispersed second phase) was simulated in a Lagrangian frame of reference. It was also possible to

include the effects of turbulence on the dispersion of the particles due to the turbulent eddies present in the continuous phase. These effects were predicted by using a random walk model which included the effect of the instantaneous turbulent velocity fluctuations on the particle trajectories by using stochastic methods.

The trajectory of the dispersed phase particle was predicted by integrating the force balance on the particle, written in a Lagrangian reference frame. The force balance equates the particle inertia with the forces acting on the particle, and may be written, for the x direction and in Cartesian coordinates, according to:

$$\frac{du_p}{dt} = F_D^*(u - u_p) + \frac{g_x(\rho_p - \rho)}{\rho_p} + F_x \quad (1)$$

where $F_D^*(u - u_p)$ is the drag force per unit particle mass and:

$$F_D^* = \frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} \frac{C_D Re}{24} = \frac{1}{\tau} \frac{C_D Re}{24} \quad (2)$$

Here, u is the fluid velocity, u_p is the particle velocity, μ is the absolute viscosity of the fluid, ρ is the fluid density, ρ_p is the density of the particle, D_p is the particle diameter, and τ is the relaxation time for the particle. The latter is a measurement of the time it takes the particles to adjust to a new equilibrium condition, after a change had occurred in the external forces acting on them. Re indicates the relative Reynolds number, defined according to:

$$Re = \frac{\rho D_p |u_p - u|}{\mu} \quad (3)$$

For the range of particle sizes relevant to this problem, we are mostly in the Stokes regime ($Re < 1$), where $C_D = 24/Re$. In case the Reynolds number reaches values above unity, something which may occur for larger particles (50 microns and above) or when the relative velocity between the particles and the fluid is larger than usual, we may have to calculate C_D by using any of the appropriate empirical relations (best-fit polynomials) representing the drag coefficient of a sphere. The above balance equation (Eq. 1) includes also a gravity force term and an additional forces term (F_x). The latter may be important under special circumstances, for example, when $\rho > \rho_p$ it may represent the virtual mass force necessary to accelerate the fluid surrounding the particle, or it may represent additional forces due to large pressure gradients in the fluid. In our case, the trajectories of the particles were calculated including the effects of inertia and hydrodynamic drag. The effects of gravity and any additional forces were disregarded with respect to the other forces acting on the particles.

The trajectories were predicted taking into account the instantaneous fluid velocity along the particle path ($u = \bar{u} + u'$) during the integration, therefore considering the random effects of turbulence on the particle dispersion. The Continuous Random Walk Model (CRW) was employed, in which the instantaneous velocity components of the turbulent flow were obtained by solution of the Langevin equation:

$$du_i = \frac{1}{T} u_i dt + \left(\frac{2\overline{u'_i u'_i}}{T} \right)^{1/2} dw \quad (4)$$

Here, T is the integral time, which describes the time spent by a particle in turbulent motion along the particle path, and dw represents a stochastic process (white noise) with zero mean ($\text{mean}(dw) = 0$) and variance equal to the time interval ($\text{variance}(dw)^2 = dt$). For fine inertialess particles, which perfectly follow the flow, the integral time corresponds to the Lagrangian integral time scale for the flow T_L , which is approximated in FLUENT by $T_L \sim 0.15k/\epsilon$. For larger particles, however, the reduction in the integral time with respect to T_L is modeled by the Csanady equation:

$$\frac{T}{T_L} = \frac{1}{(1 + f\beta^2 v_d^2 / k)^{1/2}} \quad (5)$$

In FLUENT, f is taken to be equal to 6 and β is given a default value of 0.5. The instantaneous drift velocity v_d (where $v_d = u - u_p$) is averaged over a period corresponding to three times the Lagrangian time scale for the flow.

Due to the small concentration and size of the airborne particles in the operation of such instruments, it is possible for one to assume an uncoupled procedure in obtaining the solution to the problem. The particles do not interfere with the flow, therefore it is possible, firstly, to obtain a converged solution for the turbulent flow field and then to integrate the particle trajectory equation for that flow field.

3. Impactor Geometry - Prototype Design

A round nozzles cascade impactor with eight stages, for the range of aerodynamic diameter (corresponds to the diameter of a sphere with relative density equal to 1) cut-off sizes between 0.5 μm and 17 μm , and operating with a nominal sampling flow rate of 30 liters per minute was built in the Laboratório de Engenharia Ambiental – Poluição Atmosférica do DEM/PUC-Rio (Gomes, 1997). Table (1) shows the final values for the design parameters, where N is the number of orifices in each stage, W is the diameter of the orifices, V_o is average velocity in the orifices, $P_{\text{stage}}/P_{\text{inlet}}$ is the pressure ratio for each stage, Re is the Reynolds number based in the orifice diameter and in V_o , and d_{50} corresponds to the particle aerodynamic diameter which is collected with 50% efficiency. It represents the cut-off size for each stage.

Table 1. Final design for the first prototype cascade impactor of the DEM/PUC-Rio (Q=30 lpm).

N	W (mm)	d_{50} C1/2 (μm)	V_o (m/s)	$P_{\text{stage}}/P_{\text{inlet}}$	Re	d_{50} (μm)
1	17,0	17,4	2,20	1,00	2493	17,3
3	8,5	10,6	2,94	1,00	1662	10,5
3	6,1	6,5	5,70	1,00	2316	6,4
5	3,7	3,9	9,30	1,00	2291	3,8
7	2,4	2,4	15,8	1,00	2523	2,3
10	1,6	1,6	24,9	0,99	2649	1,5
14	1,0	0,92	45,7	0,98	3027	0,85
18	0,7	0,61	73,5	0,95	3364	0,53

The prototype was built in aluminum, except for the base which was built from brass, for making it easy of manufacturing. The impaction plates hold 37 mm substrates, which may be of different material, depending on the application. The inlet may be positioned on top of any of the sections, so that a smaller number of stages may be used during sampling. The base receives all the stages, and serves as a holder for a 37 mm back-up filter. It also has a threaded hose fitting for connecting it to a vacuum pump. A critical orifice is used in the suction line for maintaining a known constant flow rate during sampling.

Figure (1a) is a picture of the disassembled impactor. The impaction plates and respective caps, for holding the collection substrates, are arranged horizontally in the bottom of the picture. The following description is given in a top to bottom direction. In the far left column, it is possible to observe the bottom of the impactor base (male thread), Teflon washers for the base, and the top of the base (female thread). The washers are used for holding the back-up filter in place, and to guarantee an air-tight seal. In the next four columns to the right, stages from eight to two appear together with their respective orifice blocks. In the far right column, it is shown stage one, and the two parts which form the multidirectional inlet. O’rings were used in the coupling between the stages, and also in between the orifice blocks and the bodies of the stages. The whole design took into consideration the minimization of inter-stage losses. Obstructions and sudden changes in the flow direction were avoided to a maximum. Figure (1b) shows the assembled impactor. The height of the instrument is about 40cm and the diameter is 5cm.



Figure 1. Eight Stages Cascade Impactor, (a) unassembled and (b) assembled

4. Numerical Investigation of the Impactor Performance

The attention in this work is concentrated towards the first three stages of the impactor, the ones through which the largest sized particles traverse and therefore represent the region with the greatest probability for the deposition of particles in unwanted locations. The geometry of the second and the third stages of the impactor is such that it would require the simulation of the problem in a three-dimensional framework. However, for simplicity, at least in this phase of the inquiry, the second and third stages were pictured as one-orifice stages, therefore allowing for the use of a simplified two-dimensional geometry. The criteria for substituting the original number of orifices in each stage for a single one at the centerline of the impactor was the same area – same velocity approach. This would allow for a more close-to-reality simulation.

The geometry corresponding to the first three stages was first approximated by using abrupt contractions before each set of orifices, according to Fig. (2a), and then a more realistic representation was used as the one depicted in Fig. (2b). These two situations will be referred from now on as Case A and Case B, respectively. In both pictures the flow is from left to right. The inlet is the vertical line on the left side while the centerline of the instrument is the horizontal line at the bottom of the picture. The inlet radius is 0,025m. The flow goes through the first stage orifice, with a radius of 0,0085m and impacts towards the first impaction plate. It then goes through the nozzle of the second stage, which has an equivalent orifice with a radius of 0,0074m, and impacts towards the second impaction plate. Finally, the flow goes through the third stage nozzle, with an equivalent orifice with a radius of 0,0053m, impacts towards the third stage collection plate and then leaves the computational domain through the nozzle of the fourth stage, which has an equivalent orifice with a radius of 0,0042m.

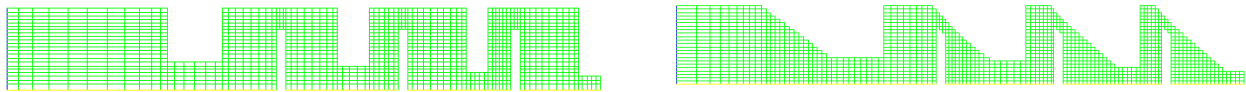


Figure 2. Two-dimensional geometries corresponding to the first 3 stages of the impactor, (a) approximation with abrupt contractions (Case A), and (b) approximation with an inclined transition of the diameter which is closer to reality (Case B).

Although the geometry of Fig. (2b) represents more closely the actual operation in the first three stages of the impactor, the flow calculations obtained when using the geometry of Fig. (2a) was also included in this work. The main purpose was to demonstrate that the soft transition in diameter may have a significant effect in the flow patterns, avoiding unwanted particle deposition. Figure 2 also shows the grids which were used in the solution of the two Cases, in cylindrical coordinates. After a few trials, the more appropriate grid arrangement for each Case was 89x22 internal control volumes for the abrupt contraction simulations (Case A) and 119x23 internal cells for the inclined diameter transition (Case B).

The input information for the problem were: (1) air properties: $\mu=1,81 \times 10^{-5}$ Pa.s and ρ was computed from the ideal gas law; (2) inlet boundary conditions: uniform u velocity = 0,255 m/s, which corresponds to the flow rate of 30 liters per minute, turbulence intensity = 10%, turbulence length scale = 0,01 m, and reference pressure = $1,01 \times 10^5$ Pa. Usual wall functions and parameters for the k- ϵ model were employed in the solution of the problem (Lauder and Spalding 1972, 1974; Patankar, 1980).

Figure 3 shows the stream functions for the two situations, while Fig. (4) presents the velocity vectors.

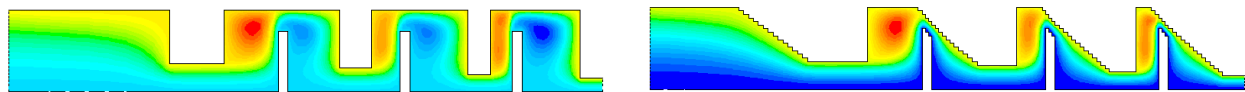


Figure 3. Stream function resulting from the two simulations, (a) for Case A and (b) for Case B.

It is clear from these results that the inclined transition of the diameters helps in reducing the formation of recirculation regions. The recirculation which appears beneath each one of the collection plates in Fig. (3a) and Fig. (4a), disappear in Fig. (3b) and Fig. (4b). The inclined section bringing the flow which by-passes the impaction plate towards the nozzle of the next stage is much more efficient in performing this task than the abrupt contraction of Case A. By avoiding the recirculation under the impaction plates, the slow contraction reduces the probability that particles entrained in these recirculating vortices find their way towards the bottom surface of the impaction plates. Particles

deposited outside the impaction plates front surface, where the substrates are placed, are not accounted for during the weighing process and therefore represent a loss of information.

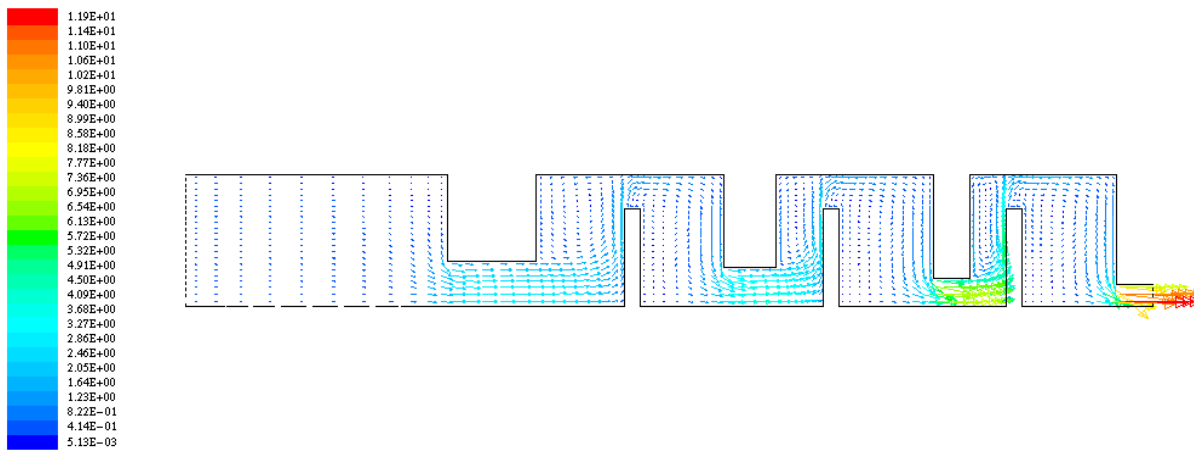


Figure 4(a). Velocity vectors resulting from the simulations of Case A. The velocities are in m/s.

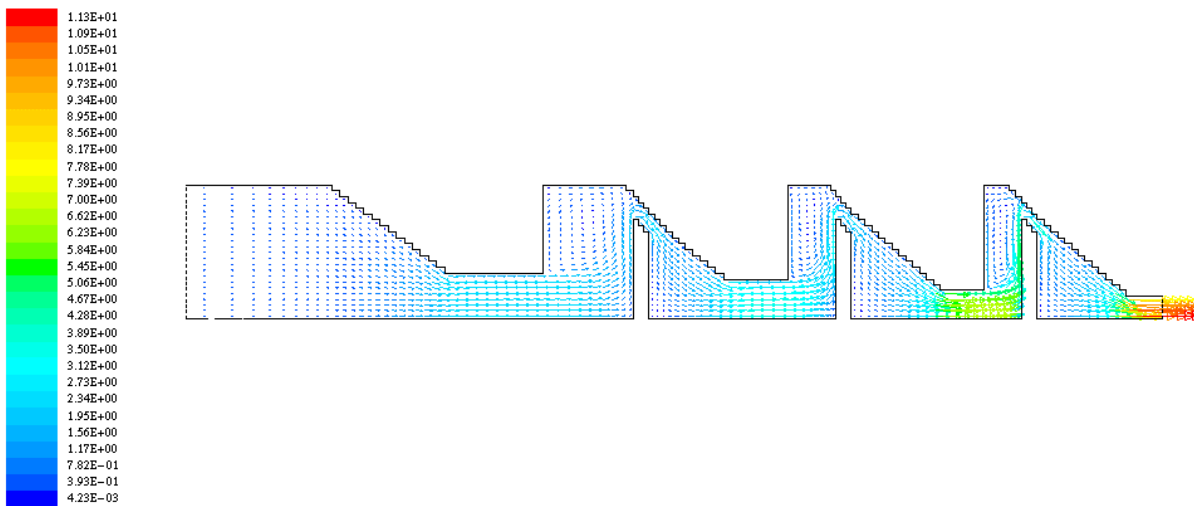


Figure 4(b). Velocity vectors resulting from the simulations of Case B. The velocities are in m/s.

It is also possible to predict that a better design for the next prototype to be developed would include inclined diameter transitions between the nozzle exit section and the impaction plate section. By doing so we would try to get rid

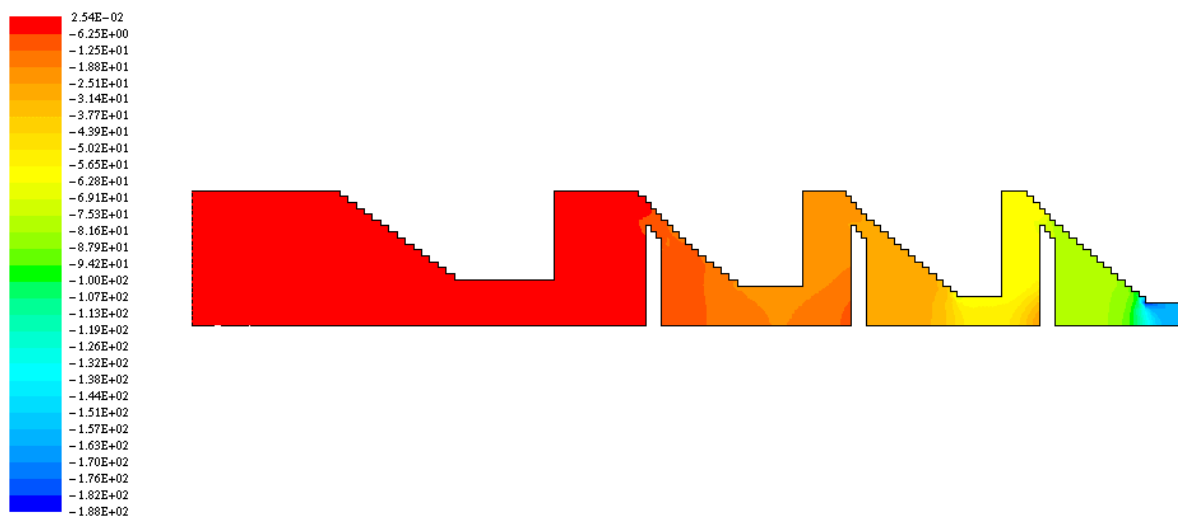


Figure 5. Field of relative static pressure for the simulations of Case B. The pressure is in Pa.

of the other recirculation regions which were found above the impaction plates. Even before presenting any particle trajectories simulation results, it is possible for one to visualize that a large number of particles will be trapped in these regions and consequently may find their way towards the walls of the instrument.

Figure 5 shows the field of relative static pressure resulting from the simulation. The static pressure reduction in the first three stages was approximately 60 Pa, while it was about 180 Pa for the whole computational domain up to the fourth nozzle. This would provide a pressure ratio P_{stage}/P_{inlet} approximately equal to 1 for the first three stages, in agreement with the estimate obtained during the design process.

Figure 6 represents the simulation of the trajectories for particles released at twelve different locations at the inlet of the impactor (left side of the figure). The particles have an aerodynamic diameter of 10 microns. These are averaged trajectories which do not take into account the effect of the fluctuating velocities and turbulence. At the top of Fig. (6) the trajectories were presented for the whole geometry up to the third stage. At the bottom of Fig. (6) it was presented a detail view of each one of the stages. The averaged trajectories indicate that 4/12 (33,3%) of the 10 micron particles deposited on the first stage, none of them deposited on the second stage, and the remaining 8/12 (66,6%) deposited on the third stage. These results indicate that the 10 micron particles have a larger penetration through the instrument than it is expected. By looking at the design parameters in Tab. (1), it is expected that the 10 micron particles should be collected at the second stage of the impactor with a collection efficiency of about 50%. The numerical results indicate that none of the 10 micron particles released at the inlet of the instrument were collected at the second stage and that 66,6% of them were collected at the third stage.

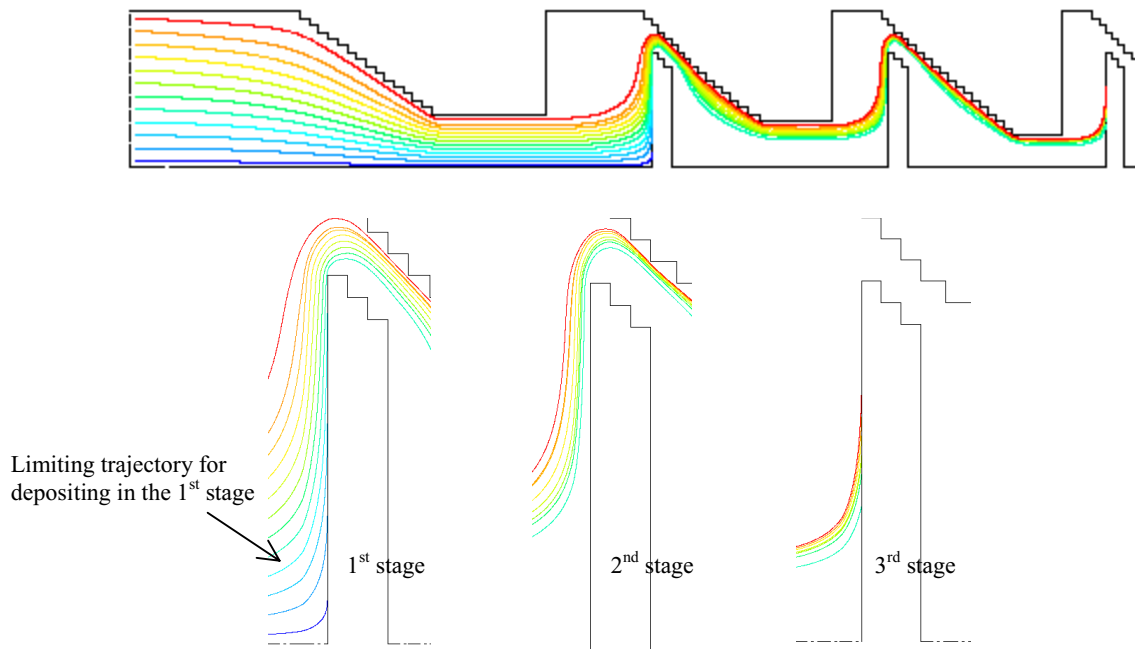


Figure 6. Averaged trajectories for 10 micron particles released at 12 locations at the inlet of the instrument.

Figure 7 represents the simulation of the trajectories for the same 10 micron particles released at the same twelve locations at the inlet of the impactor, but now the particles experience the effect of turbulence and are affected by the fluctuating velocities. The trajectories were calculated by using the previously described Continuous Random Walk (CRW) model. At each one of the twelve locations, four particles were released traversing through different paths. Each one represents a possible path for the particle released at that location. Each color in the figure indicate a location of release at the inlet of the impactor.

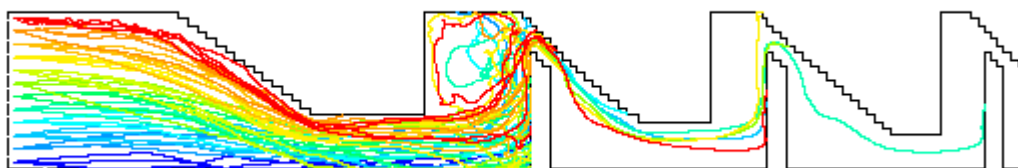


Figure 7. Trajectories obtained for the 10 micron particles under the influence of turbulence. For each one of the 12 injection locations at the inlet of the instrument, 4 possible random walk paths were computed by employing the CRW model.

It is possible to observe in figure 7 that there was an increase in the collection of the 10 micron particles in the first stage. The recirculation zone above the first stage is responsible for collecting a large number of particles.

Figures 8 and 9 present trajectories for 17 micron and 6 micron particles, respectively. The same set-up was again used, in which 4 random walk paths were generated for each of the 12 particle injection locations.

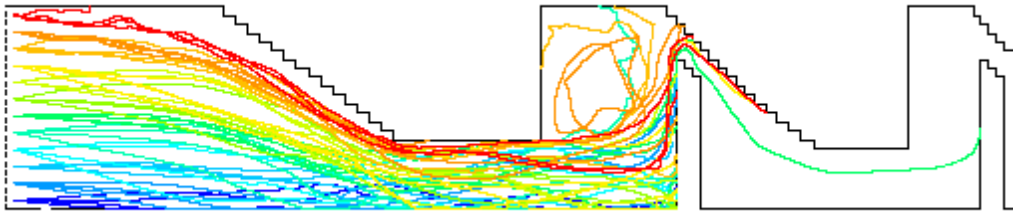


Figure 8. Trajectories obtained for the 17 micron particles under the influence of turbulence. For each one of the 12 injection locations at the inlet of the instrument, 4 possible random walk paths were computed by employing the CRW model.

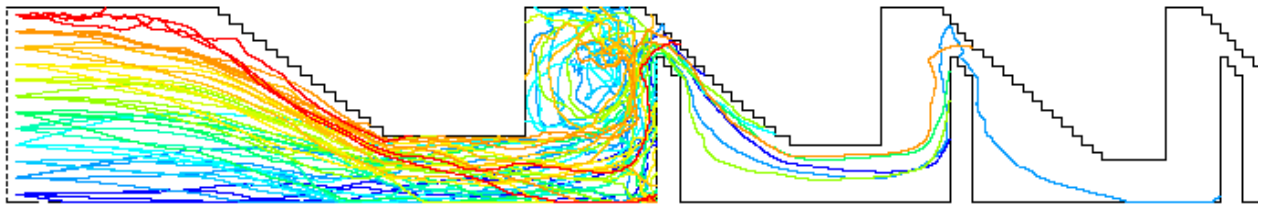


Figure 9. Trajectories obtained for the 6 micron particles under the influence of turbulence. For each one of the 12 injection locations at the inlet of the instrument, 4 possible random walk paths were computed by employing the CRW model.

5. Conclusion

The present work describes investigations on the performance of inertial cascade impactors. This type of instrument requires that the collection efficiency curves for each stage should be as steep as possible and that the particles should deposit nowhere else but in the substrates for each stage, otherwise, information about the actual mass distribution of the aerosol which is being measured is lost. There are several reasons for a particle to deposit on the internal walls of the instrument and not on the substrates. One of them is related to recirculation zones within the impactor stages. By avoiding such recirculation regions, we may reduce unwanted particle deposition and therefore improve the performance of the instrument.

The simulation of the flow within such instruments may prove to be a valuable tool for identifying internal regions where the flow recirculates. Through the numerical solution of the turbulent flow field inside the first three stages of the first prototype impactor developed in the Laboratório de Engenharia Ambiental – Poluição Atmosférica do DEM/PUC-Rio, it was possible to identify regions of recirculation where it is expected that a large number of particles will end up depositing in the wall of the instrument.

By computing the particle trajectories through the use of the Continuous Random Walk model (CRW) it was possible to observe that, indeed, the flow recirculations have a great influence in increasing the deposition of particles in the walls of the instrument. The general influence of the turbulent flow fluctuations in the particle paths is to increase the probability for deposition, as a consequence of the fact that the particles under a turbulent flow cover a wider region perpendicularly to their main courses. The same behavior is expected from very fine particles under Brownian motion. It was observed that the computed averaged trajectory will provide a higher penetration of the particles through the instrument. On the other hand, the CRW model produces trajectories which seem to be excessively dispersed around the mean path of the particles, providing for a larger unwanted particle collection than it is expected from the real operation of such instruments.

Further developments may include the experimental investigation of the particle collection efficiencies for each one of the stages, so we may compare the experimental results with the ones calculated by the CRW model and bring it closer to reality.

5. References

- Cox, C. S., and Wather, C. M. , 1995, *Bioaerosols Handbook*, CRC Press, Florida.
- Frank, G., Kashparov, V., Protsak, V., and Tschiersch, J. , 1996, Comparison Measurements of a Russian Standard Aerosol Impactor with several Western Standard Aerosol Instruments, *Journal of Aerosol Science*, vol.27, pp.477-486.
- Gomes, M.S.P. , 1997, Design of an Eight-Stages Cascade Impactor for the Classification of Airborne Particles, 14o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM, Bauru, São Paulo.
- Hering, S. V. , 1995, Impactors, Cyclones and other Inertial and Gravitational Collectors, in *Air Sampling Instruments*, B. S. Cohen and S. V. Hering ed., 8th edition, American Conference of Governmental Industrial Hygienists, Ohio.
- Hinds, W. C. , 1982, *Aerosol Technology - Properties, Behavior, and Mesurement of Airborne Particles*, John Wiley and Sons, New York.
- Launder, B.E., and Spalding, D.B. , 1972, *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London.
- Launder, B.E., and Spalding, D.B. , 1974, The Numerical Computation of Turbulent Flows, *Computer Methods in App. Mech. and Engineering*. vol.3, pp.269-289.
- Marple, V. A., and Liu, B. Y. H. , 1974, Characteristics of Laminar Jet Impactors, *Environ. Sci. Technol.*, vol.8, pp.648-654.
- Marple, V. A., Rubow, K. L., and Olson, B. A. , 1993, Inertial, Gravitational, Centrifugal, and Thermal Collection Techniques, in *Aerosol Measurement - Principles, Techniques, and Applications*, K. Willeke and P. A. Baron ed., Van Nostrand Reinhold, New York.
- May, K. R. , 1945, The Cascade Impactor - An Instrument for Sampling Coarse Aerosols, *J. Scient. Instrum.*, vol.22, pp.187-195.
- Patankar, S.V. , 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Co., New York, 1980.
- Rader, D. J., and Marple, V. A. , 1985, Effect of Ultra-Stokesian Drag and Particle Interception on Impaction Characteristics, *Aerosol Science and Technology*, vol.4, pp.141-156.

MÉTODO COMPUTACIONAL PARA PROJECTO DE CONDUTAS

João Eduardo de Barros Teixeira Borges

Secção de Termofluidos e Energia
Departamento de Engenharia Mecânica
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais
1049-001 LISBOA - PORTUGAL
tborges@hidro1.ist.utl.pt

Resumo. Neste artigo descreve-se um método de cálculo de escoamento bidimensional, irrotacional e incompressível, baseado numa mudança de variáveis do plano físico, definido por (x,y) , para um plano computacional definido pela função de corrente ψ e pela função potencial da velocidade, ϕ . Neste novo plano, a equação a resolver é relativamente simples, apresentando o domínio computacional sempre a forma rectangular, o que facilita bastante a imposição das condições fronteira. O tipo das condições fronteira a impor depende do problema a analisar, sendo não-lineares no caso do problema inverso. Como solução desta equação obtém-se a distribuição da coordenada x ao longo do escoamento, sendo o campo de coordenadas y determinado por integração do resultado anterior. Foi desenvolvido um programa de computador que põe em prática este método, empregando diferenças finitas. Alguns dos detalhes numéricos do método serão discutidos, com especial destaque para o tratamento numérico das condições fronteira. A aplicação do método descrito ao projecto de uma conduta curva com uma deflexão global de cerca de 90° será apresentado, com a finalidade de mostrar as potencialidades do método, o qual é computacionalmente muito simples e directo. Adicionalmente, efectuou-se um breve estudo que mostrou que os resultados obtidos podem ser considerados como independentes da dimensão da malha numérica utilizada.

Palavras chave: Métodos Inversos, Métodos Computacionais, Projecto de condutas

1. Introdução

Quando se estudam sistemas que trabalham com fluidos, é frequente ser-se confrontado com a necessidade de projectar condutas cuja orientação e secção recta variam no espaço, como sejam, tubeiras, difusores, contracções, cotovelos, entradas, etc.. Uma forma de abordar este problema, consiste em arbitrar a geometria e calcular o escoamento por ela produzido. Se as características deste escoamento não forem apropriadas, será necessário alterar a geometria e voltar a analisá-la, até se chegar a solução satisfatória. Este tipo de abordagem, que dá origem a análises que chamaremos directas, tem a desvantagem de, em geral, precisar de bastantes iterações na geometria, com os necessários cálculos do escoamento, antes de se atingir uma solução aceitável.

Uma alternativa à estratégia descrita, consiste em arbitrar certas condições para o escoamento (por exemplo, distribuições de velocidade nas paredes sólidas) e, a partir destas condições, calcular a geometria que verifica estas condições, e satisfaz as equações que regem o escoamento. Esta estratégia, que dá origem a análises que chamaremos inversas, apresenta a vantagem de poder conduzir à solução desejada de forma mais expedita, permitindo poupar tempo e esforços. Tem, no entanto, a desvantagem de ser um tipo de análise que poderá exigir uma formulação matemática mais complexa e cuidada.

O balanço das vantagens e desvantagens deste tipo de métodos inversos parece ser largamente favorável, uma vez que muitos exemplos desta abordagem têm sido propostos. Dentre estes muitos exemplos, limitar-nos-emos a descrever, em seguida, alguns que apresentam maiores ligações com o trabalho descrito neste artigo. Assim, Stanitz (1953) propôs um método em que, em vez de se trabalhar no plano físico (x,y) , se efectuam os cálculos num plano definido pela função de corrente, ψ , e pela função potencial da velocidade, ϕ . Neste plano, resolve-se uma equação diferencial que permite calcular o módulo das velocidades do escoamento, usando diferenças finitas, e impondo como condições fronteira as distribuições de velocidade que se pretendem ter nas superfícies sólidas que limitam o escoamento. Este método foi aplicado ao projecto de várias condutas bidimensionais, como contracções, entradas e cotovelos, apresentando escoamento incompressível e compressível, na gama subsónica. Mais tarde, este trabalho foi estendido pelo mesmo autor ao projecto de condutas tridimensionais (Stanitz, 1980), usando, agora, duas funções de corrente e a função potencial da velocidade. Uma outra extensão da análise anterior, desta vez ao caso de escoamento transónico, é apresentada e discutida nas referências Schmidt e Stuttgart (1979), Schmidt (1980) e Schmidt e Berger (1986). Nestes trabalhos utilizou-se também diferenças finitas, tendo o cuidado de se aproximarem as derivadas na direcção do escoamento usando apenas pontos a jusante, na região supersónica, de modo a respeitar o domínio de influência da equação diferencial, a qual apresenta um carácter hiperbólico nesta região.

Um método com algumas semelhanças com os anteriores é descrito em Chaviaropoulos et al. (1994a) e Chaviaropoulos et al. (1994b), pois o mesmo conjunto de variáveis dependentes e independentes é usado nos cálculos. No entanto, as equações diferenciais são deduzidas recorrendo a argumentos baseados na geometria diferencial e análise tensorial generalizada, só se reduzindo às equações apresentadas em Stanitz (1953) no caso de escoamento irrotacional e bidimensional. Este método foi aplicado a casos bidimensionais, axissimétricos e tridimensionais de escoamentos compressíveis rotacionais ou potenciais, tendo sido testado utilizando programas de análise directos.

Outros exemplos de técnicas inversas com algumas relações com o presente trabalho podem ser encontrados em

Barron (1990) e Dulikravich (1990), na medida em que ambos os métodos são baseados numa mudança de variáveis do plano físico (x, y) , desta vez, para um plano definido pela coordenada x , e pela função de corrente, ψ . Barron (1990) aplicou este método ao projecto de perfis alares em escoamento incompressível, enquanto Dulikravich (1990) discute um caso-teste formado por cascatas de ovais, em escoamento incompressível, assim como apresenta resultados para uma cascata de perfis alares, sujeita a escoamento compressível.

No presente artigo descreve-se um método inverso alternativo, baseado numa transformação semelhante à proposta por Stanitz (1953), transformação que tem a vantagem de os cálculos serem efectuados num domínio computacional sempre com a forma de um rectângulo, o que facilita bastante a geração de uma malha apropriada ao problema. No entanto, no método a descrever, a equação diferencial a resolver dá directamente a distribuição da coordenada espacial x , ao longo de todo o escoamento, ao contrário do método de Stanitz (1953), onde é necessário calcular, primeiro, a distribuição do módulo da velocidade, seguida de integrações para calcular os ângulos da velocidade e a coordenada espacial x . No presente caso, as condições fronteira da equação diferencial a resolver são não-lineares, o que requer um tratamento numérico cuidado, o qual será descrito em pormenor. Este método será aplicado a um dos casos discutidos em Stanitz (1953), nomeadamente, ao projecto de uma conduta curva com uma deflexão global de cerca de 90° , por onde se escoam um fluido incompressível, de modo a melhor comparar os dois métodos.

2. Descrição do método

O método inverso para o projecto de condutas proposto será descrito nesta secção, começando por deduzir as equações que iremos necessitar na subsecção 2.1, seguido, na subsecção 2.2, por uma discussão dos aspectos numéricos envolvidos no procedimento desenvolvido.

2.1. Formulação matemática

É bem conhecido (veja-se Milne-Thomson, 1968, pp. 118, por exemplo) que o escoamento estacionário, bidimensional e irrotacional de um fluido incompressível satisfaz simultaneamente às seguintes equações:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{1a}$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{1b}$$

onde ψ é a função de corrente, e φ é a função potencial da velocidade, sendo ∇^2 o Laplaciano. Nestas equações, considera-se que ψ e φ são funções das coordenadas espaciais x e y :

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, y) \\ \psi = \psi(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

podendo calcular-se, num ponto qualquer do escoamento, as componentes u e v da velocidade, nas direcções de x e y , respectivamente, através de:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \tag{3}$$

ou, em alternativa:

$$\begin{cases} \rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

em que ρ é a massa específica do fluido, a qual pode ser considerada igual a 1, por adimensionalização apropriada (o fluido é incompressível). Por este motivo, nas restantes equações não iremos indicar explicitamente a variável ρ .

O presente método baseia-se numa mudança de variáveis, que consiste em trocar o papel das variáveis dependentes e independentes, passando a considerar-se que se tem:

$$\begin{cases} x = x(\varphi, \psi) \\ y = y(\varphi, \psi) \end{cases} \tag{5}$$

em substituição da Eq. (2), veja-se a Fig. (1), onde também se representou um fragmento da malha computacional,

formada por linhas $\varphi = c.^{te}$ e $\psi = c.^{te}$, no plano físico, e a respectiva imagem no plano (φ, ψ) .

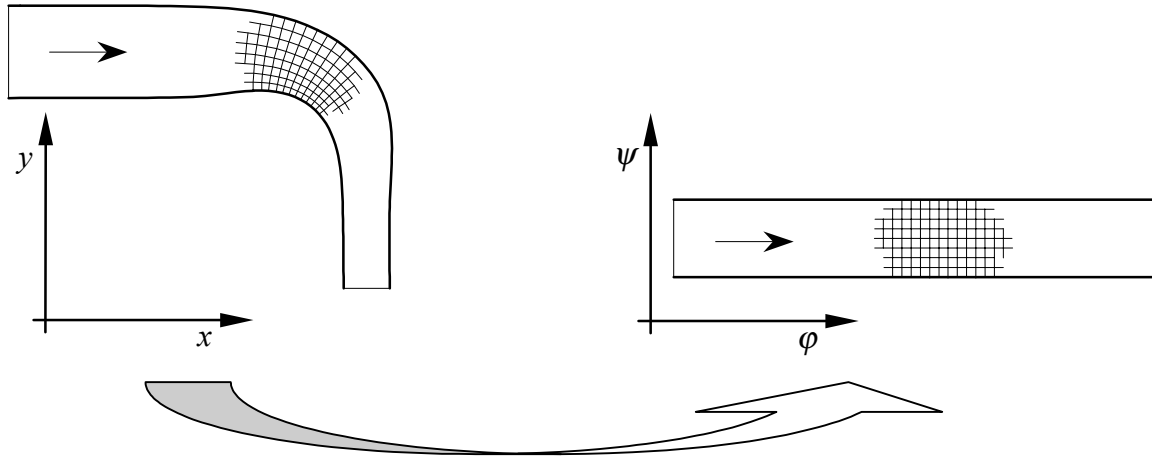


Figura 1. Transformação do plano físico (x, y) para o plano (φ, ψ) .

De acordo com esta transformação de variáveis, as primeiras derivadas de ψ são dadas por (veja-se Thompson et al., 1977):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y \equiv \psi_x = -\frac{y_\varphi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x \equiv \psi_y = \frac{x_\varphi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} \end{cases} \quad (6)$$

onde se representaram as derivadas usando a variável a derivar afectada de um índice que indica a variável em relação à qual se está a derivar. De modo análogo, as primeiras derivadas de φ são dadas por:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_y \equiv \varphi_x = \frac{y_\psi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_x \equiv \varphi_y = -\frac{x_\psi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} \end{cases} \quad (7)$$

Existem relações importantes entre as primeiras derivadas da função de corrente e função potencial de velocidade, as quais podem ser facilmente deduzidas, igualando as duas expressões alternativas para u e v que estão apresentadas nas Eqs. (3) e (4), vindo respectivamente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8b)$$

Substituindo nas Eqs. (8a) e (8b) os valores das derivadas de φ e ψ indicadas nas Eqs. (6) e (7), obtém-se:

$$\frac{y_\psi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} = \frac{x_\varphi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} \Rightarrow y_\psi = x_\varphi \quad (9a)$$

$$-\frac{x_\psi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} = \frac{y_\varphi}{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi} \Rightarrow -x_\psi = y_\varphi \quad (9b)$$

resultado que nos diz que também existem relações simples entre as primeiras derivadas de x e y , quando estas coordenadas se consideram função de φ e ψ .

Derivando a Eq. (9a) em ordem a φ , e a Eq. (9b) em ordem a ψ , somando as duas equações resultantes e atendendo a que as derivadas mistas de uma função contínua são iguais, chega-se a:

$$\nabla^2 x \equiv x_{\psi\psi} + x_{\varphi\varphi} = 0 \quad (10)$$

De modo semelhante, eliminando as derivadas mistas de y , o que requer que se derive a Eq. (9a) em ordem a ψ , derive a Eq. (9b) em ordem a φ , e subtraia a equação resultante da Eq. (9b) à equação resultante da Eq. (9a), resulta:

$$\nabla^2 y \equiv y_{\psi\psi} + y_{\varphi\varphi} = 0 \quad (11)$$

As Eqs. (10) e (11) aplicam-se à mesma situação que as Eqs. (1) a (4), ou seja, descrevem o escoamento bidimensional e irrotacional de um fluido incompressível.

As duas equações anteriores formam um resultado de uma surpreendente simplicidade, que pode ser explicado de uma forma alternativa recorrendo à teoria de Funções de Variável Complexa. Na verdade, introduzindo a função potencial complexa ω , e a variável z , definidas por:

$$\begin{cases} \omega = \varphi + i\psi \\ z = x + iy \end{cases} \quad (12)$$

podemos dizer que o potencial complexo, ω , é uma função holomorfa da variável z :

$$\omega \equiv \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = F(z) \quad (13)$$

pois as Eqs. (1a) e (1b) garantem que φ e ψ são funções harmónicas nas regiões onde se aplicarem, enquanto as Eqs. (8a) e (8b) asseguram que ψ é a harmónica conjugada de φ (veja-se Churchill e Brown, 1984, pp. 53). Invertendo esta função obtém-se:

$$z \equiv x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi) = F^{-1}(z) \quad (14)$$

em que F^{-1} será também holomorfa, excepto nos pontos singulares de F , e onde $F' = 0$ (veja-se Churchill e Brown, 1984, pp. 221). Como consequência, pode-se afirmar que, quer a parte real, quer a parte imaginária de z são funções harmónicas, satisfazendo à equação de Laplace, resultado que é exactamente o expresso nas Eqs. (10) e (11). À luz desta nova interpretação, pode afirmar-se que as Eqs. (8) são as condições de Cauchy-Riemann aplicadas à função potencial complexa, ω , enquanto as Eqs. (9) exprimem as condições de Cauchy-Riemann aplicadas à função $z(\varphi, \psi)$.

O denominador das Eqs. (9)

$$J = x_{\varphi}y_{\psi} - x_{\psi}y_{\varphi} \quad (15)$$

tem uma interpretação geométrica importante, pois é o Jacobiano, J , da transformação de coordenadas em estudo, o qual dá a razão entre as áreas elementares $dx dy$ e $d\varphi d\psi$. O seu valor pode ser escrito só em função de derivadas de x , ou alternativamente em função só de derivadas de y , fazendo uso das Eqs. (9). Na verdade, tem-se, respectivamente:

$$J = x_{\varphi}^2 + x_{\psi}^2 \quad (16a)$$

$$J = y_{\varphi}^2 + y_{\psi}^2 \quad (16b)$$

Nesta altura, é conveniente notar que não é preciso resolver simultaneamente as Eqs. (10) e (11) para se ter o escoamento completamente definido, tal como não era preciso resolver ambas as Eqs. (1a) e (1b). Iremos usar o facto de só ser necessário resolver uma das Eqs. (10) ou (11) para, a partir deste momento, nos concentrarmos em apenas uma delas, por exemplo, a Eq. (10), ou seja, iremos só trabalhar com a função $x(\varphi, \psi)$. Se trabalhássemos com a função $y(\varphi, \psi)$, obteríamos um conjunto de equações semelhantes às que se seguirão, com as correspondentes e óbvias alterações.

Tem interesse apresentar expressões que permitam calcular as componentes da velocidade u e v , só em função de derivadas de x . Estas expressões podem ser facilmente deduzidas a partir das Eqs. (3), (4), (6) e (7), substituindo as derivadas de y pelos valores indicados nas Eqs. (9). Procedendo desta forma, conclui-se que:

$$u = \frac{x_{\varphi}}{x_{\varphi}^2 + x_{\psi}^2} \quad (17a)$$

$$v = -\frac{x_\psi}{x_\phi^2 + x_\psi^2} \quad (17b)$$

A partir destes resultados é simples calcular o módulo, q , e o ângulo, θ , da velocidade, os quais são dados por:

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{1}{x_\phi^2 + x_\psi^2}} \quad (18a)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{u}{v}\right) = \arctg\left(-\frac{x_\psi}{x_\phi}\right) \quad (18b)$$

Atendendo à Eq. (16a), pode relacionar-se o Jacobiano com o módulo da velocidade, vindo:

$$q = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad (19)$$

o que nos diz que o Jacobiano é igual ao inverso do quadrado do módulo da velocidade. Pode utilizar-se com vantagem este resultado no estudo dos pontos singulares da transformação de coordenadas, i. e., os pontos onde a transformação de coordenadas não é biunívoca. Com efeito, sabe-se que uma transformação de coordenadas só é biunívoca nos pontos onde o Jacobiano for diferente de zero ou infinito. De acordo com a conclusão anterior, pode, então, afirmar-se que os pontos de estagnação (velocidade nula) e os pontos onde se têm velocidades infinitas (vértices com ângulos subentendidos inferiores a π) serão os únicos pontos singulares da transformação em discussão. Isto significa que, se o escoamento a estudar apresentar pontos do tipo atrás descrito, será necessário tratar das singularidades por eles causados de forma analítica, por forma a obter resultados numéricos significativos. Note-se, no entanto, que este tipo de dificuldades também ocorre noutras transformações, como, por exemplo, em Stanitz (1953), não impedindo de obter resultados úteis.

O domínio computacional onde é necessário resolver a Eq. (10), de modo a definir um dado escoamento, no presente tipo de abordagem, tem sempre a forma de um rectângulo no plano (ϕ, ψ) , como esquematizado na Fig. (1). Com efeito, se as paredes da conduta que limitam o escoamento forem impermeáveis, verifica-se que são coincidentes com linhas de corrente do escoamento. Sendo assim, a imagem das paredes da conduta toma a forma de segmentos de recta $\psi = c$, no plano (ϕ, ψ) . A fim de se completar a definição do problema, é necessário indicar adicionalmente as condições a impor nas fronteiras do domínio computacional. Estas condições dependem do tipo de problema que se pretende resolver. Assim, se o objectivo for a determinação do escoamento através de uma conduta com geometria conhecida (método directo), será necessário impor a evolução da coordenada x_w ao longo das paredes, ou seja, é preciso satisfazer:

$$x_w = x_w(s) \quad (20)$$

em que s é a distância ao longo das paredes. Se, pelo contrário, o objectivo for calcular a geometria da conduta que permite obter uma dada especificação desejada de velocidade ao longo das paredes (método inverso), então é preciso impor a condição fronteira:

$$x_\phi^2 + x_\psi^2 = \frac{1}{q_w^2} \quad (21)$$

onde q_w é o módulo da velocidade que se deseja obter nas paredes da conduta, o qual poderá ser especificado como função de s :

$$q_w = q_w(s) \quad (22)$$

Sob o ponto de vista de cálculo e imposição destas condições fronteira, tem interesse trabalhar com a especificação das condições fronteira em função da variável ϕ e não da distância s . É assim necessário relacionar estas duas variáveis, o que pode ser feito facilmente, atendendo a que, ao longo de uma linha de corrente, se tem:

$$qds = d\phi \Rightarrow \phi = \int qds \quad (23)$$

Esta última integração fornece a função $\phi(s)$, a qual introduzida na Eq. (22) permite obter:

$$q_w = q_w(\varphi) \quad (24)$$

Repare-se que é possível ter no mesmo problema uma mistura das duas condições fronteira, Eqs. (20) e (21), o que confere uma grande flexibilidade ao método a ser descrito, pois se pode satisfazer constrangimentos geométricos, durante a resolução do método inverso, através de imposição directa de parte da geometria. No entanto, no presente artigo, será apenas apresentado um exemplo com condições fronteira do tipo velocidade imposta, Eq. (21), o que corresponde a resolver um método inverso puro.

Nas fronteiras colocadas a grande distância a montante e jusante, considera-se que o escoamento é uniforme, o que será imposto no presente estudo, afirmando que

$$x_{\varphi\varphi} = 0, \quad (25)$$

nestas fronteiras.

A Eq. (10), junto com as condições fronteira acima indicadas, define o valor da coordenada x , em todo o domínio computacional, a menos de duas constantes, as quais correspondem a uma translação e rotação da geometria como um todo. A fim de eliminar estes graus de liberdade e especificar sem ambiguidades o campo das coordenadas x , é necessário dar a coordenada x de dois pontos no domínio computacional, valores que são dados como uma entrada para o método.

Uma vez determinado o campo de coordenadas x para todo o escoamento, é preciso calcular os correspondentes valores da coordenada y , de modo a ter-se a geometria totalmente definida. Este cálculo será feito por integração das condições de Cauchy-Riemann, Eqs. (9a) e (9b). Assim, ao longo de uma linha de corrente tem-se que:

$$y = - \int_{\psi=const.} x_{,\psi} d\varphi \quad (26)$$

expressão que resulta da Eq. (9b), e que permite calcular todos os valores da coordenada y ao longo de linhas de corrente. Para se mudar de linha de corrente, a Eq. (9a) deve ser integrada, vindo:

$$y = \int_{\varphi=const.} x_{,\varphi} d\varphi \quad (27)$$

À semelhança do que acontecia com as coordenadas x , também é necessário especificar o valor da coordenada y para um ponto no domínio computacional, para se ficar com o campo de coordenadas y especificado sem ambiguidades.

Em resumo, o presente método consiste na solução da Eq. (10), sujeita às condições fronteira do tipo das indicadas na Eq. (20), ou alternativamente, na Eq. (21), seguido das integrações definidas nas Eqs. (26) e (27), para o cálculo das coordenadas y . Após a conclusão deste passo, têm-se as coordenadas (x, y) definidas em todos os pontos do domínio computacional no plano (φ, ψ) , estando, portanto, terminado o cálculo da geometria do escoamento.

2.2 Procedimento numérico

O problema acabado de formular foi resolvido usando diferenças finitas numa malha rectangular, pois sabe-se à partida que o domínio computacional tem a forma de um rectângulo, como discutido na subsecção anterior. No entanto, existe provisão para diferentes valores dos incrementos das variáveis $\Delta\varphi$ e $\Delta\psi$ que definem a malha computacional, no programa de computador que efectua os cálculos. No presente trabalho considerou-se que o índice i ($1 \leq i \leq nx$) está associado à variável φ e o índice j ($1 \leq j \leq ny$) está associado à variável ψ , donde resulta que as paredes da conduta são coincidentes com as linhas da rede definidas por $j = 1$ e $j = ny$.

As segundas derivadas que aparecem no Laplaciano foram aproximadas por diferenças centrais, dando origem a uma molécula computacional incluindo cinco pontos. As equações resultantes das aproximações às diferenças finitas foram resolvidas usando o método iterativo de Gauss-Seidel, com um ordenamento dos pontos alternado preto-branco, do estilo encontrado num tabuleiro de xadrez (“*red-black ordering*”).

As condições fronteira do tipo velocidade imposta, Eq. (21), foram discretizadas usando também diferenças centrais, o que requer a introdução de um ponto fictício, colocado fora do domínio computacional. O valor da coordenada x neste ponto fictício é eliminado resolvendo o sistema de duas equações formado pela condição fronteira discretizada e a aproximação às diferenças finitas para o Laplaciano no ponto da fronteira em apreço. Este procedimento conduz, por exemplo, à seguinte equação discretizada na parede inferior ($j = 1$):

$$(x_{i+1,1} - x_{i-1,1})^2 + \frac{\Delta\varphi^2}{\Delta\psi^2} \left\{ 2x_{i,2} + \frac{\Delta\psi^2}{\Delta\varphi^2} \left[-2 \left(1 + \frac{\Delta\varphi^2}{\Delta\psi^2} \right) x_{i,1} + x_{i+1,1} + x_{i-1,1} \right] \right\}^2 = 4 \frac{\Delta\varphi^2}{q_{w,1}^2} \quad (28)$$

para cada ponto da fronteira onde se impõe a velocidade, sendo estas equações não-lineares, porque a Eq. (21) envolve o quadrado das derivadas da coordenada x .

As equações do tipo da Eq. (28) discretizadas para todos os pontos da fronteira onde se impõe a velocidade, para cada uma das paredes, formam um sistema de equações não-lineares que é resolvido fazendo recurso ao método de Newton-Raphson amortecido (veja-se Conte e de Boor, 1980, pp.216-222), em que se faz a actualização do valor de x na fronteira imediatamente a seguir à verificação individual de redução do módulo do erro, para cada um dos pontos da fronteira. Os valores das correcções calculadas de acordo com o método de Newton-Raphson são determinadas em bloco para cada uma das paredes, o que implica a resolução de um sistema de equações tridiagonal.

Através de experimentação numérica, verificou-se que o tratamento das condições fronteira acabado de expor, não era suficiente pois não garantia convergência do método. Uma possível justificação tem a ver com o facto de estar a impor-se apenas o valor das derivadas nas fronteiras, e este tipo de formulação requerer constrangimentos adicionais, em geral. Para a resolução do presente problema, verificou-se ser preciso impor adicionalmente os valores do comprimento para cada um dos troços elementares que formam as paredes.

Esta imposição foi posta em prática corrigindo o valor do incremento, Δx , entre dois pontos consecutivos da fronteira, por meio da expressão:

$$(\Delta x)^{k+1} = (\Delta x)^k \left[1 + \left(\frac{q_{cal,i,j}}{q_{w,i,j}} - 1 \right) \frac{\Delta x}{\Delta \varphi} q_{cal,i,j} \right] \quad (29)$$

em que os índices k e $k+1$ se referem ao número da iteração e $q_{cal,i,j}$ é a velocidade calculada durante a iteração k no ponto da fronteira em consideração, tomando o índice j os valores de 1 e n_y , consoante se esteja a analisar a parede inferior ou superior. Como se pode concluir da análise da Eq. (29), a correcção introduzida é proporcional à razão entre a velocidade calculada e a velocidade imposta (as quais devem ser iguais quando o método convergir), ponderada por um factor proporcional à razão entre os incrementos Δx e $\Delta \varphi$. Este último incremento é estimado em função de $\Delta \varphi$ através da Eq. (23), utilizando o valor da velocidade calculada durante a iteração k . Constatou-se por experimentação numérica, que era necessário utilizar no cálculo da velocidade a mesma molécula numérica que foi usada na discretização das condições fronteira.

Foi desenvolvido um programa de computador em FORTRAN para efectuar os cálculos necessários ao presente procedimento, segundo um fluxograma que será esboçado em seguida. Assim, o primeiro passo consiste na leitura dos dados iniciais do problema, seguido da execução de alguns preparativos iniciais, como, por exemplo, a determinação dos coeficientes das equações às diferenças finitas e de uma primeira aproximação para o campo de coordenadas x . Esta primeira aproximação é calculada supondo que a variação das coordenadas x é linear entre as duas paredes laterais. O próximo passo, que é o mais importante e que requer mais tempo, diz respeito à resolução das equações às diferenças finitas por relaxação, até se obter convergência. Verificou-se ser necessário proceder a duas iterações consecutivas das condições fronteira que impõem a velocidade, por cada iteração do tipo Gauss-Seidel efectuada no interior do campo. Para a rede mais fina utilizada no presente estudo (129x17 pontos), constatou-se mesmo a necessidade de efectuar duas iterações consecutivas nas condições fronteira do tipo velocidade imposta, para cada duas iterações Gauss-Seidel, também consecutivas, no interior do domínio computacional, a fim de garantir-se convergência do método. Após a conclusão da determinação do campo de coordenadas x , procede-se ao cálculo das coordenadas y em todo o domínio. Este cálculo baseia-se na estimativa numérica dos integrais indicados nas Eqs. (26) e (27), para todos os pontos da malha computacional, tendo sido empregue a regra dos trapézios nesta estimativa. Por fim, determina-se o campo de velocidades e a distribuição de ângulos do escoamento usando as Eqs. (18), imprimindo-se todos os resultados finais pretendidos, os quais incluem as coordenadas físicas ao longo de todo o escoamento.

3. Resultados

O método descrito será aplicado a um exemplo de projecto de uma conduta que apresenta uma deflexão global de cerca de 90° , por onde se escoo um fluido incompressível. O domínio computacional estende-se desde $\varphi = -2.0$ até $\varphi = 6.0$, e desde o valor de $\psi = 0.0$ na parede inferior até $\psi = 1.0$ na parede superior, tomando a coordenada x o valor de 3.978 nos pontos situados mais a montante de ambas paredes. A coordenada y do ponto definido por $i = 33$ e $j = 9$ é imposta, tomando o valor $y = 0$. A Fig. (2) apresenta as distribuições de velocidade impostas nas paredes em função da variável φ . Como se pode ver, as distribuições de velocidade não apresentam desacelerações, sendo, por isso, de esperar que a conduta apresente um bom desempenho, com perdas pequenas. A deflexão global da conduta está relacionada com o desfasamento existente entre as distribuições de velocidade na parede superior e inferior. Todos estes dados iniciais são os mesmos que foram usados num dos casos discutidos por Stanitz (1953), tendo este exemplo sido escolhido por forma a melhor comparar os dois métodos. Considerou-se que o processo tinha convergido, quando o erro máximo na satisfação das equações às diferenças finitas era inferior a 0.0005, tendo a malha utilizada 129x17 pontos.

Os gráficos seguintes apresentam alguns resultados obtidos pelo método, com os dados iniciais acabados de descrever. Assim, a Fig. (3) mostra os contornos do campo de coordenadas x e y , no plano computacional (φ, ψ) .

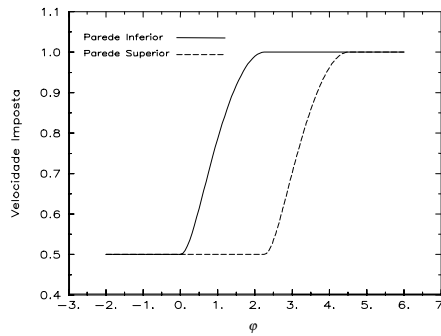


Figura 2. Distribuições de velocidade impostas nas paredes.

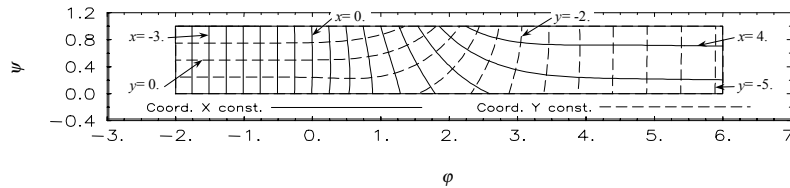


Figura 3. Contornos de x e y constantes, no plano computacional (ϕ, ψ) .

Como se vê, os contornos $y = c^{te}$ são perpendiculares aos contornos $x = c^{te}$, o que resulta directamente das Eqs. (9). As linhas de corrente e linhas de potencial ímpares encontram-se representadas na Fig. (4), no plano físico (x, y) . Esta figura também apresenta a geometria da conduta que se pretende projectar, uma vez que as linhas de corrente extremas são coincidentes com as paredes da conduta. A largura da conduta à saída é igual a metade da largura à entrada porque a velocidade à saída é dupla do valor a montante, veja-se a Fig. (2). De igual modo verifica-se que a parede inferior evidencia uma ligeira deflexão na direcção oposta à direcção da deflexão global, localizada na zona inicial da curva. Esta forma da geometria é resultado de se ter imposto uma distribuição de velocidades sem desacelerações, e também pode ser encontrado em Stanitz (1953). A Fig. (5) expõe os contornos de velocidade e ângulo do escoamento constantes, no plano físico (x, y) . Estes valores foram calculados usando as Eqs. (18), constatando-se que as linhas de velocidade constante são perpendiculares às linhas de ângulo constante. Comparando as duas últimas figuras e os restantes resultados obtidos, com os apresentados em Stanitz (1953), verifica-se que estes são comparáveis e muito semelhantes.

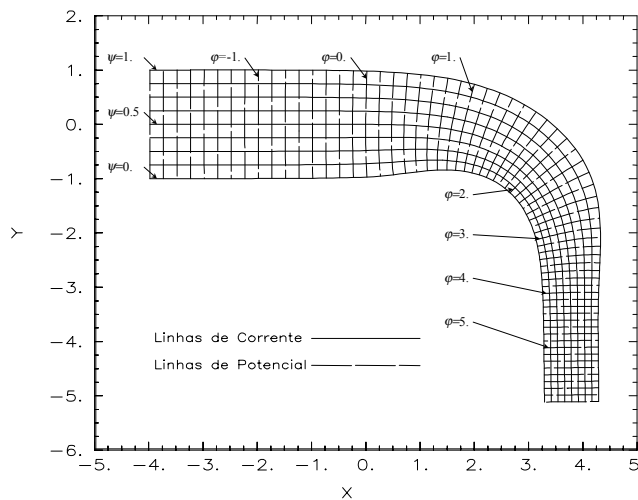


Figura 4. Linhas de corrente e de potencial constante, no plano físico (x, y) .

Com o intuito de verificar se os resultados obtidos podiam ser considerados como independentes da dimensão da malha utilizada, decidiu-se efectuar os cálculos para o presente caso usando três redes distintas, 33x5 pontos, 65x9 pontos e 129x17 pontos, até se atingir o mesmo nível do erro máximo na satisfação das equações às diferenças finitas. A Fig. (6) compara a geometria da conduta obtida para as três malhas. Como se pode verificar, as diferenças entre a rede mais fina e a rede de 65x9 pontos são difíceis de distinguir visualmente, enquanto as diferenças entre esta malha e a malha mais grosseira são maiores, embora continuem a ser pequenas. Esta conclusão era previsível, porque a distribuição de velocidade imposta é bem representada na rede de 129x17 pontos, como se pode ver na Fig. (2).

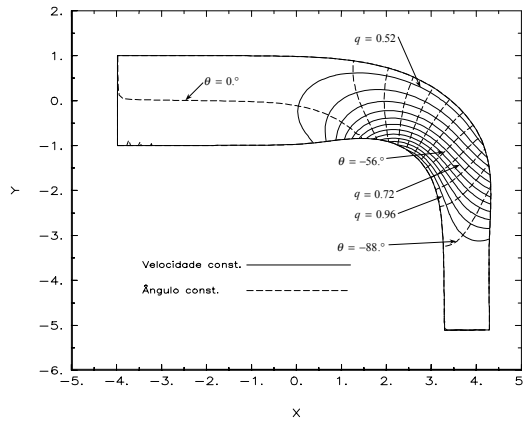


Figura 5. Contornos de velocidade e ângulo constantes, no plano físico (x, y) .

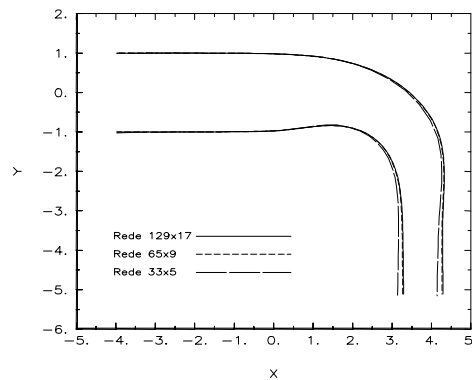


Figura 6. Comparação das geometrias da conduta obtidas com malhas de dimensão diferente.

O presente estudo mostra que o método proposto é comparável ao descrito em Stanitz (1953) em termos de capacidade de projecto e precisão. No entanto, apresenta a vantagem de ser computacionalmente mais simples e directo, pois só exige a solução de uma equação diferencial às derivadas parciais e uma integração em todo o domínio, enquanto o método desenvolvido em Stanitz (1953) requer a solução de uma equação diferencial e três integrações efectuadas em todo o domínio. O método aqui exposto apresenta também a vantagem de ser facilmente estendido à análise do escoamento através de geometrias impostas à partida (problema directo).

4. Conclusões

Neste artigo descreve-se um método computacional inverso para projecto de condutas, baseado numa mudança de variáveis do plano físico (x, y) , para o plano definido pela função potencial de velocidade, ϕ , e função de corrente, ψ . Neste plano computacional, (ϕ, ψ) , tem que se resolver uma equação diferencial às derivadas parciais, sujeita a condições fronteira que foram discutidas. A dedução desta equação foi efectuada por dois processos alternativos, sendo um deles baseado na teoria de Funções de Variável Complexa, e que forneceu uma nova interpretação de toda a formulação. A solução desta equação diferencial permite obter a distribuição da coordenada x ao longo do escoamento, determinando-se o campo de coordenadas y , por integração do resultado anterior.

Foi desenvolvido um programa de computador escrito em FORTRAN que resolve o problema acabado de formular, usando diferenças finitas. O fluxograma e os detalhes do método numérico utilizado foram descritos e discutidos, com particular realce para o tratamento das condições fronteira da equação diferencial. Com efeito, estas são não-lineares e exigem alguns cuidados numéricos específicos, por forma a garantir convergência do processo.

O método descrito foi aplicado ao projecto de uma conduta que apresenta uma deflexão global de cerca de 90° . Escolheu-se este exemplo, discutido originalmente em Stanitz (1953), para comparar melhor o presente método com o descrito na referência indicada. Adicionalmente, efectuou-se um breve estudo que mostrou que os resultados obtidos podem ser considerados como independentes da dimensão da malha computacional utilizada.

As principais vantagens do método descrito residem no facto de ele ser computacionalmente muito simples e directo, sendo os cálculos sempre efectuados num domínio rectangular, independentemente da eventual complexidade geométrica do escoamento.

5. Agradecimentos

O autor é membro do Instituto de Engenharia Mecânica, IDMEC, organismo que é financiado por verbas do

Programa Operacional Ciência, Tecnologia e Inovação (POCTI), do Quadro Comunitário de Apoio III, da Comunidade Europeia. Agradeço a ajuda prestada por Nuno Pereira na fase final de preparação e submissão electrónica do artigo.

6. Referências

- Barron, R.M., 1990, "*A Non-Iterative Technique for Design of Aerofoils in Incompressible Potential Flow*", Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 6, pp. 557-564.
- Chaviaropoulos, P., Dedoussis, V. e Papailiou, K.D., 1994a, "*Single-pass Method for the Solution of Inverse Potential and Rotational Problems. Part I: 2-D and Quasi 3-D Theory and Applications*", AGARD-R-803, AGARD FDP/VKI Special Course on "Optimum Design Methods for Aerodynamics", Von Karman Institute.
- Chaviaropoulos, P., Dedoussis, V. e Papailiou, K.D., 1994b, "*Single-pass Method for the Solution of Inverse Potential and Rotational Problems. Part II: Fully 3-D Potential Theory and Applications*", AGARD-R-803, AGARD FDP/VKI Special Course on "Optimum Design Methods for Aerodynamics", Von Karman Institute.
- Churchill, R.V. e Brown, J.W., 1984, "*Complex Variables and Applications*", 4th Edition, International Edition, McGraw-Hill Book Company.
- Conte, S.D. e de Boor, C., 1980, "*Elementary Numerical Analysis – An Algorithmic Approach*", 3rd Edition, International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- Dulikravich, G.S., 1990, "*A Stream-Function-Coordinate (SFC) Concept in Aerodynamic Shape Design*", artigo n.º 6 publicado em AGARD-R-780 – "Special Course on Inverse Methods for Airfoil Design for Aeronautical and Turbomachinery Applications".
- Milne-Thomson, L. M., 1968, "*Theoretical Hydrodynamics*", 5th Edition, MacMillan Press Ltd.
- Schmidt, E., e Stuttgart, U., 1979, "*Design of Supercritical Compressor and Turbine Cascades with a Numerical Method Considering Axial Velocity Density Ratio*", V.K.I. Lecture Series 1979-7.
- Schmidt, E., 1980, "*Computation of Supercritical Compressor and Turbine Cascades with a Design Method for Transonic Flows*", Trans. A.S.M.E., Journal of Engineering for Power, N.º.102, pp.68-74.
- Schmidt, E., e Berger, P., 1986, "*Inverse Design of Supercritical Nozzles and Cascades*", Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 22, pp. 417-432.
- Stanitz, J.D., 1953, "*Design of Two-Dimensional Channels with Prescribed Velocity Distributions Along the Walls*", NACA Rep. N.º.1115.
- Stanitz, J.D., 1980, "*General Design Method for Three-Dimensional, Potential Flow Fields, I - Theory*", NASA CR-3288.
- Thompson, J.F., Thames, F.C. e Mastin, C.W., 1977, "*Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies*", NASA CR-2729.

COMPUTATIONAL METHOD FOR THE DESIGN OF DUCTS

João Eduardo de Barros Teixeira Borges

Secção de Termofluidos e Energia
Departamento de Engenharia Mecânica
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais
1049-001 LISBOA - PORTUGAL
tborges@hidro1.ist.utl.pt

Abstract. This paper describes a method for the evaluation of two-dimensional, irrotational and incompressible flow, based in a transformation of variables from the physical plane defined by (x,y) , to a computational plane defined by the streamfunction ψ , and the velocity potential, ϕ . In this new plane, the resulting equation is relatively simple, and should be solved in a computational domain which presents always a rectangular shape, a fact that facilitates markedly the imposition of the boundary conditions. The type of the boundary conditions to be imposed depends on the problem to be solved, being non-linear in the case of the inverse problem. The solution of this equation gives the distribution of the x co-ordinate throughout the flow field, while the values of the y co-ordinate are calculated by integration of the previous result. A computer code that implements this method was developed, using finite-difference techniques. Some of the numerical details of the procedure will be discussed, with special emphasis on the numerical treatment of the boundary conditions. The application of the described method to the design of a curved duct with an overall deflection of around 90° will be presented, with the aim of showing the potentialities of the method, which is computationally quite simple and direct. In addition, a brief study was carried out, showing that the obtained results can be considered as independent of the size of the numerical grid used.

Keywords: *Inverse Methods, Computational Methods, Design of Ducts*

NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOW THROUGH AXI-SYMMETRIC STENOSIS USING LINEAR AND NON-LINEAR EDDY-VISCOSITY MODELS

Marcelo Assato*

Marcelo J.S. de-Lemos**

Departamento de Energia – IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

12228-900 - São José dos Campos - SP – Brazil

*E-mail: assato@mec.ita.br, **E-mail: delemos@mec.ita.br

Abstract: A computational study is presented for examining the performance of linear and non-linear eddy-viscosity models when used to predict turbulent flow through a circular pipe past a sinusoidal constriction (stenosis). The present case involves separated flow with subsequent reattachment. The literature has shown that non-linear models perform better than their linear counterparts for flows presenting accentuated streamline curvature. The numerical method employed for the discretization of the transport equations was the control-volume method applied to a boundary-fitted non-orthogonal coordinate system. The SIMPLE algorithm was employed for relaxing the pressure field. The classical wall function and a low Reynolds model were used to describe the flow near the wall. Comparisons using those two wall treatments, in addition to both linear and non-linear models, were reported. In general, better agreement with experimental data was obtained when using the non-linear theory.

Keywords: Turbulence modeling; Non-linear models; Axi-symmetric stenosis; Control-volume method.

1. Introduction

In many engineering applications, flow separation and subsequent reattachment occur. In this type of flow, it is crucial to use turbulence models that are able to predict flow properties with good accuracy. The case of turbulent flow past a backward facing step has been frequently used in benchmarking the performance of turbulence models for separated and reattached flows. In this case, the separation point is fixed (at the expansion corner) and the position of the reattachment point may differ depending upon the class of turbulence model used. For turbulent flow through an axi-symmetric stenosis, the two points in question, namely the separation and the reattachment points, are not fixed and that represents an extra difficulty to be dealt with.

Accordingly, it is well established that linear eddy-viscosity turbulence models (LEVM) do not, on the whole, cope well with strong streamline curvature whether it arises from flow over curved surfaces or imparted swirl. And yet, turbulence-driven secondary motion and directional effects due to buoyancy cannot, due to absence of information on individual stresses, be fully simulated with LEVM. In spite of that, they are often used for engineering computations due to the numerical robustness obtained via its linear *stress-strain rate* relationship (Jones and Launder (1972)). This diffusion-like approach makes the numerical solution stable, with the model easily adaptable to well tested computer code architectures.

Non-linear eddy viscosity models (NLEVM), which represent an extension of the LEVM's, have shown good performance in flows where the Reynolds normal stresses play an important role correcting the deficiencies presented by the LEVM's (Assato and de Lemos (2000)). They basically follow the procedures used in obtaining constitutive equations for laminar flow of non-Newtonian fluids (Rivlin (1957)). An example is the work of Speziale (1987). Essentially, the observed relationship between laminar flow of viscoelastic fluids and turbulent flow of Newtonian substances has motivated developments of such Non-Linear Models (Lumley (1970)). The basic advantage of NLEVM's over others more complex models, e.g. the algebraic stress model (ASM), lies on the achieved computational savings (roughly 25-50% less computing time).

For the geometry here considered (stenosis), Kadja (1987) used a low-Re linear *k*- ϵ model incorporated into a general orthogonal mesh code. Lien (1992) utilized the Reynolds-stress model (RSTM) combined with wall laws where all convection terms were approximated with first-order upwind schemes. More recently, also for a stenosis, Zevallos and Nieckele (2000) analyzed the influence of different low-Reynolds corrections on the *k*- ϵ model of Hanjalic and Launder (1980).

In this work, the performance of linear and non-linear eddy-viscosity models in predicting turbulent flow through a circular pipe containing a sinusoidal constriction is investigated. The classical wall function and low Reynolds models are employed for handling wall proximity. Experimental data for this case were obtained by Desphande and Giddens (1980). Comparisons of experimental data with simulations using the high and low Reynolds formulations are shown. Results obtained by the NLEVM with the low Reynolds number correction are closer to experimental data than when using the other models.

2. Two-equation model for velocity field

The problem to be considered in this study consists of turbulent flow of an incompressible fluid through a sinusoidal constriction in a circular pipe. The governing equations to be solved are the continuity and the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations that take the form

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i}, \tag{2}$$

where U_i is the mean velocity component in the i -direction and ρ is the density of the fluid. For easy of computation, the total pressure $P = p + \frac{2}{3} \rho k$ involves also a term containing the turbulent kinetic energy $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$ where u'_i is the fluctuating part of the instantaneous velocity in the i -direction. The stress τ_{ij} represents the sum of the turbulent stress, τ'_{ij} , plus the laminar viscous stress, $\tau^l_{ij} = \mu S_{ij}$, where the deformation tensor is given by,

$$S_{ij} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \tag{3}$$

Different constitutive equations for the Reynolds stress will be discussed later and they shall be classified basically into Linear and Non-Linear relationships.

The modeled transport equations for the turbulent kinetic energy k and its dissipation rate ϵ are given by:

$$U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{m_i}{\rho s_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \epsilon, \tag{4}$$

$$U_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{m_i}{\rho s_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + c_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - c_2 f_2 \frac{\epsilon^2}{k}. \tag{5}$$

The symbols P_k and m_i represent the turbulence kinetic energy production rate and the eddy viscosity, respectively, and are defined as:

$$P_k = \tau'_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad m_i = c_m f_m \rho \frac{k^2}{\epsilon}. \tag{6}$$

In the present work, both high and low Reynolds models are compared. Their basic difference lies in the distinct forms of the damping functions f_2 and f_m referred to in Eqs. (5) and (6), respectively. Expressions for them are shown in Tab. (1).

These functions and a slightly different set of constants were used in conjunction with the k - ϵ equations.

Table 1. High and Low Reynolds Models

	High Reynolds model proposed by Launder and Spalding (1974)	Low Reynolds model proposed by Abe <i>et al</i> (1992)
f_m	1.0	$\left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(\rho \epsilon)^{0.25} n}{14 \ln} \right] \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{5}{(k^2 / \rho \epsilon)^{0.75}} \exp \left[- \left(\frac{k^2 / \rho \epsilon}{200} \right)^2 \right] \right\}$
f_2	1.0	$\left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(\rho \epsilon)^{0.25} n}{3 \cdot \ln} \right] \right\}^2 \left\{ 1 - 0.3 \exp \left[- \left(\frac{k^2 / \rho \epsilon}{6.5} \right)^2 \right] \right\}$
τ_w	$\frac{u_p \rho c_m^{\frac{1}{4}} k k_p^{\frac{1}{2}}}{\ln \left(\frac{E \rho c_m^{\frac{1}{4}} k_p^{\frac{1}{2}} y_p}{m} \right)}$	$m \frac{\partial u}{\partial y}$

In calculating the wall shear stress with the high Reynolds method (Launder and Spalding (1974)), E in Tab. (1) may be varied to simulate the surface roughness and $\kappa = 0.41$ is the von Kármán constant. Subscript P refers to the node next to the wall. Thus u_p and k_p are, respectively, the value of the velocity and turbulent kinetic energy in this point, and y_p is the normal distance to the wall. The symbol n in the low Reynolds model represents the distance normal to the wall. The constants c_m, c_1, c_2, s_k and s_e for the high Reynolds model are set as 0.09, 1.44, 1.92, 1.0 and 1.33, respectively, and for the low Reynolds model they are given by 0.09, 1.5, 1.9, 1.4 and 1.3, respectively.

As mentioned, here the linear and non-linear eddy-viscosity models were analyzed. For the linear k - ϵ model of turbulence, the Reynolds stress tensor is assumed to be of the form

$$\tau'_{ij} = m_t S_{ij} - \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} k \tag{7}$$

where the last term in (7) was compacted into an expression for the total pressure P .

Non-linear eddy-viscosity models originated in a general proposal done by Pope (1975). However, only in the past two decades such models have had great progresses with the works of Speziale (1987), Nisizima and Yoshizawa (1987), Rubinstein and Barton (1990), Shih et al (1993), among others. In these works, quadratic products were introduced involving the strain and vorticity tensors with different derivations and calibrations for the models. These quadratic forms produce a certain anisotropy degree among the normal tensions, making possible the prediction of secondary motion in non-circular ducts.

A general non-linear expression for the Reynolds stress, kept to second order, can be written as:

$$\begin{aligned} \tau'_{ij} = & (m_t S_{ij})^L - \left(c_{1NL} m_t \frac{k}{\epsilon} [S_{im} S_{mj} - \frac{1}{3} S_{ml} S_{ml} \delta_{ij}] \right)^{NL1} \\ & - \left(c_{2NL} m_t \frac{k}{\epsilon} [\Omega_{im} S_{mj} + \Omega_{jm} S_{mi}] \right)^{NL2} - \left(c_{3NL} m_t \frac{k}{\epsilon} [\Omega_{im} \Omega_{jm} - \frac{1}{3} \Omega_{lm} \Omega_{lm} \delta_{ij}] \right)^{NL3} \end{aligned} \tag{8}$$

or $\tau'_{ij} = \tau_{ij}^L + \tau_{ij}^{NL1} + \tau_{ij}^{NL2} + \tau_{ij}^{NL3}$, (9)

where the c 's are constants, δ_{ij} is the Kronecker delta; the superscripts in Eq. (8) indicate **L**inear and **NL**inear contributions, S_{ij} is the deformation tensor given by (3) and Ω_{ij} represents the vorticity tensor written as

$$\Omega_{ij} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{10}$$

Equations (8) and (9) already assume that the term $\frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} k$ is combined into the total pressure P . Several models based on the general expression (8) are presented in Tab. (2). Except in the model proposed by Shih et al (1993), the value of the parameters c 's remain constant as can be seen in the Table.

Table 2. Non Linear turbulence Models

Models	c_m	c_{1NL}	c_{2NL}	c_{3NL}	Extra Term
Nisizima and Yoshizawa (1987)	0.09	-0.76	0.18	1.04	
Speziale (1987)	0.09	-0.1512	0.0	0.0	T_{SPE}
Rubinstein and Barton (1990)	0.0845	0.68	0.14	-0.56	
Shih et al (1993)	$\frac{2}{3}$ $\frac{1.25 + s + 0.9\Omega}{c_m(1000 + s^3)}$	$\frac{0.75}{c_m(1000 + s^3)}$	$\frac{3.8}{c_m(1000 + s^3)}$	$\frac{4.8}{c_m(1000 + s^3)}$	
Park and Sung (1995)	0.09	0.6	0.4	0.005	

$$T_{SPE} = -0.3024 m_t k / \epsilon \left\{ \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{mm} \delta_{ij} \right\}, \text{ where: } \tilde{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \vec{V} \cdot S_{ij} - \frac{\partial V_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k} S_{ki}$$

$$s = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad \Omega = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$$

3. Numerical method and implicit treatment

The numerical method employed for discretizing the governing equations is the control-volume approach with a collocated grid. A hybrid scheme, Upwind Differencing Scheme (UDS) and Central Differencing Scheme (CDS), is used for interpolating the convection fluxes.

Figure 1 shows a typical control-volume with detailed notation, distances and indexing used when transforming the original equations into the $h-x$ coordinate system. With the help of the figure, the following operators can be identified:

$$\Delta x_h^e = (x_{ne} - x_{se}), \quad \Delta x_x^e = (x_E - x_p), \quad \Delta y_h^e = (y_{ne} - y_{se}), \quad \Delta y_x^e = (y_E - y_p), \quad (11)$$

$$\Delta x_x^n = (x_{ne} - x_{nw}), \quad \Delta x_h^n = (x_N - x_p), \quad \Delta y_x^n = (y_{ne} - y_{nw}), \quad \Delta y_h^n = (y_N - x_p). \quad (12)$$

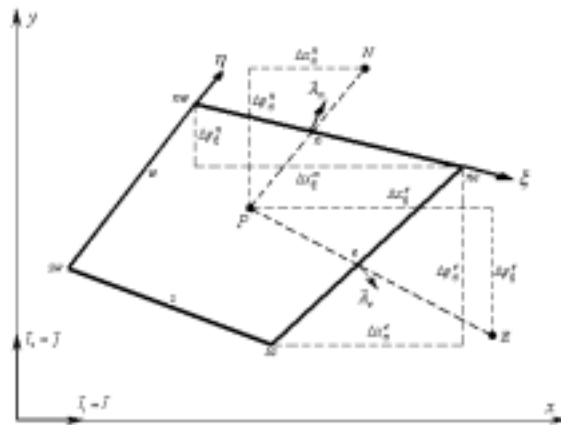


Figure 1- Control-volume and notation

The vector form of the area of the control-volume at *east* and *north* faces, respectively, are given by

$$\vec{A}_e = \Delta y_h^e \vec{i} - \Delta x_h^e \vec{j}, \quad \vec{A}_n = -\Delta y_x^n \vec{i} + \Delta x_x^n \vec{j}. \quad (13)$$

Momentum Equation. For a general dependent variable j , in a steady state flow, a discrete form of Eq. (2) can be written as:

$$I_e + I_w + I_n + I_s = S_j, \quad (14)$$

where I_e, I_w, I_n, I_s are the overall fluxes (convection plus diffusion) of j at the *east, west, north* and *south* control-volume faces, respectively, and S_j the corresponding source term. Here, only the diffusive fluxes will be presented.

For the diffusive flux in the x -direction, I^{Dx} , two faces are considered:

$$I_e^{Dx} \approx -(\tau_{11} \vec{i} + \tau_{12} \vec{j}) \cdot \vec{A}_e, \quad I_n^{Dx} \approx -(\tau_{11} \vec{i} + \tau_{12} \vec{j}) \cdot \vec{A}_n. \quad (15)$$

Here, in accordance with Eq. (9), the diffusion fluxes, for the east and north faces, can be split into linear and non-linear parts as:

$$I_e^{Dx} = (I_e^{Dx})^L + (I_e^{Dx})^{NL1} + (I_e^{Dx})^{NL2} + (I_e^{Dx})^{NL3}, \quad I_n^{Dx} = (I_n^{Dx})^L + (I_n^{Dx})^{NL1} + (I_n^{Dx})^{NL2} + (I_n^{Dx})^{NL3}. \quad (16)$$

For the east face, discretization of the diffusion terms becomes,

$$(I_e^{Dx})^L = \frac{(m + m_e)}{\Pi_e} \left\{ \Delta U_x^e [2(\Delta y_h^e)^2 + (\Delta x_h^e)^2] - \Delta U_h^e [2\Delta y_x^e \Delta y_h^e + \Delta x_x^e \Delta x_h^e] - (p_c^e) \Delta x_h^e \right\}, \quad (17)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL1} = -\frac{c_{1NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ -\Delta y_h^e \left[\frac{8}{3} (p_a^e)^2 + \frac{1}{3} (p_b^e + p_c^e)^2 - \frac{4}{3} (p_d^e)^2 \right] + 2\Delta x_h^e [(p_a^e + p_d^e)(p_b^e + p_c^e)] \right\}, \quad (18)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL2} = -\frac{2c_{2NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ -\Delta y_h^e [(p_b^e)^2 - (p_c^e)^2] + \Delta x_h^e [(p_d^e - p_a^e)(p_b^e - p_c^e)] \right\}, \quad (19)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL3} = -\frac{c_{3NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ -\Delta y_h^e \left[\frac{1}{3} (p_b^e - p_c^e)^2 \right] \right\} \quad (20)$$

where the π 's and Π 's are composed by velocity differences and distances among the different points in the grid. At north face "n", the diffusive fluxes possess an analogous form. For the y -momentum equation, the diffusive fluxes at both east and north faces are also obtained in a similar fashion.

Semi-implicit treatment of the diffusive terms. Details of the numerical treatment and discretization process of convection/diffusion linear/non-linear terms of the momentum equation, as well as the equations for k and ε , are shown in the work by Assato and de Lemos (1998). The numerical treatment presented there for non-linear diffusive terms was totally explicit, accommodating all terms into the source term. In the present work, these same terms were rewritten identifying implicit and explicit parts with the purpose of improving the numerical stability. Thus, Eqs. (17)-(20) are rewritten in the following way:

$$(I_e^{D_x})^L = \Delta U_x^e (D_e^{x,y})^L + (S_e^{*x})^L, \quad (I_e^{D_x})^{NL1} = -\Delta U_x^e (D_e^{x,y})^{NL1} - (S_e^{*x})^{NL1}, \quad (21)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL2} = -\Delta U_x^e (D_e^{x,y})^{NL2} - (S_e^{*x})^{NL2}, \quad (I_e^{D_x})^{NL3} = -\Delta U_x^e (D_e^{x,y})^{NL3} - (S_e^{*x})^{NL3}. \quad (22)$$

The first terms on the right-hand side of (21)-(22) are here treated implicitly whereas the other ones are handled explicitly. The coefficients $(D_e^{x,y})$ are the same for the equations in x and y and are given by:

$$(D_e^{x,y})^L = \frac{(m + m_i)}{\Pi_e} \left[(\Delta y_h^e)^2 + (\Delta x_h^e)^2 \right], \quad (D_e^{x,y})^{NL1} = \frac{c_{1NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ -2(\Delta y_h^e)^2 p_a^e + 2\Delta x_h^e \left[\frac{4}{3} \Delta y_h^e (p_b^e + p_c^e) - \Delta x_h^e p_d^e \right] \right\}, \quad (23)$$

$$(D_e^{x,y})^{NL2} = \frac{2c_{2NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ \Delta x_h^e \Delta y_h^e [\Delta x_x^e \Delta U_h^e - \Delta y_x^e \Delta V_h^e] \right\}, \quad (D_e^{x,y})^{NL3} = \frac{c_{3NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ \Delta x_h^e \Delta y_h^e (p_b^e + p_c^e) \right\}. \quad (24)$$

The parts treated explicitly (S_e^{*x}) make use of velocity values at grid points calculated at the previous iteration. For the east face and x -direction, one has:

$$(S_e^{*x})^L = \frac{(m + m_i)}{\Pi_e} \left\{ (\Delta U_x^e)^\circ (\Delta y_h^e)^2 - (\Delta U_h^e)^\circ [2\Delta y_x^e \Delta y_h^e + \Delta x_x^e \Delta x_h^e] - p_c^e \Delta x_h^e \right\}, \quad (25)$$

$$(S_e^{*x})^{NL1} = -\frac{c_{1NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ -2\Delta y_h^e \left[\frac{1}{3} (p_a^e)^2 + (\Delta U_h^e)^\circ (-\Delta y_x^e p_a^e + \Delta x_x^e (\frac{1}{3} p_c^e + \frac{1}{6} \Delta x_x^e (\Delta U_h^e)^\circ)) \right] - \frac{2}{3} (p_d^e)^2 + \frac{1}{6} (p_c^e)^2 \right\} \left\{ +2\Delta x_h^e \left[\frac{1}{6} \Delta x_h^e (\Delta U_x^e)^\circ p_a^e + (\Delta U_h^e)^\circ (\Delta x_x^e p_d^e - \Delta y_x^e (p_c^e + \frac{7}{6} p_b^e - \frac{1}{6} \Delta x_x^e (\Delta U_h^e)^\circ)) + p_c^e p_d^e \right] \right\} \quad (26)$$

$$(S_e^{*x})^{NL2} = -\frac{2c_{2NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ -\Delta y_h^e \left[(\Delta x_x^e)^2 ((\Delta U_h^e)^\circ)^2 - (p_c^e)^2 \right] + \Delta x_h^e \left[(\Delta y_h^e)^2 (\Delta U_x^e)^\circ (\Delta V_x^e)^\circ + (p_b^e - p_c^e) (\Delta y_x^e (\Delta U_h^e)^\circ) + p_d^e \right] \right\}, \quad (27)$$

$$(S_e^{*x})^{NL3} = -\frac{c_{3NL} m_i k}{(\Pi_e)^2 e} \left\{ -\frac{\Delta y_h^e}{3} \left[\Delta x_h^e (p_b^e + 3p_c^e - \Delta x_h^e (\Delta U_x^e)^\circ) (\Delta U_x^e)^\circ - 2p_b^e p_c^e + (p_c^e)^2 + (\Delta x_x^e)^2 (\Delta U_h^e)^\circ \right] \right\}. \quad (28)$$

The superscript "°" of velocity differences indicates that these values are taken from the previous iteration. Coefficients π 's Π 's are also calculated with velocities from previous iteration.

Discretized momentum equation. After all fluxes and source terms are incorporated in momentum equation, the algebraic equivalent of (2) is finally assembled. Further, variables at faces e, w, n, s are interpolated forming an equation connecting the variable at P with the neighbor points (see Fig. (1)). The source term in the x -momentum equation can be assembled as:

$$S^* = \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{Explicit part of linear term}} + \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{Explicit part of 1}^\circ \text{ non linear term}} + \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{Explicit part of 2}^\circ \text{ non linear term}} + \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{Explicit part of 3}^\circ \text{ non linear term}} + \underbrace{S_p^*}_{\text{Pressure term}}, \quad (29)$$

where the pressure term is given as,

$$S_{P_x} = -(P_e - P_w)(y_n - y_s) + (P_n - P_s)(y_e - y_w) \quad (30)$$

It is important to notice that the value of $D_e^{x,y}$ depends on the control volume in the mesh and can be positive or negative, except for the linear term, where it is always positive. Thus, whenever a negative value is verified for $D_e^{x,y}$, there is no advantage in treating this particular diffusion component in an implicit way. Therefore, when $D_e^{x,y}$ is negative for the non-linear terms, the diffusion fluxes is treated fully explicitly. In this case, Eq. (29) yields,

$$S^* = \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{Explicit part of linear term}} + \underbrace{I_e^{D_x} - I_w^{D_x} + I_n^{D_x} - I_s^{D_x}}_{\text{1}^\circ \text{ non linear diffusion term}} + \underbrace{I_e^{D_x} - I_w^{D_x} + I_n^{D_x} - I_s^{D_x}}_{\text{2}^\circ \text{ non linear diffusion term}} + \underbrace{I_e^{D_x} - I_w^{D_x} + I_n^{D_x} - I_s^{D_x}}_{\text{3}^\circ \text{ non linear diffusion term}} + \underbrace{S_p^*}_{\text{Pressure term}} \quad (31)$$

4. Results

The results presented in this section were obtained using a total of four different models. The following turbulence closures were applied: the *linear* and *non-linear* k - ϵ models using the high Reynolds approach, designated here by **L_HRN** and **NL_HRN**, respectively, and the same models applying the low Reynolds model, named respectively by **L_LRN** and **NL_LRN**. The non-linear model employed was the Shih et al (1993) closure, shown in Tab. (2). The geometry considered is a sinusoidal constriction in a circular tube, producing a maximum area reduction of 75% as illustrated in Fig. (2). The experimental work by Desphande and Giddens (1980) presents results for $Re=5000$, 10000 and 15000 . In this work, calculations were performed only for a Reynolds number of $Re=15000$ in order to compare with numerical results given in the literature. The radius of a tube with sinusoidal constriction is described by

$$r_{wall}(X) = 1 - \frac{1}{4} \left[1 + \cos\left(\frac{1}{2}\pi X\right) \right] \quad (-2 \leq X \leq 2) \\ r_{wall}(X) = 1 \quad (|X| > 2) \quad (32)$$

where $X = x/R_o$, R_o represents the unobstructed tube radius, r and x are the radial and axial coordinates, respectively.

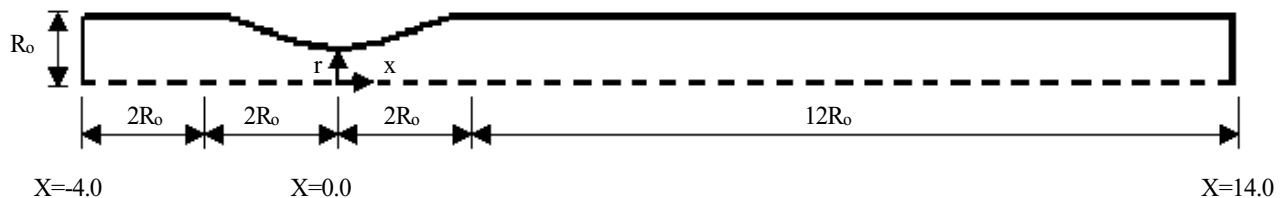


Figure 2. Geometry of a tube with a sinusoidal constriction

The inlet conditions of Fig (2), i.e., the profiles U_{in} , k_{in} and ϵ_{in} were obtained from the fully developed turbulent flow in a tube for $Re=15000$. The periodic boundary condition was applied until the fully developed regime was simulated. Figure (3) shows a good agreement of present models for the mean velocity field non-dimensionalized by the friction velocity u_τ . For the turbulent kinetic energy field, it is observed that the low-Reynolds models (NL_LRN and L_LRN) give better agreement. For ϵ , the models present a good agreement with experimental data by Laufer (1954), mostly next to the wall.

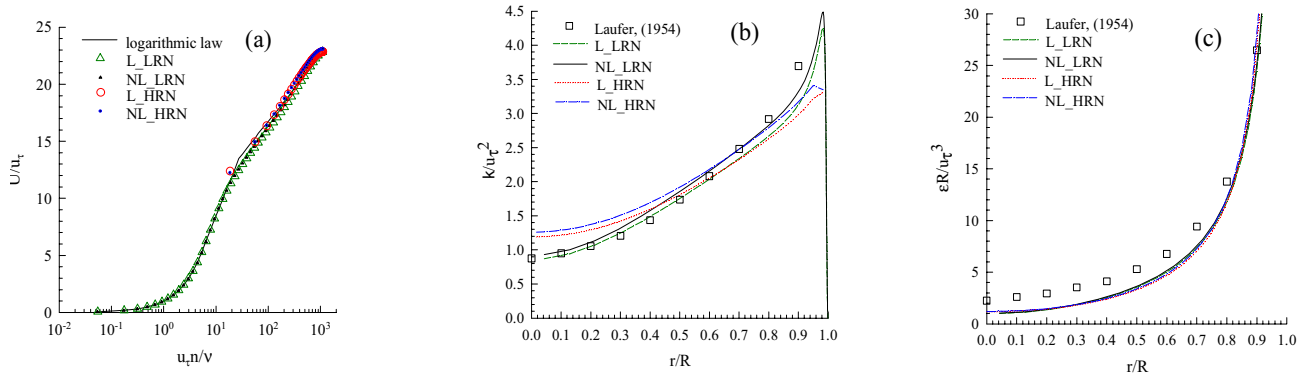


Figure 3. Similar profiles used in inlet of axisymmetric stenosis shown in Fig. (2): a) dimensionless velocity field, b) Dimensionless k_m field c) dimensionless e_m field. Experiments of Laufer (1954) for $Re=50000$.

Table (3) shows the separation length calculated by all four turbulence models here analyzed. Also shown are predictions of Lien (1992) that uses the Reynolds-stress model (RSTM) combined with wall laws. For the non-linear k - ϵ model, both semi-implicit and fully explicit treatments of diffusive terms of the momentum equations were considered. It can be noticed that smallest deviations are presented by the low Reynolds formulation, with the best prediction obtained with the NL_LRN model.

Table 3. Separation length for the turbulent flow in stenosis constriction

MODEL	Grid	x_s / R_o	x_r / R_o	Separation length: L / R_o	Deviations: [%]
Experimental		0.5	4.0	3.5	
L_HRN	120 x 25	0.866	2.874	2.008	42.6
NL_HRN		0.787	3.622	Expl.: 2.835 Semi-Impl.: 2.835	19.0
L_LRN	120 x 60	0.315	3.563	3.248	7.2
NL_LRN		0.315	3.937	Expl.: 3.622 Semi-Impl.: 3.622	-3.49
RSTM/Lien	120 x 24	0.375	4.512	4.137	-18.2

The wall pressure, centerline velocity and centerline kinetic turbulent energy distributions along the tube are shown in Fig. (4). The variables are non-dimensionalized by the bulk velocity U_b . All models present different results and the agreement with the experimental data are seen to be rather weak. Included in Fig. (4) are the distributions obtained by Kadja (1987) and Lien (1992). For the wall-pressure distribution the most of the models over-predict the pressure at $X = 0$ (throat), except the RSTM/Lien that present good agreement. The NL_LRN and RSTM/Lien show performance slightly better after the throat, however none of the models is able to predict accurately the response of the boundary layer to the adverse pressure gradient following the throat. For the centerline velocity distribution all models under-predict the U_c at throat of the tube, the NL_LRN and RSTM/Lien present the better results in this position, however they and others are not capable of capturing strong flow deceleration in the sections immediately after the throat. Among all models analyzed the NL_LRN and RSTM/Lien present better results for the centerline velocity up to the section $X = 4.0$, after this position they show very slow in the deceleration process. For the centerline turbulent kinetic energy distribution can also be observed that the two models NL_LRN and RSTM/Lien present similar behavior. However, they predict a small turbulence quantity which remain constant up to the section $X = 6.0$ where starts a sharp increase of k . In contrast to predictions, the experiments show a rapid increase on the centerline turbulent energy right after separation ($X = 1.0$), and at $X = 6.0$ starts to fall. In other models the presence of two peaks of k is observed, a behavior that does not occur experimentally. Clearly, Kadja's results using a low-Re linear k - ϵ model are worse than the present L_LRN model.

Figure (5) shows the mean velocity field U/U_b in several stations along the tube. It can be seen that, in the recirculation region, better agreement for the mean velocity field occurs when the low Reynolds models are applied, with advantage to the NL_LRN version. The L_HRN model simulates the worst results.

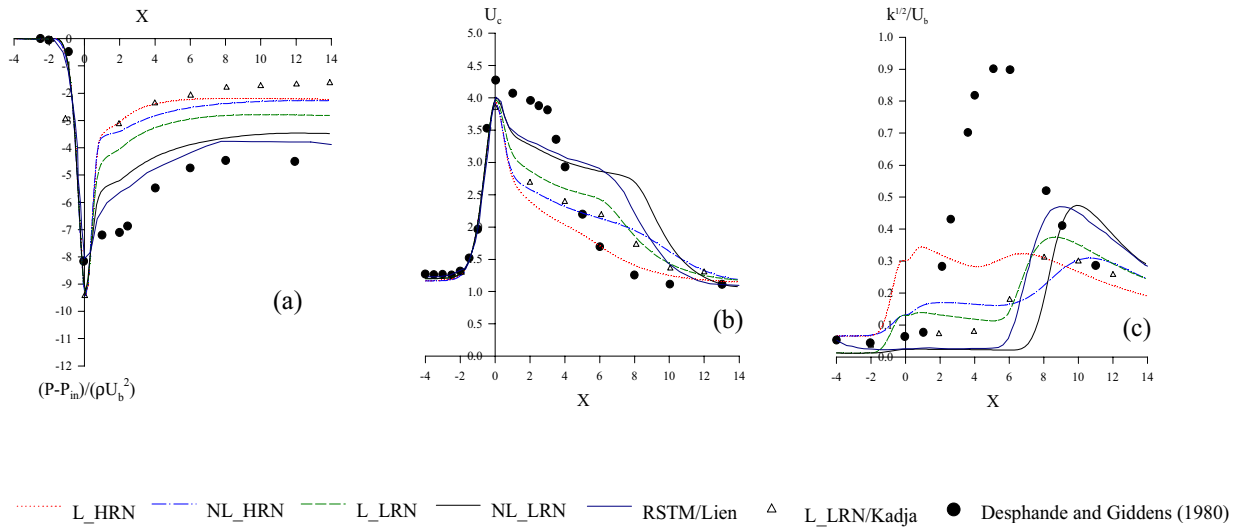


Figure 4. Turbulent flow in stenosis constriction. (a) Wall pressure coefficient distribution; (b) Centerline velocity distribution; (c) Centerline kinetic energy distribution.

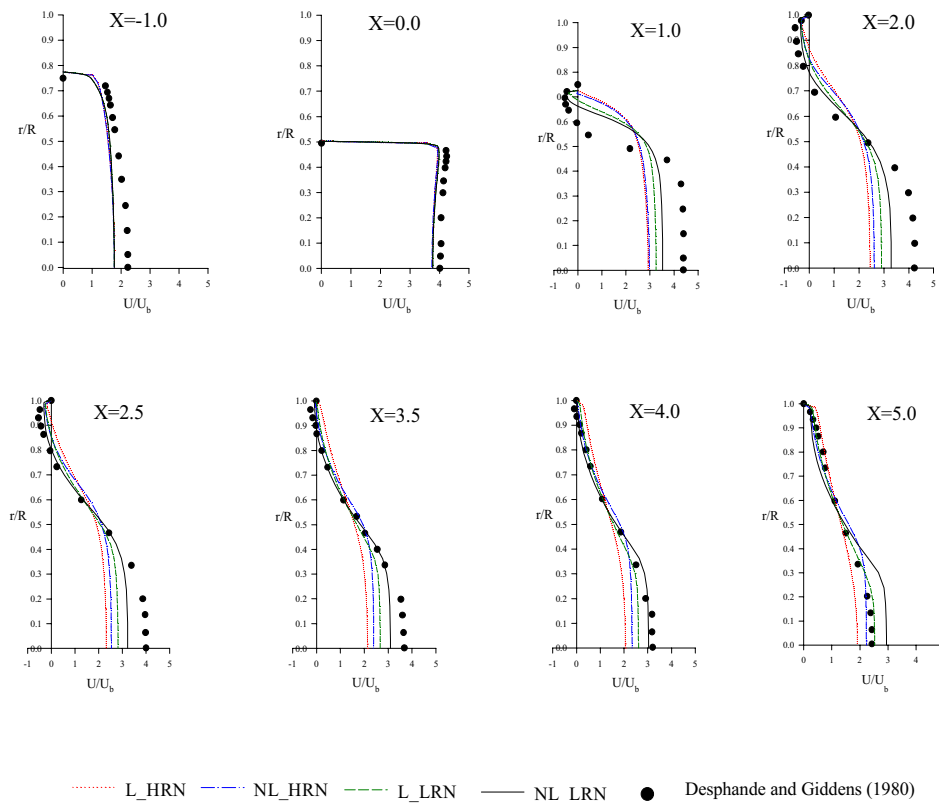


Figure 5 – Axial velocity profiles for turbulent flow in stenosis

As can be seen of the Fig. (5), the flow ahead and in the throat presents small deviations in relation to the experimental data. The flow at the throat itself is almost uniform (the mean velocities are four times larger than the inlet bulk velocity) subject to strong acceleration, containing a thin boundary layer. In station $X = 1.0$ up to $X = 4.0$ the NL_LRN presents wide advantage showing able of capturing very well the streamline curvature.

Figure (6) shows the turbulent kinetic energy distributions for all four turbulence models analyzed. All models present different results. The low k values occur in the entrance of the geometry. For the model (a) to (d) considered,

they reach further and further into the channel around the centerline. This order of the models (from (a) to (d)) is in agreement with the increase of the separation length simulated. As can be seen from figures the turbulence is generated next to curved surface of the constriction and distributed along the tube (toward downstream).

Figure (7) shows residue history for velocity component U along the solution relaxation process using the high Reynolds approach. The figure compares both semi-implicit and fully explicit treatments for discretizing the diffusion fluxes of non-linear model. The linear model is also compared and it has shown difficulty to converge more than the non-linear theory. For this case analyzed, the semi-implicit treatment did not indicate any benefits to stability converging in the same rate than the fully explicit treatment. It has been observed that using the non-linear model of Shih et al (1993) the convergence always is obtained, even when increase the sub-relaxation factors (from sub-relax A to sub-relax B), while with the linear model the divergence is clearly observed.

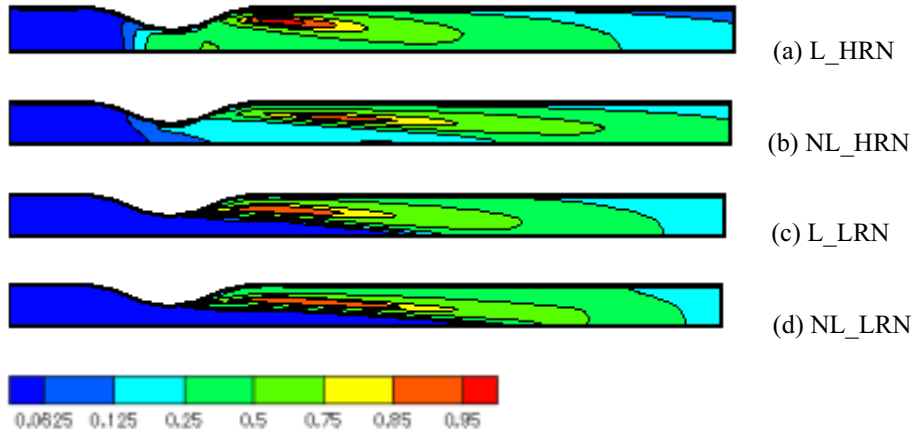


Figure 6 – Turbulent kinetic energy fields for turbulent flow in stenosis

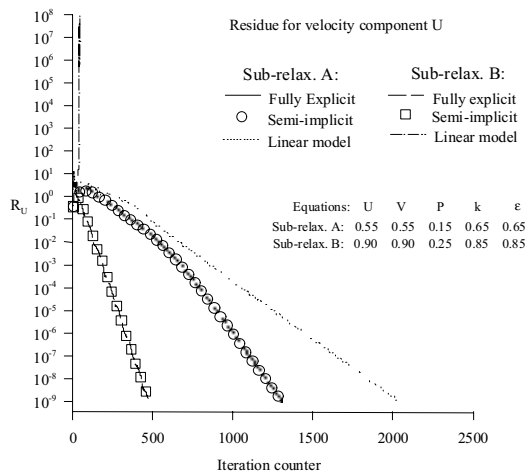


Figure 7 – Residue history for velocity component U for turbulent flow in stenosis. Fully explicit and semi-implicit treatment. High Reynolds formulation.

5. Conclusions

In this work, the performance of four mathematical closures was investigated with special attention given to the non-linear *k-ε* models. The analysis was conducted to predict the turbulent flow field at Reynolds number of 15000 through a circular pipe containing a sinusoidal constriction. The low Reynolds number formulation utilized in the linear and non-linear *k-ε* models presents better performance in the calculation of the separation length when compared to other models using wall laws, as shown in Tab. (3), including the Reynolds-stress model (RSTM/Lien). In the

prediction of the wall pressure, illustrated in Fig. 4(a), it was observed a better agreement given by the NL_LRN and RSTM/Lien after the throat. However, none of the models was able to describe the response of the boundary layer to the adverse pressure gradient following the point of maximum area restriction. Consequently, all models were not capable to predict correctly the centerline velocity distributions along the tube shown in Fig. 4(b). Also, they fail to predict the strong flow retardation. As can be seen of Figs. 4(c), the centerline turbulent kinetic energy obtained by present models do not present satisfactory results, so that some models do not reach half of the maximum k value observed experimentally. For the mean axial velocity field U/U_b shown in Fig. (5), better agreement was obtained by models using the low Reynolds number approach with good advantage for the non-linear case (NL_LRN). In general, the L_HRN model simulated the worst results whereas the better ones were calculated with the NL_LRN model. It has been also observed that the two models NL_LRN and Reynolds stress transport model (RSTM) of Lien (1992) always presented a similar behavior in their results. An analysis of residue reduction for the velocity component U along the relaxation process is illustrated in Fig. (7). It has been observed that, for the present problem, the semi-implicit treatment of non-linear diffusive terms did not add any benefit to the numerical stability of the solution when compared with the fully explicit approach. The semi-implicit treatment is relevant when we make use of computational grids with control-volumes according to Fig. 1. The grids utilized in this work contain non-orthogonal control-volumes only at $(-2 \leq X \leq 2)$, furthermore the distances Δx_η^e presented in Eqs. (23)-(24) for all control-volumes are zero. The linear model showed more difficulty to converge than the non-linear model of Shih et al (1993).

6. Acknowledgements

The authors are thankful to CNPq, Brazil, for their financial support during the preparation of this research.

7. References

- Abe, K., Nagano, Y. and Kondoh, T., 1992, "An Improved k - ϵ Model for Prediction of Turbulent Flows with Separation and Reattachment", *Trans. JSME, Ser. B*, vol. 58, pp. 3003-3010.
- Assato, M. and de Lemos, M.J.S., 1998, "Development of a Non-Linear Turbulence Model for Recirculating Flows Using Generalized Coordinates", *ENCIT98- Proc. 7th Braz. Cong. Eng. Th. Sci.*, vol. 2, pp. 1386-1391, Rio de Janeiro, RJ, Nov. 3-6.
- Assato, M. and de Lemos, M.J.S., 2000, "Tratamento Numérico e Aplicações de um Modelo de Viscosidade Turbulenta Não Linear para Alto e Baixo Reynolds", 2th ETT- Escola Brasileira de Primavera Transição e Turbulência, Uberlândia/MG, Brazil, Dez. 11-15.
- Desphande, M.D. and Giddens, D.P., 1980, "Turbulence Measurements in a Constricted Tube", *Journal Fluids Mechanics*, vol. 97, part , pp. 65-89.
- Hanjalic, K. and Launder, B.E., 1980, "Sensiting the Dissipation Equation to Irrotational Strain", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 102, pp. 34-40.
- Jones, W.P. and Launder, B.E., 1972, "The Prediction of Laminarization with Two-Equation Model of Turbulence ", *Int. J. Heat & Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301 - 314.
- Kadja, M., 1987, "Computational of Recirculating Flow in Complex Geometries with Algebraic Second-Moment Closure", Ph.D Thesis, University of Manchester.
- Laufer, J., 1954, "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow", Report 1174 – National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D.C., USA.
- Launder, B.E. and Spalding, D.B., 1974, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 3, pp. 269-289.
- Lien, F.S., 1992, "Computational Modelling of 3D Flow in Complex Ducts and Passages", Ph.D Thesis, University of Manchester.
- Lumley, J.L., 1970, "Toward a Turbulent Constitutive Relation", *J. Fluid Mech.*, 41, 413.
- Nisizima, S. and Yoshizawa, A., 1987, "Turbulent Channel and Couette Flows Using an Anisotropic k - ϵ Model", *AIAA J.*, Vol. 25, N^o 3, p. 414.
- Park, T.S. and Sung, H.J., 1995, "A Nonlinear Low-Reynolds-Number k - ϵ Model for Turbulent Separated and Reattaching Flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38, pp. 2657-2666.
- Pope, S.B., 1975, "A More General Effective-Viscosity Hypothesis", *J. Fluid Mech.*, 72, pp.331.
- Rivlin, R.S., 1957, "The Relation Between the Flow of Non-Newtonian Fluids and Turbulent Newtonian Fluids", *Q. Appl. Maths*, 15, 212.
- Rubinstein, R. and Barton, J.M., 1990, "Renormalization Group Analysis of the Stress Transport Equation", *Phys Fluids A2(8)*, pp. 1472-1476.
- Shih, T.H., Zhu, J. and Lumley, J.L., 1993, "A Realizable Reynolds Stress Algebraic Equation Model", NASA TM-105993.
- Speziale, C.G., 1987, "On Nonlinear k - l and k - ϵ Models of Turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 176, pp. 459-475.
- Zevallos, G.N. and Nieckele, A.O., 2000, "Performance of the Low-Reynolds k - ϵ LSH to Predict Flow Through Curvilinear Obstruction", *ENCIT2000- Proc. 8th Braz. Cong. Eng. Th. Sci.*, Porto Alegre/RS, Brasil.

NUMERICAL STUDY OF TURBULENT FLOW SUBJECTED TO SUDDEN CHANGES IN WALL ROUGHNESS

Mila R. Avelino*

Department of Mechanical Engineering
University of Miami, Coral Gables, FL, USA
E-mail: mila@uerj.br

Sadik Kakaç

Department of Mechanical Engineering
University of Miami, Coral Gables, FL, USA
E-mail: skakac@coeds.eng.miami.edu

Marcelo J.S. de-Lemos

Departamento de Energia - IEME
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA
12228-900, São José dos Campos, SP, Brazil
E-mail: delemos@mec.ita.br

Abstract. The effects of sudden changes are predicted in the cases of turbulent flow around surface-mounted two-dimensional ribs when subjected to a sudden change in surface roughness. A particular interest of this study is to investigate the sudden changes in the surface roughness for developing boundary layer flow. A two-equation k - ϵ turbulence model is employed to simulate the turbulent transport. Equations of boundary-layer type were used and a forward marching method was employed for sweeping the computational domain. Wall functions that take into account surface roughness are used to specify the boundary conditions at the surface. The effects of the sudden changes of roughness accounted for the wall functions in the k - ϵ turbulence model are compared with available experimental data. Four configurations are simulated here, namely one extensive uniformly smooth surface, one extensively uniform rough case, and two cases where the surface roughness varies suddenly from a smooth to a rough and from a rough to a smooth surface. Results are presented for velocity and skin friction coefficient, in addition to comparisons with experimental data. The use of a parabolic solver showed good agreement with experimental values for the mean and local quantities.

Keywords: Turbulent Flow, Numerical Study, Surface Roughness.

Nomenclature

A_{calc}	calculated duct area
A_{duct}	physical duct area
c_f	$f=1,2,m$ model constants
E	Wall Law constant
k	Turbulent kinetic energy per unit mass, $\overline{u_i u_i} / 2$
N	Number of grid points in transverse direction
P	Production rate of k , Eq. (6)
p	Static pressure
H	Height of computational domain
Re	Reynolds number
S_f	Source term for f , $f=u,k,e$
u	Axial velocity
U^*	Friction velocity
U_m	Mean velocity
v	Transverse velocity
x	Axial coordinate
y	Wall distance,

Greek Letters

ϵ	Dissipation rate of k
m	Turbulent momentum transport coefficient, Eq.(4)
ρ	Fluid density
m_{eff}	Effective transport coefficient for u , Eq.(3)
μ	Fluid dynamic viscosity
Γ_{eff}^f	Effective transport coefficient for f , $f=u,k,e$
S_k	Turbulent Prandtl/Schmidt number for k
S_e	Turbulent Prandtl/Schmidt number for e
Ψ	Stream function
Ψ_I	Value of Ψ at internal surface of boundary layer
Ψ_E	Value of Ψ at external surface of boundary layer
K	Von Kármán constant
f	General dependent variable, $f=u,k,e$
Ψ_{EI}	$\Psi_E - \Psi_I$
τ_w	Wall shear stress

1. Introduction

A complete understanding of the effects that a step change in surface roughness has on the properties of a turbulent boundary layer has been the object of several experimental and theoretical investigations in recent years, particularly in cooling of electronics. Most electronic device configurations present a sudden change in the roughness and in the temperature of the surface.

Augmenting the heat transfer rates over rough heated surfaces has received extensive interest over the years due to a wide range of application in industrial flows. Cooling requirements in microelectronics are among the toughest barriers to faster, smaller, and still more reliable systems. In the past three decades electronics has developed to surround all

*Visiting Scholar from: Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, 20550-013 - Rio de Janeiro, RJ, Brazil

faces of modern life. At the same time, with increasing number of applications, reliability has become a real crucial problem. Realizing the importance of the problem, much emphasis has been given to the improvement of the reliability level, and to the improvement of the electrical performances of the electronic devices as well.

The present work is concerned with flows that develop over flat surface with changing surface conditions. In particular, we will be looking at flows that present abrupt changes in surface conditions from one extensive uniform surface to another. The theory to be used here is, therefore, expected to account for these effects. Here, we will use the *k-ε* model to describe the properties of the boundary layer in the surface layer, and validated the results against the experimental data of Avelino (2000).

The *k-ε* model will use a wall function to represent the velocity profile near the wall so that a local analytical solution for the inner region will be used as a boundary condition for the outer solution. This inner solution must take into account the local changes in the flow such as those caused by the changes on the surface roughness. The local changes are then accounted for by logarithmic profiles that take as a characteristic length the displacement in origin, which has been experimentally studied by Avelino et al. (1998).

The present work is, therefore, to show the reader how the *k-ε* model stands for flows over step changes in surface roughness if appropriate boundary conditions are made use of. Four geometrical configurations will be considered and analysed using boundary layer equations. Accordingly, the use of simple numerical tools for preliminary engineering design, instead of using memory-demanding, large Computational Fluid Dynamics (CFD) codes, can benefit the overall design process if repetitive calculations are mandatory. If no back flow is in order, marching-forward techniques, implemented along with isotropic turbulence models, provide an economical means for conceptual design using cheaper PC-based workstations.

Acknowledging the advantages of “fast” parabolic solvers, the work of Matsumoto & de Lemos (1990), presented results for the developing time-averaged and turbulent fields in a coaxial jet along a circular duct of constant area. Later, de Lemos & Milan (1997), extended their calculations to flow in long ducts through varying cross sections. Similar results for ducts with plane walls have also been documented in Braga & de Lemos (1999). The numerical methodology developed in all of that work is here employed. There, use was made of the isotropic *k-ε* model and the wall log-law for velocity over smooth surfaces. Therefore, the present calculations used additional wall laws in order to account for rough walls.

Next, the geometry investigated is detailed, followed by the governing equations, the numerical method used and the results obtained.

2. Mean Flow and Turbulence

Geometry The flow here analyzed consists of a confined stream inside a rectangular channel of constant cross section. Situations concerning surface roughness variation along the longitudinal coordinate are here considered. A schematic of the configuration under study is shown in Fig. 1. A wind tunnel of 30x30 cm of cross section and 2 m long has the bottom surface made rough with the help of transverse ribs. Four configurations were placed in the wind tunnel by alternating the position of the rough elements in the test section. The smooth surface was simulated as a reference case. In the other three configurations, the roughness adopted was composed of transversally grooved surfaces with rectangular slats with height $k=3\text{mm}$, width $s=12.0\text{mm}$, and pitch $l=24.0\text{mm}$. The grooves between the rough elements are 12mm wide ($w=12.0\text{mm}$). The rough surface is schematically shown in Fig. 2 with the definition of the displacement in origin, ϵ .

It should be pointed out that mean velocity profiles are experimentally observed when the flow is subjected to sudden changes of the geometry conditions at the wall. In the vicinities of the abrupt change, the flow experiences a

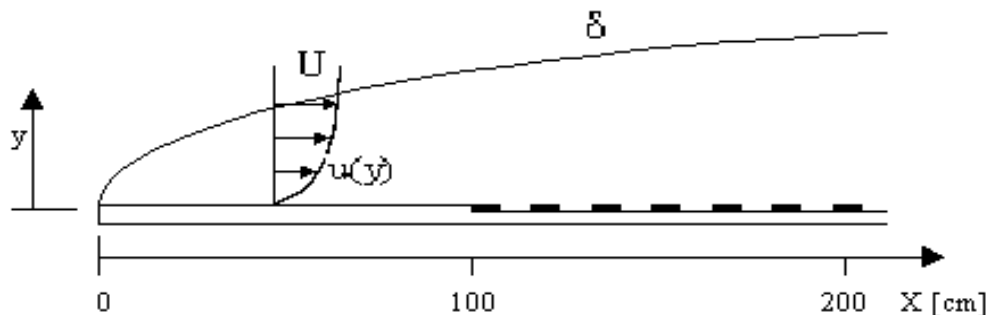


Fig. 1 – Test section and coordinate system for the smooth to rough surface.

transition from one extensive region to another, being affected by the new geometry, until it reaches the fully rough regime. The theory used here does not represent the transition region, but the region where the flow has already reached the fully rough regime, where the numerical prediction shows good agreement with the experimental results.

Boundary Layer Equations For generality, the equations below are written embracing planar and axi-symmetric cases. The equations are also presented in a simplified form, already making use of the concept of isotropic turbulent viscosity, m .

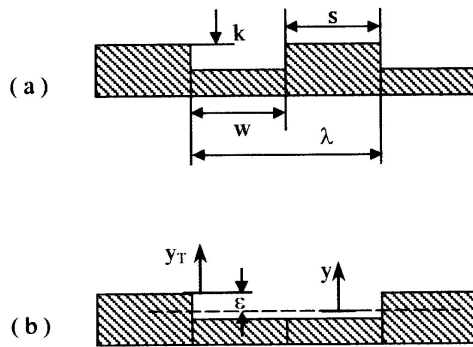


Fig. 2 – Rough surface geometry and notation.

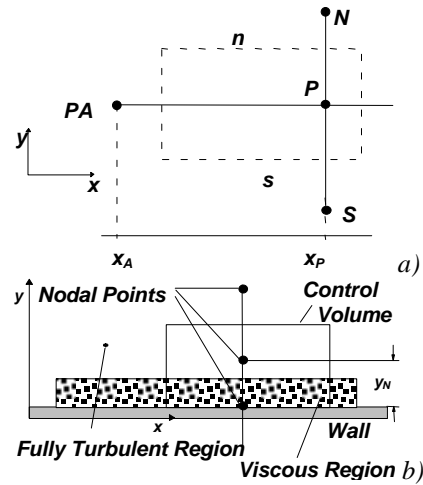


Fig. 3 – General notation for smooth wall model: a) Control volume, b) wall layer model.

Accordingly, the equations of continuity of mass and x -momentum for a two-dimensional, source-free, low speed, planar turbulent boundary (mixing) layer can be written as,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \tag{2}$$

In (1)-(2) u, v are the velocity components in the axial and transverse direction, respectively, ρ the fluid density, p the static pressure, and μ_{eff} the effective (turbulent+laminar) coefficient of exchange given as,

$$\mu_{eff} = m + m_l \tag{3}$$

where m is the molecular viscosity. Further, in the k - e model one has (Jones & Launder, 1972),

$$m = \rho c_m k^2 / e \tag{4}$$

where c_m is a constant. Transport equations for k and e are written as (Launder & Spalding, 1974),

$$\rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma_{eff}^k \frac{\partial k}{\partial y} \right] + S_k \tag{5}$$

$$\rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma_{eff}^e \frac{\partial e}{\partial y} \right] + S_e$$

In (5), $\Gamma_{eff}^k = m + m_l / \sigma_k$ and $\Gamma_{eff}^e = m + m_l / \sigma_e$ where the σ 's are the effective coefficient of exchange and the σ 's are the turbulent Prandtl/Schmidt numbers for k and e . The last terms in (5) are known as "source" terms and are given by $S_k = \rho (P - e)$ and $S_e = \rho \rho_k (c_1 P - c_2 e)$ where $c_1=1.47, c_2=1.92$ and $c_m=0.09$. The production term reads

$$P = \frac{m_l}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \tag{6}$$

Coordinate System The numerical solution of Eqs. (1), (2) and (5) in the coordinate system x - y presents some difficulties in regard to numerical precision. In this system, there is the disadvantage of having only a few nodal points where the boundary layer is "thin" and too many points where the thickness of the boundary layer has attained substantial growth. This work uses the coordinate system x - ω , proposed in Patankar (1988), by doing;

$$w = \frac{\Psi - \Psi_l}{\Psi_E - \Psi_l} \tag{7}$$

where Ψ is the stream function and the subscripts I and E refer to the internal and external boundary layer limiting surfaces, respectively.

The equation set formed by (1)-(2)-(5) seen before can be written in the coordinate system $\underline{x-\omega}$ as (Patankar, 1988),

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + (a + b \mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left(c \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \right) + d \quad (8)$$

where,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{d\Psi_I}{dx} / \Psi_{EI}; \quad b = -\frac{d\Psi_{EI}}{dx} / \Psi_{EI} \\ c &= r^2 \mathbf{r} u \Gamma_{eff}^f / \Psi_{EI}^2; \quad d = S_f / (\mathbf{r} u) \\ \Psi_{EI} &= \Psi_E - \Psi_I \end{aligned} \quad (9)$$

In Eq. (8), \mathbf{f} can represent any of the dependent variables ($\mathbf{f}=u,k,e$), Γ_{eff}^f is an effective coefficient of diffusion for \mathbf{f} and S_f a source term. The discretization of (8) is obtained through the control volume method (Patankar & Spalding, 1972, Patankar, 1980) implying in (see Fig. 3a for notation),

$$a_P \mathbf{f}_P = a_N \mathbf{f}_N + a_S \mathbf{f}_S + a_{PA} \mathbf{f}_{PA} + b_P \quad (10)$$

where the coefficients involve convection, diffusion and source terms. For the solution of system (10) the Three Diagonal Matrix Algorithm is here adopted.

Inlet Conditions. Inlet flow is given a uniform distribution and the values of k and e at entrance were assumed as,

$$k_{in} = C U_m^2, \quad \epsilon_{in} = k_{in}^{3/2} / K y \quad (11)$$

where $C = 1/2 Tu^2$, $Tu = \sqrt{3(u'_i)^2} / U_m$ is the turbulence intensity at inlet, U_m is the overall mean velocity, K is the von Kármán constant ($K=0.41$) and y the distance to the wall. Halfway to the top surface ($y=H/2$) the symmetry condition is implemented for all dependent variables $\mathbf{f}=u,k,e$, as $\partial\phi/\partial y|_{y=0} = 0$.

Wall Treatment for Smooth Surfaces. The mathematical model seen above is not valid inside the layers very close to the wall where viscous effects are predominant. Velocity at the grid point closest to the wall is handled by the usual Wall Function approach described in Launder & Spalding (1972). The notation below refers to Fig. 3b where the location of the grid point closest to the wall, N , is identified. The wall function gives for the wall shear stress at node N ,

$$\mathbf{t}_w = (U_N \mathbf{r} c_m^{1/2} k_N^{1/2}) / \left[\frac{1}{K} \ln \left[E y_N \frac{\mathbf{r} (c_m^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mathbf{m}} \right] \right] \quad (12)$$

where E is a constant. In the wall region, the use of the wall function, characterized by the expressions,

$$U_N^+ = \frac{1}{K} \ln(y_N^+ E) \quad (13)$$

where $U_N^+ = \frac{u_N}{U^*}$; $y_N^+ = \frac{\mathbf{r} U^* y_N}{\mathbf{m}}$; $U^* = \sqrt{\frac{\mathbf{t}_w}{\mathbf{r}}}$ and the employment of the assumption of "local equilibrium" for turbulence ($P=e$), gives for point N ,

$$k_N = \mathbf{t}_w / (\mathbf{r} c_m^{1/2}); \quad e_N = c_m^{3/4} k_N^{3/2} / K y_N \quad (14)$$

Wall Treatment for Rough Surfaces. For rough surfaces, the equations above for the law of the wall are modified to take into account the effects for roughness. The basic facts about the laws of the wall for the velocity profiles have been discussed elsewhere (see Avelino et al. (1996)).

For computing the flow over the rough surface at the bottom of the wind tunnel, as shown in Fig. 1, Eq. (13) is modified for including the roughness function. Accordingly, an expression for the velocity profile valid for all types of roughness can be written if we make

$$\frac{u}{U^*} = \frac{1}{K} \ln \frac{(y_T + \epsilon) U^* \mathbf{r}}{\mathbf{m}} + A - \frac{\Delta u}{U^*} \quad (15)$$

where,

$$\frac{\Delta u}{U^*} = \frac{1}{K} \ln \frac{\epsilon U^*}{\mathbf{n}} + C_i, \tag{16}$$

The domain of validity of (15)-(16) is the fully turbulent region and that can be verified through application of the single limit concept of Kaplun (1967) (see Silva Freire & Hirata, 1990).

In the above equations all symbols have their classical meaning; C_i , $i= K, D$ is a constant characteristic of the type of roughness; the coordinate y_T is the distance measured from the crest of the roughness elements ($y = y_T + \epsilon$); ϵ is the displacement in origin, referred to in literature as the error in origin as well. Equations (15) and (16) will be used to specify the boundary conditions on a $k-\epsilon$ formulation of the problem. The values for A , C_i and ϵ used were 5.15, 4.3 and 1.9mm, respectively. Finally, rewriting (12) in the form $\mathbf{t}_w = \mathbf{I} \mathbf{m} (\partial U / \partial y)$ gives further,

$$\mathbf{I} = \begin{cases} 1 & \text{for laminar flow} \\ \frac{K y_N \frac{\mathbf{r} (c_m^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mathbf{m}}}{\ln \left[E y_N \frac{\mathbf{r} (c_m^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mathbf{m}} \right]} & \text{for turbulent flow over smooth surface} \\ \frac{K y_N \frac{\mathbf{r} (c_m^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mathbf{m}}}{\ln \left[E_r \frac{y_N}{\epsilon} \right]} & \text{for turbulent flow over rough surface} \end{cases} \tag{17}$$

3. Numerical Algorithm and Computational Details

Pressure gradient. Determination of the unknown pressure gradient is handled as explained in Patankar (1988). That approach consists basically in finding the "zero" of a function $f(dp/dx)$ defined as;

$$f(dp/dx) = (A_{calc} - A_{duct}) / \Psi_{EI} \tag{18}$$

where the left hand side represents the discrepancy, at the downstream position, between the calculated and real duct areas.

Integration step ($x_p - x_A$). For the numerical solution of (10) at axial station x_p , the integration step size ($x_p - x_A$) determines the rate at which the longitudinal coordinate x is swept along the duct. In the vicinity of the boundary layer leading edge ($x \approx 0$), the dependent variable \mathbf{f} ($\mathbf{f} = u, k, \epsilon$), varies more rapidly with x , if one considers the initial growth rate of the boundary layer. Therefore, the use of a small but constant value for ($x_p - x_A$) could be appropriate for the rapid changes of \mathbf{f} in the developing region but would imply in an excessive number of integration steps at the subsequent developed region. Likewise, a large value for ($x_p - x_A$) in the beginning of the sweep could, at the inlet region, cause numerical instability due to the large variation of all dependent variables within initial boundary layer development.

In this work, the integration step size was adopted as proportional to the distance from the point in question to the beginning of the calculation as:

$$\frac{x_p - x_A}{H} = \left[\frac{x - x_I}{x_L - x_I} \right]^b \tag{19}$$

where indexes "I" and "L" correspond to the initial and final x positions, respectively, H is one half of channel height and b is a constant.

Transversal distribution of nodal points. In the boundary layer close to the duct wall the discretization of the production term for k , Eq. (6), is rather sensitive to the transverse grid layout. A flexible grid point distribution is obtained by the use of a coordinate transformation of the type $\mathbf{f} = (y')^\alpha$, giving for discrete positions along the transversal coordinate,

$$y_i = \left(\frac{R^\alpha}{N} - y_{i-1} \right)^{1/\alpha} \tag{20}$$

where "i" in (20) is the index of the nodal point in question and \mathbf{a} a parameter for grid control.

4. Results and Discussion

Numerical results calculated with the model shown above were used to simulate the flow over the flat surface of Fig. 1. Four cases were investigated and classified according to the relative smooth-to-rough length section. Computations used different wall boundary conditions, based on Eq. (17), which were applied over the corresponding surface length detailed in Table 1. The results to follow were compared with measurements of Avelino et al. (1999).

Figures 4 to 7 show comparisons of u/U_m versus y/d , where d is the boundary layer thickness, for the four different cases presented in Table 1. Profiles at fifteen longitudinal stations are compared with the numerical prediction showing good agreement. The lines represent the numerical predictions whereas experimental values are plotted with symbols.

Profiles here calculated at stations in the vicinity of the surface conditions variation, for u/U_m did not quite match those of the experimental data, most likely due to the transition region explained earlier. In this work the value of the displacement in origin was assumed constant, although it adjusts itself when over a new rough geometry.

The interesting feature of Figs. 4-7 is that in spite of using a parabolic solver and a linear $k-\epsilon$ model, the present calculation seems to represent quite well the phenomena.

Table 1 – Length of smooth and rough sections for the cases investigated

Case	Smooth Surface	Rough Surface
Fully Smooth	$0m < x < 2m$	-
Smooth to Rough	$0m < x < 1m$	$1m < x < 2m$
Fully Rough	-	$0m < x < 2m$
Rough to Smooth	$1m < x < 2m$	$0m < x < 1m$

After observing Figs. 4 and 5, the overall conclusion is that for the smooth surface, and in the region upstream of a step change in roughness, the numerical prediction seem to agree reasonably well with the experimental results, however, in the transition region of the boundary layer flow, a small discrepancy can be observed close to the wall.

Those differences are likely due to the gradual growth of the displacement in origin, until it reaches a constant value, where the velocity profiles are then accurately predicted.

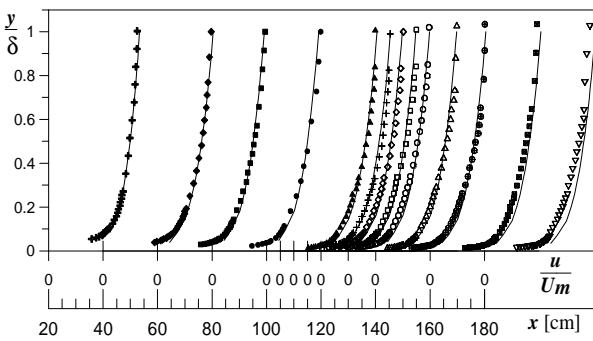


Fig. 4 – Velocity profiles over smooth surface.

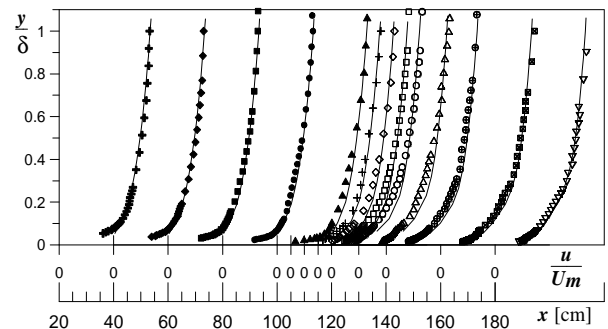


Fig. 5 – Velocity profiles over smooth to rough surface.

Here, based on the results shown, it is suggested that, for accurate flow prediction, an expression representing the increase in ϵ should be implemented, to better predict the development of the boundary layer immediately after the changes in the wall roughness. In other words, a function of a characteristic length scale of the rough elements can be used for the prediction of the velocity profiles in the transition region of the flow.

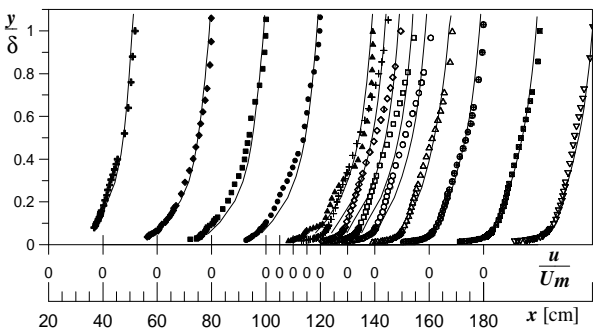


Fig. 6 – Velocity profiles over rough to smooth surface.

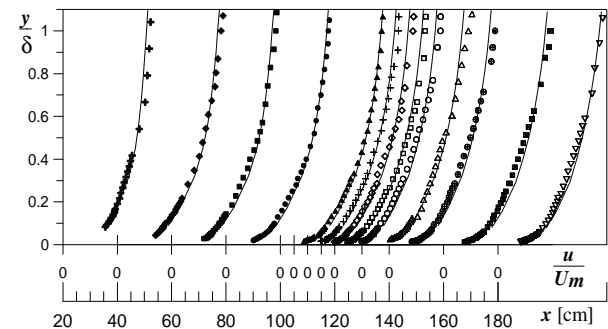


Fig. 7 – Velocity profiles over uniformly rough surface.

Corresponding skin friction coefficient values are shown in Figs. 8 to 11. In these figures, numerical prediction is compared with those calculated through an integral method and a graphical determination, based on the experimental results. For the case of a uniformly smooth surface, a theoretical correlation is also included.

The values of ϵ were calculated according to the method of Perry & Joubert (1963). Systematically adding an arbitrary displacement in origin to the original profiles, the least square method could be applied to the near wall points to search for the best straight line fit.

It is clear from Fig. 8 that the numerical prediction is in good agreement with the theoretical correlation for turbulent boundary layers over smooth surface, and with the experimental results, either calculated by using the integral balance of the momentum or through the chart method.

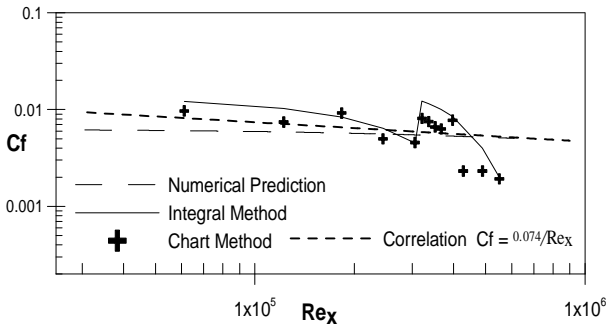


Fig. 8 – Skin friction coefficient prediction over uniformly smooth surface.

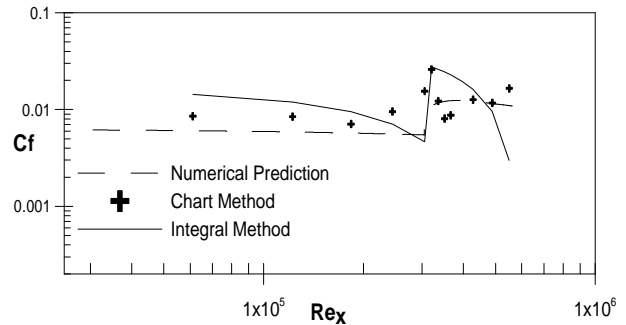


Fig. 9 – Skin friction coefficient over smooth to rough surface.

It can be noticed in Figs. 9 and 10, where the step change in roughness are present that the numerical prediction responds very fast to the new surface condition. In Fig. 9, the displacement in origin presents an increase following the step change in roughness, increasing the skin friction coefficient, what is expected for the flow over a rough surface. This effect is well captured by the numerical model. Also the momentum balance and the graphical method are in good agreement.

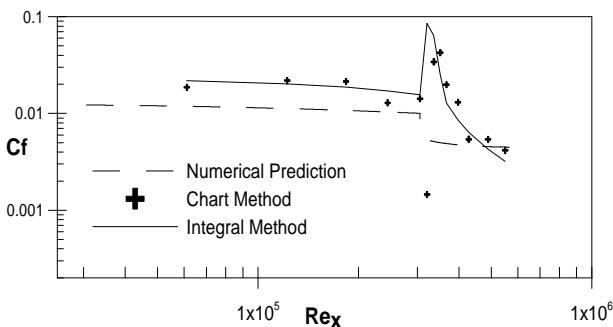


Fig. 10 – Skin friction coefficient over rough to smooth surface.

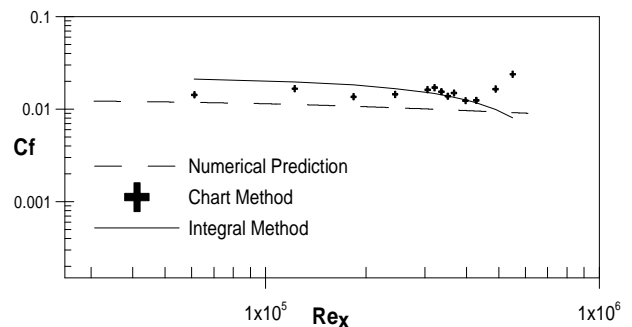


Fig. 11 – Skin friction coefficient over uniformly rough surface.

For the configuration where the flow leaves a rough surface, to come upon a smooth surface, Fig. 10, a departure from experimental values can be observed immediately after the sudden change in the roughness. This fact is due to the transition region that the flow undergoes following the surface step change.

When in contact with a smooth surface, the displacement in origin tends to decrease until it vanishes, and this can be noticed by either the integral method or by the chart method, conversely, in the parabolic solver, this effect can not be caught. In fact, in the numerical model above, no mechanism that could bring back information from downstream positions is considered. The flow, in this case, can be characterized as of partially parabolic nature requiring an elliptic solver for the pressure field. For engineering purposes, however, the parabolic treatment has proven to be adequate for reproducing the major features of the flow. These results are coherent with the idea of limiting the present model to the regions of the flow where the displacement in origin has already reached a constant value, in the fully rough region of the flow.

The determination of the displacement in origin, ϵ , is crucial for the evaluation of the properties of the flow over a rough surface, including all local and global parameters such as, e.g., the skin-friction coefficient and the momentum thickness. All graphical methods for its determination, however, assume the existence of a logarithmic region, which may not occur near to a step change in roughness.

5. Concluding Remarks

This work presented computations with the standard $k-\epsilon$ model for simulation of turbulent boundary layer flows that present abrupt changes in the surface roughness.

Comparisons with experimental data indicated a reasonable agreement. More specifically, for surfaces subjected to sudden changes in roughness, demonstrated that the methodology here employed gave better or comparable results than those calculated with more sophisticated numerical tools and employing more elaborated turbulence modes. Accuracy of the calculated skin friction coefficient is also limited in the region where the displacement in origin is still adjusting itself to the new surface.

Essentially, the work herein suggests that, for accurate prediction of simple flows, proper implementation of the numerical model and the robustness and stability of the algorithm employed are important factors to be considered. Accordingly, for boundary layer flows, isotropic turbulence theories and simple parabolic codes can provide an economical and reliable tool during preliminary steps in the overall design process of engineering equipment.

6. Acknowledgement

MRA is grateful to Dr. Atila .P. Silva Freire for his advice during the experimental investigation herein reported. The authors are thankful to NSF of USA and CNPq, Brazil, for their financial support during the preparation of this work.

7. References

- Avelino, M.R., 1996, Sobre a Modelagem Diferencial de Camadas Limite Turbulentas com Transpiração, Msc. Thesis, PEM/COPPE/UFRJ.
- Avelino, M.R., 2000, An Experimental/Numerical Study of the Turbulent Boundary Layer Development along a Surface with a Sudden Change in Roughness, *J. of Braz. Soc. Mechanical Sciences*, Vol. XXII, No. 1, pp. 1-13.
- Avelino, M.R., Menut, P.P.M., Silva Freire, A.P., 1998, Experimental Characterization of a Turbulent Boundary Layer Subjected to a Step Change in Surface Roughness, *Proc. of 3rd Braz. Therm. Sci. Meet.*, Vol. II, pp. 1369-1374, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Avelino, M.R., Menut, P.P.M., Silva Freire, A.P., 1999, Characteristics of the Turbulent Boundary Layer Over Surfaces with Abrupt Variation in Properties, *Trends Heat Mass Transf.*, Vol. 5, pp. 63-80.
- Braga, E.J., de Lemos, M.J.S., 1999, Numerical Analysis of Coaxial Turbulent Jets in Diffusers and Contractions, *Proc. of COBEM99- 13th. Braz. Congr. Mech. Eng.* (on CD-ROM), Águas de Lindóia, SP, Brazil, Nov. 22-26.
- de Lemos, M.J.S., Milan, A., 1997, Mixing of Confined Coaxial Turbulent Jets in Ducts of Varying Cross Section, *Proc. of COBEM97 - 12th. Braz. Cong. Mech Eng.* (on CD-ROM), Bauru, São Paulo, Brazil, December 8-12.
- Jones, W.P., Launder, B.E., 1972, The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, *Int. J. Heat & Mass Transfer*, vol. 15, pp. 301-314.
- Kaplun, S., 1967, Fluid Mechanics and Singular Perturbations, Academic Press.
- Launder, B.E., Spalding, D.B., 1972, Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, New York.
- Launder, B.E., Spalding, D.B., 1974, The Numerical Computation of Turbulent Flows, *Comp. Math. App. Mech. Eng.*, vol. 3, pp. 269-289.
- Matsumoto, E., de Lemos, M.J.S., 1990, Development of an Axi-Symmetric Mixing Layer in A Duct of Constant Cross Section, *Proc. of 3rd Braz. Therm. Sci. Meet.*, vol. I, pp. 381-385, Itapema, Brazil, December 10-12.
- Patankar, S.V., 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Graw Hill.
- Patankar, S.V., 1988, Parabolic Systems, Chapter 2 of Handbook of Numerical Heat Transfer, Rohsenow *et al* Ed., John Wiley & Sons, New York.
- Patankar, S.V., Spalding, D.B., 1972, A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, *Int. J. Heat & Mass Transf.*, vol. 15, pp. 1787-1806.
- Perry, A.E. e Joubert, P.N., 1963. Rough-Wall Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients, *J. Fluid Mech.*, Vol. 17, pp. 193--211.
- Silva Freire, A.P., Hirata, M.H., 1990. Analysis of Thermal Turbulent Boundary Layers over Rough Surfaces, *Proc. III ENCIT*, pp. 313--316.

NUMERICAL SOLUTION OF TURBULENT HEATED FLOW IN DUCTS OF VARYING CROSS SECTION USING A LINEAR EDDY-DIFFUSIVITY MODEL

Edimilson Junqueira Braga

Marcelo J.S. de-Lemos *

Departamento de Energia – IEME, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA
12228-900 - São José dos Campos - SP - Brazil

* E-mail: delemos@mec.ita.br

Abstract. This paper presents numerical simulations for turbulent heated flow in ducts of rapid contractions with sinusoidal walls. Comparison with experimental data is also reported. Dissimilarities between Nusselt number and turbulent kinetic energy are investigated. A marching-forward numerical integration technique is used to sweep the computational domain. Turbulence is handled with the standard isotropic k - ϵ model. Results show that within contractions turbulence is damped. Also in contracting ducts, while turbulence is damped, the Nusselt number increases.

Keywords: Internal flow, Turbulence model, Heat Transfer, Contraction, Parabolic flow

1. Introduction

Ducts with contractions and enlargements are found in a number of engineering equipment such as industrial piping, jet-pumps, combustors and air conditioning ducts, for example. Accurate determination of flow mixing and heat transfer rates in such devices contributes to efficiency increase, optimal design parameters and, ultimately, reduction of cost-benefit relationship.

Experimental work published on internal turbulent flows deals, in its majority, with sudden expansion flow into a stagnant surrounding (Buresti et al (1998)) or within a confining duct (Park & Chen (1989)). Measurements in two-phase systems (Albagli & Levy (1991), Fan et al (1996a)) and computational studies applying Large Eddy Simulation to coaxial jets are also found in the literature (Knut & Moin (1996)). In all of the above, recirculating flow due to abrupt expansion precludes the use of the mathematical treatment below, which, in contrast, is based on a marching-forward technique (Patankar (1988)). The work of Yule & Damou (1992), presented results for confined coaxial turbulent jets with velocity ratio U_1/U_2 up to 30, being U_1 the central jet velocity. Both streams flowed into a convergent-divergent

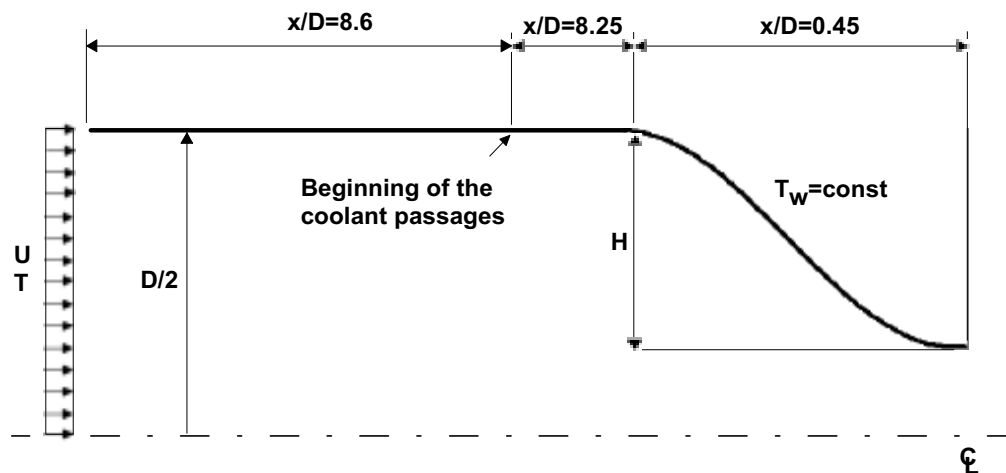


Figure 1 – The flow under consideration

channel. Report was limited to mean axial velocity and axial turbulent intensity. Yet, their overall duct length was of a relative short size ($x/D = 4$). Heat transfer measurements are less common in the literature. Back *et al* (1969) presented temperature distribution and heat transfer coefficients for subsonic flow of air into a cooled contraction.

Nonetheless, it is still true that the use of numerical tools for quick analysis of simple engineering flows, instead of using memory demanding CFD codes, has motivated many research efforts recently. If no back flow is in order, marching-forward techniques, implemented along with isotropic turbulence models, provide an economical means for engineering analysis with PC-based workstations.

Following this path, the work of Matsumoto & de Lemos (1990), presented results for the developing time-averaged and turbulent fields in a coaxial jet along a circular duct of constant area. Later, de Lemos & Milan (1997), extended their calculations to flow in long ducts through varying cross sections. Subsequently, de Lemos & Braga (1998), further considered coaxial jets with higher and lower annular velocity in diverging and converging ducts. Similar results for ducts with plane walls have also been documented (Braga & de Lemos (1999a)). Experimentally observed turbulence damping in contractions and corresponding enhancement in diffusers, reported in detail by Spencer et al (1995), was correctly simulated in de Lemos & Braga (2000a). In that paper, direct comparisons with experimental data have shown that for contractions up to 21° and for diffusers up to 5° , the model and numerical scheme employed reproduced the basic features of the flow. Beyond those values, as expected, deterioration of the prediction quality was observed since parabolic equations were considered.

Heat transfer analysis followed with the work of de Lemos & Braga (2000b), who reported Nusselt numbers and turbulent kinetic energy in planar diffusers and contractions. Therein, flow and heat transfer properties of coaxial jets, with higher inner velocity ($U_i > U_c$) and temperature ($T_i > T_c$), were predicted. That work made use of the standard k- ϵ model, wall log-laws for velocity and temperature and the assumption of constant turbulent Prandtl number. Interesting dissimilarity between heat transport and turbulence was calculated and discussed upon. While turbulence was damped along accelerating flows (contractions), heat transfer was increased by a fair amount.

In the present work, additional numerical results for turbulent heat transfer and fluid flow through a rapid contraction section are reported. The objective of the present contribution is to identify the limits of the parabolic methodology when applied to fast converging ducts. Comparison with experimental data of Back *et al* (1969) is presented. Details of the geometry here considered are shown in Fig. 1.

2. Mathematical model and numerical method

2.1. Mean flow equations

The equations of continuity of mass, x-momentum and energy for a two-dimensional, source-free, low speed, planar/axi-symmetric turbulent mixing layer can be written as,

$$\frac{\partial (y^\eta \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (y^\eta \rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{y^\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\eta \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{y^\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\eta \Gamma_{\text{eff}}^T \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (3)$$

In Eq. (1), Eq. (2) and Eq. (3) u , v are the velocity components in the axial and transverse direction, respectively, T is the temperature, ρ the fluid density, P the static pressure, and μ_{eff} , Γ_{eff}^T the coefficients of turbulent exchange given as $\mu_{\text{eff}} = \mu_t + \mu$ and $\Gamma_{\text{eff}}^T = \mu_t / \sigma_T + \mu / \text{Pr}$, respectively. Also, μ is the molecular viscosity, Pr the fluid Prandtl number and μ_t and σ_T the turbulent viscosity and the Prandtl/Schmidt number, respectively. As usual, equations Eq. (1), Eq. (2) and Eq. (3) are written in a compact notation embracing planar ($\eta=0$) and axi-symmetric ($\eta=1$) cases.

2.2. Turbulence model

The turbulence model k- ϵ of Jones & Launder (1972) has been used in the literature in a number of publications. In this approach, the turbulent viscosity mentioned above is calculated as $\mu_t = \rho c_\mu k^2 / \epsilon$ where c_μ is a constant. Here, as done in (de Lemos & Braga (2000b)), only the case involving flow regions of high local Reynolds numbers are considered (Launder and Spalding, 1974). With this, transport equations for k and ϵ can be written as,

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{y^\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\eta \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + S_\phi \quad (4)$$

In Eq. (4) ϕ stands for k or ϵ . The diffusion coefficients are given by $\Gamma_{\text{eff}}^k = \mu + \mu_t / \sigma_k$ and $\Gamma_{\text{eff}}^\epsilon = \mu + \mu_t / \sigma_\epsilon$ where the σ 's are the turbulent Prandtl/Schmidt numbers for k and ϵ , respectively. The last terms in Eq. (4) are known as "source" terms and are given by $S_k = \rho (P_k - \epsilon)$ and $S_\epsilon = \rho \frac{\epsilon}{k} (c_1 P_k - c_2 \epsilon)$, being $c_1=1.47$, $c_2=1.92$ and $c_\mu=0.09$. The production term reads $P_k = \mu_t / \rho (\partial U / \partial y)^2$.

2.3. Discretization of transport equations

The discretization of the equations is obtained through the Control Volume method (Patankar & Spalding (1970), Patankar & Spalding (1972)). In this approach, the continuum domain is divided into non-overlapping, finite regions known as control volumes. To each control volume a computational node P is associated, having neighbor points at upwind position, at north and at south. The balance principle expressed by the general transport equation is then rewritten for the control volume, identifying the macroscopic rates of transport and generation/destruction within the volume.

2.4. Boundary conditions and Computational Details

The numerical approach adopted here and in de Lemos & Braga (2000b) is the parabolic solver technique of Patankar (1972, 1988). Inlet flow is given a uniform distribution. For temperature, constant value of T prevails over the inlet. Also, the values of k and ε at entrance were given by $k_{in} = 10^{-3} U_m$ and $\epsilon_{in} = k_{in}^{3/2} / K y'$ where U_m is the overall mean velocity, K is the von Kármán constant (K=0.4) and y' the distance to the wall. For the centerline (y=0) the symmetry condition is implemented for all dependent variables $\phi=U, T, k$ and ϵ as $\partial\phi/\partial y|_{y=0} = 0$. Wall proximity is handled with the **Wall Function** approach (Launder and Spalding, 1972, 1974), giving for the wall shear stress,

$$\tau_w = \left(U_N \rho c_{\mu}^{1/4} k_N^{1/2} \right) / \left[\frac{1}{K} \ln \left[E y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu} \right] \right] \quad (5)$$

where E a constant. In Eq. (5) the subscript "N" identifies the grid point closest to the wall. In that region, the use of the **Wall Function** associated with the assumption of "local equilibrium" for turbulence ($P_k=\epsilon$) gives $k_N = \tau_w / (\rho c_{\mu})^{1/2}$ and $\epsilon_N = k_N^{3/2} / K y_N$. Rewriting Eq. (5) in the form $\tau_w = \lambda \mu (\partial U / \partial y)$ gives further,

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{for laminar flow} \\ \frac{K y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu}}{\ln \left[E y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu} \right]} & \text{for turbulent flow} \end{cases} \quad (6)$$

For temperature, the **Wall Law** is given by,

$$T^+ = (T_N - T_w) \rho c_p c_{\mu}^{1/4} k_N^{1/2} / q_w = \frac{Pr_t}{K} \ln \left[E y_N \frac{\mu (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\rho} \right] + 12.5 Pr^{2/3} + 2.12 Pr - c_q \quad (7)$$

where the last term in Eq. (7) fits experimental data and has been proposed by Kader & Yaglom (1972). It reads $c_q = 5.3$ for $Pr < 0.5$ and $c_q = 1.5$ for $Pr \geq 0.5$. Either case, constant T_w or constant q_w , is analyzed with Eq. (7). The

wall heat flux can be further given after rearranging Eq. (7) in the form $q_w = -\lambda_T \frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y}$ where;

$$\lambda_T = \begin{cases} 1 & \text{for laminar flow} \\ \frac{K y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu} Pr}{\left(\sigma_T \ln \left[E y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu} \right] + c_q^* K \right)} & \text{for turbulent flow} \end{cases} \quad (8)$$

with $c_q^* = 12.5 Pr^{2/3} + 2.12 Pr - c_q$.

Determination of the unknown pressure gradient is handled as explained in Patankar (1988). That approach consists in finding the zero of a function representing the discrepancy, at the downstream position, between the calculated and real duct area. All transport equations for the mean and turbulent fields were solved by means of the marching-forward method of Patankar (1988).

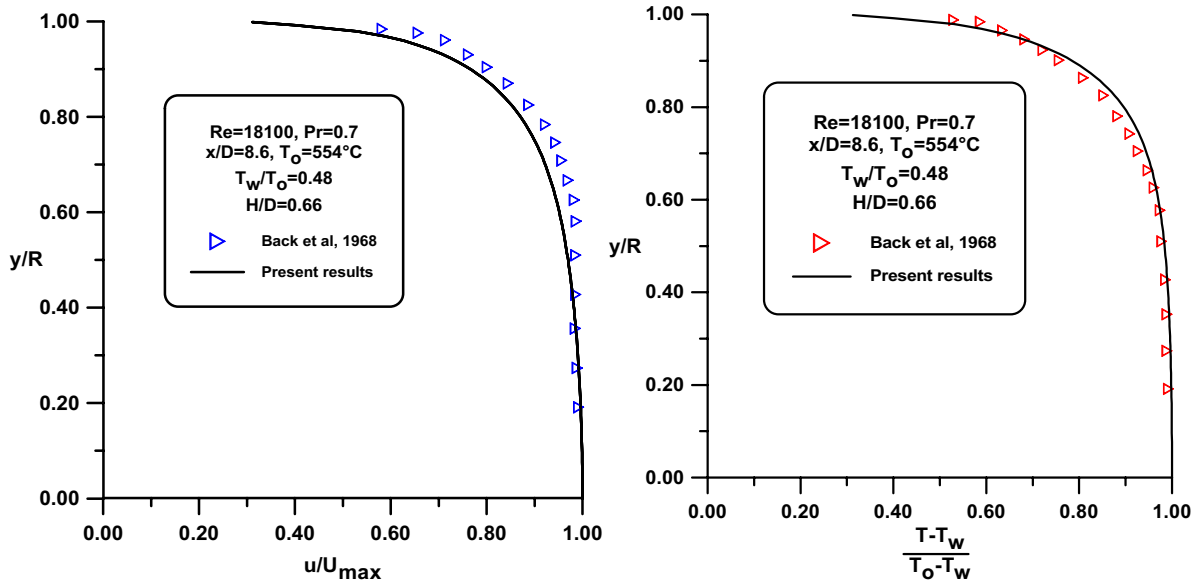


Figure 2 – Velocity and temperature profile at the upstream of the curved section.

2.5. Code Validation

The compilation work of Spencer et al (1995) seems to be the only available experimental data bank for turbulent flow within contractions and diffusers. Therein, experimental data from 11 institutions around the world, taken for flow of air and water in contraction and diffuser, were compared with each other and with computational results using commercial CFD codes. The authors in Spencer et al (1995) concluded that: “...numerical simulation of turbulent flow through simple pipe components cannot be achieved with the commercial programs available...”. Evidently, this statement should be read with caution since in the last five years substantial improvements on CFD technology has been added to commercial codes.

Today, advanced CFD codes such as CFX, FLUENT and STAR-CD, among many other available fluid solvers, are able to handle structured as well as unstructured grids using a number of different turbulence models. Accordingly, for simulating a complex geometry, the block-structure approach can be applied in which the flow equations are solved in each block, exchanging boundary information repetitively in order to bring down the residue in each region. In some cases, the overall numerical solution may suffer from long computing times and, on blocks where the flow presents a clear preferential direction, with no recirculating regions, then within that particular region the procedure discussed herein could be applied. Ultimately, in complex flow analyses, one can use different flow models (parabolic or elliptic) for handling different blocks, contributing to the overall robustness of the entire solution process.

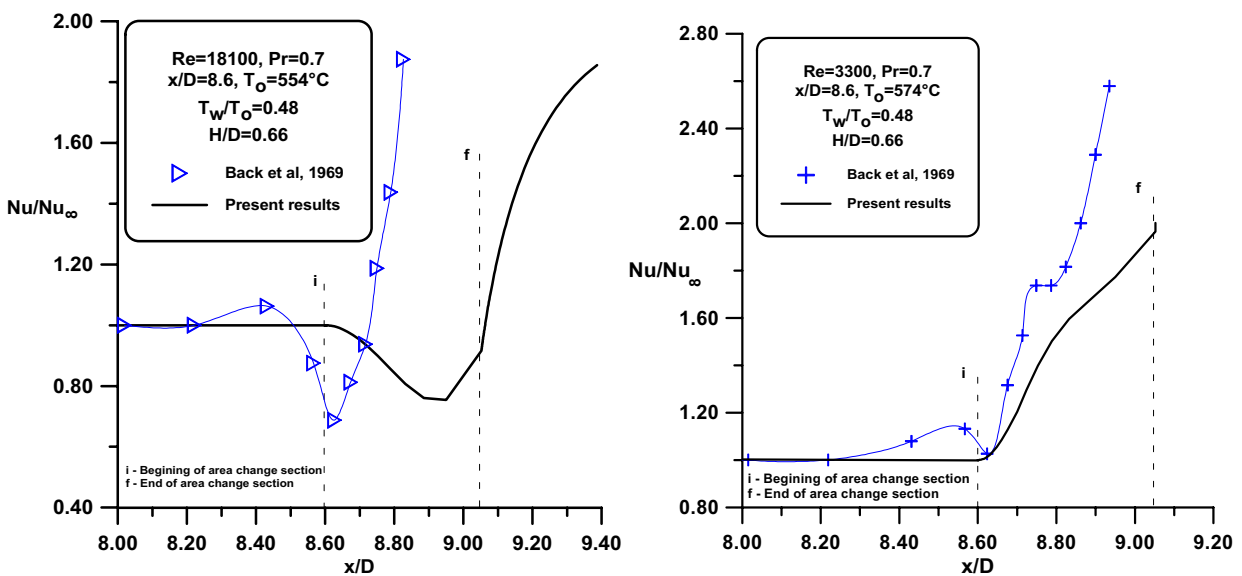


Figure 3 – Behavior of Nusselt number through contraction for different Reynolds number

Motivated by the foregoing argument, experimentally observed turbulence damping in contractions and corresponding enhancement in diffusers, reported in detail by Spencer et al (1995), was correctly simulated in de Lemos & Braga (2000a). In that paper, direct comparisons with experimental data have shown that for contractions up to 21° and for diffusers up to 5°, the model and numerical scheme employed reproduced the basic features of the flow. Beyond those values, as expected, deterioration of the prediction quality was observed since parabolic equations were considered.

3. Results and Discussion

The following results were compared with measurements of Back *et al* (1969), who reported data for subsonic airflow through a contraction section. In that work, flow and heat transfer measurements are presented for heated subsonic air flowing through a tube that was cooled over part of its length to a conical section.

Figure 2 shows the velocity and temperature profiles upstream the curved wall section. The two curves present good agreement with the experiment. If no change of area or only gradually varying cross sections are considered the parabolic solver works with good accuracy. However, in ducts with rapid change of cross section, the parabolic solver is not appropriate.

Accordingly, in some practical situations there exists a predominant flow direction, and yet the cross-stream pressure variation is not negligible. Thus, the pressure decoupling approach employed in the parabolic procedure is not appropriate. Except for the pressure, the solution of all other flow variables can be obtained by marching from upstream of the domain to the flow exit. However, important downstream effects transmitted back via pressure can not be simulated with a parabolic model. Such situations are called partially parabolic flows. Highly curved ducts, jets in cross-streams, ducts with a rapid change of cross section, and rotating passages are examples of partially parabolic situations. Pratap & Spalding (1975) presented the basic concept of this class of flow.

In the partially parabolic calculation procedure, the pressure field is stored for the entire calculation domain, while all other variables are stored for only one or two marching stations. For a given pressure field, the marching procedure is employed just as in the fully parabolic situation, while an improved pressure field is obtained from a pressure-correction or a pressure equation. Many repetitions of the marching procedure are needed before a converged solution is obtained. Compared with the fully elliptic procedure, the fully parabolic procedure offers saving in both computer time and computer storage. The partially parabolic procedure saves storage, but the savings in the computer time may not be appreciable (Patankar (1980)).

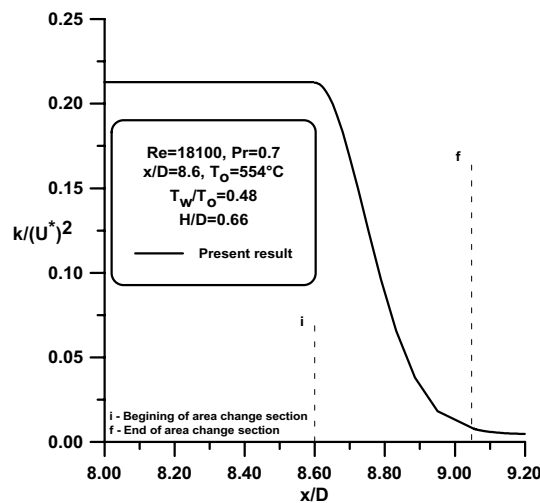


Figure 4 – Development of k/U^{*2} along contraction

With these ideas in mind, heat transfer measurements of Back *et al* (1969) in the fast varying duct of Figure 1 are here compared with simulations obtained via the parabolic formulation seen above. Figure 3 shows the behavior of Nusselt number for $Re=18100$ and $Re=3300$, respectively. As described above, the parabolic solver is not able to predict the Nusselt number dip and posterior recover at the same axial position along the contraction since, in this case, the flow is of partially parabolic nature. Nevertheless, the code reproduces the basic features of the flow, i. e., the increase of the Nusselt number along the contraction. For lower Reynolds number, the difference between simulation and measurements is less pronounced.

Figure 4 shows the development of turbulent kinetic energy along contraction. Along convergent sections, while turbulence quantities decrease, the heat transfer coefficient increases. These results are interesting since, usually, the two flow properties presenting a **dissimilar** behavior, namely the overall levels of turbulent kinetic energy and turbulent Nusselt number are, at a first glance, expected to be **similar**.

4. Conclusions

This paper applied the parabolic methodology, developed in a series of papers, to the solution of heat transfer problems in ducts of fast varying cross section. Although the flow is not parabolic due to the nature of the pressure distribution within the flow, application of a parabolic solver can still reveal important characteristics of the flow if care is taken when developing the numerical tool. Proper use of discretization techniques, correct handling of the pressure gradient, accurate differencing of turbulent equations and appropriate grid layout can increase code stability and robustness. Ultimately, one can get converged results for preliminary flow analyses of partially parabolic flow using a much simpler parabolic formulation.

5. Acknowledgments

The authors are thankful to CNPq, Brazil, for their financial support during the course of this research.

6. References

- Albagli, D., Levy, Y., 1991, Experimental study on confined two-phase jets, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, v. 5. n. 3, pp. 387-393.
- Back, L.H., Massier, P.F., Cuffel, R. F., 1969, Flow and heat transfer measurements in subsonic air flow through a contraction section, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v 12, pp. 1 –13.
- Braga, E.J., de Lemos, M.J.S., 1999a, Numerical analysis of coaxial turbulent jets in diffusers and contractions, *COBEM99 - 13th Braz. Cong. Mech Eng.*, Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil, Nov. 22-26.
- Buresti, G., Petagna, P., Talamelli, A., 1998, Experimental investigation on the turbulent near-field of coaxial jets, *Experimental Thermal and Fluid Science*, v 17, n. 1-2, pp. 18-26.
- Cockrell, D.J., Bradley, C.L., 1971, The response of diffusers to flow conditions at their inlet, Paper # 5, *Symp. On Internal Flows*, University of Salford, pp. A32-A41.
- de Lemos, M.J.S., Braga, E.J., 1998, Numerical investigation of turbulent duct flow through gradual enlargements and contractions, ASME-FED-vol.245, ISBN: 0-7918-1950-7, *Proc. of FEDSM-Fluid Eng. Div. Summer Meeting*, Washington, D.C., USA, June 21-25.
- de Lemos, M.J.S., Braga, E.J., 2000a, Simulation of turbulent flow in contracting and expanding ducts with a linear k- ϵ model, Paper FEDSM2000-11083, *Proc. of 2000 ASME Fluids Engineering Summer Conference*, Boston, Massachusetts, USA, June 11-15.
- de Lemos M.J.S., Braga, E.J., 2000b, Turbulent heat transfer in confined coaxial jets through ducts of gradually varying cross section, *Turbulent Heat Transfer*, Paper NHTC2000-12089, *34th National Heat Transfer Conference*, August 20-22, 2000, Pittsburgh, Pennsylvania, USA.
- de Lemos, M.J.S., Milan, A., 1997, Mixing of confined coaxial turbulent jets in ducts of varying cross section, *CD-ROM of COBEM97 – 12th Braz. Cong. Mech Eng.*, Bauru, São Paulo, Brazil, December 8-12.
- Fan, J.; Zhao, H., Cen, K., 1996a, Two-phase velocity measurements in particle-laden coaxial jets, *Chemical Engineering Journal*, v. 63, n. 1, p. 11-17.
- Jones, W.P., Launder, B.E., 1972, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat & Mass Transfer*, vol. 15, pp. 301-314.
- Kader, B.A., Yaglom, A.M., 1972, Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows, *Int. J. Heat & Mass Transf.*, vol. 15, pp. 2329-2351.
- Knut, A, Moin, P., 1996, Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 315, p. 387-411.
- Launder, B.E., Spalding, D.B. 1972, *Lectures in mathematical models of turbulence*, Academic Press, New York.
- Launder, B.E., Spalding, D.B., 1974, The numerical computation of turbulent flows, *Comp. Math. App. Mech. Eng.*, vol. 3, pp. 269-289.
- Matsumoto, E., de Lemos, M.J.S., 1990, Development of an Axi-symmetric mixing layer in a duct of constant cross section, *Proc. of 3rd Braz. Therm. Sci. Meet.*, vol. I, pp. 381-385, Itapema, Brazil, December 10-12.
- Park, C.J.; Chen, L.D., 1989, Experimental investigation of confined turbulent jets. part i. single-phase data, *AIAA Journal*, v. 27, n. 11, pp. 1506-1510.
- Patankar, S.V., 1980, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Mc-Graw Hill.
- Patankar, S.V., 1988, Parabolic systems, Chapter 2 of *Handbook of numerical heat transfer*, Rohsenow ed., John Wiley & Sons, New York.
- Patankar, S.V., Spalding, D.B., 1970, *Heat and mass transfer in boundary layers*, 2nd ed., London, International text Book, London.
- Patankar, S.V., Spalding, D.B., 1972, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat & Mass Transf.*, vol. 15, pp. 1787-1806.
- Pratap, V.S. and Spalding, D.B., 1975, Numerical computation of the flow in curved ducts, *Aeronaut. Q.*, vol. 26, p. 219
- Schnipke, R. J., Rice J. G., 1986, A streamline upwind finite element method for laminar and turbulent flow, Department of mechanical and Aerospace Engineering, University of Virginia, Report nº UVA/643092/MAE86/342.

- Spencer, E.A., Heitor, M.V., Castro, I.P., 1995, Intercomparison of measurements and computations of flow through a contraction and a diffuser, *Flow Measurement and Instrumentation*, v. 6, n. 1, p. 3-14.
- Yule, A.J., Damou, M., 1992, Axisymmetrical turbulent jet flows in a duct of varying area, *Experim. Thermal and Fluid Science*, v. 5, n. 4, p. 499-505.

A BLOCK-IMPLICIT NUMERICAL SCHEME FOR SIMULATION OF SWIRLING FLOWS IN A MODEL COMBUSTOR

Marcelo J.S. de-Lemos

Departamento de Energia - IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900 - São José dos Campos – SP - Brazil. E-mail: delemos@mec.ita.br

Abstract. This work reports numerical results for the case of incompressible laminar heated flow with a swirl in a vertical cylindrical chamber. Computations are obtained with a point-wise block-implicit scheme. Flow governing equations are written in terms of the so-called primitive variables and are recast into a general form. The discretized momentum equations are applied to each cell face and then, together with the mass-continuity, tangential velocity and energy equations, are solved directly in each computational node. The effects of Rayleigh, Reynolds and Swirl numbers on the temperature field are discussed upon. Flow pattern and scalar residual history are reported. Further, it is expected that more advanced parallel computer architectures can benefit from the error smoothing operator here described.

Keywords. Model Furnace, Numerical Methods, Implicit Solution, Coupled Solution, Buoyancy

1. Introduction

The growing trend in environment regulations points towards ever-tighter pollutant release limits of modern combustion systems. Today, new technologies for efficient energy production are based on the so-called lean and low-NOx combustion. Accordingly, an ascending stream with an induced swirling motion characterizes most flow fields in such systems. Swirling induces flame stabilization allowing peak temperature reduction, ultimately reducing pollutant formation rates. Recently, the design and analysis of such systems, driven by increased microprocessor performance and associated low computational costs, have made systematic use of numerical tools. As a consequence, a growing number of available software packages for fluid system design has helped engineers in reducing the necessary time before a new concept is finally available in the market.

In spite of the increasing use of CFD tools, the numerical solution of such flows imposes additional difficulties due to the intricate coupling between *temperature*, *tangential velocity* and *cross-flow* fields. Buoyancy term, centripetal and Coriolis accelerations make the system of governing equations of a high degree of coupling. Linearization of governing equations followed by the use of iterative solvers is the common route found in the literature for solving such nonlinear problems. Accordingly, the rate of convergence of any algorithm is essentially dictated by the degree in which physical coupling is mimicked by the method in question. Ultimately, this is an indication that numerical solutions of swirling flows, in most cases, suffer from the disadvantage of longer computing times when compared to their non-swirling counterpart.

Segregated methods, in which one individual flow variable is relaxed while holding the others still, are known to be rather sensitive when handling strong physical coupling. For that, the so-called *coupled* solvers, where all dependent variables are relaxed in the same domain location, have received much attention lately.

For buoyancy-driven laminar flows, benchmark solutions for the fields in a square cavity have been presented [de Vahl Davis (1983)]. Multi-grid solution for this problem has also been published [Hortmann *et al* (1990)]. In the great majority of those works a segregated method is generally employed with the repetitive solution of a pressure or pressure-correction equation, followed by subsequent updates of the velocity and scalar fields. This strategy forms the basis of the SIMPLE family of algorithms [Patankar (1980)]. Coupled line solvers for the temperature and velocity fields have shown improvements in computer time requirements for natural convection flows with large Rayleigh numbers [Galpin and Raithby (1986)]. The work in Galpin and Raithby (1986) is an indication of the advantage of coupled schemes for solving algebraic equations set with a high degree of interlinkage among the variables. Recently, the block implicit technique has also been applied to calculation of buoyant flows in a partially coupled manner [Tang and Joshi (1999)].

For swirling flows, most solutions found in the literature are also based on segregated relaxation procedures [Hogg and Leschiziner (1989a), Hogg and Leschiziner (1989b), Nikjook and Mongia (1991)]. In the present context, a fully implicit treatment is associated with the idea of simultaneously updating flow and scalar fields at each step within the error-smoothing operator. To the best of the author's knowledge, in all published work, neither temperature nor tangential velocity fields, seen here as *scalars*, are treated in a fully implicit manner.

Following the aforementioned and based on Vanka's SGCS method [Vanka (1986a), Vanka (1986a)], simulated lid-driven cavity fluid motion through a cylindrical tank using a block-implicit numerical scheme was presented in [de Lemos (1990)]. Later, the technique was extended to buoyancy-driven streams [de Lemos (1992a)], including vertical [de Lemos (1997a)] and inclined cavities [de Lemos (1997b)] in addition to calculation of swirling flows in model combustor [de Lemos (1992b)]. In those papers, a fully-implicit treatment for the scalar (temperature or tangential velocity)

was made use of. Recently, a full journal paper has documented the work on coupled methods (de Lemos (2000)).

The objective of this paper is to further extend the technique presented in de Lemos (2000) for temperature and in de Lemos (1992b) for the tangential velocity, combining now the solution of both scalars into a single fully implicit numerical treatment. To this end, computations are presented for a model furnace comprising incompressible laminar flow simultaneously heated and subjected to an incoming flow with swirl. Effects of Reynolds, Rayleigh number and swirling strength on temperature patterns and convergence rates are reported.

Here, it is understood that in real-life combustion systems the flow is compressible and turbulent. However, the work herein is intended to show a numerical methodology for enhancing the robustness and stability of numerical solutions. Extension of the method herein to density-based techniques and inclusion of turbulence transport equations in the implicit treatment here proposed is possible and, in fact, constitutes future developments to be pursued.

2. Nomenclature

- a-g* Coefficients in the finite-difference equations
- F*'s Coefficients for continuity equation
- H* Chamber height
- M* Number of cells in the axial direction
- N* Number of cells in the radial direction
- P* Pressure
- Pr* Prandtl number
- R* Model combustor radius
- Ra* Rayleigh number
- R_{abs}* Absolute residue for mass continuity equation
- R_{rel}* Relative residue for mass continuity equation
- R_T* Residue for the energy equation
- R_V* Residue for the energy equation
- Re* Reynolds number

- S* Swirl parameter
- S_ε* Source term
- T* Temperature, *T_i*=max. Temp., *T₀*=min. Temp.
- U* Radial velocity component
- W* Axial velocity component
- W_{in}* Inlet axial velocity
- V* Tangential velocity component
- Γ_ε* Transport coefficient for variable *ε* = *U, W, V, Θ*
- μ* Fluid dynamic viscosity
- ρ* Fluid density
- ε* General dependent variable, *ε* = *U, W, V, Θ*
- Θ* Non-dimensional temperature: $\Theta = (T-T_0)/(T_1-T_0)$

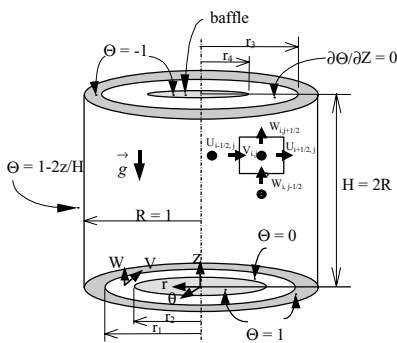


Figure 1 - Vertical cylindrical chamber

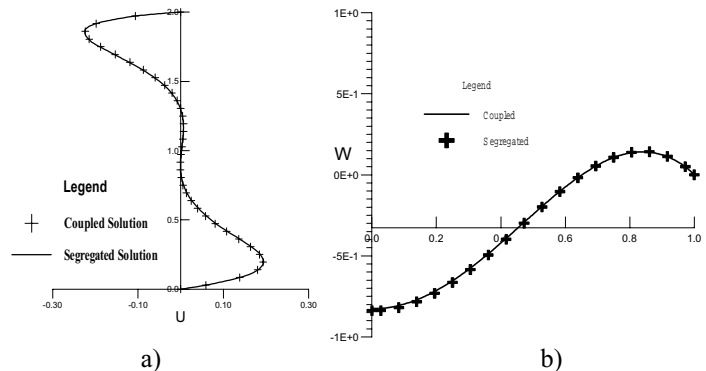


Figure 2 –a) Radial velocity *U* along the *z*-direction at *r*=0.5.,
b) , Axial velocity along radius at *z*=*L*/2=*R*.

3. Governing Equations And Numerical Method

3.1. Geometry

The geometry here considered is schematically shown in Figure 1. A model consisting of a circular chamber of constant radius *R* approximates a typical furnace combustion zone. At inlet, the mixture air+fuel enters through a circular slot of clearance *r*₁-*r*₂. At one diameter downstream the entrance, combustion gases are able to exit through an annulus of thickness *r*₃-*r*₄. The temperature level is prescribed over the entire lateral wall and on the bottom and top lids, except at the exit area where a null temperature gradient is assumed to be established by the outward motion of the fluid.

Although it is recognized that the geometry of Figure 1 might be an oversimplification of state-of-the-art industrial furnaces, essential elements, namely *swirl*, *buoyancy* and *recirculating zones* provide a good test case for the numerical method here discussed.

3.2 Compact notation.

The conservation equations for mass, momentum and energy here analyzed can be written in a compact form if the existing analogies among the processes of accumulation, transport, convection and generation/destruction of those

quantities are observed. This generic equation is commonly known in the literature as the *general transport equation* and can be written in its conservative two-dimensional laminar for *axi-symmetric* cases as:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[r W f - \Gamma_f \frac{\partial f}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(r U f - \Gamma_f \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] = S_f \quad (1)$$

In equation (1) f can represent any quantity of vectorial or scalar nature (velocity or temperature), r is the fluid density, U and W are the velocity components in the r - and z -directions, respectively, Γ_f is the transport coefficient for diffusion and S_f is the source term. Table 1 identifies correspondent terms for the different equations represented by (1). In both Table 1 and equation (1) gravity acts in the z -direction, μ is the fluid viscosity, Pr the Prandtl number, T the temperature and V the tangential velocity component.

3.3 Computational grid and finite-difference formulation.

In this work, the set of equations for mass, momentum and energy above is *differentiated* by means of the widely used control-volume approach of Patankar (1980). The differential equations are integrated over each volume yielding a set of algebraic equations. Internodal variation for the dependent variables can be of different kind corresponding to different *finite-difference* formulations. In the present work, for simplicity, the *Upwind Differencing Scheme* is used to model convective fluxes across volume faces. However, the formulation below is presented in such way that no difficulties arise if another differencing scheme is employed.

3.4 Discretized Equations.

The block-implicit arrangement below for the flow and continuity equations, as mentioned, was first presented by Vanka (1986a) and Vanka (1986a). For the sake of completeness when extending it to buoyant and swirling problems, the flow equations are here also included. Integrating then the continuity equation around point (ij) (see notation in Figure 1) following standard practices in numerical differentiation, one has [Patanekar (1980)]:

$$F_i^l U_{i+\frac{1}{2},j} - F_i^2 U_{i-\frac{1}{2},j} + F_j^l U_{i,j+\frac{1}{2}} - F_j^2 U_{i,j-\frac{1}{2}} = 0 \quad (2)$$

where the geometric coefficients F 's make computations convenient and efficient and can be interpreted as (area of flow)/(volume of computational node). For the radial momentum equation the final form for the $U_{i-1/2,j}$ component contains coefficients representing influences by convection and diffusion mechanisms in addition to all sources and pressure gradient terms. For application in the numerical algorithm below, the equation can be written in such a way that [de Lemos (1992b)]:

$$U_{i-\frac{1}{2},j} = \hat{U}_{i-\frac{1}{2},j} + \hat{d}_{i-\frac{1}{2}} [P_{i-1,j} - P_{ij}] + \hat{e}_{i-\frac{1}{2}} V_{ij} \quad (3)$$

In (3) the last term on the right hand side represents the influence of V on the radial velocity U and entails a linearization of the *centripetal* acceleration [de Lemos (1992b)]. All sources term, except the pressure gradient and the contribution due to the tangential velocity, are compacted in the first term on the right hand side. For the coupled treatment here presented, the explicit contribution of V in the source term of U is necessary, as it will be seen below.

A similar equation for the axial velocity component $W_{ij-1/2}$ is given by:

$$W_{ij-\frac{1}{2}} = \hat{W}_{ij-\frac{1}{2}} + \hat{d}_{j-\frac{1}{2}} [P_{ij-1} - P_{ij}] + \hat{g}_{j-\frac{1}{2}} \Theta_{ij} \quad (4)$$

For natural convection flows oriented as in Figure 1, the non-dimensional temperature Θ appearing in (4) is defined as $\Theta = (T - T_0) / (T_j - T_0)$ and is based on the maximum temperature drop across the computational domain $\Delta T = (T_j - T_0)$. Accordingly, here again it is important to notice that the source term in (4) explicitly shows the contribution of T (or Θ) on W . For the coupled treatment here presented, this explicit arrangement is also as shown later.

Following then a similar procedure for the Θ and V equations, final finite-difference equations can be assembled in the following form:

$$a_{ij}^\Theta \Theta_{ij} = b_{ij}^\Theta \Theta_{i+1,j} + c_{ij}^\Theta \Theta_{i-1,j} + d_{ij}^\Theta \Theta_{i,j+1} + e_{ij}^\Theta \Theta_{i,j-1} \quad (5)$$

$$a_{ij}^V V_{ij} = b_{ij}^V V_{i+1,j} + c_{ij}^V V_{i-1,j} + d_{ij}^V V_{i,j+1} + e_{ij}^V V_{i,j-1} + f_{ij}^V + g_{ij}^V U_{ij} \quad (6)$$

It is interesting to observe that the last term in (6) comes from discretization of the *Coriollis* acceleration in the V -equation and represents the feedback effect of the cross-flow on the tangential velocity (see Table 1). In this work, however, this term is not treated implicitly and, when solving for V , it is compacted in the explicitly treated source term. The *centripetal* acceleration, however (see Table 1 and equation 3), is here implicitly handled. The explicit treatment is also employed when discretizing the *convection* terms in the T and V equations since no particular terms with U 's or W 's are shown in (5)-(6).

For simplicity, equations (5)-(6) can be rearranged such that

$$\Theta_{i,j} = \hat{\Theta}_{i,j}; \quad V_{i,j} = \hat{V}_{i,j} \quad (7)$$

where,

$$\hat{\Theta}_{i,j} = \{b_{i,j}^{\Theta} \Theta_{i+1,j} + c_{i,j}^{\Theta} \Theta_{i-1,j} + d_{i,j}^{\Theta} \Theta_{i,j+1} + e_{i,j}^{\Theta} \Theta_{i,j-1}\} / a_{i,j}^{\Theta}$$

$$\hat{V}_{i,j} = \{b_{i,j}^V V_{i+1,j} + c_{i,j}^V V_{i-1,j} + d_{i,j}^V V_{i,j+1} + e_{i,j}^V V_{i,j-1} + f_{i,j}^V + g_{i,j}^V U_{i,j}\} / a_{i,j}^V \quad (8)$$

3.5 Numerical Strategy.

In order smooth out errors due to initial guessed fields, *corrections* are defined as differences between *exact* and *not-yet-converged* variables. Residuals for momentum transport at each control volume face, continuity of mass and ϵ equations are obtained by applying the just defined *approximate* values into (3)-(4)-(7). After some manipulation (details in de Lemos (2000)) a system connecting the residuals and corrections can be written into matrix form as,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_{i-\frac{1}{2},j} & 0 & \hat{e}_{i-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\hat{d}_{i-\frac{1}{2},j} & 0 & \hat{e}_{i-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \hat{d}_{i,j-\frac{1}{2}} & \hat{g}_{j-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\hat{d}_{i-\frac{1}{2},j} & \hat{g}_{j+\frac{1}{2}} & 0 \\ -F_i^1 & F_i^2 & -F_j^1 & F_j^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'_{i-\frac{1}{2},j} \\ U'_{i+\frac{1}{2},j} \\ W'_{i,j-\frac{1}{2}} \\ W'_{i,j+\frac{1}{2}} \\ P'_{i,j} \\ \Theta'_{i,j} \\ V'_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i-\frac{1}{2},j} \\ R_{i+\frac{1}{2},j} \\ R_{i,j-\frac{1}{2}} \\ R_{i,j+\frac{1}{2}} \\ R_{i,j} \\ R_{i,j}^{\Theta} \\ R_{i,j}^V \end{bmatrix} \quad (9)$$

where the subscript identify locations in the grid, the superscript ' distinguishes corrections and the left hand side represents the residue vector calculated at previous iteration.

In (9) the influence of Θ on the flow field is directly accounted for by the *e*-terms. Similarly, the influence of V on U is implicitly considered by the *g*-terms. For the radial and axial directions, the *g*- and *e*-terms are of null value, respectively. As mentioned before, the reverse effect, or say the cross-flow influence on the Θ and V fields is here not treated implicitly. The solution of system (9) is then easily obtained by finding first corrections for Θ and V , calculating later the pressure P and velocity components U and W . Essentially, the method consists of finding the corrective values for U , V and P , such that the balance equations are correctly satisfied.

Table 1 - Terms in the general transport

	ϕ	G_f	S_f
Continuity	1	0	0
Axial Momentum	W	μ	$-\frac{\partial P}{\partial z} + r_0 g_z b (T - T_0)$
Radial Momentum	U	μ	$-\left(\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{mU}{r^2} - \frac{r m V^2}{r}\right)$
Azimuthal Momentum	V	μ	$-\left(\frac{mV}{r^2} + \frac{rUV}{r}\right)$
Energy	T	m/Pr	0

3.6 Boundary conditions

Boundary conditions used for all velocity components were given value at the flow inlet and non-slip condition at chamber walls. For cells facing the outlet plane, overall mass-conservation balance at each computational cell was used to calculate the control-volume outgoing axial velocity (at the top lid). Initial null values were set for all velocities.

For temperature, a linear profile along the vertical direction was assumed to prevail over the lateral wall (see Figure 1). Except in the opened areas, at the bottom and at the top, the non-dimensional temperature took the values +1 and -1, respectively. Through the inlet and outlet areas, the applied boundary conditions for the temperature were $\Theta = 0$ and $\partial \Theta / \partial z = 0$, respectively.

Numerical implementation of boundary conditions was achieved by maintaining the constant initial values at the boundaries, where applicable, or by updating them at each iteration, as in the cases of outlet surfaces or symmetry line.

All computations below used an 18x36 **single** grid equally distributed in the domain of calculation. An essential characteristic of Vanka's work, the *multigrid* artifice, has not been used in the present work due to the relatively modest grid here analyzed. Multigrid techniques are known to perform well with mid-size to large grids, but are rather ineffective when applied to small size problems. For this reason, no multigrid or any other large grid-accelerating scheme was implemented.

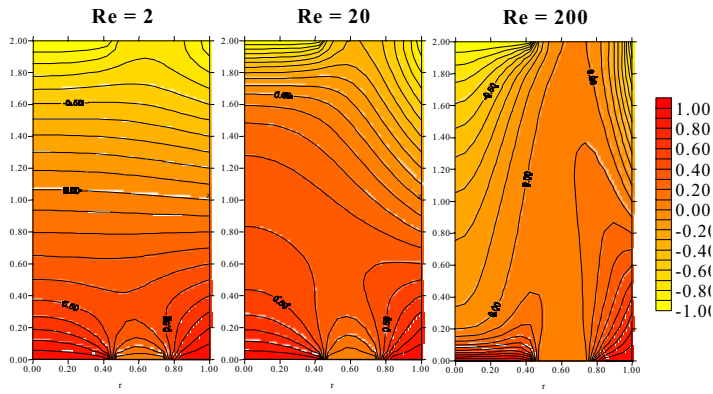


Figure 3 - Effect of Re on temperature field, $S=1, Ra=10^2$.

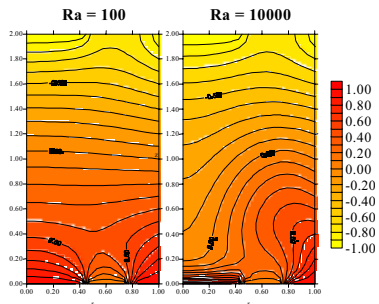


Figure 4 - Effect of Ra on temperature field, $Re=2, S=1$.

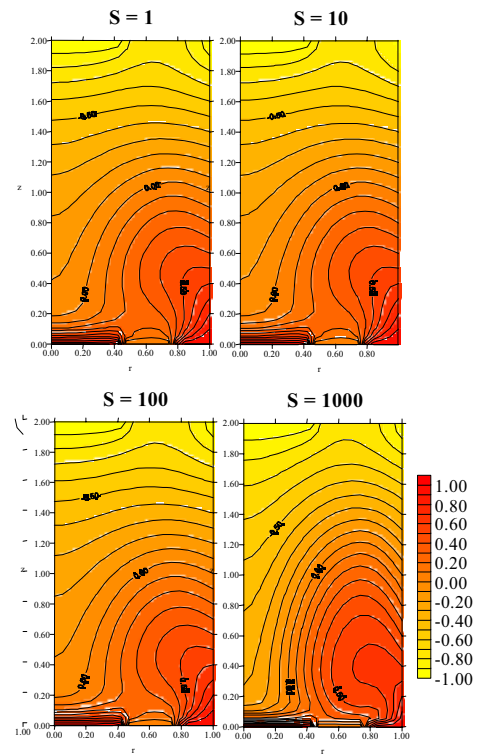


Figure 5 – Effect of swirling strength on temperature, $Ra=10^4, Re=2$.

3.7 Computational Parameters.

The same relaxation parameters ($\alpha=0.55$ for U, W, P, V and Θ) were used in all calculations. The swirling strength, S , Reynolds number, Re , and Rayleigh number, Ra , are defined as,

$$S = \frac{V}{W} \Bigg|_{in}, \quad Re = \frac{r W_{in} 2R}{m}; \quad Ra = \frac{Pr r^2 \rho g_z \Delta T R^3}{m^2} \tag{10}$$

These three parameters were varied in the range $1 < S < 10^3$, $2 < Re < 10^3$ and $10^2 < Ra < 10^5$. The incoming axial velocity at inlet, W_{in} , was such that the Reynolds number, in most of the cases run, took the value in the range 2-200. This relatively small input value for W_{in} indicates that although the flow comes inside the chamber with appreciable rotation (S up to 10^3), it carries almost no momentum in the axial direction. This incoming velocity level was found to be consistent with the weak currents driven in a thermally driven flow. With that, cases with balanced *natural* and *forced* convection mechanisms could be analyzed.

3.8 Partially Segregated Scheme.

The algebraic equations for the velocity field were solved, in addition to the fully-coupled scheme here described, by performing outer iterations for the components Θ and V while keeping $U-W-P$ from the previous iteration. A *line-by-line* smoothing operator, fully described elsewhere (e.g. Patankar (1980)), was used to relax Θ and V , being the secondary flow field (U, W) calculated by the locally coupled method seen above. This *partially segregated* solution was set in such a way that the same number of sweeps throughout the scalar (Θ, V) and cross-flow fields (U, W, P) was obtained. Since in the coupled scheme every sweep for $U-W-P$ also implies in smoothing out $\Theta-V$ errors, this procedure was found to be a reasonable way to fairly compare the two methods. In all partially segregated computations, a total of four sweeps per scalar per outer iteration was performed.

The reason for recalling this second procedure a *partial* rather than a *full* segregated scheme lies in the fact that in full segregated methods all variables, including U, W and P , are solved independently and in sequence along the entire algorithm. In the case here presented for comparison, only Θ and V are excluded from the implicit treatment implied by eqn. (9).

4. Results and Discussion

Previous Results and Numerical Accuracy. The results shown below were obtained with a previously developed numerical tool. The justification for using this code instead of running one of the many existing programs lies on the fact that adapting the full block-implicit arrangement shown above, involving all vector and scalar variables, would demand too much reprogramming. Yet, to the Authors' knowledge, no available source code entails exactly the same numerical formulation shown before.

Previous computations with the numerical model herein have assured the correctness and validation of the computer code developed by de Lemos (2000). Those previous results were taken after reduction of all normalized residues for mass, momentum and energy eqns. to the pre-selected value of 1×10^{-6} . Correctness of the present computer program has been checked by comparing calculations for thermally driven flows in a square cavity with benchmark solutions reported by de Vahl Davis (1983). Results in de Lemos (1992a) reproduced de Vahl Davis' calculations with less than 0.01% discrepancy for grids greater than 25×25 and $Ra = 10^4$.

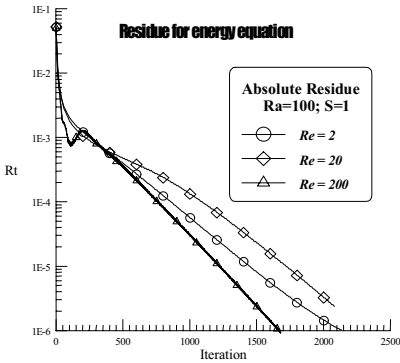


Figure 6 - Influence of Re on convergence rate of T -equation.

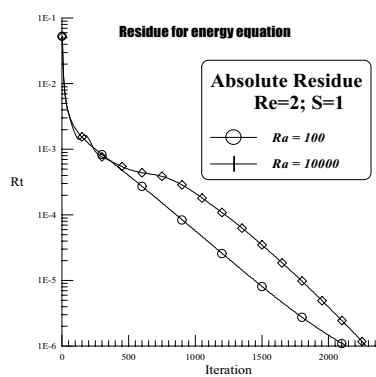


Figure 7 - Effect of Ra on R_T

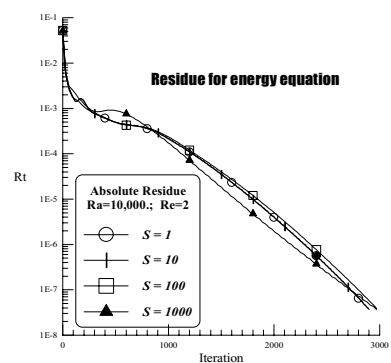


Figure 8 - Effect of swirling strength S on R_T

Similar comparisons for the exact geometry and flow conditions here analyzed are more difficult to be worked on due to the scarcity of experimental data and corresponding calculations in the literature. Nevertheless, grid independence studies for the solutions herein have also been carried out (not shown here due to lack of space). For grids greater than 18×36 , discrepancies in the calculations fall within 0,1%. Since the main objective of this work was to further test the proposed formulation rather than obtaining a detailed calculation of the flow, the chosen grid size was found to give accurate enough results. In summary, the results shown below should be regarded as an aid in comparing *segregated* and *coupled* solution sequences.

Absolute Velocities. Figure 2 shows results for the velocities at the chamber mid-planes. The figures present velocities U along the vertical z (Fig. 2a, $R=0.5$) and W along r (Fig. 2b, $z=H/2=R$), respectively. Inspecting those results one can conclude that, independently of the smoothing technique used, final converged solutions are essentially equal. The computational effort to achieve them, however, seems to be different, as it is discussed below

Temperature Field. Figure 3 shows results for the temperature field when subjected to an increase in the incoming mass flow rate (increase in Re , see eqn. 10). The Figure indicates that the core of the flow becomes homogenized as more fluid comes into the chamber due to higher recirculating motion in the r - z plane. Outlet temperatures are correctly increased when the higher axial mass flow rate sweeps hot fluid from bottom layers through the exit (see Figure 1 for geometry details). Increase of the central recirculating bubble is also clearly detected by the downward wash of isolines at the centerline.

Figure 4 shows calculations for the temperature field done with different values for Ra spanning from 10^2 to 10^4 . Distortion of the temperature profiles also indicates strength of convective ascending currents close to the wall with corresponding downward motion at the central region. Interesting to note is the increase in temperature gradients close to the center, at the bottom lid, due to the just mentioned downward stream. When analyzing real equipment, not subjected to the imposed boundary conditions here used, steep gradients of temperature close to walls might be an indication of possible temperature raise at some particular locations. Design engineers may then use this sort of information to overcome potential material damage when performing preliminary thermal design.

Figure 5 presents the temperature pattern for different values of S . Interesting to note is the small effect on T , even though S changes by such a large factor of 10^3 . Considering the assumed axi-symmetry of the flow, a strong rotation will carry fluid tangentially, essentially through zones of equal temperature. On the other hand, an increase in Re or Ra , shown in Figures 3 and 4, substantially distort the temperature by increasing the ascending cross-flow currents. One should mention that in real fully three-dimensional flows in industrial equipment ascending currents are quite strong, playing certainly a definite role in establishing the temperature pattern inside such domains. For the simplified flow and geometry here analyzed, however, no such effect was expected.

Residue History. Normalized residues were defined as the norm of the cell residue for mass, energy and tangential velocity equations as,

$$R_{abs}^{\xi} = \left\{ \sum_{ij} \left(R_{ij}^{\xi} \right)^2 / (N \cdot M) \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

where ξ in (11) refers to the general transport variable as defined in Table 1, N and M are the number of cells in the r - and z -directions, respectively. For continuity equation, R_{ij} can be seen as the difference, for every cell, between the cell outgoing mass flux, F_{out} , and the incoming mass flux, F_{in} . A *relative* mass residue can then be defined as,

$$R_{rel} = \left\{ \sum_{ij} \left(\frac{F_{out} - F_{in}}{F_{out} + F_{in}} \right)^2 / (N \cdot M) \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

A discussion on the advantages in simultaneously monitoring R_{rel} in addition to R_{abs} is presented in de Lemos (2000) and it is based on the small range of the former (0,+1).

The three parameters here investigated, namely Re , Ra and S , were analyzed in terms of their influence on the overall convergence rates. Results are shown in Figures 6, 7 and 8, respectively. The iteration counter refers to the total number of sweeps over the domain, that is, the product of the outer counter times the number of inner sweeps. Here, a quick word on the numbers of iterations to convergence seems timely. Other schemes presented in the literature may indicate residue history as a function of outer iteration counters only. Some, use the so-called pseudo-transient approach and plot time steps instead. Each outer iteration, in turn, may consider a great number of internal sweeps, usually controlled by a specified residue reduction rate. Here, in this work, a fixed number of internal sweeps was considered. The relatively large number of necessary iterations seen in the figures below could be associated with the use of a single grid, the tightness of the relaxation parameters and the strong coupling among all variables involved.

Interesting to note is the better convergence performance for the higher Reynolds number (see Figure 6), possibly reflecting the fact that, as Re increases, the flow becomes more *forced-convection* dominated decreasing the $UW-T$ coupling in relation to the $UW-P$ connection. This, in turn, facilitates the solution of the energy equation once the velocity field is calculated. This idea is supported when Figure 7 is inspected, showing worse convergence rates for a higher Ra . There, the higher degree of coupling between temperature and cross-flow fields makes computation more demanding, reflecting the increase in physical coupling among the flow variables and temperature.

On the other hand, when S is varied, Figure 8 shows a weak dependency of R_T on the swirling strength. According to Figure 5, no substantial change on temperature patterns was detected when inlet rotation increases (except for $S=10^3$). For such small inlet mass flow rates ($Re=2$), viscous shear driven by the incoming swirling motion enhances the cross-flow field which, in turn, distorts isothermal lines. Such an indirect or second-order relationship between V and T is apparently also reflected on the residue histories shown in Figure 8.

Mass residues, calculated by equations (11) and (12), are presented in Figure 9 indicating that, after an initial period when low frequency errors are damped, a better convergence rate is obtained with the coupled method in either form of residue.

Residue histories for the temperature and tangential velocity field are presented in Figure 10 and 11, respectively. For the *coupled* strategy, a quicker reduction for the residue is obtained, since in each sweep, for every cell, information on all variables propagates at the same "time rate". Also, the Figures show that the *segregated* method, for the case here analyzed, use as many as 20-30% more iterations to bring R_V down to the same level as the coupled scheme and nearly two times as many outer sweeps to reduce to the same value of R_T . Although the computational effort per field sweep in both schemes are not necessarily equal, a primary consequence of the foregoing is that a relatively longer computing

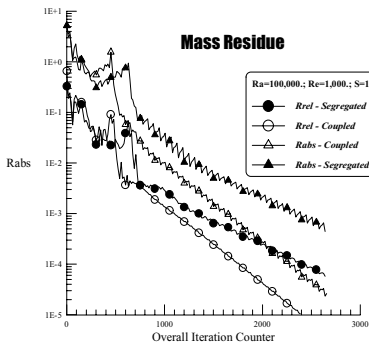


Figure 9– Mass residue history for segregated and coupled approaches

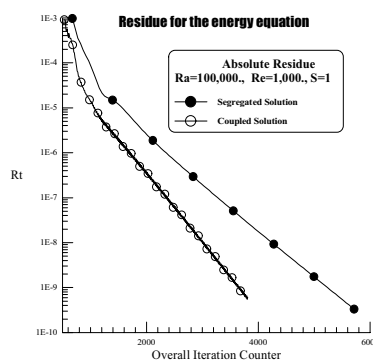


Figure 10 – Influence of solution scheme on residue history of energy equation

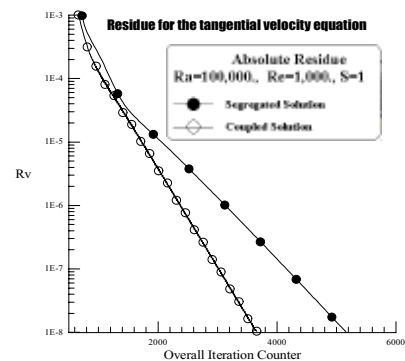


Figure 11 – Influence of solution scheme on convergence of V -equation

time is expected when the decoupled solution is used with the same convergence criteria applied to the scalar equations.

Finally, the Figures seems to indicate also that the cross-flow field can quickly adjust itself to changes in the scalar profiles, and that, in the segregated case, those changes are too slowly transferred back to Θ - V . The coupled solution, however, quickly transmits back to Θ and V -equations changes in the cross-flow pattern, more realistic simulating the strong interaction among the variables involved.

5. Concluding Remarks

This paper detailed a fully-coupled technique for numerical prediction of ascending heated swirling flows in a cylindrical chamber. An extension of the numerical method in de Lemos (2000) towards a fully implicit solution of the energy, tangential and cross-flow equations was reported. Outlining of the numerical method showed the necessary steps for setting up the residuals and the methodology used to calculate the corrections for all dependent variables. Comparison of partially-segregated and fully-coupled treatments for the energy and tangential velocity shows a lower computer effort when the latter method was used. The approach herein is promising regarding numerical stability of the entire equation set since inherent coupling among the variables is implicitly handled. Further, it is also expected that more advanced computer architectures can benefit from the point wise error smoothing operator here described.

6. Acknowledgments

The author is grateful to CNPq, Brazil, for their financial support during the preparation of this work.

7. References

- de Lemos, MJS, 1992a, Computation of Buoyancy-Driven Flows Using a Block-Implicit Numerical Scheme, *Proc. of the 28th Nat. Heat Transfer Conf.*, **ASME-HTD-194**:83-89, San Diego, CA, USA, August 9-12.
- de Lemos, MJS, 1992b, Simulation of Swirling Flow in A Model Combustor Using A Locally-Coupled Numerical Method, *Proc. of Winter Annual Meeting of the ASME*, **ASME-HTD-226**:79-84, Anaheim, CA, USA, November 8-13.
- de Lemos, MJS, 1997a, Locally-Coupled Numerical Solution of Thermally-Driven Cavity Flows, *Proc. of COBEM97-14th Braz. Congr. Mech. Eng.*, Bauru, SP, Brazil, December 8-12.
- de Lemos, MJS. 1990, Computation of Laminar Axi-Symmetric Recirculating Flows Using Primitive Variables and a Block-Implicit Scheme, *Proc. of ENCIT90 - 3rd Braz. Therm. Sci. Meeting*, **1**:375-380, Itapema, SC, Brazil, December 10-12.
- de Lemos, MJS. 1997b, Cell-Implicit Numerical Computation of Flow Field And Heat Transfer in Inclined Cavities, *Proc. of COBEM97-14th Braz. Congr. Mech. Eng.* (on CD-ROM), Bauru, SP, Brazil, December 8-12.
- de Lemos, MJS., 2000, Flow and Heat Transfer in Rectangular Enclosures Using a New Block-Implicit Numerical Method, *Numerical Heat Transfer - Part B Fundamentals*, v. 37, n.4, pp. 489-508.
- de Vahl Davis, G., 1983, Natural Convection Of Air In A Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 3, pp. 249-264,.
- Hogg, S., Leschiziner, MA. 1989a, Second-moment-closure calculation of strongly swirling confined flow wit large density gradients, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **10**(1):16-27.
- Hogg, S., Leschiziner, MA. 1989b, Computation of Highly Swirling Confined Flow with as Reynolds Stress Turbulence Model, *AIAA J.*, **27**(1):57-63.
- L. Tang and Y. K. Joshi, 1999, Application of Block Implicit Multigrid Approach to Three-dimensional Heat transfer Problems Involving Discrete Heating, *Num. Heat Transfer - Prt. A*, vol. 35, pp. 717-734.
- M. Hortmann, M. Perić and G. Scheider, 1990, Finite Volume Multigrid Predictions of Laminar Natural Convection: Benchmark solutions, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 11, pp. 189-207.
- Nikjook, M., Mongia, HC, 1991, A second-order modeling study of confined swirling flows, , *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **12**(1):12-19.
- P. F. Galpin and G. D. Raithby, 1986, Numerical Solution of Problems in Incompressible Flow: Temperature of the temperature Velocity Coupling, *Num. Heat Transfer*, **9**(1):105-129.
- Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc-Graw Hill:New York.
- Vanka SP, 1986, A Calculation Procedure for Three-Dimensional Steady Recirculating Flows Using Multigrid Methods, *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, **55**:321-338.
- Vanka SP, 1986, Block- Implicit Multigrid Solution of Navier- Stokes Equations in Primitive Variables, *J. Comp. Phys*, **65**:138-158.

DEFINITION OF THE TRANSITION BETWEEN BUBBLING AND TURBULENT FLUIDIZATION THROUGH BED MEAN VOIDAGE VARIATIONS.

João Monney Paiva

Mechanical Eng. and Industrial Managt. Dept., ESTV, Campus Politécnico, 3504-510 Viseu, Portugal
jmonney@demgi.estv.ipv.pt

Carlos Pinho

Mechanical Eng. and Industrial Managt. Dept., Engineering Faculty, Porto University, 4200-465 Porto, Portugal
ctp@fe.up.pt

Rui Figueiredo

Mechanical Eng. Dept., Science and Techn. Faculty, Coimbra University, 3030-000 Coimbra, Portugal
rui.figueiredo@gtc.dem.uc.pt

Abstract. *The definition of the transition region between bubbling and turbulent fluidization has been the subject of many experimental and theoretical studies. Its importance lies on the design and development of fluidized beds because different fluidization regimes impose different gas/solid circulation patterns, gas/solid mixing rates and consequently different reaction rates taking place inside the reactors. In this paper a mechanistic model for the prediction of the transition region is proposed. Its validation was performed for fluidized beds of groups B and D particles (Geldart classification). The model is based on momentum balances for the gas and solid phase and presents a ratio between the transition superficial velocity and a particles cluster settling velocity suggested by Kovensky. Results from this ratio are compared with data obtained in experiments carried out with several distributor configurations.*

Keywords: Fluidization, Regimes, Transition.

1. Introduction

The aim of the present work is to estimate the value of an effective drag coefficient, obtained from balances between drag, gravity, buoyancy and friction, and to study the influence it has on the determination of the transition velocity between bubbling and turbulent fluidization regimes. When a set of particles moves by the action of a fluid flow in close proximity to each other, the motion that each of the individual particles develops is a function of the presence of the others. Therefore, though the simple analysis of the interaction between the fluid and a single particle is no longer sufficient, it may be adapted as a base to model this more complex situation. A set of experimental values will be used to obtain correlation coefficients that will enable determining the terminal velocity of particles immersed in clouds, and used in estimating the influence of different distributor plates on the onset of the transition between fluidization regimes.

2. Experimental

The experimental work was done in a cold, atmospheric fluidized bed, with 100 mm internal diameter perspex.

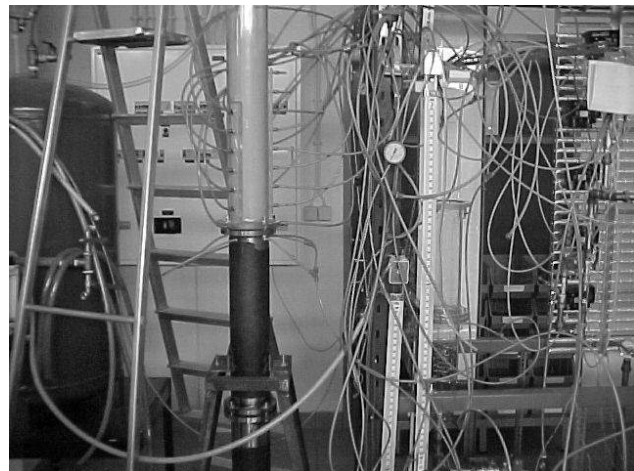
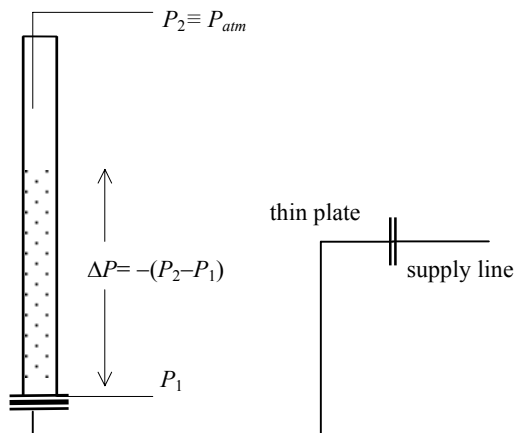


Figure 1- Scheme of the experimental setup.

The general characteristics of the experimental set up are briefly described in Table 1.

Table 1- Experimental setup

Physical Characteristics	Units	Values
Internal bed diameter, D	m	0.10
Static bed height, H	m	1.8
Bed temperature, T	K	288
Maximum superficial velocity, U_0	m/s	2.3
Particle density, ρ_p	kg/m ³	2485

Fluidizing Group B, B/D and D silica ballotinis, 355-425, 600-710 and 850-1000 μm respectively, established the fluidized bed. All the material was screened and statistically weighed with t tests using SPSS. The hydrodynamic characteristics of the bed material are summarized in Tab. 2.

The airflow rate was measured with an orifice plate flowmeter, coupled to a Furness Control FCO18 differential pressure transducer. Those measurements had an associated uncertainty of 25.2 Pa (Coleman and Steele, 1999). Concerning the bed pressure measurements, one probe was located at the upper level of the distributor plate and the second one was measuring the atmospheric pressure. These probes were connected to two Klay Peramic pressure transmitters CER8000, with an associated uncertainty of 25.2 Pa (Coleman and Steele, 1999). All the uncertainty evaluation was performed in accordance with a 95% confidence interval. Each one was calibrated against U-tube water pressure manometers. The data acquisition system used a sampling frequency of 5 Hz. An average of 1000 samples were taken for each spectrum.

Table 2- Particle hydrodynamic characteristics

Sieve interval (μm)	Average particle diameter, $d_p=1/(\sum x_i/d_{pi})$ (μm)	Minimum fluidization velocity, U_{mf} (m/s)
355/425	387	0.104
600/710	651	0.271
850/1000	941	0.448

The pressure drop evolution for the tested gas flow range, and for each distributor plate, was measured, with pressure probes calibrated against U-tube mercury pressure manometers. Eight different distributors were used: six perforated perspex plates, one metallic mesh and one porous ceramic, with pressures drops ranging from 60 to 300 kPa, and superficial gas velocities going from 0.1 to 2.3 m/s at standard pressure and temperature. The data for the distributors are given in Table 3.

Table 3- Data on distributors

Type	Plate reference	Open area (%)	Maximum attained U_0 (m/s)
Perforated plate with triangular pitch (p#x)	p0x	0.045	0.6
	p1x	0.098	1.0
	p2x	0.179	1.2
	p3x	0.270	1.7
	p4x	0.347	2.0
	p9x	0.853	2.2
Metallic mesh (dyn)	dyn	0.675	2.2
Porous ceramic (ker)	ker	8.482	2.3

A more detailed description of the experimental setup can be found in Paiva *et al.* (2000a, b), or in a concurrent paper.

3. Analysis

On the basis of the classical momentum equations for the gas and particles phases, which are set on a basis of steady one-dimensional flow and with negligible interparticle collisions, it can be deduced that the pressure drop/loss would increase with the addition of more solids into the flow stream. However, experimental data have revealed that under certain operating conditions the pressure drop is lower than expected (Peters and Klinzing, 1972, Shimizu *et al.*, 1978, Kane, 1989). It is generally recognized that these effects are linked to various factors associated with particle motion near the wall region, including particle spinning, deposition and agglomeration (Kane, 1989). The basic mechanisms of drag reduction are not yet fully known, in part because of a shortage of reliable measurements, which quantify these factors. In the following, a phenomenological model that accounts for a drag reduction phenomenon from the viewpoint of turbulent intensity attenuation due to the effect of the containing walls and intermittent deposition and agglomeration is introduced. In order to obtain an expression for the total pressure drop across the fluidized bed, we will write down the momentum equation for a section of the bed.

Consider a section of the bed with a cross-sectional area A and height dH , in vertical position, containing a suspension mass of particles dm . The momentum balance equation is (Rhodes, 1998):

$$\left[\begin{array}{l} \text{net force acting} \\ \text{on bed contents} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{rate of increase in} \\ \text{momentum of contents} \end{array} \right] \quad (1)$$

$$F_D AdH - F_g AdH + F_b AdH - F_f AdH = m \frac{dU}{dt} \quad (2)$$

where F_D , F_g , F_b and F_f are the drag, gravity, buoyancy and friction forces per unit volume of bed, respectively, and U the gas superficial velocity.

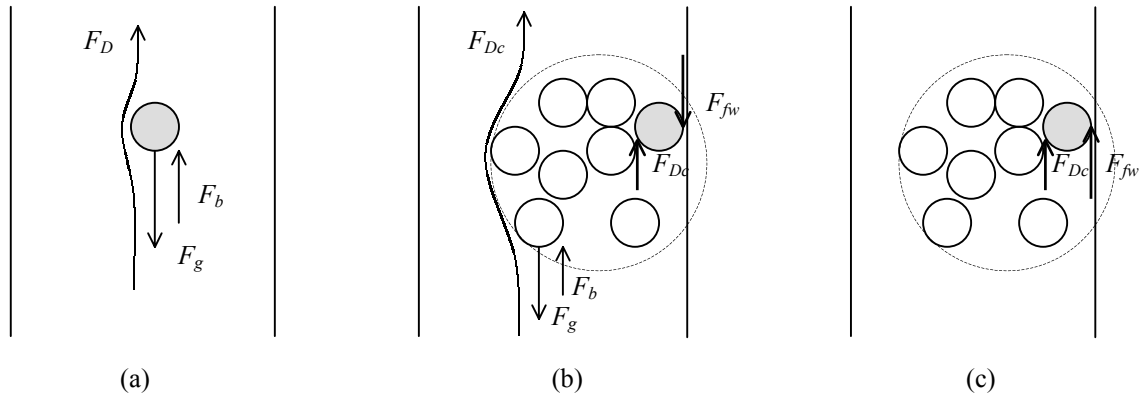


Figure 2- Schematics of the forces acting on a surrounded particle for two different situations: (a) incipient and fully fluidized state, particles close to the walls (b) moving up or (c) coming down.

Generally, the so called ‘fundamental fluidization condition’ is defined when the process is at a steady state, the velocity of the particles reaches a constant value and the referred forces must be in dynamic equilibrium, *i.e.*, its apparent weight plus the friction resistance must be equal to the fluid drag (Fig. 2a):

$$F_D AH = \frac{\pi}{6} d_p^3 (\rho_p - \rho_f) g + F_f AH \quad (3)$$

where d_p is the particle diameter, ρ_p and ρ_f the particles and fluid densities.

When the system is in the incipient fluidization point, the particles are in suspension, barely moving from their positions, so the friction forces, F_f , may be neglected and the number of particles, N_p , estimated by means of Eq. (4):

$$N_p = \frac{3}{2} \frac{\Delta P_{mf}}{\rho_p - \rho_f} \frac{D^2}{g d_p^3} \quad (4)$$

with D the bed diameter and $(\Delta P)_{mf} = F_D H$, *i.e.*, the bed pressure drop with height at minimum fluidizing conditions must equal the sum of the drag forces acting on each individual particle.

When augmenting the fluidization velocities, the level of agitation becomes increasingly important and, therefore, the balance must now incorporate the friction effects between the particles and between the particles and the walls. So, now the forces acting on a single particle that moves in a swarm or cloud of other particles are the gravitational force, the buoyancy force, the fluid drag force, the friction force between particles due to incipient entrainment, F_{Dc} , and the friction force caused by the bombardments of the particles on the walls of the containing vessel, F_{fw} , (Fig 2b):

$$F_D - F_g + F_b - F_{fw} + F_{Dc} = m \frac{dU}{dt} \quad (5)$$

Considering that no distinction is yet possible to make between the friction force among particles and between the particles and the wall, the two components of friction will be grouped in one term, $(F_{fw} - F_{Dc})$, and Eq. (5) becomes

$$F_D = (F_g - F_b) + (F_{fw} - F_{Dc}) \quad (6)$$

when permanent conditions of flow are assumed. Thereafter, the forces representing the combined effects of friction and incipient entrainment shall be modeled using the expression of Paiva *et al.* (1999):

$$F_{fw} - F_{Dc} = \frac{1}{2} \frac{\rho_f}{H} (U_p - U_f)_c^2 \lambda_z^* N_p \quad (7)$$

where λ_z^* introduces the hindered settling effects owing to the proximity of particles (Barth, 1954, Nigam, 1975, Marcus *et al.*, 1990) and the difference between the particle velocity, U_p , and the interstitial fluid velocity, U_f , represents the slip velocity, *i.e.*, the relative velocity of the particles to the fluid. This velocity is, *grosso modo*, the settling terminal velocity of a single particle, U_T , corrected by a modified drag coefficient, C_{Dc} , which accounts for the interaction of the neighboring particles within the clusters (Yang, 1976, Klinzing, 1981, Rhodes, 1998). Numerous functions have been presented for relating the single particle drag factor, C_{Ds} , with the porosity of the bed in two different approaches: either equations of interphase drag in packed beds are extended to fluidizing conditions, or the drag coefficient of a single particle is modified to include the particle concentration. Cox and Clark (1991) made a review of the available particle-drag relationships. In this study, a simple form is considered, using the Richardson and Zaki (1954) index for gas-solid flow, n . This well-known relation between slip and terminal velocities is applied to the expression of the terminal free fall velocity of a single particle in the presence of a swarm of other particles in a fluid, U_{relT} (Rhodes, 1998),

$$(U_p - U_f)_c \equiv U_{relT} = U_T \varepsilon^n \quad (8)$$

using a simple drag coefficient from Kovensky (1996). Therefore, Eq. (7) becomes:

$$F_{fw} - F_{Dc} = \frac{1}{2} \frac{\rho_f}{H} U_T^2 \varepsilon^{2n} \lambda_z^* N_p \quad (9)$$

The pressure balance equation over the system is the sum of the pressure drop due to gravity minus buoyancy, ΔP_{g-b} , plus the effects due to friction, ΔP_{fw-Dc} :

$$\Delta P = \Delta P_{g-b} + \Delta P_{fw-Dc} \quad (10)$$

that is,

$$\Delta P = (\rho_p - \rho_f) \frac{V_{1p}}{A} N_p g + \frac{1}{2} \rho_f U_T^2 \varepsilon^{2n} \lambda_z^* N_p \quad (11)$$

where V_{1p} is the volume of a single particle. Simplifying and rearranging,

$$\Delta P = \frac{2}{3} Ar N_p \left[\left(\frac{\mu}{D} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{U_T^2 \varepsilon^{2n} \lambda_z^*}{g d_p^3} \frac{\mu^2}{R-1} \right] \quad (12)$$

with $R = \rho_p / \rho_f$ and $Ar = (\rho_p - \rho_f) g d_p^3 / \mu^2$. Knowing ΔP from the experimental measurements and assuming the two-phase postulate of a constant value for the porosity of the dense phase, ε , the values of the Richardson-Zaki index n can be calculated.

From the analysis of the evolution of the standard mean deviation of pressure fluctuations for the whole bed, Jin *et al.* (1986) proposed the following correlation to calculate the transition velocity at room temperature and ambient pressure,

$$\frac{U_c}{\sqrt{g d_p}} = \left[K \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right) \left(\frac{D}{d_p} \right) \right]^{0.27} \quad (13)$$

Cai *et al.* (1989), developed this correlation and extended its range to different temperatures ($293 < T < 773$ K) and pressures ($0.1 < P < 0.8$ MPa):

$$\frac{U_c}{\sqrt{g d_p}} = \left(\frac{\mu_a}{\mu_f} \right)^{0.2} \left[\left(\frac{\rho_a}{\rho_f} \right) \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right) \left(\frac{K D_f}{d_p} \right) \right]^{0.27} \quad (14)$$

where KD_f was a parameter accounting for the effects of the bed geometry and internals, applicable for $57 \text{ mm} < D < 475 \text{ mm}$ and ranging between 1.6 and 3.4. Considering the influence of the number of distributor orifices, an empirical correlation based on a former work of Paiva *et al.* (2000a, b) is presented, allowing the prediction of the referred transition velocity, U_c . It takes into consideration a balance of the gas flow exerted drag upon bed particles *versus* the weight of these Group B and D particles (first factor of the second member) and the ratio of the perforated area of the distributor plate with the cross sectional area of a single particle (third factor of second member):

$$\frac{U_c}{U_{relT}} = \left(\frac{\mu^2}{\rho_p d_p^3 g \rho_f} \right)^\phi \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right)^{0.22} \left(\frac{4A_0}{d_p^2 \pi} \right)^{0.18} \tag{15}$$

with the exponent ϕ , varying with the bed particle size, obtained from the experiments, Table 4.

Table 4- ϕ values for Eq. (15)

Particle size (μm)	ϕ
355-425	0.39
600-710	0.28
850-1000	0.23

The comparison of experimental results with Eq. (15) is presented in Figs 10, 11 and 12.

4. Results and discussion

Data was used from experimental measurements, employing the mentioned three ranges of silica ballotinis as bed material, concerning the overall pressure drop from the upper side of the distributor plate to the free surface of the bed. The experiments covered also the eight different types of distributors, though those with the higher pressure drop had limitations on the maximum superficial velocity attainable, particularly ‘p2x’, ‘p1x’ and ‘p0x’. Using Eq. (12), with $\Delta P \equiv \Delta P_{exp}$, exponent n values were found for several superficial velocities. Those results are shown in Figs 3, 4 and 5, for Group B particles, 355-425 μm , boundary B/D, 600-710 μm , and D, 850-1000 μm , respectively.

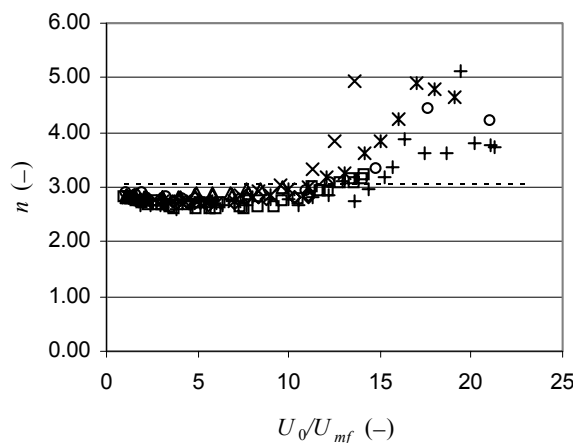


Figure 3- Evolution of the coefficient n (Eq. 12) with the ratio U_0/U_{mf} , 355/425 μm particles (\square : ‘ker’, \circ : ‘p9x’, $+$: ‘dyn’, $*$: ‘p4x’, \times : ‘p3x’, \diamond : ‘p2x’, \triangle : ‘p1x’, $-$: ‘p0x’, dashed line: coefficient from Khan and Richardson, 1989).

In all the charts a comparison was made, for the proper range of particle sizes, with the results obtained when using the Khan and Richardson correlation (1989):

$$\frac{4.8 - n}{n - 2.4} = 0.043 \text{Ar}^{0.57} \left[1 - 2.4 \left(\frac{d_p}{D} \right)^{0.27} \right] \tag{16}$$

Though with a significant scatter, especially for higher values of fluidization velocities, the average values of n decrease slightly for larger particles. In all the cases a minimum is noticeable, lying around 11, 5 and $3U_0/U_{mf}$ for 355/425, 600/710 and 850/1000 μm , figures 3, 4 and 5, correspondingly.

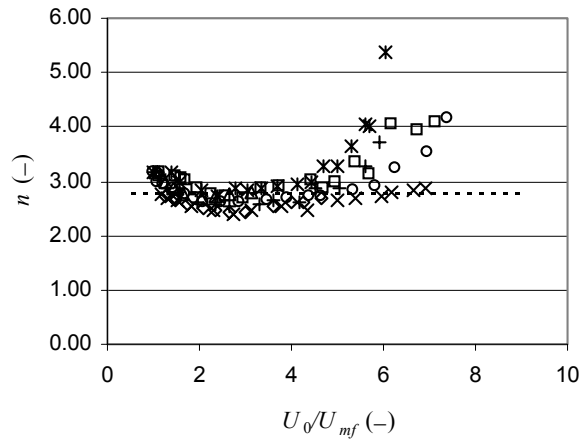


Figure 4- Evolution of the coefficient n (Eq. 12) with the ratio U_0/U_{mf} ; 600/710 μm particles (\square : ‘ker’, \circ : ‘p9x’, +: ‘dyn’, *: ‘p4x’, \times : ‘p3x’, \diamond : ‘p2x’, \triangle : ‘p1x’, -: ‘p0x’, dashed line: coefficient from Khan and Richardson, 1989).

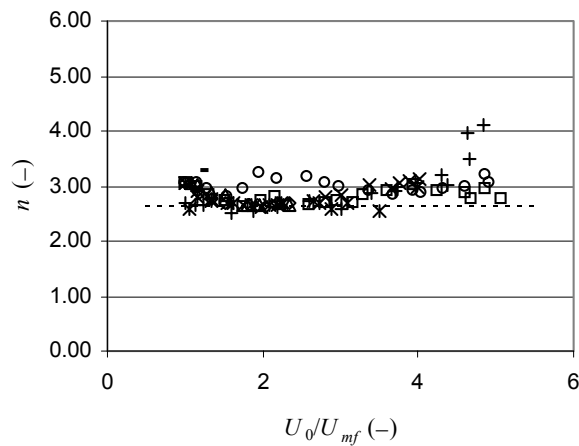


Figure 5- Evolution of the coefficient n (Eq. 12) with the ratio U_0/U_{mf} ; 850/1000 μm particles (\square : ‘ker’, \circ : ‘p9x’, +: ‘dyn’, *: ‘p4x’, \times : ‘p3x’, \diamond : ‘p2x’, \triangle : ‘p1x’, -: ‘p0x’, dashed line: coefficient from Khan and Richardson, 1989).

The overall pattern of the existence of a minimum for the value of n expresses the fact that the terminal velocity of the particles increases while the derivative of the trend of n versus (U_0/U_{mf}) is negative, hence resulting in a continuous higher energy dissipation, measured by an increased pressure loss that will reach a maximum at the point where n is minimum. Further on, the pressure recovers until reaching the same order of magnitude of the initial incipient state, that is, $\Delta P \equiv \Delta P_{mf}$, only now for $U_0/U_{mf} \equiv (U_0/U_{mf})_c > 1$.

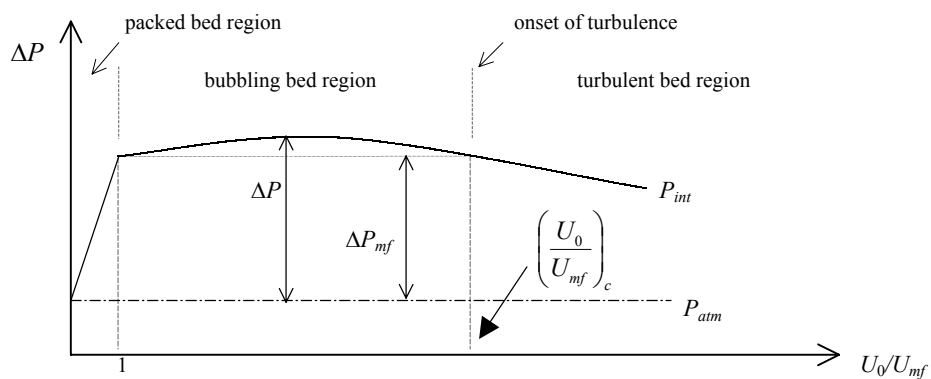


Figure 6- Comparison between the relative evolution of pressure and pressure drop inside the bed.

As a result, the evolution of n is also an indication of the pressure evolution inside the fluidized bed, P_{int} . What seems worthy to retain is that $(U_0/U_{mf})_c$ represents the point at which the pressure loss drops below the values of reference to the minimum fluidization (or incipient) point, ΔP_{mf} . This relation can be observed in Fig. 7, where a parallel is made between the evolution of n and of the experimental pressure drop, ΔP .

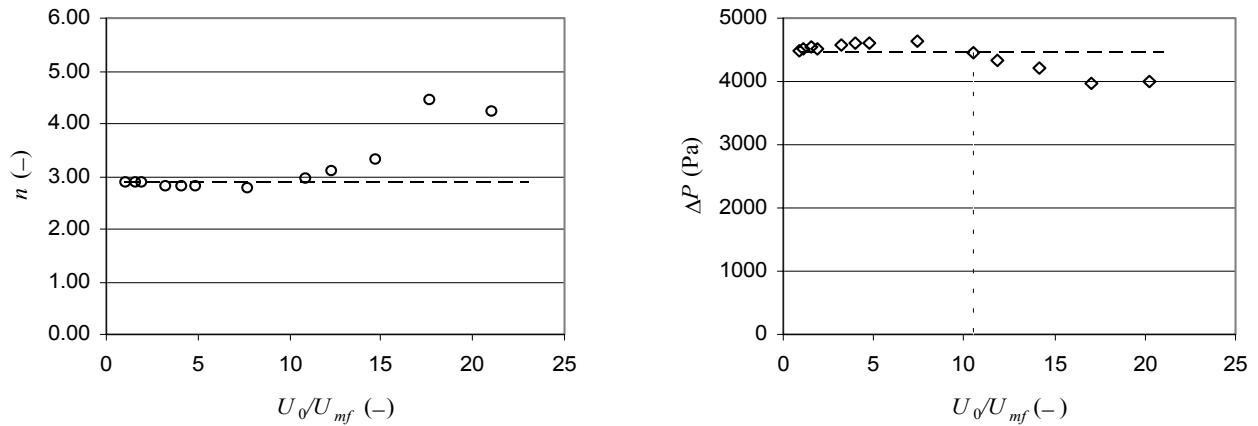


Figure 7- Evolution of exponent n from Eq. (12) and experimental measurement of pressure drop ΔP , particles 355/425 μm , ‘p9x’ distributor plate (the dashed lines represent the values of n and ΔP for $U_0/U_{mf}=1$, n_{mf} and ΔP_{mf}).

Furthermore, what these values indicate is that the basic assumptions that were behind the force balance (Fig. 2) that led to Eq. (6), covering the whole range of velocities, need to be reevaluated. Actually, the increase in the pressure drop (as observable in Fig. 7) beyond ΔP_{mf} was taken into consideration by means of the friction taking place among rising particles and between rising particles and the walls. As can be seen in Eq. (10), the only way ΔP can diminish is to invert the friction forces direction at the wall, F_{fv} , from the balance pictured in Fig. 2(b) to (c), when the fluidized bed reaches the regime corresponding to $(U_0/U_{mf})_c$. The decrease in the pressure loss beyond ΔP_{mf} means that somehow the mass of the bed is being only partially supported, and the only way this can be envisaged is if, afar that point, the mass of particles is preponderantly moving down close to the walls, thus diminishing the amount of energy spent and allowing particle deposition and agglomeration, the whole resulting in a overall ΔP decrease. The effect in momentum is correspondent to a decrease of U_{relT} , as can be observed in Fig 8 for the whole range of particles used in these experiments. This discontinuous change of the hydrodynamic behavior of the bed will be used, for the time being, to locate the corresponding values of superficial velocity at which these phenomena take place.

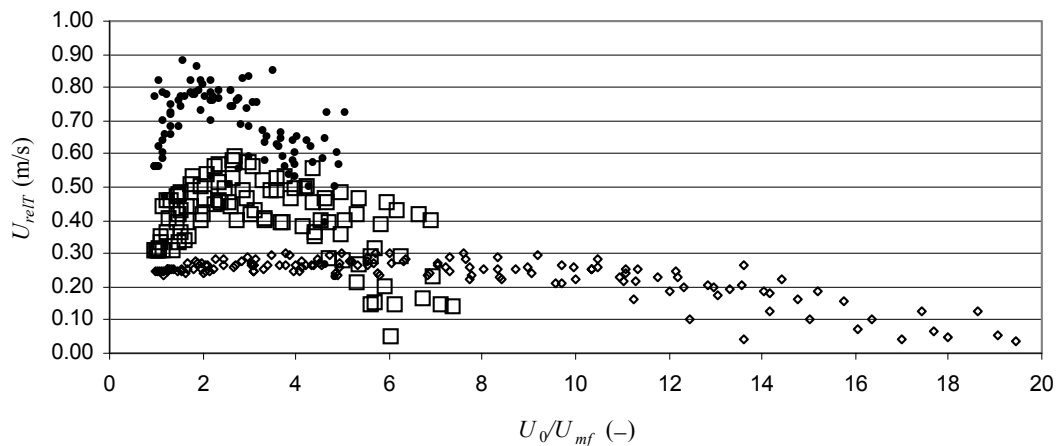


Figure 8- Evolution of the relative terminal velocity, U_{relT} , Eq. (8) for $n=n_{mf}$ at $(U_0/U_{mf})>1$, with U_0/U_{mf} (•- 355/425, □- 600/710, ◇- 850/1000 μm)

Yerushalmi and Avidan (1985) characterized the transition to turbulent fluidization with two reference velocities: U_c , the velocity at which amplitude of pressure fluctuations peak, and U_k , the velocity at which amplitude of pressure fluctuations level off, marking the onset and end of the transition, over a significant range of values. From Fig. 9(a), (b) and (c), representing the variation of a normalized standard mean deviation of pressure drop measurements, σ' ($\sigma/\sigma_{\text{m\acute{a}x}}$), there is the recognition of peaks around 8, 5 and $3U_0/U_{mf}$, for sizes 355/425, 600/710 and 850/1000 μm , respectively.

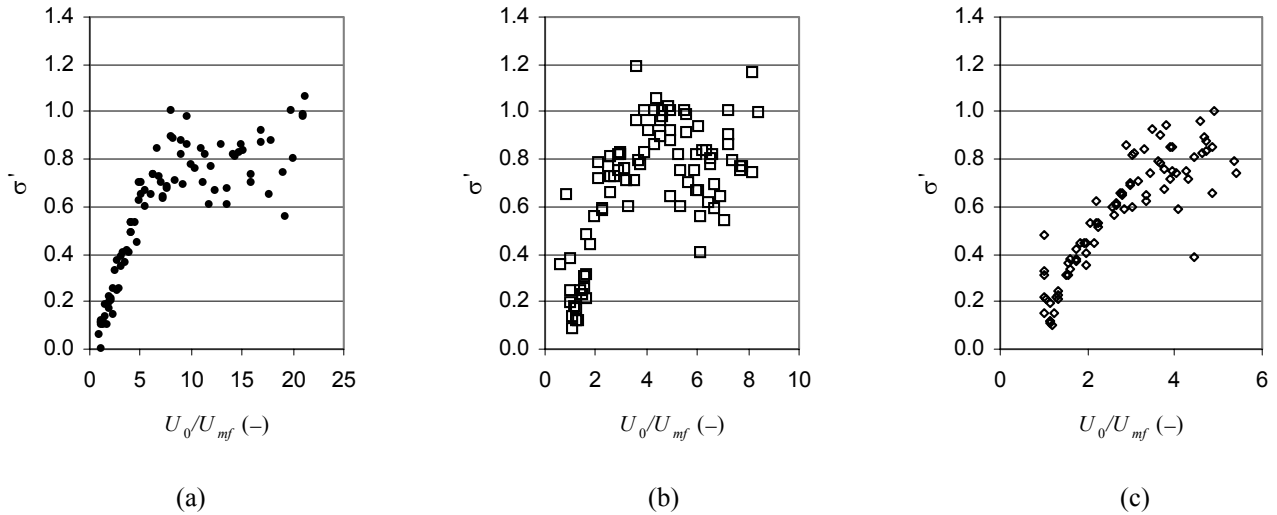


Figure 9- Normalized standard mean deviation of pressure fluctuations, σ' , versus U_0/U_{mf} , from left to right, 355/425, 600/710 and 850/1000 μm (\square : 'ker', \circ : 'p9x', \diamond : 'dyn', \times : 'p4x', $+$: 'p3x').

If the values of velocities at which those peaks occur are compared, using several distributor plates and the three sizes of particles, with those that marked the shift of the Richardson-Zaki index of the porosity, it can be noticed that they are close to each other:

Table 5- Values of U_0/U_{mf} around which a transition occurs in Richardson-Zaki index n and in standard mean deviation of pressure fluctuations, σ' .

Particle size (μm)	355-425	600-710	850-1000
$\left(\frac{U_0}{U_{mf}}\right)_c > 1$ for $n = n_{mf}$	10-12	4-6	2.5-3.5
$\left(\frac{U_0}{U_{mf}}\right)_c$ for $\sigma' = \sigma_{\text{m}\acute{a}\text{x}}$	7-10	4-5	3-4

Taking the corresponding values of n at $(U_0/U_{mf})_c$, where $U_0 \equiv U_c$, to determine U_{relT} , Eq. (8), the results of applying Eq. (14) and Eq. (15) are exposed next (Figs 10, 11 and 12), for the three sizes of particles, compared with experimental data retrieved from standard mean deviation analysis:

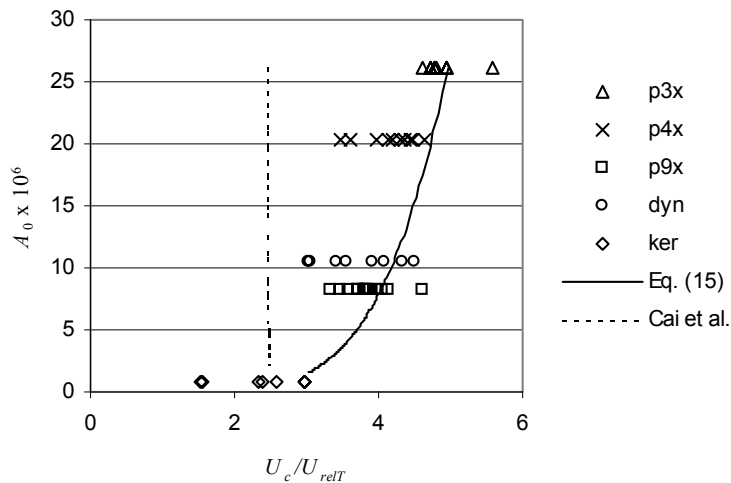


Figure 10- Relation between experimental values of U_c and those obtained by means of Eq. (14), Cai *et al.* (1989) and Eq. (15), particles size 355/425 μm .

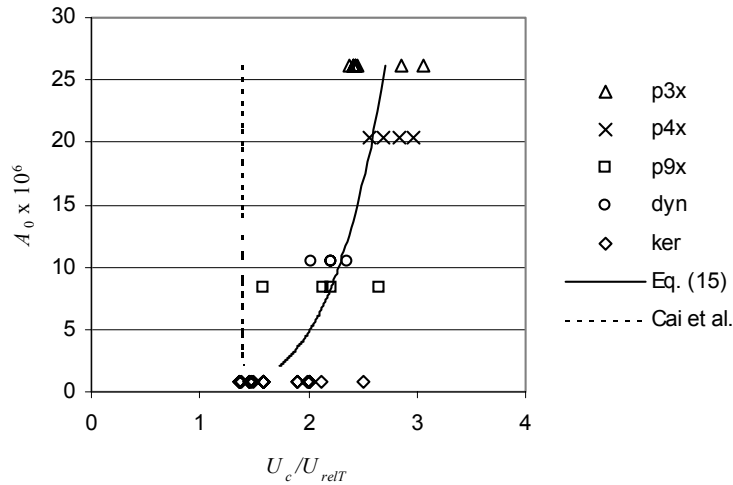


Figure 10- Relation between experimental values of U_c and those obtained by means of Eq. (14), Cai *et al.* (1989) and Eq. (15), particles size 600/710 μm .

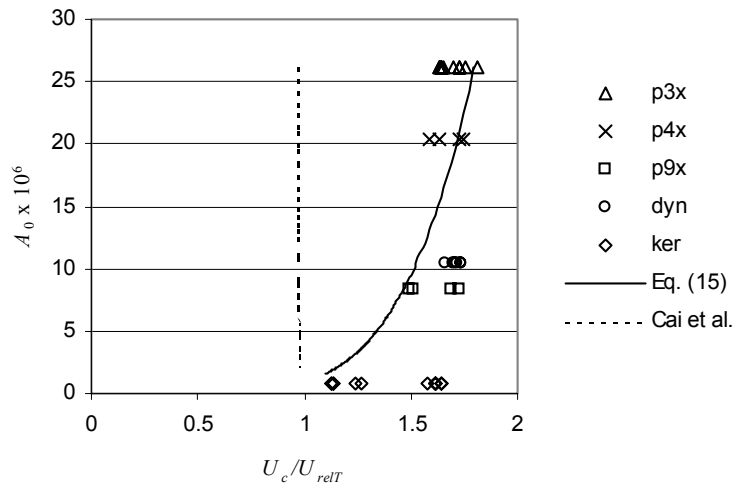


Figure 10- Relation between experimental values of U_c and those obtained by means of Eq. (14), Cai *et al.* (1989) and Eq. (15), particles size 850/1000 μm .

The experimental results reveal a decreasing trend in the onset velocity of transition, U_c , from higher to lower pressure drop plates. Lower pressure drop through the distributor plates meaning larger open area, as the orifice diameters are all of equivalent size, indicates a higher number of orifices. It means also that the length of the jets will be shorter, which will induce a sooner mixture within the bed. With shorter jets and higher number of bubbles, coalescence starts closer to the distributor. If the onset of the transition from bubbling to turbulent is related to the end of coalescence and the beginning of break-up (Fan and Zhu, 1998), higher pressure drop plates will achieve later the same level of mixture of the lower pressure drop ones. In so doing, a comparatively reduced coalescence will take place, thus tending to maintain longer the bubbles identity, delaying the appearance of break-up and postponing the transition to conditions of higher values of velocity.

5. Conclusions

In this work a physical interpretation of the involved phenomenae is used to develop a methodology that enables determining the Richardson-Zaki index for gas-solid flow applied to the fluidized bed case. The results show an index variation that closely follows the same trend as the standard deviation of the pressure fluctuations inside the bed, thus allowing a possible explanation for the unexpected pressure drop decrease through the bed as well as presenting a good criterion for determining the onset of the transition from bubbling to turbulent fluidization regimes.

6. References

Barth, W., 1954, Chem. Ing. Tech., 20, 1, pp. 29-32

- Cai, P., Chen, S.P., Jin, Y., Yu, Z.Q. and Wang, Z., 1989, "Effect of Operating Temperature and Pressure on the Transition from Bubbling to Turbulent Fluidization", *AIChE Symp. Ser.*, 85 (270), pp. 37-43.
- Cox, J.D. and Clark, N.N., 1991, "The effect of particle drag relationship on prediction of kinematic wave in fluidized beds", *Powder Technol.*, 66, pp. 177-189.
- Fan, L.-S. and Zhu, C., 1998, "Principles of Gas-Solid Flows", Cambridge University Press.
- Jin, Y., Yu, Z.Q., Wang, W. and Cai, P., 1987, Proceedings of the International Symp. on Multi- Phase Flows, p. 221, Hangzhou, China.
- Khan, A.R. and Richardson, J.F., 1989, "Fluid-particle interactions and flow characteristics of fluidized beds and settling suspensions of spherical particles", *Chem. Eng. Comm.*, 78, p. 111.
- Kane, R.S., 1989, "Drag reduction by particle addition" in *Viscous Drag Reduction in Boundary Layers*, Vol. 123, Progress in Astronautics and Aeronautics, Ed. Bushnell and Hefner, Washington, D.C., AIAA.
- Klinzing, G. E., 1981, *Gas-Solid Transport*, MacGraw-Hill Book Company.
- Kovensky, V.I., 1996, "Account for the Constraining of Particle Motion in the Freeboard", *Int. Workshop on the INTAS*, Chalmers University of Technology, Gothenburg.
- Marcus, R.D., Leung, L.S., Klinzing, G.E. and Rizk, F., 1990, "Pneumatic Conveying of Solids", Chapman and Hall.
- Nigham, B., 1975, *Pneumatic Conveyance*, Atlas Copco Air Compendium, Atlas Copco AB, Stockholm.
- Paiva, J.M., Pinho, C.T. e Figueiredo, R.A., 1999, "Pressure drop behavior inside an atmospheric fluidized bed, from minimum to incipient fast fluidization, using different distributor plates", Proceedings of the 15th COBEM-Brazilian Congress of Mechanical Engineering, November 1999, Águas de Lindóia, São Paulo, CD ed.
- Paiva, J.M., Pinho, C. and Figueiredo, R., 2000a, "Distributor Plate Influence on Fluidization Quality, Measuring Pressure Drop Evolution in Adjacent Slices Through the Bed", paper ref. 11026, Proceedings of the FEDSM2000-ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, June 11-15 2000, Boston, Massachusetts, CD ed.
- Paiva, J.M., Pinho, C. and Figueiredo, R., 2000b, "Distributor Plate Influence on Fluidization Quality", paper ref. S21P04, Proceedings of the 8th ENCIT- Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, October 3-6 2000, Porto Alegre, CD ed.
- Peters, L.K. and Klinzing, G.E., 1972, "Friction in Turbulent Flow of Gas-Solid Systems", *Can. J. Chem. Eng.*, 50, p. 441.
- Richardson, J.F. and Zaki, W.N., 1954, "Sedimentation and Fluidization", *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 32, p.35.
- Shimizu, A., Echigo, R., Hasegawa, S. and Hishida, M., 1978, "Experimental Study on the Pressure Drop and the Entry Length of the Gas-Solid Suspension Flow in a Circular Tube", *Int. J. Multiphase Flow*, 4, p. 43.
- Yang, W.C., 1976, *Pneumotransport*, VI.
- Yerushalmi, J. and Avidan, A., 1985, "High Velocity Fluidization", in *Fluidization*, J.R. Davidson, R. Clift and D. Harrison eds., 2nd edition, Academic Press, pp. 232-249.

UM MÉTODO DE PAINÉIS EFICIENTE BASEADO EM DISTRIBUIÇÕES LINEARES DE VÓRTICES PARA ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM GRADES DE TURBOMÁQUINAS

Denis Rinaldi Petrucci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – Departamento de Engenharia Mecânica
Av. BPS 1303 – Itajubá, MG – 37500-000
denisrpetrucci@uol.com.br

Nelson Manzanares Filho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – Departamento de Engenharia Mecânica
Av. BPS 1303 – Itajubá, MG – 37500-000
nelson@iem.efei.br

Ramiro Gustavo Ramirez Camacho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – Departamento de Engenharia Mecânica
Av. BPS 1303 – Itajubá, MG – 37500-000
ramirez@iem.efei.br

Resumo. *Apresenta-se um método de painéis eficiente baseado em distribuições lineares de vórtices para a análise do escoamento ao redor perfis aerodinâmicos isolados ou em grades de turbomáquinas, com ênfase no problema dos bordos de fuga afilados. Propõe-se um novo procedimento consistente para impor a condição de Kutta, usando o conceito da igualdade entre a densidade de vórtices e a velocidade tangencial na fronteira. Esse procedimento elimina prováveis carregamentos aerodinâmicos espúrios na região do bordo de fuga, associados à aplicação inconsistente da condição de Kutta e à baixa ordem da distribuição de singularidades. Propõe-se, ainda, um esquema rápido de integração para o cálculo dos elementos da matriz de influência. Esse esquema é semi-analítico no caso de grades lineares e puramente analítico no caso de perfis isolados. O método é validado usando soluções analíticas disponíveis para perfis Joukowski isolados e para a grade de Gostelow.*

Palavras chave: *método de painéis, grades de turbomáquinas, condição de Kutta.*

1. Introdução

Os métodos de painéis são ferramentas úteis e computacionalmente econômicas para análise e projeto de perfis aerodinâmicos isolados ou em grades de turbomáquinas.

O método de painéis clássico de Hess e Smith (1967) baseia-se em distribuições uniformes de fontes (variáveis) e vórtices (constantes) e na condição de Neumann, sendo um dos mais conhecidos e empregados pelos aerodinamicistas. Todavia, é um método que costuma produzir carregamentos espúrios na região de um bordo de fuga afilado, na medida em que o ângulo de ataque e a curvatura do aerofólio aumentam. A causa principal é a constância da intensidade de vórtices, proporcional à circulação, e cujo aumento dificulta a aplicação consistente da condição de Kutta. Esses problemas podem ser amenizados pelo uso de distribuições variáveis de vórtices, com valor nulo no bordo de fuga (Plotkin, 1990; Girardi e Bizarro, 1995; Petrucci et al, 1998), e também pelo uso de distribuições de fontes de ordem mais alta (Hess e Smith, 1975).

Uma dificuldade dos métodos baseados em fontes aparece na solução iterativa de problemas inversos, quando se busca uma geometria para atender a uma dada distribuição de velocidades. No caso de perfis arqueados, a variação iterativa da distribuição de fontes nem sempre reproduz adequadamente a curvatura da geometria pretendida (Petrucci, 1998). Uma opção natural é utilizar métodos baseados em distribuições de vórtices, cuja intensidade exerce um melhor controle de curvatura, além de se relacionar diretamente ao valor local da velocidade na superfície do perfil. Nos métodos baseados apenas em vórtices, a intensidade equiivale à própria velocidade tangencial. Para a solução de problemas inversos, isso representa uma vantagem considerável, pois a distribuição de singularidades fica determinada a priori e se mantém invariante no decorrer do processo iterativo.

Uma formulação clássica do método baseado em vórtices, utilizando a condição de contorno de Dirichlet, foi proposta por Martensen (1971). Lewis (1991) desenvolveu um método de painéis com vórtices concentrados, baseado na formulação de Martensen. Por se tratar de um método de baixa ordem, necessita de correções para a curvatura e para a proximidade entre painéis opostos, objetivando uma melhor precisão. Mesmo com o uso de distribuições uniformes de vórtices, as correções de curvatura são ainda necessárias (Manzanares Filho, 1994).

Um método bastante interessante a ser considerado é aquele que emprega painéis com distribuições lineares de vórtices e a condição de contorno de Neumann. Embora apresente excelente precisão para bordos de fuga arredondados ou agudos, esse método também tem a tendência de produzir carregamentos aerodinâmicos espúrios na região de um bordo de fuga afilado, caso a condição de Kutta não seja imposta de modo consistente. Bristow (1977) desenvolveu um

método baseado na terceira identidade de Green, utilizando painéis curvos com distribuições lineares de vórtices (incógnitas), distribuições uniformes de fontes (de intensidade conhecida, contrária à componente normal da velocidade incidente) e aplicando a condição de contorno de Neumann. A densidade de vórtices é anulada no bordo de fuga e a condição de Kutta é imposta adotando um ponto de controle adicional a uma distância bem pequena a jusante do bordo de fuga. Essa distância deve ser aferida empiricamente. Bristow recomenda um valor igual a 1% da soma dos comprimentos dos painéis contíguos ao bordo de fuga. Nem sempre essa distância pode ser considerada ótima. Por exemplo, McFarland (1982) estendeu o método de Bristow às grades lineares recomendando uma distância igual a 0,1% da soma dos comprimentos dos painéis contíguos ao bordo de fuga. Cheng Xu (1998) utilizou um método de painéis retos e distribuições lineares de vórtices em perfis isolados, indicando uma distância igual a 1% do comprimento do painel contíguo ao bordo de fuga no extradorso, para o ponto de controle adicional.

Carabineanu (1996) apresenta um método de elementos de contorno baseado na função corrente e em distribuições lineares da sua derivada normal, que equivale à velocidade tangencial sobre a superfície do aerofólio. Trata-se de um método semelhante ao desenvolvido por Oellers (1962) para análise de grades, empregando distribuições lineares de vórtices e tratando o valor da função corrente no contorno como uma incógnita constante. Aplicando a condição de Kutta e considerando certas relações algébricas entre os elementos da matriz de influência, Carabineanu elimina as velocidades no bordo de fuga e resolve o sistema algébrico resultante para determinar as velocidades nos demais pontos nodais. Esse procedimento, porém, não permite determinar a velocidade no bordo de fuga diretamente, senão por extrapolação.

No presente trabalho, apresenta-se um método de painéis eficiente para a análise de perfis aerodinâmicos, com ênfase no problema dos bordos de fuga afilados. A motivação está no projeto inverso de aerofólios para grades lineares, representativas de turbomáquinas geradoras (compressores e ventiladores axiais) onde o emprego de perfis com bordo de fuga afilado é corriqueiro (p. ex., os perfis da série NACA 65, Emery et al., 1957). O método proposto segue um esquema clássico mencionado acima, empregando painéis retos com distribuições lineares de vórtices e aplicando a condição de contorno de Neumann. Propõe-se, contudo, um novo procedimento para impor a condição de Kutta, usando o conceito de igualdade entre as intensidades de vórtices e as velocidades no contorno. Desse modo, as dificuldades no tratamento de bordos de fuga afilados ficam superadas de modo consistente, mesmo com o emprego de um número bem reduzido de painéis. Propõe-se, ainda, um esquema rápido de integração para o cálculo dos elementos da matriz de influência. O esquema é semi-analítico no caso de grades lineares e puramente analítico no caso de perfis isolados. No emprego de distribuições lineares de vórtices em grades lineares, a matriz de influência normalmente é calculada com rotinas de integração numérica (McFarland, 1982; Mokry, 1991).

O método aqui proposto é validado através de diversos casos de teste envolvendo perfis afilados isolados (Joukowski) e em grade (Gostelow), para os quais existem soluções analíticas disponíveis.

2. Descrição do problema e formulação usando distribuições de vórtices

A Fig. (1a) mostra uma grade linear composta de uma quantidade infinita de perfis aerodinâmicos idênticos e igualmente espaçados de um passo t , com ângulo de montagem α entre o eixo x^* da corda L do perfil e o eixo axial x . O escoamento em torno dos perfis é considerado bidimensional, potencial, incompressível e permanente, com velocidades $W_1(x -)$ na entrada e $W_2(x +)$ na saída, Fig. (1b).

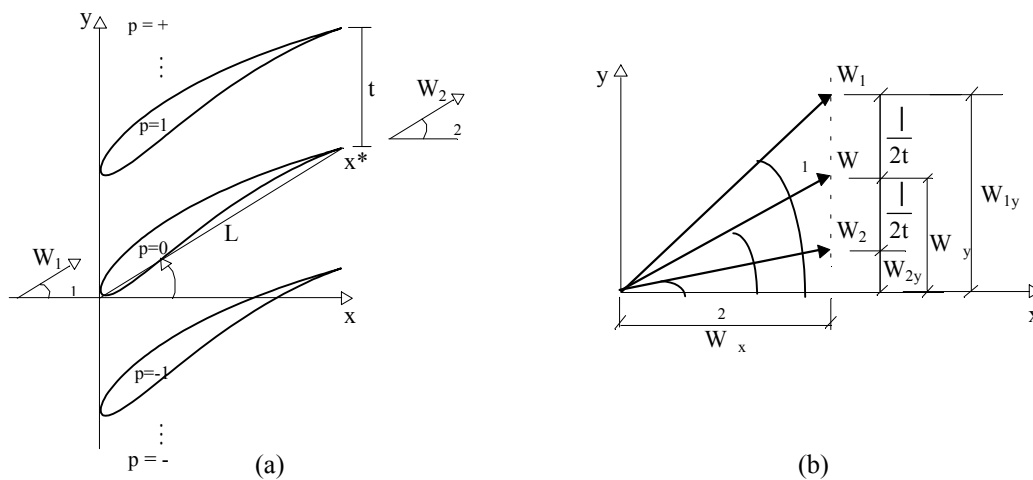


Figura 1. (a) Geometria da grade linear. (b) Diagrama dos vetores de velocidades de entrada, saída e médio.

De acordo com a equação da continuidade e o teorema de Stokes, tem-se:

$$W_{1x} \alpha W_{2x} \alpha W_x \tag{1}$$

$$W_{1y} = W_{\infty y} + \frac{\Gamma}{2 \cdot t} \quad \text{e} \quad W_{2y} = W_{\infty y} - \frac{\Gamma}{2 \cdot t} \tag{2a, b}$$

Dada a geometria do perfil, o ângulo de montagem β , a razão de solidez L/t e a velocidade na entrada $\bar{W}_1 = W_1 \cdot e^{-i\beta_1}$ (ou a velocidade média $\bar{W}_\infty = W_\infty \cdot e^{-i\beta_\infty}$), o problema consiste em determinar o campo de velocidades ao redor de perfis satisfazendo a condição de impenetrabilidade (de Neumann) nas paredes e a condição de Kutta nos bordos de fuga. A velocidade complexa conjugada induzida pela grade pode ser representada por uma distribuição de vórtices $\gamma(s)$, no contorno de cada perfil. Sendo $\zeta(s)$ um ponto do contorno do perfil de referência $p=0$, Fig. (1a), a velocidade complexa conjugada no ponto z é dada por (Lewis, 1991):

$$\bar{W}(z) = \bar{W}_\infty + \frac{i}{2 \cdot t} \oint_C \gamma(s) \cdot \frac{\pi}{t} \cdot \coth \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] ds \tag{3}$$

Para um perfil isolado, $t \rightarrow \infty$, a Eq. (3) fica:

$$\bar{W}(z) = \bar{W}_\infty + \frac{i}{2 \cdot \pi} \oint_C \frac{\gamma(s)}{z - \zeta} ds \tag{4}$$

É possível demonstrar que a intensidade de vórtices $\gamma(s)$ é igual à velocidade tangencial no contorno do perfil (Martesen, 1971). Logo, o problema reduz-se à determinação da distribuição de vórtices $\gamma(s)$, a partir da qual se calcula a distribuição de pressões pelo teorema de Bernoulli e os coeficientes aerodinâmicos pela integração das pressões no contorno do aerofólio, bem como o ângulo de deflexão do escoamento no caso de uma grade (Manzanares Filho, 1994).

3. Método de painéis proposto: esquema de integração e condição de Kutta

O perfil de referência é discretizado em m painéis retos, sendo $z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1}$, os pontos extremos ou nós, com $z_1 = z_{m+1}$ representando o bordo de fuga, Fig. (2a). Em cada painel, o ponto médio é escolhido como ponto de controle para a imposição da condição de Neumann. Distribuições lineares de vórtices são colocadas sobre os painéis, de modo que a intensidade γ_j fique associada ao nó j , conforme a Fig. (2b).

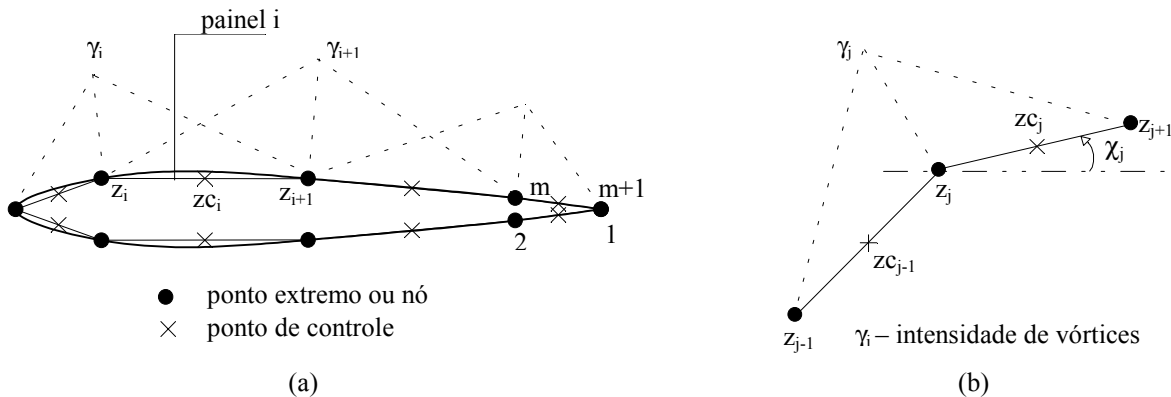


Figura 2. (a) Definição dos painéis (nós e distribuição de vórtices). (b) intensidade de vórtice em dois painéis contíguos.

É conveniente separar o efeito do perfil isolado da influência do restante da grade, da seguinte maneira:

$$\bar{W}(z) = \bar{W}_\infty(z) + \frac{i}{2\pi} \oint \gamma \cdot K_I(z, \zeta) ds + \frac{i}{2\pi} \oint \gamma \cdot K_G(z, \zeta) ds \tag{5}$$

onde,

$$K_I(z, \zeta) = \frac{1}{z - \zeta} \quad \text{núcleo do perfil isolado} \tag{6}$$

$$K_G(z, \zeta) = \frac{\pi}{t} \cdot \coth \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] - \frac{1}{z - \zeta} \quad \text{núcleo da interferência da grade} \tag{7}$$

A singularidade $\int \frac{1}{z} dz$ é do tipo Cauchy no núcleo do perfil isolado mas é removível no núcleo da interferência da grade ($K_G = 0$ para $\int \frac{1}{z} dz$). Desse modo, apenas a 1ª integral em (5) necessita de um tratamento especial, enquanto a 2ª integral é regular e pode ser tratada por um esquema de integração convencional.

Propõe-se neste trabalho o seguinte esquema rápido de integração: a contribuição $\bar{W}_{Ij}(z)$ da intensidade Γ_j , Fig (2b), para a integral do perfil isolado (núcleo K_I) é determinada de forma puramente analítica, considerando as variações lineares de vórtices dos painéis j e $j-1$ contíguos. Para $j = 2, \dots, m$, o resultado é:

$$\bar{W}_{Ij}(z) \propto i \Gamma_j \left[\frac{e^{i\Gamma_j(z_j - z_{j-1})}}{2} \int \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \log \frac{z - z_{j-1}}{z - z_j} dz + \frac{e^{i\Gamma_j(z_j - z_{j-1})}}{2} \int \frac{z - z_j}{z_j - z_{j-1}} \log \frac{z - z_j}{z - z_{j-1}} dz \right] \quad (8)$$

Por outro lado, a contribuição $\bar{W}_{Gj}(z)$ da intensidade Γ_j para a integral da interferência de grade (núcleo K_G) é determinada pela regra dos trapézios. Para $j=2, \dots, m$, temos:

$$\bar{W}_{Gj}(z) \propto \frac{i}{4} \Gamma_j [K_{Gj}(z) (e^{i\Gamma_j(z_j - z_{j-1})} - 1) + K_{Gj}(z) (e^{i\Gamma_j(z_{j-1} - z_j)} - 1)] \quad (9)$$

onde da Eq. (7):

$$K_{Gj}(z) \propto \frac{1}{t} \coth \left[\frac{z - z_j}{t} \right] \quad (10)$$

Para $j=1$ e $j=m+1$ é necessário impor uma condição especial de regularização, $\Gamma_{m+1} = -\Gamma_1$, a fim de se obter resultados analíticos num bordo de fuga afilado. Essa exigência decorre apenas da contribuição do perfil isolado.

Somando-se as contribuições de todas as intensidades $\Gamma_j, j=1, 2, \dots, m$, com a condição de regularização implícita ($\Gamma_{m+1} = -\Gamma_1$), e aplicando-se a condição de impenetrabilidade em cada ponto de controle $z_{ci}, i=1, 2, \dots, m$, resulta um sistema de m equações algébricas lineares para as m incógnitas Γ_j . Infelizmente, a condição de regularização $\Gamma_{m+1} = -\Gamma_1$ não garante, isoladamente, a imposição consistente da condição de Kutta no caso de um bordo de fuga afilado. Nesse caso, a solução do sistema $m \times m$ tende a produzir resultados insatisfatórios. Esse problema é típico dos métodos baseados em distribuições lineares de vórtices. Por exemplo, para contorná-lo, Bristow (1977) utiliza um ponto de controle adicional a uma distância adequada do bordo de fuga, sobre o bissetor dos painéis m e $m+1$ contíguos. Exige-se, então, que a velocidade normal ao bissetor seja nula naquele ponto. Essa condição adicional torna o sistema sobredeterminado ($m+1$ equações e m incógnitas). Todavia, é possível resolvê-lo pelo método dos mínimos quadrados e obter resultados satisfatórios mediante aferição empírica da distância do ponto de controle adicional. A distribuição de fontes empregada por Bristow também contribui para o sucesso do procedimento. Usando apenas vórtices, os resultados tendem a piorar.

Teoricamente, o ponto de controle adicional deveria coincidir com o próprio bordo de fuga, já que a condição de regularização garante uma velocidade finita ali. Numericamente, porém, a condição de velocidade normal nula ao bissetor no próprio bordo de fuga nem sempre produz resultados consistentes nas suas proximidades.

No presente trabalho, propõe-se um novo procedimento para impor a condição de Kutta, usando o conceito da igualdade entre a intensidade de vórtices e a velocidade tangencial no contorno do aerofólio. Teoricamente, essa igualdade deve se estender até o bordo de fuga; na prática, ela tende a ser descumprida pela solução numérica na região de um bordo de fuga afilado. Logo, além da condição de regularização, propõe-se que a velocidade tangencial total (incidente mais induzida) seja igualada à intensidade de vórtices correspondente no bordo de fuga, como condição explícita Fig. (3):

$$\Gamma_{m+1} \propto \Gamma_1, \quad W_{t_{bf}} \propto \Gamma_1 \quad (11a, b)$$

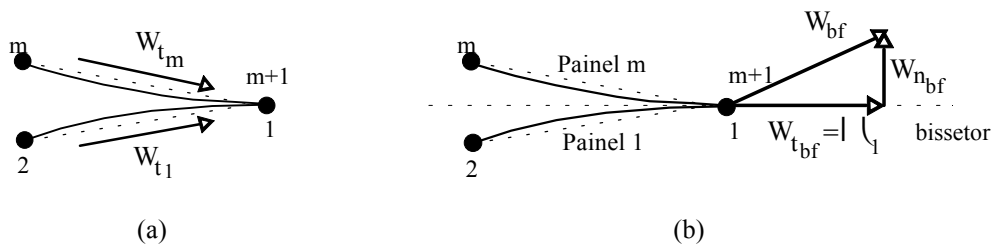


Figura 3. (a) escoamento tangencial no bordo de fuga. (b) Esquema de implantação da nova condição de Kutta.

A condição adicional (11b) torna o sistema de equações sobredeterminado e sua solução é efetuada pelo método dos mínimos quadrados.

Os testes realizados até o momento têm mostrado que o procedimento proposto acima produz resultados consistentes para as distribuições de velocidades e pressões na região de um bordo de fuga afilado. Um exemplo ilustrativo está apresentado na Fig. (4), onde se compara o procedimento proposto com outro em que se tenta impor a condição de Kutta anulando explicitamente a velocidade normal ao bisetor no bordo de fuga (o que seria teoricamente consistente). Ambos os procedimentos cumprem com a condição de regularização. A Fig. (4) focaliza uma região bem próxima ao bordo de fuga. Verifica-se que o procedimento proposto produz resultados próximos aos analíticos para as velocidades e pressões em toda essa região, inclusive no próprio bordo de fuga. Contrariamente, o outro procedimento conduz a um comportamento espúrio das distribuições, à medida que se aproxima do bordo de fuga. Observa-se que os resultados buscam inicialmente se enquadrar numa solução de bordo agudo (estagnação) mas, em seguida, reverterem abruptamente para uma solução de bordo afilado, com um excesso de velocidade no bordo de fuga e uma queda espúria na pressão. Conclui-se que o procedimento proposto é capaz de detectar numericamente a presença de um bordo afilado, ao contrário do outro procedimento que é inconsistente na prática.

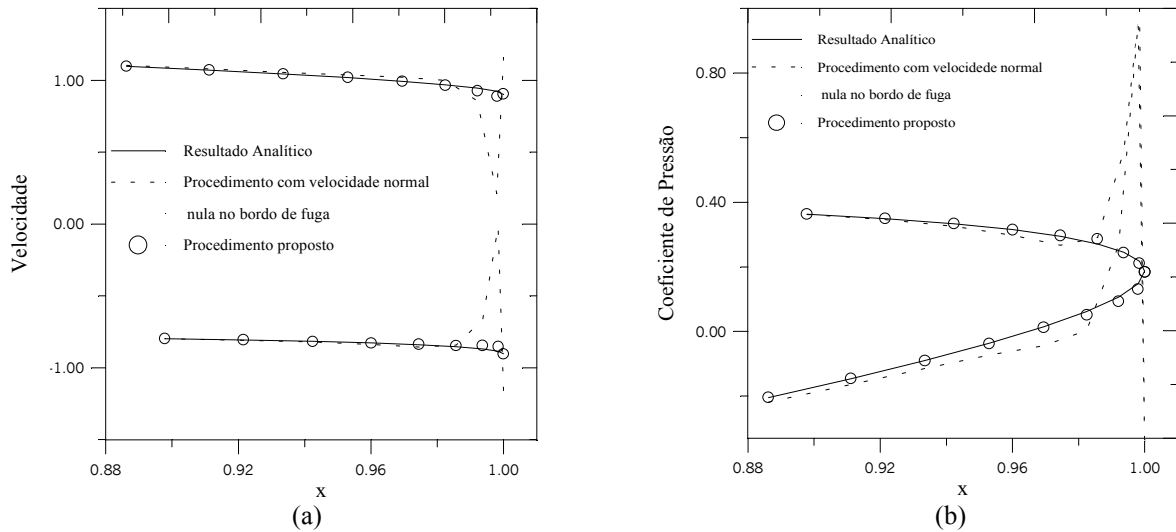


Figura 4. (a) Distribuição de velocidade. (b) Distribuição de pressão na região do bordo de fuga.

Para esse teste, foi escolhido um perfil Joukowski gerado por transformação conforme a partir de um círculo, Fig. (5) (Karamcheti, 1980), com os seguintes parâmetros: razão raio/excentricidade $a/mc = 4,5$ e ângulo de arqueamento $\beta^* = 12^\circ$. Adotou-se um ângulo de ataque $\alpha = 4^\circ$ para o escoamento incidente e uma discretização com $m = 80$ painéis.

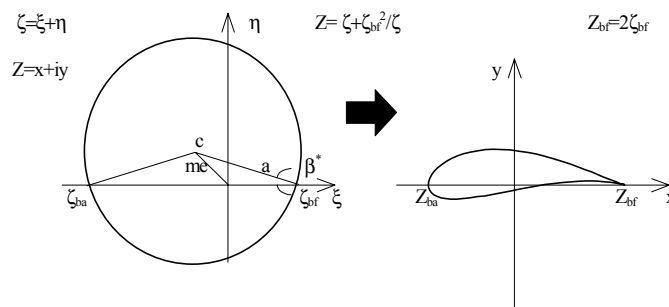


Figura 5 - Determinação da geometria do perfil Joukowski por transformação conforme.

4. Validação do método

A fim de validar o método e avaliar suas características de convergência, serão apresentados resultados de testes de comparação com um método de ordem mais baixa já validado, no caso o método de Hess & Smith modificado para suavizar os carregamentos aerodinâmicos na região do bordo de fuga (Petrucci et. al, 1998).

Para os testes, foram escolhidos casos de perfis Joukowski isolados e a grade Gostelow, que possuem soluções analíticas. Serão analisadas as variações das seguintes grandezas com o número de painéis: erro médio quadrático da distribuição de velocidades, coeficientes de arrasto e sustentação, ângulo de deflexão (caso de grade) e distribuição de pressões em torno do perfil.

4.1. Perfil Joukowski Simétrico: $\alpha^* = 0$, $a/me = 12,5$, Fig. (5)

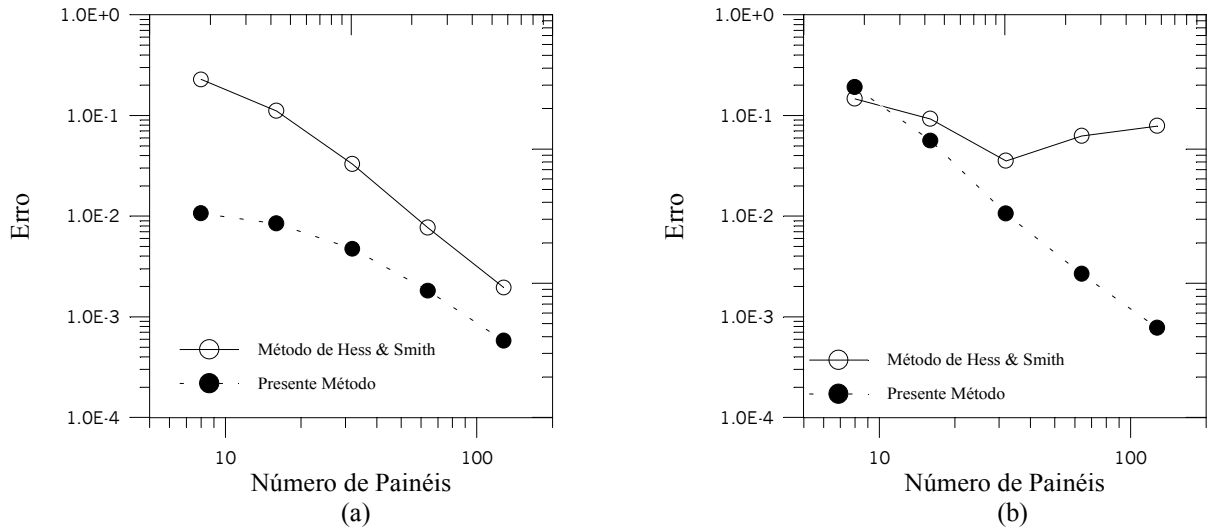


Figura 6. Convergência dos erros médios quadráticos para perfil Joukowski simétrico. (a) $\alpha = 0^\circ$. (b) $\alpha = 5^\circ$.

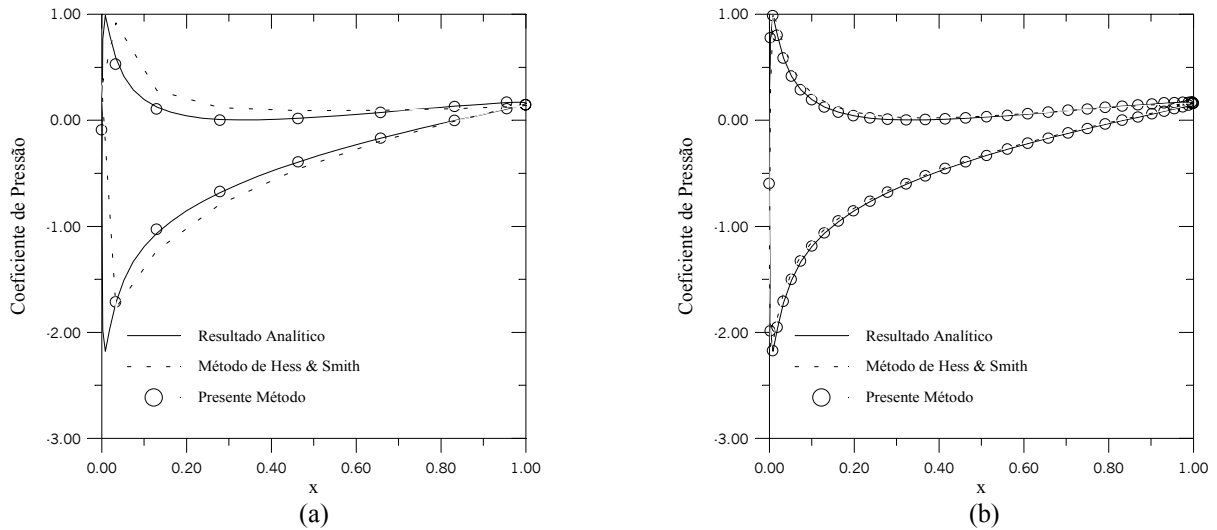


Figura 7. Convergência do coeficiente de pressão para perfil Joukowski simétrico $\alpha = 5^\circ$. (a) 16. (b) 64 painéis.

Tabela 1 – Coeficientes de arrasto e de sustentação para o perfil Joukowski simétrico e ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$.

Número de painéis	Método de Hess & Smith com suavização		Presente Método	
	C_A	C_S	C_A	C_S
8	0,03093	0,72619	0,04317	0,41592
16	0,01714	0,68508	0,01077	0,54509
32	0,00732	0,64230	0,00117	0,58245
64	0,00313	0,61763	0,00011	0,58935
128	0,00143	0,60460	0,00000	0,59090
Analítico	0	0,59142	0	0,59142

A Fig. (6) mostra a convergência do erro médio quadrático para o perfil Joukowski simétrico com ângulos de ataque $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 5^\circ$, respectivamente. Em geral, o presente método exibe erros bem menores que o método de baixa ordem, como seria de se esperar. Note-se que a taxa de convergência do presente método é satisfatória e não é prejudicada pelo aumento do ângulo de ataque; por outro lado, a taxa do método de ordem mais baixa é satisfatória para $\alpha = 0^\circ$ mas piora sensivelmente para $\alpha = 5^\circ$, exibindo uma estagnação na convergência a partir de 32 painéis.

A Fig. (7) mostra as distribuições de pressão obtidas para 16 e 64 painéis no caso $\alpha = 5^\circ$. O presente método já é capaz de obter resultados satisfatórios com um número bem reduzido de painéis (16), ao contrário do método de Hess & Smith com suavização.

Na Tabela (1) verifica-se que o presente método tem uma taxa de convergência dos parâmetros aerodinâmicos bem melhor que a do método de Hess & Smith com suavização. Destaque para o coeficiente de arrasto, que tende a zero rapidamente no presente método.

4.2. Perfil Joukowski arqueado: $\beta^* = 12^\circ$, $a/me = 4,5$, Fig. (5)

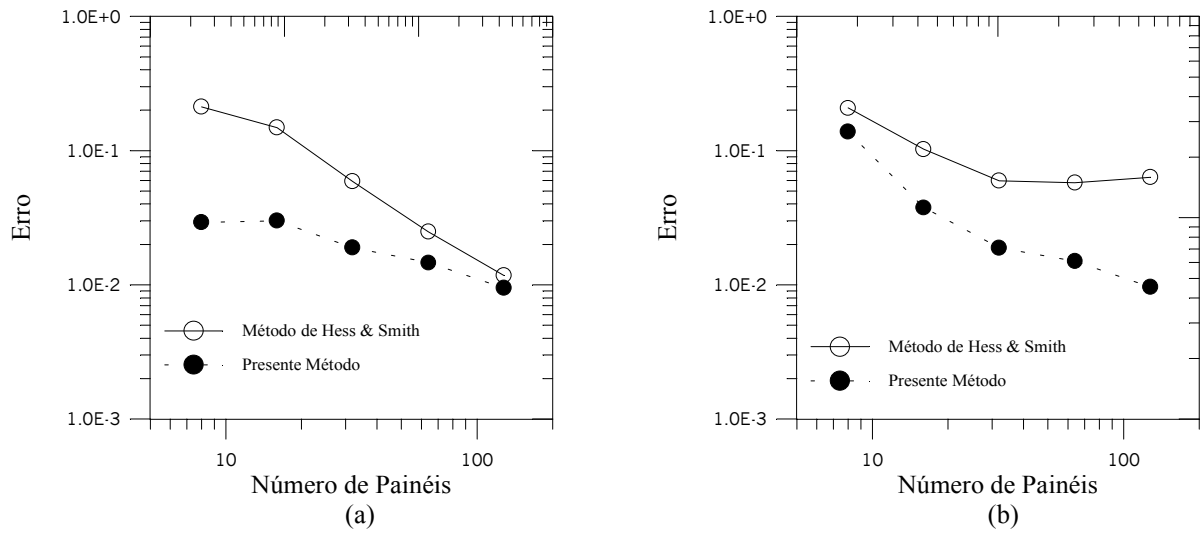


Figura 8. Convergência dos erros médios quadráticos para perfil Joukowski arqueado. (a) $\alpha = 0^\circ$. (b) $\alpha = 4^\circ$.

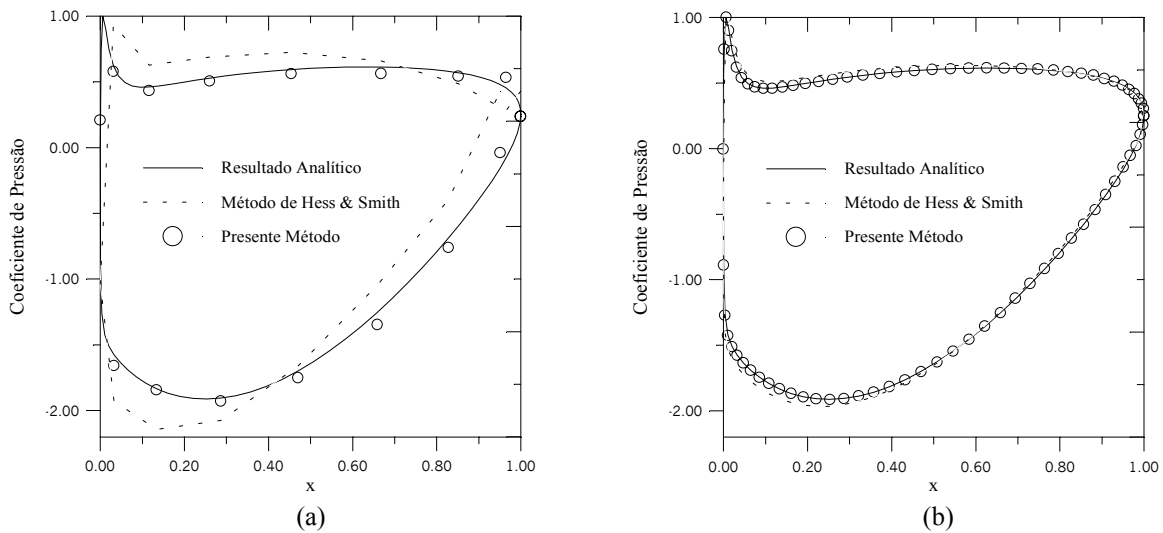


Figura 9. Convergência do coeficiente de pressão para perfil Joukowski arqueado $\alpha = 4^\circ$. (a) 16. (b) 80 painéis.

Tabela 2 – Coeficientes de arrasto e de sustentação para o perfil Joukowski arqueado e ângulo de ataque $\alpha = 4^\circ$.

Número de painéis	Método de Hess & Smith com suavização		Presente Método	
	C_A	C_S	C_A	C_S
8	0,05402	1,77128	0,07424	1,67834
16	0,02523	2,06204	0,01896	1,86734
32	0,00731	2,03331	0,00415	1,90472
64	0,00170	1,99461	0,00097	1,90486
128	0,00114	1,95626	0,00009	1,91146
Analítico	0	1,91259	0	1,91259

As Figuras (8) e (9) e a Tabela (2) mostram que os resultados obtidos com o perfil Joukowski arqueado exibem características de convergência similares às observadas no caso do perfil simétrico. Observa-se uma pequena piora sistemática na taxa de convergência, indicando que o aumento na curvatura irá exigir um incremento no número de painéis para manter a precisão, não importa qual método. Destaca-se ainda o efeito deletério que a curvatura do perfil tem sobre as pressões do método de Hess & Smith: no caso de 16 painéis, Fig. (9a): mesmo com a suavização na

distribuição de vórtices, a ordem mais baixa da distribuição de fontes dificulta a aplicação consistente da condição de Kutta pela igualdade das velocidades nos painéis contíguos ao bordo de fuga. Essa dificuldade irá exigir um aumento do número da painéis para ser contornada, Fig. (9b). Por outro lado, o presente método exibe resultados consistentes na região do bordo de fuga mesmo com um baixo número de painéis, Fig. (9a). Esse comportamento benéfico advém da ordem mais alta desse método combinada com o novo procedimento proposto para impor a condição de Kutta.

4.3. Grade linear deGostelow (1984): $\beta = 37,5^\circ$, $l = 1$, $t = 0,9901573$, $\beta_1 = 53,5^\circ$, Fig. (10a)

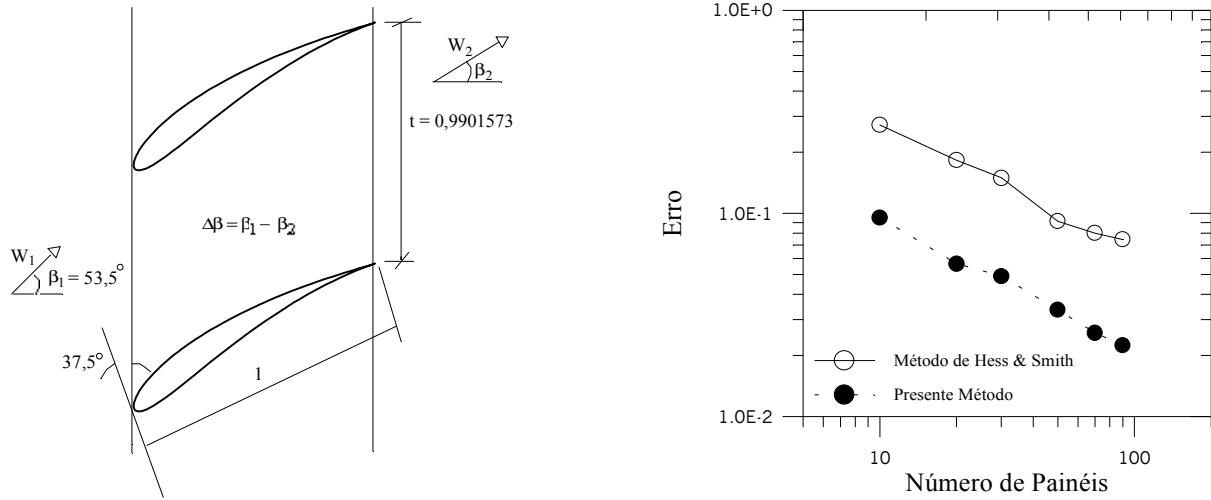


Figura 10. (a) Grade de Gostelow. (b) Convergência dos erros médios quadráticos para a grade de Gostelow.

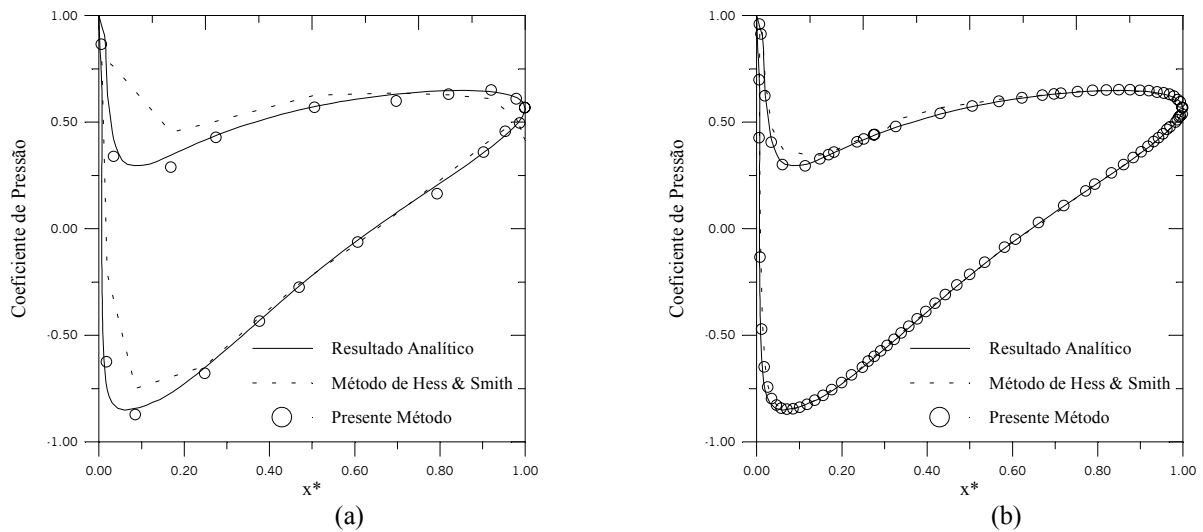


Figura 11. Convergência do coeficiente de pressão para a grade de Gostelow. (a) 20. (b) 90 painéis.

Tabela 3 – Coeficiente de arrasto e ângulo de deflexão para a grade de Gostelow.

Número de painéis	Método de Hess & Smith com suavização		Presente Método	
	C_A	$\Delta\beta(^{\circ})$	C_A	$\Delta\beta(^{\circ})$
10	0,01325	15,58	0,05242	27,78
20	0,00886	25,15	0,09418	24,43
30	0,00135	25,41	0,00816	24,16
50	0,00356	24,30	0,00121	23,90
70	0,00267	24,25	0,00052	23,88
90	0,00155	24,19	0,00037	23,85
Analítico	0	23,48	0	23,48

As Figuras (10) e (11) e a Tabela (3) mostram que os resultados obtidos com a grade de Gostelow exibem características de convergência similares às observadas nos casos anteriores de perfil isolado. Observa-se neste caso uma razoável taxa de convergência do método de Hess-Smith, embora o perfil da grade de Gostelow seja arqueado e o

ângulo do escoamento médio seja significativo, $\alpha_\infty = \beta_\infty - \beta \approx 6,5^\circ$. Isso parece indicar que a convergência geral dos métodos depende principalmente da contribuição do perfil isolado, mas os parâmetros de interferência de grade podem exercer uma certa influência sobre a qualidade numérica dos resultados. De qualquer modo, o presente método exibe resultados significativamente superiores ao método de baixa ordem para um dado número de painéis. A Figura (11a) mostra mais uma vez que o presente método conduz a resultados satisfatórios e consistentes para as pressões na região do bordo de fuga, mesmo com um baixo número de painéis ($m=20$), enquanto o método de Hess & Smith apresenta problemas com a condição de Kutta e cuja superação exige um incremento no número de painéis, Fig. (11b).

Observa-se na Tabela (3) que o presente método produz uma taxa de convergência do coeficiente de arrasto e do ângulo de deflexão da grade bem superior ao do método de Hess & Smith com suavização.

Destaca-se finalmente que o esquema de integração rápida proposto para a interferência da grade, apesar de sua simplicidade, mostrou-se bem sucedido nos testes realizados até o momento. Resta, contudo, realizar novos testes e confrontá-lo com outros esquemas de integração para concluir sobre sua precisão e robustez. Essa preocupação se justifica pela motivação em aplicar o presente método na solução de problemas inversos onde pequenas variações nos coeficientes aerodinâmicos podem ser importantes na obtenção da geometria pretendida.

5. Conclusões

Foi apresentada uma técnica numérica eficiente para o cálculo do escoamento potencial ao redor de perfis aerodinâmicos isolados ou em grades lineares de turbomáquinas. Trata-se de um método de painéis retos com distribuições lineares de vórtices, incluindo uma nova forma consistente de impor a condição de Kutta e um esquema rápido de integração para o cálculo dos elementos da matriz de influência.

Os resultados obtidos em vários testes mostraram a versatilidade e a boa precisão do método para perfis com bordo de fuga afilado, típicos das grades de turbomáquinas axiais geradoras. Soluções convergentes foram obtidas com um número relativamente baixo de painéis, tanto para perfis isolados Joukowski, como para a grade de Gostelow.

Os testes realizados mostram que o método proposto neste trabalho representa uma opção confiável e robusta para eliminar os eventuais carregamentos aerodinâmicos espúrios em bordos de fuga afilados, associados à baixa ordem das distribuições de singularidades e à forma inconsistente de impor a condição de Kutta.

Como desenvolvimento futuro, o método será utilizado na solução de problemas inversos puros, onde o formato de um aerofólio deve ser determinado para atender a uma dada distribuição de velocidades. Nessa situação, é vantajoso utilizar métodos baseados apenas em vórtices, cuja intensidade equivale à velocidade no contorno e que, portanto, fica pré-estabelecida e invariante no processo iterativo. Outro desenvolvimento possível seria empregar distribuições lineares de vórtices no contorno de um quase-círculo gerado por transformação conforme a partir do aerofólio, tal que o bordo de fuga, agudo ou afilado, seja mapeado num ponto de curvatura finita (Giannakadis, 1992).

6. Agradecimento

O desenvolvimento deste trabalho contou com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, através de uma bolsa de doutorado.

7. Referências

- Bristow, D.R., 1977, "Recent Improvements in Surface Singularity Methods for the Flow Fields Analysis About Two-Dimensional Airfoils", 3rd Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper No. 77-641, pp. 95-105.
- Carabeanu, A., 1996, "A Boundary Element Approach to the 2D Potential Flow Problem Around Airfoils With Cusped Trailing Edge", Computer methods in applied mechanics and engineering, n° 129, pp. 213-219.
- Cheng Xu, 1998, "Kutta Condition for Sharp Edge Flows", Mechanics Research Communications, vol. 25, N° 4, pp. 415 – 420.
- Emery, J.C., Herrig, L.J., Erwin, J. R., and Felix, R., 1957, "Systematic two-dimensional cascade tests of NACA-65-series compressor blades at low speeds", NACA TN 1368.
- Giannakidis, G., 1992, "Calculation of Potential Flow Around Airfoils Using a Discrete Vortex Method", AIAA Journal, vol. 30, n° 30, pp. 1689 – 1690.
- Giesing, J.P., 1964, "Extension of Douglas-Neumann Program to Problems of Lifting, Infinite Cascade", Report n° LB 31633, Bureau of Ships Fundamental Hydromechanics Research Program, USA.
- Girardi, R. M., Bizarro, A. F., 1995, "Modification of the Hess & Smith Method For Calculating Cascades and Airfoils with Cusped Trailing Edge", 13th Brazilian Congress and 2nd Iberian American Congress of Mechanical Engineering.
- Gostelow, J. P., 1984, "Cascade Aerodynamics", Pergamon Press Ltda.
- Hess, J.L. & Smith, A.M.O., 1967, "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies", Progress in Aeronautical Sciences, Pergamon Press, vol. 8, pp. 1-138.
- Hess, J. L., 1975, "The Use of Higher-Order Surface Singularity Distribution to Obtain Improved Potential Flow Solutions for Two-Dimensional Lifting Airfoils", Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering, Vol.5, N° 1, pp. 11-35.
- Karamcheti, K., 1980, "Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics", R. E. Krieger Publishing Company, Florida, USA.

- Lewis, R. I., 1991, "Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems", Cambridge University Press.
- Manzanas Filho, N., 1994, "Análise do Escoamento em Máquinas de Fluxo Axiais", Tese de Doutorado, ITA.
- Martensen, E., 1971, "The Calculation of the Pressure Distribution on a Cascade of Thick Airfoils by Means of a Fredholm Integral Equation of the Second Kind", NASA TT F-702.
- McFarland, E.R., 1982, "Solution of Plane Cascade Flow Using Improved Surface Singularity Methods"; ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 104, N° 3, pp. 668-674.
- Mokry, M., 1991, "Complex Variable Boundary Element Method for External Potential Flows", AIAA Journal, Vol. 29, N° 12, pp. 2027-2028.
- Oellers, H. J., "Die inkompressible Potentialströmung in der ebenen Gitterstufe", Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt e. V., Cologne, pp. 349-353.
- Petrucci, D.R., 1998, "Problema Inverso do Escoamento em Torno de Perfis Aerodinâmicos Isolados e em Grades de Turbomáquinas", Dissertação de Mestrado, EFEI.
- Petrucci, D.R., Manzanas Filho, N. E Oliveira, W., 1998, "Uma Técnica Numérica para Solução do Problema Inverso do Escoamento Potencial em Grades de Turbomáquinas", VII ENCIT, Rio de Janeiro, pp. 1305 – 1310.
- Plotkin, A., 1990, "Comment on 'Improved Thin-Airfoil Theory' ", Journal of Aircraft, Vol. 27, N° 5, pp. 478-479 (Referring to a private communication from J. L. Hess, 1989).

AN EFFICIENT PANEL METHOD BASED ON LINEAR VORTEX DISTRIBUTIONS FOR TURBOMACHINERY CASCADE FLOW ANALYSIS

Denis Rinaldi Petrucci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – Departamento de Engenharia Mecânica
 Av. BPS 1303 – Itajubá, MG – 37500-000
denisrpetrucci@uol.com.br

Nelson Manzanas Filho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – Departamento de Engenharia Mecânica
 Av. BPS 1303 – Itajubá, MG – 37500-000
nelson@iem.efei.br

Ramiro Gustavo Ramirez Camacho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – Departamento de Engenharia Mecânica
 Av. BPS 1303 – Itajubá, MG – 37500-000
ramirez@iem.efei.br

Abstract. *An efficient panel method based on linear vortex distributions is presented in this work for the flow analysis of isolated airfoils and turbomachinery cascades with emphasis on the cusped trailing edge problem. A new consistent procedure for imposing the Kutta condition is presented using the concept of equivalence between the vortex intensity and the tangential boundary velocity. This procedure eliminates the spurious aerodynamic loads at the trailing edge region due to the inconsistent application of the Kutta condition and the low order of the singularity distribution. A fast integration scheme is also proposed for the calculation of the influence matrix elements. This scheme is semi-analytical for cascades and purely analytical for isolated airfoils. The method is validated by using available analytical solutions for Joukowski isolated airfoils and the Gostelov cascade.*

Keywords. Panel method, turbomachinery cascades, Kutta condition.

THE INFLUENCE OF GAS SHEAR STRESS ON THE CONVECTION OF WELD POOL DURING GTA WELDING

Yang Xuefeng

Sichuan University, School of Chemical Engineering – 610065 – Chengdu – Sichuan – P.R.China
xuefeng@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica – 38400-902 – Uberlândia – MG – Brasil
aristeus@mecanica.ufu.br

Américo Scotti

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica – 38400-902 – Uberlândia – MG – Brasil
ascotti@mecanica.ufu.br

Abstract. *The convection of weld pool during the GTA welding process is very important in determination of weld pool shape, consequently the resultant weld quality. The driving forces for convection have been identified as buoyancy, electromagnetic force (Lorentz force), surface tension (Marangoni effect) and shear stress due to plasma arc. The buoyancy and electromagnetic force are relatively small comparing with surface tension. Furthermore, presence of a surface active element can alter the sign of surface tension coefficient, resulting in the reversal in the direction of circulation. An inward circulation increases the weld depth and an outward circulation increases the weld width. The plasma arc shear stress can cause an outward circulation. However, the gas shear stress was neglected in many of papers. The importance of plasma arc shear stress is studied numerically in this paper using the mathematical model for plasma arc and weld pool.*

Key words: *weld pool, convection, shear stress, plasma arc, GTA welding.*

1. INTRODUCTION

It is the common knowledge that the heat transfer experienced by the weldment during welding process can alter the microstructure and thus the properties of the weldment. The heat source generates a transient temperature field that has important consequences. It modifies the microstructure by solidification, recrystallization, grain growth and phase transformation such as ferrite to austenite to martensite. The heat flow and fluid flow in the weld pool can significantly influence the pool geometry, the temperature gradient, the local cooling rates and the solidification structure. The important role of convection in weld pool has been extensively investigated. The main driving forces for convection in weld pool during GTA welding have been identified as buoyancy, electromagnetic, surface tension and impinging plasma arc force. Of the four forces, the first two or three have been well studied in the literature because they can be calculated quite independently of the welding arc. In order to include the impinging plasma arc force, a mathematical model for plasma arc is needed to obtain the gas shear stress over the free surface.

The convection can significantly alter the geometry of weld pool by its circulation direction. Normally, an inward circulation results in a deep penetration and an outward circulation results in a shallow weldment. Of the four driving forces, the buoyancy and gas shear stress forces can cause an outward circulation and the electromagnetic force causes an inward circulation. The surface tension force, however, can result in an inward ($d\gamma/dT > 0$) or outward ($d\gamma/dT < 0$) circulation, or even a complex circulation depending on the surface tension coefficient and surface temperature.

The electromagnetic, surface tension and buoyancy force has been studied extensively in the literature because they can be treated independently of the welding arc. However, the shear stress over the weld pool surface is neglected in many of studies because it requires knowledge of correspondent welding arc. Furthermore, it have been found that the shear stress generated by welding arc is strongly dependent on the electrode angles for the arcs of the same current intensity and arc length. Therefore, it is interesting to study this influence of shear stress on the convection of weld pool during GTA welding process.

The study of heat transfer and fluid flow of weld pool, especially in the GTA weld pool, has been an area of active research in recent years. Oreper and Szekely (1984) used finite differences to solve the governing equations for energy and momentum transport in GTA weld pools to determine the shape of the melt front. The effects of buoyancy, Lorentz and Marangoni were included. Later, Oreper and Szekely (1987) studied the formation of weld pools in aluminum, stainless steel and titanium. It is found that the convection is more important in poor conductors (titanium and stainless steel) than in a good conductor (aluminum). The effect of convection was also found to be more important in deep weld pools than in shallow pools. Marangoni forces were found to have a strong effect on the circulation patterns.

Zacharia et al. (1989) analyzed numerically the influence of the surface active elements such as sulfur above the weld pool development for Type 304 stainless steel during the process GTAW and laser using a mathematical model considering buoyancy, electromagnetic and surface tension forces. The gas drag force was neglected. The results

confirmed the significant influence of convective heat transfer on the development of the weld pool and surface tension gradient driven flow dominates the fluid flow and controls the development of weld pool for both processes. The results of simulation shown relatively shallow welds for the heat with the lower sulfur content and increasing the sulfur content of the Type 304 alloy increased the weld penetration during GTA welding. During laser beam welding, the increased sulfur content did not have any appreciable effect on the weld pool size or shape. The predictions of computational model were verified by comparing the numerically predicted and experimentally observed fusion zone size and shape. The comparisons were considered very satisfactory for both GTA and laser beam welds.

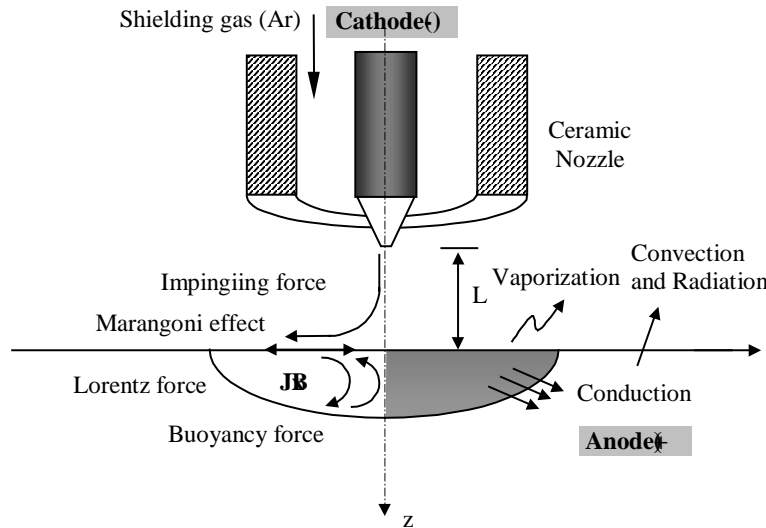


Figure 1. Schematic representation of the GTA welding process

Choo et al. (1992) combined the mathematical model of the welding arc and of the weld pool to describe the free surface temperature of weld pools for spot welding operations. The mass-transfer control vaporization was used as the mechanism of surface temperature control, rather than a “ceiling” on the surface temperature used by Oreper and Szekely (1987) (500K below the boiling point) and Zacharia et al. (1989) (boiling point). It was found that the principal mechanism to limit the free surface temperature is thermocapillary convection and once a critical surface velocity is exceeded, the precise nature of the relationship between temperature and surface tension became rather less important in determining the maximum temperature that may be attained by the system.

Kim et al. (1998) investigated the heat transfer, fluid flow and phase change in pulsed current GTA welding. Transporting phenomena from the welding arc to the base material surface, such as current density, heat flux, arc pressure and shear stress acting on the weld pool surface, were taken from the simulation results of the corresponding weld arc. The self-induced electromagnetic, surface tension, buoyancy and impinging plasma arc force were considered. It is found that the heat transfer and fluid flow model offers a useful means of predicting the complex behavior of weld pool in pulsed current GTA welding.

2. PROBLEM FORMULATION

The driving forces considered in analysis of weld pool convection are as following:

- Buoyancy force due to the temperature gradient in weld pool;
- Electromagnetic or Lorentz force due to self-induced magnetic field;
- Surface tension or Marangoni force due to the temperature gradient on the surface of the weld pool;
- Gas drag force on the surface of the weld pool due to the plasma jet momentum.

The following assumptions have been made in formulating the model:

- the flow is laminar and incompressible;
- the system is axisymmetric and the governing equations take a bidimensional form in terms of cylindrical coordinates;
- the material properties are independent of temperature (except for the temperature-dependent surface tension), Boussinesq approximation is used for buoyancy;
- melt circulation is driven by the combination of thermocapillary, buoyancy, electromagnetic and gas drag forces.

2.1. Governing equations

Under the assumptions listed above, the governing equations for a bidimensional system may be written as follows:

Conservation of mass

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Conservation of radial momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{\rho} (J_z B_\theta) - \frac{1}{\rho} Ku \tag{2}$$

Conservation of axial momentum

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} (J_r B_\theta) - \frac{1}{\rho} Kw + g\beta(T - T_r) \tag{3}$$

where ρ is the density and ν is the cinematic viscosity of the workpiece. Besides of the convective and diffusive terms, one more source term is included in the momentum equations due to the Lorentz force, where J_r and J_z are the electric current density in the direction of r and z , respectively and B_θ is the self-induced magnetic field. Because of these additional source terms, it is necessary to resolve the equation for conservation of electrical charge. The temperature-dependent drag term which represents fluid flow in the mushy zone using a Darcy correlation is incorporated into the momentum equation via $-Ku$ and $-Kw$, where

$$K = \begin{cases} 0 & T > T_{liq} \\ K_{max} (T_{liq} - T)/(T_{liq} - T_{sol}) & T_{sol} \leq T \leq T_{liq} \\ \infty & T < T_{sol} \end{cases} \tag{4}$$

The buoyancy force is introduced to axial momentum equation by approximation of Boussinesq.

Conservation of thermal energy

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - \frac{\Delta H}{C_p} \frac{\partial f_L}{\partial t} \tag{5}$$

where T is the temperature, α is the thermal diffusivity, C_p is the heat capacity, ΔH is the latent heat of fusion and f_L is the fraction of liquid. The second term in the right side of equation represents the latent heat of fusion in time interval Δt . The fraction of liquid is linearized for simplicity and is given as:

$$f_L = \begin{cases} 1 & T > T_{liq} \\ (T - T_{sol})/(T_{liq} - T_{sol}) & T_{sol} \leq T \leq T_{liq} \\ 0 & T < T_{sol} \end{cases} \tag{6}$$

Conservation of electrical charge

As has been mentioned before, the source terms in momentum equations demand the knowledge of magnetic field. So, it is necessary to resolve the Maxwell equation for the electrical potential term.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{7}$$

where σ is the electrical conductivity and Φ the electrical potential.

Current density is calculated from the definition of electrical potential:

$$J_r = -\sigma_e \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{8}$$

$$J_z = -\sigma_e \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{9}$$

Since the current distribution is axisymmetrical, the self-induced magnetic field is given by the following relation from Ampere's law:

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r J_z r \, dr \tag{10}$$

where μ_0 is the permeability of free space. The constant of integration is equal to zero since $B_\theta \rightarrow 0$ when $r \rightarrow 0$.

2.2. Boundary conditions

The domain for calculation and the regions are shown in figure 2. The boundary conditions for each region are given in table 1.

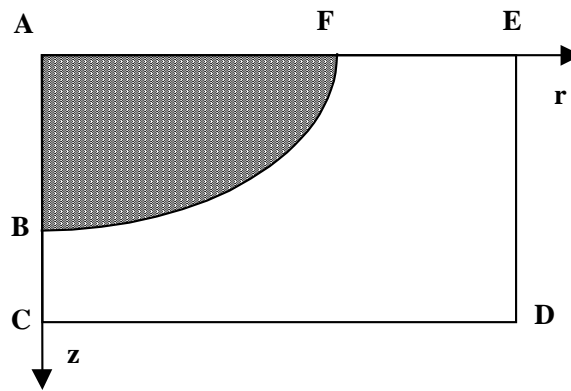


Figure 2. Calculation domain.

Table 1. Boundary conditions

Region	u	w	T	Φ
AB	0	$\partial w / \partial r = 0$	$\partial T / \partial r = 0$	$\partial \Phi / \partial r = 0$
BC	0	0	$\partial T / \partial r = 0$	$\partial \Phi / \partial r = 0$
CD	0	0	$h_c (T - T_\infty) = -k \partial T / \partial z$	0
DE	0	0	$h_c (T - T_\infty) = -k \partial T / \partial r$	$\partial \Phi / \partial r = 0$
EF	0	0	$-k \partial T / \partial r = -q_a$	$J_a = -\sigma_e \partial \Phi / \partial z$
AF	$\mu \frac{\partial u}{\partial z} \Big _{liq} = \tau_a + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)$	0	$-k \partial T / \partial z = -q_a$	$J_a = -\sigma_e \partial \Phi / \partial z$

AB and BC region:

Zero fluxes are used at the axis of symmetry.

CD and DE region:

The boundary condition for energy equation is needed for region CD and DE. The heat loss by convection and radiation is calculated by the following equation.

$$h_c (T - T_\infty) = -k \frac{\partial T}{\partial z} \tag{11}$$

where h_c is a combined heat transfer coefficient for the convective and radiative boundary conditions and can be calculated from the relationship given by Goldak et al. (1986)

$$h_c = 24.1 \times 10^{-4} \varepsilon T^{1.61} \quad [W / m^2 \cdot ^\circ C] \tag{12}$$

where ε is the emissivity of the body surface.

EF and AF region:

The influences of surface tension and gas shear stress in weld pool circulation are incorporated as the boundary condition in region AF. At the free surface, the surface tension driven flow is described by:

$$\tau_{st} = \mu_{liq} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{liq} = \tau_a + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \tag{13}$$

where τ_{st} is the shear stress on weld pool surface, τ_a is the gas shear stress due to plasma arc.

The temperature-dependent surface tension gradient for a binary metal-surface active solute system is obtained by the semiempirical correlation presented by Sahoo et al. (1988):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = A - R \Gamma_s \ln(1 + K_{seg} a_s) - \frac{K_{seg} a_s}{1 + K_{seg} a_s} \frac{\Gamma_s \Delta H^o}{T} \tag{14}$$

where γ is the surface tension, A is the constant, R is the gas constant, Γ_s is the surface excess at saturation, a_s is the activity of sulfur, ΔH^o is the standard heat of adsorption and K_{seg} is the equilibrium constant for segregation, and is calculated as:

$$K_{seg} = k_l \exp \left(\frac{-\Delta H^o}{RT} \right) \tag{15}$$

where k_l is the entropy of segregation.

The heat flux, current density and gas shear stress applied on the surface EF and AF were obtained numerically for corresponding arcs using a mathematical model.

2.3. Material properties for workpiece

For convenience of comparison, the material properties used in present study are of AISI 304 stainless steel (Zacharia et al. 1989 and Choo et al. 1992) and listed in Table 2.

Table 2. Material properties of AISI 304

Nomenclature	Symbol	Value
Activity of sulfur	a_s	0.022 wt pct
Coefficient of thermal expansion	β	10^{-4} K^{-1}
Constant in surface tension gradient	A	$4.3 \times 10^{-4} \text{ N/m}\cdot\text{K}$
Density of steel	ρ	7200 kg/m^3
Electric conductivity	σ	$7.14 \times 10^5 \text{ }\Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$
Emissivity	ε	0.4
Function of entropy segregation	k_l	3.18×10^{-3}
Gas constant	R	$8314.3 \text{ J/kg}\cdot\text{mole}$
Heat capacity	C_p	$753 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$
Latent heat of fusion	ΔH	$2.47 \times 10^5 \text{ J/kg}$
Liquidus temperature	T_{liq}	1723 K
Solidus temperature	T_{sol}	1523 K
Boiling temperature	$T_{boiling}$	3100 K
Permeability of free space	μ_0	$1.26 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
Standard heat of adsorption	ΔH^o	$-1.88 \times 10^8 \text{ J/kg}\cdot\text{mole}$
Surface excess at saturation	Γ_s	$1.3 \times 10^{-8} \text{ J/kg}\cdot\text{mole}\cdot\text{m}^2$
Thermal conductivity (liquid steel)	k_{liq}	$20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$
Thermal conductivity (solid steel)	k_{sol}	$20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$
Viscosity	μ	$0.05 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$

2.4. Solution technique

The governing equations are discretized using the technique of Finite Volumes in the calculation domain (Fig. 2) based on SIMPLE algorithm and scheme of *power-law* (Patankar, 1980). The result of discretization is a series of algebraic equations. The algebraic equations are solved iteratively on a line-by-line basis utilizing the Tri-Diagonal Matrix Algorithm (TDMA). A 62×62 variable rectangular grid system is used in calculations. The minimum radial grid is 0.1 mm and minimum axial grid is 0.01 mm. The finer cells are near the heat source and the coarser cells are away from the center. The equation of electrical potential is solved only at the beginning till its convergence. The solved magnetic field and current density remain unchanged for the rest of calculation since the electrical conductivity is independent of temperature.

Convergence is achieved when the variation of the temperature, pressure and velocities at the critical location is less than 0.1 percent for each time interval. A parametric study shown that time increments less than 0.01 s did not give a significant difference in results. Hence, the time increment of 0.01 s was used for all calculations.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

The arc characteristics used in simulations, such as current density, heat flux and shear stress on the workpiece surface, are shown in Fig. 3. The results are obtained using a plasma arc model developed early by Xiefeng et al. (2000) and modified later. The surface tension gradient for AISI 304 is presented also in this figure. An arc efficiency of 0.8 is assumed. The maximum allowed surface temperature (temperature ceiling) is taken as the boiling temperature of the workpiece (3100 K).

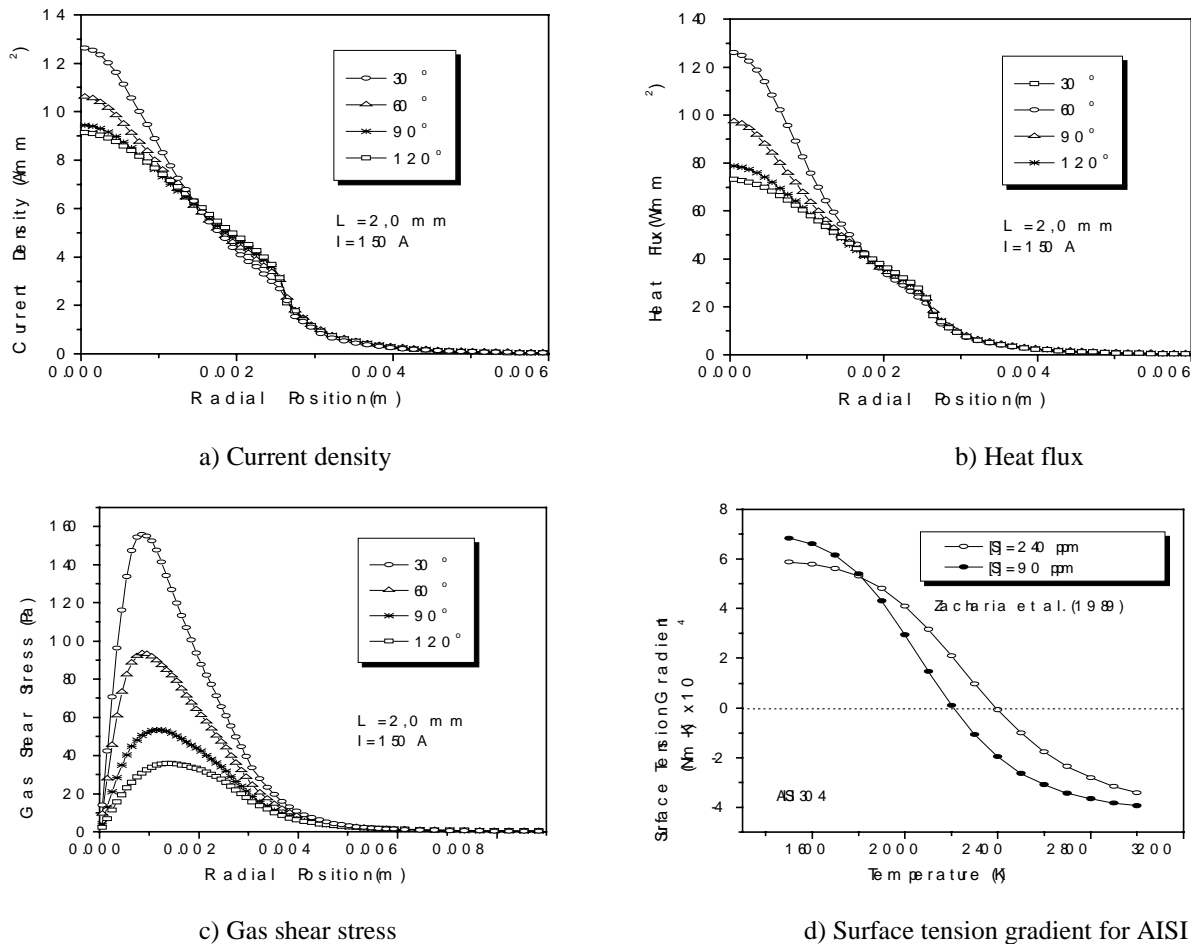


Figure 3. Arc characteristics and surface tension gradient for AISI 304.

The temperature and flow fields during stationary GTA welding were simulated for AISI 304 stainless steel containing 240 ppm sulfur by numerically solving the mathematical model that represent the essential physical features of the process. The temperature and flow fields obtained for various electrode tip angles (30, 60, 90 and 120 deg) at welding time of 3

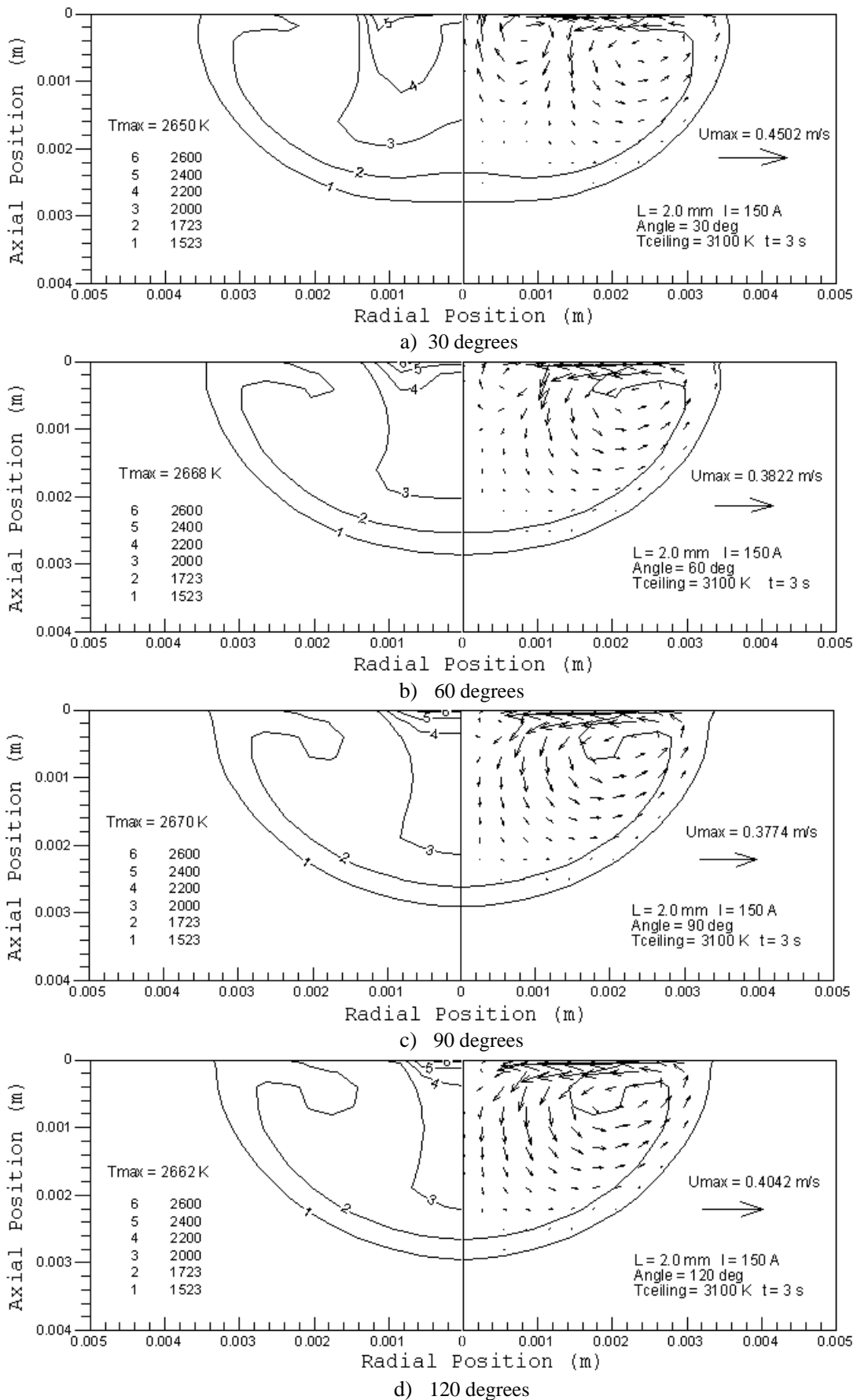


Figure 4. Temperature and flow fields of weld pool for various electrode tip angles, at welding time of 3s.

seconds are illustrated in Fig. 4. The results demonstrate the almost same shape and size of weld pool for all electrode angles. The depth of weld pool increases slightly with increasing electrode angle, while the width of weld pool reduces slightly with increasing electrode angle. Furthermore, the maximum temperature and the maximum velocity in the weld

pool present a small difference. The flow fields show a complex bifurcated flow pattern with one outward circulation at the central region and one inward circulation at the peripheral region. This flow pattern indicates that the dominant driving force for liquid metal circulation is gas shear stress at the central region and the surface tension at the peripheral region. It will be explained later with the surface temperature distribution. The central outward circulation transports relative cool liquid metal to the surface of weld pool, reducing the surface temperature and the depth of weld pool, meanwhile the peripheral inward circulation transports hot liquid metal of surface to the bottom of weld pool, increasing the depth of weld pool at this region. As a result, the bottom of weld pool is flat, especially for the 30 deg electrode.

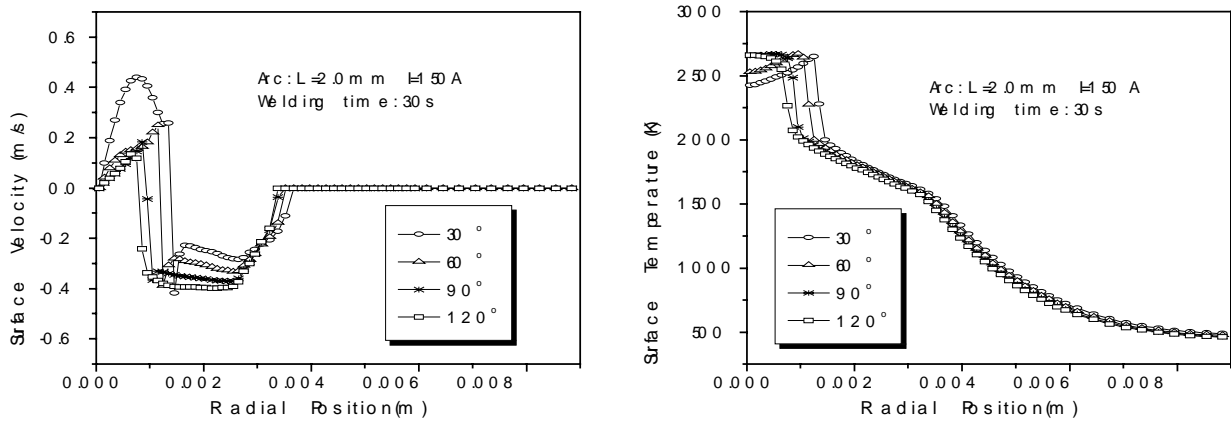


Figure 5. Surface velocity and temperature for various electrode tip angles at welding time of 3 s.

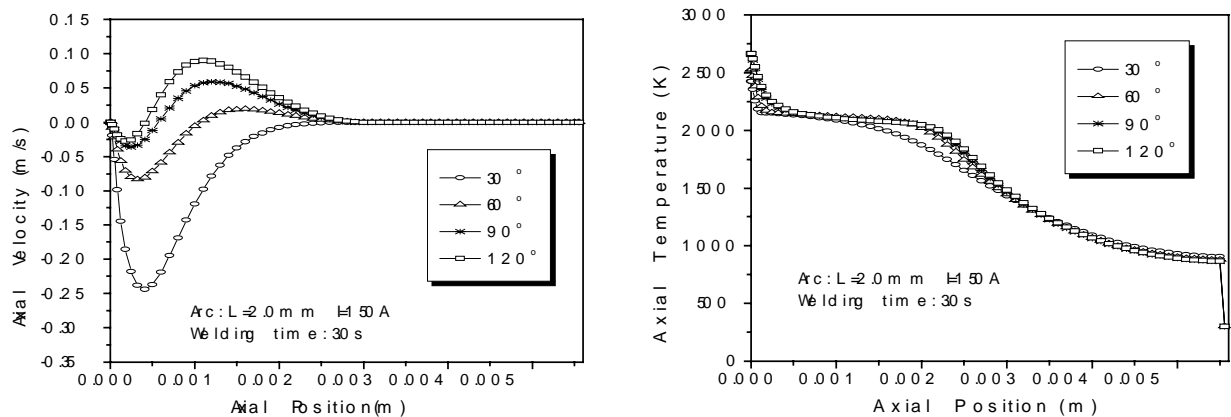


Figure 6. Axial velocity and temperature for various electrode tip angles at welding time of 3 s.

One can observe from the flow fields that the central outward vortex becomes smaller and more surface with the increasing of the electrode angle. For the case of 30 degree, the central vortex is strong and occupies all central region, including the bottom of weld pool. With the increasing electrode angle, the peripheral vortex begins to invade the central region, occupying first the bottom region and then almost the whole central region. For the case of 120 degrees, the central vortex is so small that the flow pattern becomes almost an inward circulation, generating a semispherical weld pool shape.

Figure 5 shows the surface velocity and temperature for various electrode angles. It is found that the surface velocity and size of central vortex decrease with increasing electrode angle, while the surface velocity and size of peripheral vortex increase with increasing electrode angle. The surface temperature at central region increases with reducing surface velocity. For 30 deg electrode, the high circulation velocity in the central outward circulation transports more cool liquid metal from bottom to surface and more heat from center to periphery, resulting positive temperature gradient at the surface of central vortex. This finding is important in the point of view of surface tension effect at the central region. It is well known that a positive surface tension gradient results in an inward circulation and a negative surface tension gradient produces an outward circulation, but under the condition of a negative temperature gradient on the weld pool surface. It can be seen clearly from the equation (13). For AISI containing 240 ppm sulfur, the surface tension gradient changes its sign at 2400 K (Fig. 1d). At the central region, the surface temperature is higher than 2400 K and the surface tension gradient is positive. The surface temperature at the peripheral region is below 2400

K and the surface tension gradient is negative. With the positive temperature gradient at the central region, the negative surface tension gradient tries to generate an inward circulation. The only driving force that can generate an outward circulation, then, is the gas shear stress. For a sharp electrode, the gas shear stress is strong enough to overcome the surface tension effect, resulting in an outward circulation at the central region. With the increasing electrode angle, the gas shear stress decreases rapidly, reducing the gas shear stress effect on the surface. For 120 deg electrode, the gas shear stress is almost five times less than that of 30 deg and the surface tension becomes the dominant driving force on the surface.

The axial velocity and temperature are shown in Fig. 6. One can observe better the weakening of central vortex and strengthening and invasion of peripheral vortex. The axial temperature is not affected significantly by the electrode angle, especially for the angles above 60 degrees.

4. CONCLUSIONS

A numerical analysis of the influence of electrode tip angle on the weld pool behavior for a stationary GTA welding process was carried out using a mathematical model that represents the essential physical features of the processes. Four driving forces were considered in the present model, namely buoyancy, electromagnetic, surface tension and gas shear stress force. The results obtained for AISI 304 stainless steel show that the electrode angle has a small effect on the shape and size of weld pool. The flow pattern, however, is strongly affected by the electrode angle. The flow pattern in weld pool changes from a complex bifurcated one to an almost inward one while the electrode angle increases from 30 to 120 degrees. Under the acting of gas shear stress, a positive temperature gradient is observed at the central region and favors an inward circulation, even if the surface tension gradient is negative in this region. This important finding indicates that the gas shear stress is the only responsible for the central outward circulation.

5. ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank Faculdade de Engenharia Mecânica of Universidade Federal de Uberlândia for supports. The research was sponsored by the FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) under contract Tec-00034/98.

6. REFERENCES

- Choo, R.T.C., Szekely, J. and Westhoff, R.C., 1990, "Modeling of high-current arcs with emphasis on free surface phenomena in the weld pool", *Weld J., Res. Suppl.*, pp. 346s-361s
- Choo, R.T.C., Szekely, J., and David, S.A., 1992, "On the calculation of the free surface temperature of gas-tungsten-arc weld pools from first principles: part II. modeling the weld pool and comparison with experiments", *Metall. Trans. B*, vol. 23, pp.371-384
- Goldak, J., Bibby, M., Moore, J., House, R. and Patel, B., 1986, "Computer modeling of heat flow in welds", *Metall. Trans. B.*, vol. 17, pp. 587-600
- Kanouff, M. and Greif, R., 1992, "The unsteady development of a GTA weld pool", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 35, pp. 967-979
- Kim, W.-H. and Na, S.-J., 1998, "Heat and fluid flow in pulsed current GTA weld pool", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, pp. 3213-3227
- Patankar, S.V., 1980, Numerical heat transfer and fluid flow, McGraw-Hill
- Sahoo, P., Debroy, T. and McNallan, M.J., 1988, "Surface tension of binary metal – surface active solute systems under condition relevant to welding metallurgy", *Metall. Trans. B*, vol. 19, pp. 483-491
- Thompson, M.E. and Szekely, J., 1989, "The transient behavior of weld pools with a deformed free surface", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 32, pp.1007-1019
- Xuefeng, Y., Silveira-Neto, A. and Scotti, A., 2000, "Mathematical modeling of the collision of a plasma jet against a flat plate", *8th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences*, Porto Alegre, Brazil
- Zacharia, T., David, S.A., Vitek, J.M. and Debroy, T., 1989, "Weld pool development during GTA and laser beam welding of type 304 stainless steel, part I – theoretical analysis", *Weld. J., Res. Suppl.*, pp.499s-509s
- Zacharia, T., David, S.A., Vitek, J.M. and Debroy, T., 1989, "Weld pool development during GTA and laser beam welding of type 304 stainless steel, part II – experimental correlation", *Weld. J., Res. Suppl.*, pp.510s-519s
- Zacharia, T., Eraslan, A.H., Aidun, D.K. and David, S.A., 1989, "Three-dimensional transient model for arc welding process", *Metall. Trans. B.*, vol. 20, pp. 645-659

MÉTODO EXPERIMENTAL PARA AVALIAÇÃO DOS PROCESSOS E PROPAGAÇÃO DAS ONDAS NO INTERIOR DE UM TUBO DE CHOQUE

João Nildo de Souza Vianna

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia - UnB
DEP 70910-900 Brasília - E-mail: vianna@unb.br

Alessandro Borges de Sousa,

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia - UnB
DEP 70910-900 Brasília - E-mail: abso@unb.br

Antônio Marcos Fonte Guimarães

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia - UnB
DEP 70910-900 Brasília

Manuel N. D. Barcelos Jr.

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia - UnB
DEP 70910-900 Brasília - E-mail:manuel@unb.br

Resumo. Este trabalho apresenta um estudo experimental, no qual são utilizadas as técnicas de anemometria de fio quente e fio frio juntamente com o transdutor de pressão. A técnica foi aplicada visando identificar as diversas zonas que formam-se pela propagação da onda de choque. O trabalho mostra que a instrumentação é adequada para os objetivos apresentados e indica a possibilidade de ser aplicada em medições metrológicas de tubos de choque

Palavras chave: Tubo de Choque, Onda de choque, Calibração dinâmica.

1. Introdução

A medição e controle dos fenômenos, nos quais a pressão varia com o tempo, exigem o conhecimento do desempenho dinâmico dos sensores de pressão e dos componentes da cadeia de medição. Entretanto, a avaliação das características dinâmicas destes sensores é dificultada pelas limitações das fontes geradoras e dos padrões dinâmicos de referência disponíveis.

Atualmente, o tubo de choque é, entre os meios disponíveis, reconhecido como o gerador de pressão metrologicamente mais preciso para a calibração dinâmica de sensores de pressão de alta frequência. Bean et al (1994), Damion (1994), propõem o tubo de choque como padrão primário para calibração de sensores de pressão de pequeno tempo de resposta.

Contudo, verifica-se que as qualidades metrológicas do tubo de choque podem ainda ser melhoradas e ampliadas, através do domínio dos diversos fatores que afastam os processos reais dos processos ideais.

Um problema em aberto é o processo real de formação do choque e sua evolução ao longo do tempo. Este processo pode ser fortemente influenciado pela deformação da membrana que separa as duas câmaras e pela camada limite. Devido às hipóteses simplificativas impostas pelas condições de contorno; os valores calculados numericamente são ainda insuficientes para descrever realisticamente estes processos. Mesmo assim, muitas informações práticas, sendo algumas vezes contraditórias, estão disponíveis e contribuem para o desenvolvimento deste tipo de equipamento.

A ANS-NIST(1974-1995), por exemplo, sugere que a onda de choque seja estabelecida a uma distância da membrana de 10 a 15 diâmetros do tubo, em outras instituições adota-se 3 diâmetros. Assim, para compreensão completa dos fenômenos que ocorrem no interior do tubo de choque, é indispensável realizar-se medições.

Como as variações espaciais e temporais dos eventos ocorrem muito rapidamente, torna-se necessário a utilização de sensores com excelente desempenho nas altas frequências.

O presente trabalho pretende trazer uma contribuição ao estudo dos processos no interior do tubo de choque apresentando as possibilidades e potencialidades de medição dos complexos eventos gerados pelo deslocamento da onda no interior do tubo.

O estudo é motivado pela necessidade de desenvolvimento de meios de calibração dinâmica de sensores de temperatura e velocidade. Para sua execução, foram realizadas medições, que permitiram identificar as diversas zonas que são formadas durante a propagação da onda de choque, para tanto utilizou-se sensores de pressão piezoelétricos e um sensor resistivo de tungstênio-platina de 5,0 µm de diâmetro.

2. Contextualização do Trabalho

O tubo de choque mais frequentemente usado na metrologia de pressão é um tubo reto com duas câmaras separadas por uma membrana, Fig. (1). Quando a membrana se rompe uma onda de choque (W) se propaga na câmara de baixa pressão gerando atrás de si um escoamento subsônico, região 2 da Fig 1, onde a pressão, temperatura e velocidade são constantes. A região 4 tem a mesma pressão e velocidade da região 2 e é separada desta pela superfície de contato, que fisicamente é uma descontinuidade termodinâmica, uma vez que a temperatura T_4 é menor que temperatura T_2 . A medição dos fenômenos que ocorrem nestas regiões é de interesse, pelo o que as mesmas (regiões 1 e 2) representam na calibração dinâmica de sensores de temperatura e velocidade submetidos a um escoamento de alta velocidade.

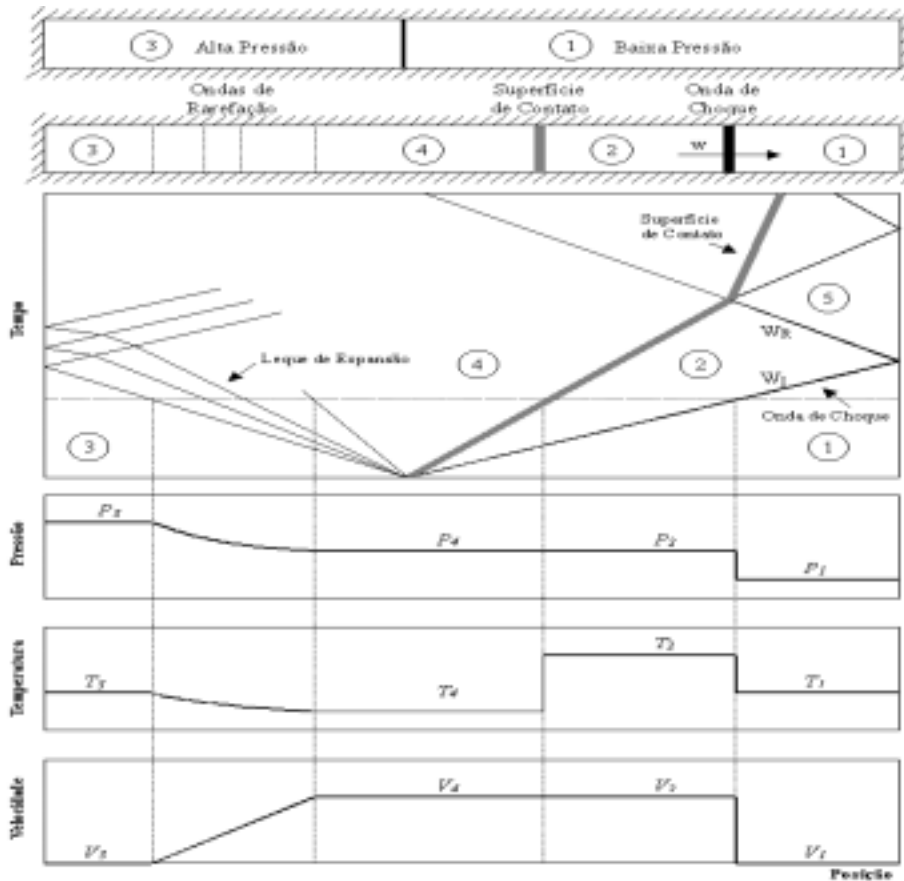


Figura 1 – Diagrama tempo-posição dos processos no interior do tubo de choque e o perfil de pressão, temperatura e velocidade ao longo do tubo em um tempo fixo.

Outra região de interesse é a gerada pela reflexão da onda de choque no fundo do tubo denominada região 5. Esta região já é consagrada para a calibração de transdutores de pressão. Na citada região, o escoamento atrás da onda refletida está numa condição de estagnação, formando juntamente com o degrau de pressão, um degrau de temperatura, sendo assim o fundo do tubo é potencialmente um local privilegiado para calibração dinâmica de transdutores de temperatura. É neste contexto que se insere este trabalho.

Os sensores instalados na parede do tubo serão sensibilizados pelo escoamento do gás de trabalho, cujas velocidade e temperatura aumentam rapidamente, excitando os sensores segundo uma função do tipo degrau. Os sensores instalados no fundo do tubo serão submetidos a um degrau de temperatura sem velocidade. A compreensão dos fenômenos aerotermodinâmicos destes processos permitirá avaliar as reais possibilidades para ampliar as aplicações metrológicas do tubo de choque.

3. Dispositivo Experimental e Metodologia do Trabalho

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizou-se o Tubo de Choque Científico “TCC”. Como este, é construído em acrílico transparente, o TCC possibilitou uma montagem precisa dos sensores, bem como a visualização da deformação da membrana. O tubo induzido tem 1,78 m de comprimento e o indutor 1,22m. Para que se tivesse uma série de medidas, que permitissem avaliar os processos em várias posições do TCC, foram previstas três seções de medidas na parede do tubo induzido, além da possibilidade de medição no fundo do tubo, Fig. (2). Estas seções permitem a montagem de quatro transdutores opostos radialmente, Fig. (3).

A instrumentação utilizada para medição das pressões foram: dois sensores de pressão piezoelétricos com frequência natural de 100 kHz, sensibilidade 16.6 pC/bar, dois amplificadores de carga Kistler modelo 5007. A

aquisição e tratamento dos sinais de pressão foram realizadas pelo Analisador Dinâmico de Sinais, marca HP modelo 35655A, com dois canais com faixa de frequência até 102 kHz, com resolução mínima de 244 μ Hz;

Para medição de velocidade e temperatura, utilizou-se o Sistema de Anemometria Disa e sensores construídos em liga de tungstênio e platina de 5 μ m de diâmetro. Os sinais gerados por estes sensores foram capturados por um osciloscópio digital equipado com interface HPIB, com capacidade de aquisição a 400 Mhz e conversores A/D de 8 bits. Os sinais adquiridos pelo osciloscópio são gerenciados pelo sistema de tratamento de sinais "Captura", desenvolvido no LTMD. A incerteza global dos dois sistemas de medição é de 2% .

Como primeiro passo, foi feita a avaliação da sensibilidade dos sensores resistivos à variação de temperatura.

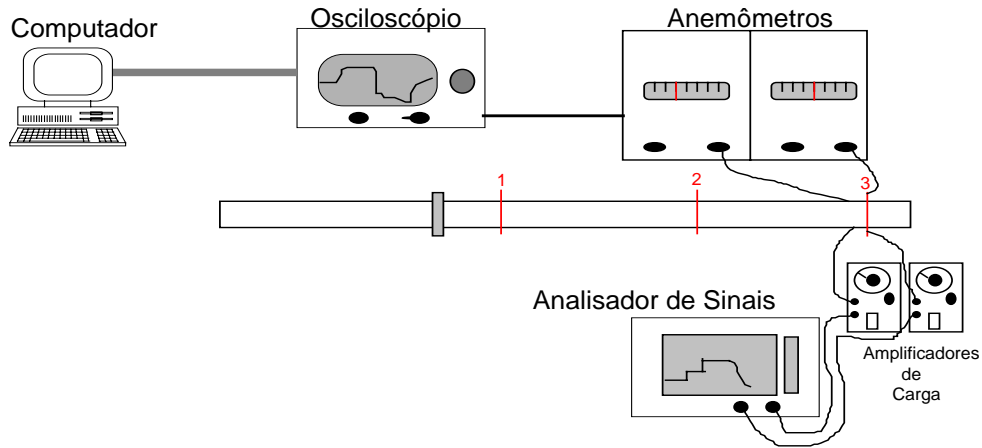


Figura 2- Esquema da bancada de ensaios e seções de testes do TCC.

As medições foram realizadas na parede do TCC com os dois sensores de pressão e os dois sensores resistivos instalados radialmente conforme mostrado na Fig. (3). Os sensores de pressão foram posicionados nos pontos 1 e 1' e os sensores resistivos nos pontos 2 e 2'.

Para avaliar o perfil da onda de choque, considerando a sua característica tridimensional, foram realizadas medições no sentido radial com os sensores resistivos nas posições 2 , 02 e 01, Fig. (3), operando no modo Temperatura Constante.

A localização das 3 seções de medidas na parede do TCC foram obtidas a partir dos resultados da simulação numérica do tubo de choque e estão localizadas a 0,22 m, 0,93 m e 1,545 m da membrana. A Fig. (2) mostra esquematicamente o posicionamento longitudinal dos sensores e a instrumentação associada.

SEÇÃO CIRCULAR DO TUBO DE CHOQUE

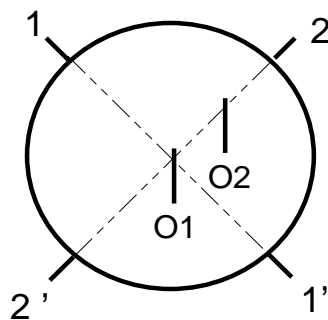


Figura 3 - Posicionamento dos sensores anemômetros e dos sensores de pressão.

Para a utilização do Sistema de Anemometria foi adotada uma estratégia de medição, na qual os sensores pudessem ser sensível, simultaneamente, à velocidade e à temperatura, dependendo da diferença entre temperatura do escoamento e a temperatura do fio. Para tanto, os sensores foram alimentados com 10 mA no modo Temperatura Constante para que fossem sensíveis à velocidade. Inicialmente, para verificar o funcionamento do sensor e sua sensibilidade nestas condições especiais de operação, o mesmo foi instalado no fundo do Tubo de Choque Científico, como a onda de choque, ao se refletir no fundo do tubo, um degrau pressão e temperatura e nesta região a velocidade é nula, o sensor ali instalado, respondeu com uma redução na voltagem, proporcional ao aumento de temperatura da região 5, conforme Fig.(1). Juntamente com o sensor resistivo, instalou-se também no fundo do tubo, um sensor de pressão piezoelétrico. A fim que o sistema respondesse unicamente à variação de temperatura, o sensor foi alimentado com uma corrente de 3 mA operando no modo Corrente Constante.

Para os ensaios nas seções 2 e 3 do TCC, tem-se que os sensores resistivos funcionaram no modo Temperatura Constante com alimentação de 10 mA, sendo sensíveis simultaneamente à velocidade e à temperatura. Na seção de medição 1, devido às grandes escalas de turbulência, a identificação dos diversos fenômenos só foi possível usando 2 sensores, fazendo com que um fosse sensível unicamente à temperatura e o outro à velocidade.

Os resultados experimentais obtidos referem-se ao valor médio de 5 a 10 ensaios realizados nas mesmas condições. Para todos os ensaios, utilizou-se uma relação de pressão entre as câmaras do TCC variando de 1 a 2 bar.

Uma vez que o interesse deste trabalho é fazer uma avaliação qualitativa, os resultados experimentais de temperatura e velocidade medidos pelos sensores resistivos estão apresentados em volts, que é a unidade capturada pelo sistema de aquisição de dados. A avaliação qualitativa permite, durante o transcorrer dos ensaios, modificar a corrente de alimentação para privilegiar a melhor definição de uma ou outra variável.

4. Análise dos Resultados Experimentais

A verificação da sensibilidade do sensor resistivo foi realizada com o mesmo instalado no fundo do tubo, alimentado com 10 mA, operando simultaneamente com o transdutor de pressão piezoelétrico cuja a resposta é conhecida.

A resposta dos dois sensores à reflexão da onda de choque no fundo do tubo é apresentada na Fig.(4). Como atrás da onda refletida, nos 7 ms de duração do evento, a pressão é constante e a velocidade é nula, a redução na voltagem do sensor resistivo é decorrente do aumento da temperatura. Em seguida, o degrau é desfeito e passam a intervir outros efeitos como a velocidade do escoamento. Assim, com o sistema operando no modo Temperatura Constante, com o sensor alimentado com 10 mA, pode-se registrar a velocidade ou a variação de temperatura. Pode-se observar ainda, que o sensor responde ao degrau de temperatura de duas formas diferentes: a primeira como um sistema de primeira ordem, conforme esperado, e a segunda como uma rampa.

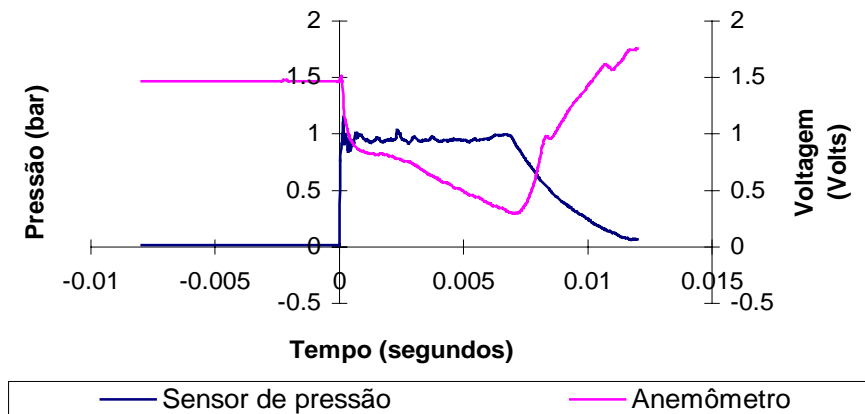


Figura 4 – Resposta ao degrau de pressão e temperatura dos sensores instalados no fundo do TCC

Dois sensores resistivos e dois sensores de pressão foram instalados na parede do tubo, na seção de medição 3, sendo estas posições diametralmente opostas, conforme representações esquemáticas apresentadas nas Fig. (2) e Fig. (3). Os resultados destas medições são mostrados na Fig. (5).

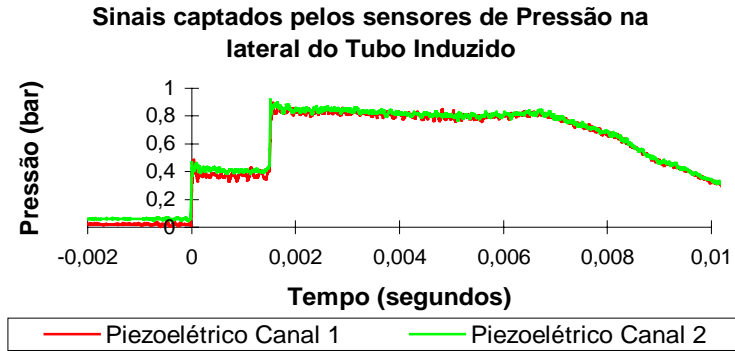
Cabe ressaltar que, nestes ensaios, priorizou-se a resposta temporal do sensor resistivo. Desta maneira em alguns testes, para adequar a sensibilidade do sensor à natureza do fenômeno, houve a necessidade de variar a corrente de alimentação dos sensores. Por esta razão as amplitudes dos sinais dos sensores resistivos apresentados na Fig. (5b) são meramente qualitativas.

Os eventos que se passam na seção 3 do tubo, após o rompimento da membrana, são: num primeiro momento, a passagem da onda de choque e o escoamento por ela induzido, caracterizados pela região 2 da Fig. (1) e representado pelo aumento de pressão de 0 a 0,4 bar na Fig (5b); num segundo momento, a onda refletida no fundo do tubo se desloca em direção ao tubo indutor formando o escoamento e aumentando a pressão para 0,8 bar, bem como a temperatura, gerando assim a região 5 da Fig. (2). Os dois sensores de pressão registraram um primeiro degrau de pressão decorrente da passagem da onda de choque, com uma duração aproximada de 1,8 ms, para em seguida registrar um segundo degrau de pressão, devido à passagem da onda de choque refletida no fundo do tubo, conforme Fig. (5a).

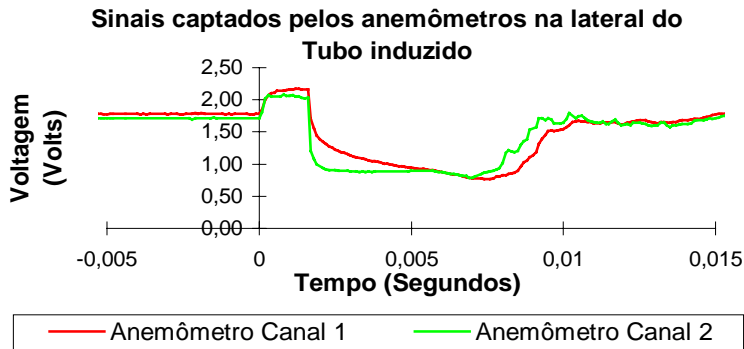
Os dois sensores resistivos, primeiramente, aumentarão a voltagem proporcionalmente à velocidade do escoamento induzido pela onda de choque, para em seguida terem a voltagem reduzida pelo aumento da temperatura, devido ao retorno da onda de choque refletida no fundo do tubo, como mostrado na Fig. (5 b). Pode-se

observar que os dois sensores respondem de forma diferente, possivelmente devido a sutis diferenças construtivas.

Com este conjunto de resultados, pode-se inferir que a parede do tubo de choque é um local promissor para avaliação do desempenho dinâmico de sensores de velocidade e temperatura de pequeno tempo de resposta.



(a)



(b)

Figura 5 – Respostas dos sensores resistivos e de pressão instalados na seção 3 da parede do TCC de maneira diametralmente oposta.

Para avaliar a planicidade da onda de choque, utilizando-se a mesma seção de testes, variou-se a posição radial de um dos sensores resistivos, mantendo um dos sensores na posição 2' e o que estava em 2, foi deslocado para a posição 01 no centro do tubo, Fig. (2). Os resultados das medições nesta nova posição estão apresentados na Fig. (6). Verifica-se que os dois sensores respondem ao mesmo tempo à passagem da onda de choque, não se registrando variação na resposta do sensor, o que indica uma planicidade da onda de choque, quando a mesma passa por esta seção.

Reposicionado-se o sensor resistivo que estava no centro do tubo na posição 02 da Fig. (2), obtém-se os resultados apresentados na Fig. (7). As diferenças de resposta à variação de temperatura se mantêm nas 3 posições radiais ensaiadas.

Com base nos resultados discutidos acima, alguns comentários são pertinentes, quais sejam: o conjunto de ensaios realizados na seção de teste 3 e apresentados nas Fig. (5), (6) e (7) mostram que é possível detectar os eventos previstos no diagrama tempo-posição da Fig. (1). A passagem da onda de choque pela seção 3, é detectada pelos sensores de pressão que respondem com um degrau de cerca de 0,5 bar de amplitude. Neste mesmo instante, os dois sensores resistivos, que neste momento estão com uma temperatura superior à da onda de choque, detectam a variação de velocidade do meio. A resposta desses sensores é um aumento instantâneo em seu sinal de voltagem.

Após a primeira reflexão da onda no fundo do tubo, a mesma está com pressão e temperatura mais elevadas. Os sensores de pressão detectam este fenômeno com um degrau de pressão de maior amplitude. Já os sensores resistivos, que agora estão com uma temperatura inferior à da onda, detectam o aumento de temperatura do meio ocorrido pela passagem da onda refletida, com um decaimento no sinal de voltagem.

Nesse momento, a onda de choque continua se deslocando em direção ao tubo indutor, até encontrar a superfície de separação na qual reflete parcialmente em direção ao fundo do tubo induzido e passando novamente pela seção 3. Essa nova passagem da onda de choque pode ser observada no tempo de aproximadamente 7,5 ms. Os sensores de pressão detectam essa passagem com uma pequena elevação no sinal de pressão. Já os anemômetros detectam esta passagem da onda por um reaquecimento muito sutil naquele instante.

Seção 3 - Anemômetros posicionados nos pontos 2' e O1 da seção circular do tubo

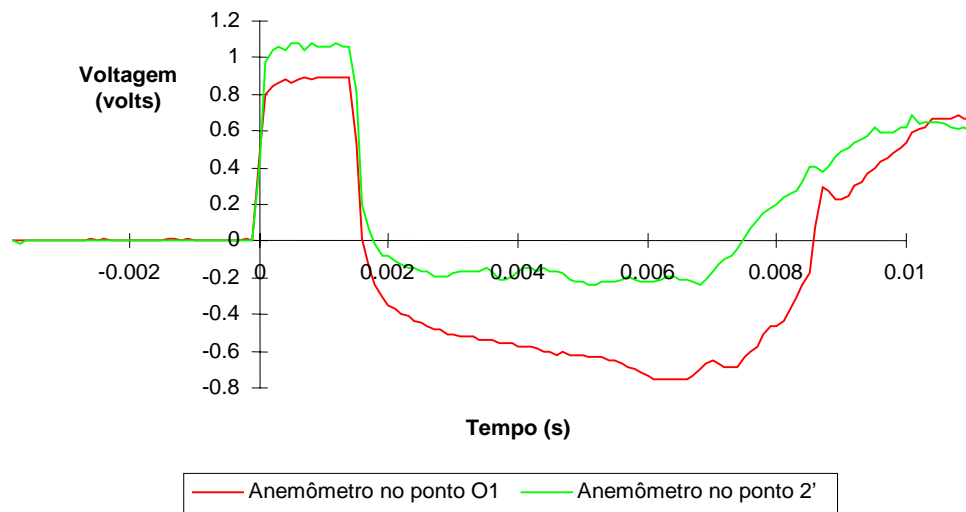


Figura 6 – Resposta dos sensores resistivos posicionados na parede e no centro do tubo, na seção 3.

Seção 3 - Anemômetros posicionados nos pontos 2' e O2 da seção circular do tubo

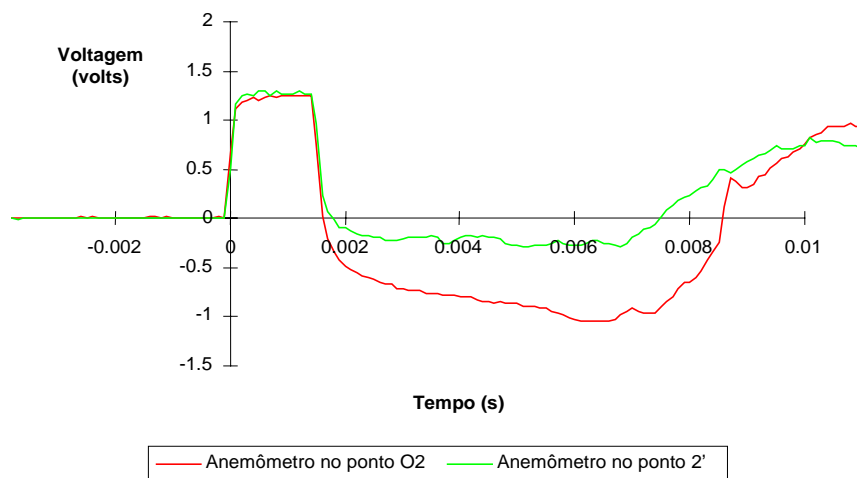


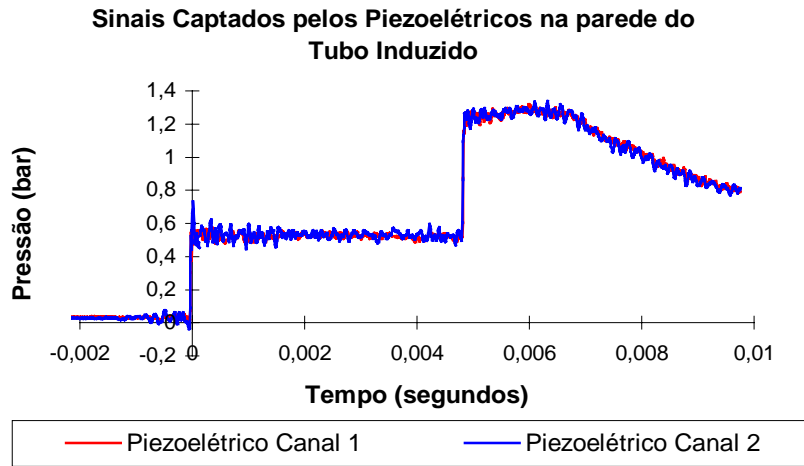
Figura 7 - Resposta dos sensores resistivos posicionados na parede e na metade do raio, na seção 3.

Uma observação importante a ser feita, refere-se as três passagens da onda de choque pela seção 3, em que os quatro sensores responderam ao mesmo tempo. Esse fato ocorre mesmo mudando a sonda do anemômetro de posição ao longo do raio da seção circular do tubo. Daí, conclui-se que, para a seção de medição 3, já se pode considerar como válida a teoria da propagação plana da onda de choque.

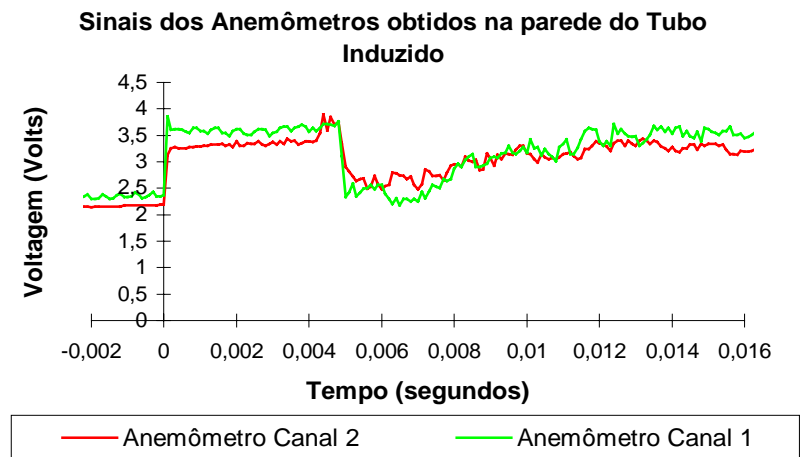
Dando seqüência aos experimentos os 4 sensores foram instalados na seção de medidas 2, conforme Fig. (3). Os ensaios foram conduzidos seguindo-se a mesma metodologia e as mesmas condições iniciais para obtenção dos resultados na seção 3.

A seção 2, apesar de estar mais distante do fundo do tubo induzido, quando comparada à seção 3, ainda assim, constata-se que a mesma está numa posição anterior à que a onda de choque se reflete na Superfície de Contato. Como pode ser observado na Fig. (8a), os sensores pressão ainda são excitados pela segunda e terceira reflexão da onda de choque. Desta forma, a observação dos resultados apresentados na Fig. (8) mostra que são bastante semelhantes aos obtidos na seção 3 anterior, no que diz respeito à forma das curvas, mas diferindo

fundamentalmente, no tempo necessário para que ocorram os eventos aerotermodinâmicos, como previstos na Fig. (1). No caso da seção 3, em que os sensores estavam localizados mais próximos do fundo do tubo, a duração do escoamento induzido pela onda de choque se propagando era de menos de 2 ms. Quando se afasta mais do fundo do tubo, a duração do escoamento aumenta para valores da ordem de 5 ms, o que seria extremamente vantajoso na hipótese de se optar pela utilização do tubo de choque como uma ferramenta de calibração dinâmica de sensores de velocidade e temperatura. Uma maior duração do degrau permitiria ampliar a faixa de frequência e consequentemente a variedade de sensores ou transdutores a serem calibrados.



(a)



(b)

Figura 8– Resposta dos sensores resistivos e de pressão na parede do TCC, seção 2 de maneira diametralmente oposta.

Pode-se verificar pelos resultados apresentados na Fig. (9), seção 2, que o sensor instalado na parede e no centro do tubo, tal como na seção 3, que a teoria de propagação plana da onda de choque continua válida. Haja visto que em todas as passagens da onda de choque pela seção 2, os quatro sensores responderam ao mesmo tempo.

Com os sensores posicionados na seção 1, são obtidos os resultados apresentados na Fig. (11). Esta seção é a mais próxima do local, onde ocorre o rompimento da membrana, mais precisamente à 22 cm deste local, sendo assim, este resultado pode ser utilizado como um estudo preliminar da formação da onda de choque logo após o rompimento da membrana. Os eventos que se registram nesta seção, tão próxima da membrana, são de grande complexidade e muitas das conclusões podem não passar de mera especulação, sem amparo científico. Mesmo assim, alguns autores apresentam comentários sobre os valores medidos na região 1, contudo estes comentários estão, naturalmente, sujeitos à discussão e aprofundamento científico.

Seção 2 - Anemômetros posicionados nos pontos 2' e O1

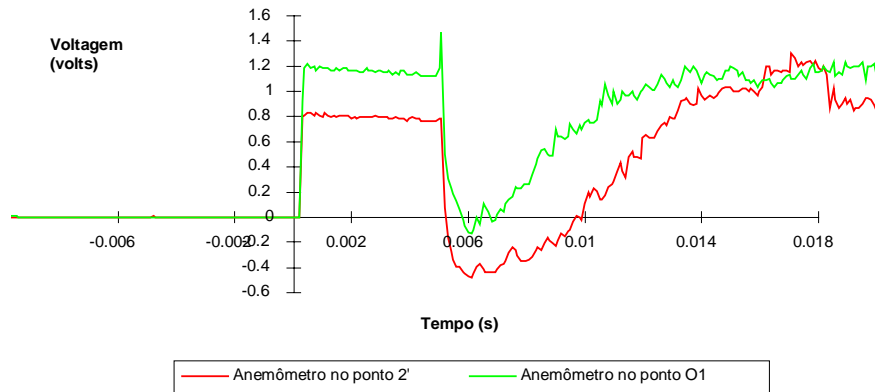


Figura 9 – Resposta dos sensores resistivos posicionados na parede e no centro do tubo , na seção 2.

Seção 2 - Anemômetros posicionados nos pontos 2' e O2

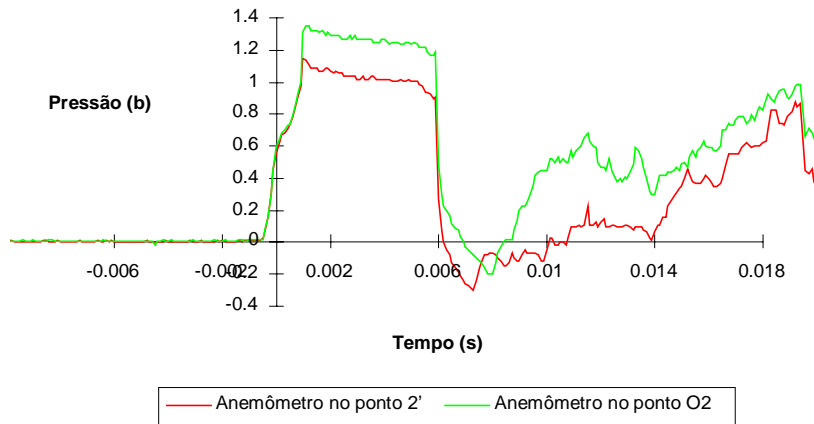


Figura 10 - Resposta dos sensores resistivos posicionados na parede e na metade do raio , na seção 2.

A metodologia adotada para obtenção dos resultados apresentados para os sensores instalados na posição 1, foi a mesma utilizada nos casos anteriores, com as seguintes alterações: no lugar de dois anemômetros de fio quente à temperatura constante, foi utilizado um sensor resistivo de fio frio a corrente constante, sensível à temperatura, bem como um sensor resistivo de fio quente à temperatura constante, sensível à velocidade.

Segundo Lomas (1986), a idéia da utilização do módulo de funcionamento “fio frio à corrente constante” é forçar uma corrente extremamente baixa pela sonda, de forma que o efeito Joule possa ser desprezado, onde o anemômetro ficará sempre sensível à variação de temperatura. No caso em questão, foi utilizada uma corrente de 3 mA, o que resulta em uma temperatura do sensor de aproximadamente 20⁰ C .

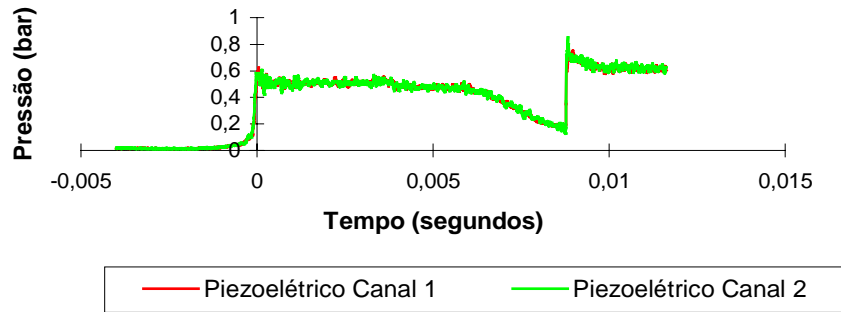
Com a primeira passagem da onda de choque pela seção 1, os sensores de pressão registram um degrau de pressão de aproximadamente 0,6 bar, Fig. (11a), no mesmo instante o anemômetro de fio quente responde à passagem da onda com um aumento no seu sinal de voltagem, Fig. (11b). O fio frio registra o aquecimento provocado pela passagem da onda de choque com um decaimento no seu sinal de voltagem

Sabe-se que a região 3 da Fig. (1), atrás da Superfície de Contato, possui uma temperatura bem inferior à da região 2, sendo inclusive, uma temperatura bem abaixo da ambiente. Desta forma, pode-se observar a passagem da Superfície de Contato, pela seção 1, com um tempo em torno de 1,5 ms após a primeira passagem da onda de choque, no instante em que o “fio frio à corrente constante”, emite um sinal de voltagem positivo. Isso ocorre porque o sinal de voltagem zero, no anemômetro de fio frio, corresponde a uma leitura de temperatura igual à ambiente. Portanto, um sinal positivo, significa um resfriamento a uma temperatura abaixo da ambiente.

A queda de pressão registrada pelos sensores de pressão, no instante em torno de 7 ms, corresponde à chegada do leque de expansão na seção. Esta queda de pressão é interrompida por um pulso súbito de pressão no instante de aproximadamente 9 ms. Apenas com o fio quente, não é possível identificar este fenômeno de forma confiável,

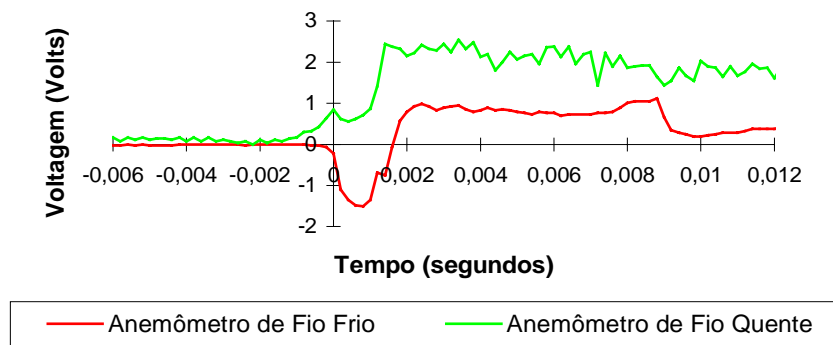
entretanto, fazendo-se uma análise da temperatura neste instante, através do fio frio, percebe-se um grande aquecimento no local. Este aquecimento não pode ter sido provocado pela onda de choque refletida no fundo do tubo, pois a mesma foi redirecionada pela Superfície de Contato antes de chegar à seção 1. Isso leva a conclusão de que, possivelmente, se trata da parcela da onda de choque que transpõe a Superfície de Contato.

Sinais Obtidos pelos Piezoelétricos na lateral do Tubo Induzido



(a)

Sinais Obtidos pelos Anemômetros de Fios Quente e Frio



(b)

Figura 11– Respostas dos sensores de pressão e resistivos instalados diametralmente opostos na parede do TCC, seção 1.

Seção 1 - Anemômetros posicionados nos pontos 2' e O2

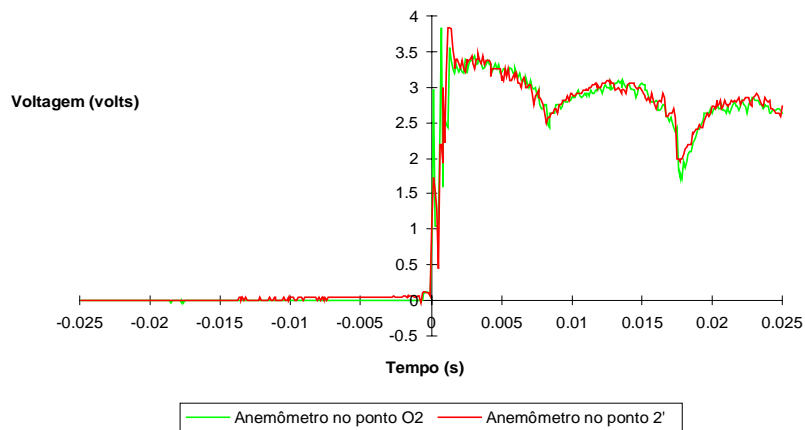


Figura 12 - Resposta dos sensores resistivos posicionados na parede e na metade do raio , na seção 1.

A Figura 12 mostra os resultados das medições levadas a efeito na parede do tubo e na metade do raio. É importante observar como na proximidade da membrana o escoamento tem um comportamento completamente diferente dos casos anteriores.

5. Conclusões

Este trabalho se propôs a trazer uma contribuição ao estudo dos processos no interior do tubo de choque, apresentando as possibilidades e potencialidades de medição dos complexos eventos gerados pelo deslocamento da onda no interior do tubo. A sua motivação é a necessidade do desenvolvimento de meios de calibração dinâmica de sensores de temperatura e velocidade.

A partir da análise dos resultados obtidos neste estudo, pôde-se chegar às seguintes conclusões:

- Os sinais obtidos pelos anemômetros e pelos sensores de pressão confirmaram as expectativas previstas na teoria e mostram que é possível ampliar as aplicações metrológicas do tubo de choque com os sensores sendo instalados na parede do tubo.
- Comprovou-se a potencialidade da instrumentação proposta, em particular o anemômetro, para o estudo experimental dos fenômenos que ocorrem no interior do tubo de choque.

6. Referências

- BEAM, V.E., BOWERS, W.J., HURST, W.S., ROSASCO, G.J. Development of a Primary Standard for the Measurement Dynamic Pressure and Temperature, Metrologia, vol. 30, pp 747-750, 1993/1994.
- DAMION, J.P. Means of Dynamic Calibration for Pressure Transducers, Metrologia, vol. 30, pp 743-746, 1993/1994.
- AMERICAN NATIONAL STANDARD - A Guide for the Dynamic Calibration of Transducers - ANSI B88.1, ASME - 1972 (revisado em 1995)
- ANDERSON, JD JR - Fundamentals of Aerodynamics - 2ª edição, Mac Graw Hill - International Editions, 1991
- BEAN, V.E.; BOWERS JR., W.J.; HURST, .S. and ROSASCO, G. J. ; “Development of a Primary Standard for the Measurement of Dynamic Pressure and Temperature”, Metrologia 1993 / 94, 30, 747-750
- Carvalho, M. A M - Estudo e Desenvolvimento de um Tubo Gerador de Onda de Choque, UnB - 1990.
- DARU, V. AND DAMION, J.P. - “Analysis of the flow Perturbations in a Shock Tube due to the Curvature of the Diaphragm” - Laboratoire de Métrologie Dynamique, ENSAM - Paris, France, 1993
- LOMAS, CHARLES G., “Fundamentals of Hot Wire Anemometry”, Cambridge University Press, London, 1986
- SHAPIRO A. H. - The Dynamics and Thermodynamics of compressible Fluid Flow - Volume I e II - The Ronald Press company, N.Y. - 1953

EXPERIMENTAL METHOD FOR EVALUATION OF THE PROCESSES AND PROPAGATION OF THE WAVES INSIDE A SHOCK TUBE

João Nildo de Souza Vianna, Alessandro Borges de Sousa, Antônio Marcos Fonte Guimarães, Manuel N. D. Barcelos Jr.

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia – UnB CEP 70910-900 Brasília - E-mail: abso@unb.br

Abstract. In the present work is shown a experimental study, in which are made measurements that allows the identification of the zones that are formed while a shock wave propagates inside a shock tube. Pressure sensors and anemometers are utilized. The anemometers are sensitive to the velocity changes or to the temperature changes, depending on the thermodynamic estate of the process.

Keywords: shock tube, shock wave, dynamic calibration.

ORIFICE PLATE EFFECTS ON HIDRODYNAMICAL AND THERMAL
ENTRANCE REGIONS INSIDE FLAT CHANNELS

Aldélio Bueno Caldeira

Renata Cavalcanti Rodrigues

Albino José Kalab Leiroz

Department of Mechanical and Materials Engineering

Instituto Militar de Engenharia

Rio de Janeiro, RJ - 22290-270 - Brazil.

Abstract. Effects of finite thickness orifice plates on the hydrodynamical and thermal entrance regions inside parallel flat plate channels are studied in the present work. The laminar incompressible flow governing equations written in vorticity-stream function formulation are discretized using a second order finite difference scheme. The nonregular physical domain is divided into zones and regular discretizing grids are used within the obtained subdomains. The resulting system of algebraic equations is solved by an iterative procedure with local error control. In order to evaluate effects on the thermal entrance region, the energy conservation equation is also solved. Constant wall temperature and constant heat flux boundary conditions are considered in the present study. Results are obtained for hydrodynamic fully developed and uniform velocity inlet profiles. Uniform temperature distribution is considered at the channel inlet. Different orifice plate axial positions are considered in order to evaluate the heat transfer and flow behavior. The effects of asymmetric orifice plates on the velocity and temperature fields are also studied. Results are compared and validated using analytic solutions available for limiting cases.

Keywords: Orifice Plate, Entrance Region, Convective Effects, Flat Channel, Extended Surfaces

1. Introduction

Orifice plates are common obstruction devices used in flowmeters systems. In these devices, the pressure difference measured between axial positions before and after the plate is associated to the mass or volumetric flow rate. In practice, for each type of orifice plate, a relationship between the measured pressure drop and flow rate must be obtained. Despite the common use, orifice plates disturb the flow and heat transfer conditions, imposing hydrodynamical and thermal variations on the velocity and temperature fields. Therefore, a careful analysis of the orifice plate effect on the general flow and thermal characteristics should be performed in order to avoid and prevent the introduction of undesirable disturbances into the flow.

The relationships between pressure drop and flow rates for orifice plates have been studied of several numerical and experimental works. Different types of nozzles, sharp-edge orifices and quadrant-edge orifices inside tubes of circular cross section were experimentally studied for Re ranging from 1 to 1000 (Alvi et al, 1978). The results show that for very low Reynolds number, the losses observed for nozzles are three times the magnitude of the sharp-edge orifice losses. For turbulent flow condition, the nozzle losses are reduced to 40% of the losses observed for sharp-edge orifices. These results show that the expected flow regime is important in choosing the appropriate obstruction device.

The analysis of flows in parallel plate channels with periodic rod obstructions and constant wall temperature indicate a Nusselt number abrupt decrease in the near field ahead of the rod followed by an abrupt increase at the region

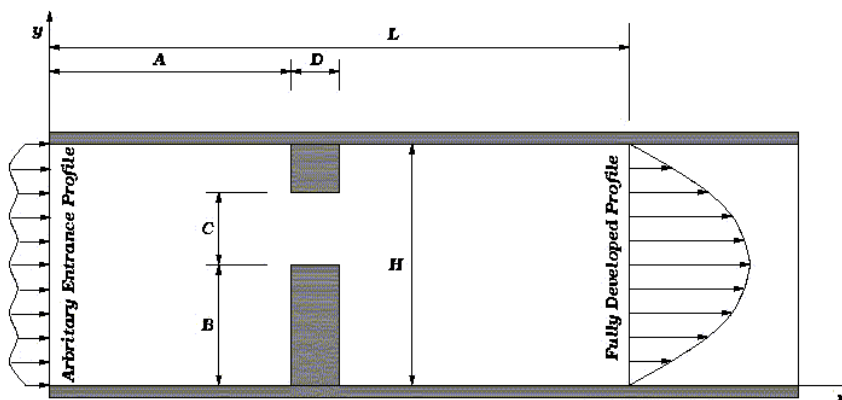


Figure 1 – Physical domain and principal dimensions.

* Currently at the Mechanical Engineering Department – COPPE/UFRJ. E-Mail: aldelio@imt.coppe.ufrj.br

† On leave from Furnas Centrais Elétricas. E-Mail: renatacr@furnas.com.br

‡ Author to whom correspondence should be addressed. E-Mail: leiroz@ime.eb.br

behind of the rod (Yuan et all, 1998). In this numerical work, for the solution of the momentum and energy conservation equations, periodic boundary conditions were employed. Periodic internal ribs inside tubes were studied (Weeb et all, 1971), leading to correlations for the friction factor and for heat transfer coefficient based on the law of the wall and on the heat-momentum transfer analogy. A numerical work about periodic circular internal fins inside tubes also analyses the friction and heat transfer process, using the Nusselt and Prandtl numbers, emphasizing the ratio of the length between two periodic fins by the height of the fin (Rowley & Patankar, 1984). Furthermore, results indicate that the presence of fins inside tubes do not always lead to heat transfer improvement, due to the induced flow distortion caused by the extended surfaces. Therefore, the flow distortion can substantially reduce the heat transfer from the wall.

The conjugated thermal problem, considering the annular flow inside a concentric circular arrangement with periodic internal fins, was investigated by Andrade & Zaparolli (1999). The effects of reverse heat transfer near the fin-tube wall corner were investigated. The results show that the reverse heat flux increases as the Reynolds number increases. An increase in the distance between two consecutive fins also leads to a reverse heat flux increase. However, an increase of the solid/ fluid conductivity ratio leads to a decrease of the reverse heat flux.

In the present work, the effects of an orifice plate on hidrodynamical and thermal entrance regions into the flow inside flat plate channels are studied. The orifice plate thermal effects are analyzed using the temperature field and the Nussel number evaluated along the channel walls. Therefore, the augmentation of the heat transfer process due to the obstruction, which has an internal fin effect, is also analyzed. The effects of asymmetrical orifice plates on the velocity and temperature fields are also studied in the present work. The laminar incompressible flow governing equations written in vorticity-stream function formulation are discretized using an implicit second order accurate finite difference scheme. The nonregular physical solution domain is initially divided into zones and regular discretizing grids are used within the obtained subdomains. The resulting system of algebraic equations is solved by an iterative procedure with local error control. In order to evaluate effects on the thermal entrance region, the energy conservation equation is also solved. Constant wall temperature and constant wall heat flux boundary conditions are considered in this study. The Graetz problems (Kays & Crawford, 1980) are used to validate the obtained numerical results. They are the limiting cases of the considered orifice plate problems when the orifice plate has null dimensions.

2. Mathematical Formulation

The solution domain is depicted in Fig. (1), which also shows the Cartesian system of coordinates used in the present work. Considering the flow inside a flat channel as laminar and incompressible, the dimensionless system of equations for the conservation of mass, momentum and energy are written as

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u_x \theta}{\partial x} + \frac{\partial u_y \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \tag{4}$$

with boundary conditions

$$u_x = f_i(y), \quad u_y = 0, \quad \theta = 1; \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq l \tag{5}$$

$$u_x = f_o(y), \quad u_y = 0, \quad \partial \theta / \partial x = \partial \theta_w / \partial x; \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 \leq y \leq l \tag{6}$$

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad a_l \theta + b_l \partial \theta / \partial n = \phi_l(x, y); \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad y = h_l(x, y) \tag{7}$$

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad a_u \theta + b_u \partial \theta / \partial n = \phi_u(x, y); \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad y = h_u(x, y) \tag{8}$$

and initial conditions described as

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \theta = 0; \quad 0 \leq x < \infty, \quad h_l(x, y) < y < h_u(x, y) \tag{9}$$

where n is the independent variable normal. to the irregular solid surface. The lower and upper irregular solid surfaces are defined as

$$h_l(x, y) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x < A/H, y = 0 \\ y; & x = A/H, 0 \leq y \leq B/H \\ B/H; & A/H < x < (A+D)/H, y = B/H \\ y; & x = (A+D)/H, 0 \leq y \leq B/H \\ 0; & (A+D)/H < x < \infty, y = 0 \end{cases} \quad (10)$$

and

$$h_u(x, y) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < A/H, y = 1 \\ y; & x = A/H, (B+C)/H \leq y \leq 1 \\ (B+C)/H; & A/H < x < (A+D)/H, y = (B+C)/H \\ y; & x = (A+D)/H, (B+C)/H \leq y \leq 1 \\ 1; & (A+D)/H < x < \infty, y = 1 \end{cases} \quad (11)$$

The nondimensional variables appearing in Eqs. (1-9) are defined as

$$x = \frac{X}{H}; y = \frac{Y}{H}; u_x = \frac{U_X}{U_{max}}; u_y = \frac{U_Y}{U_{max}}; p = \frac{P}{\rho(U_{max})^2}; \theta = \frac{T_c - T}{T_c - T_i}; t = \frac{t^*}{H/U_{max}} \quad (12)$$

where the channel height (H) and the maximum velocity at the outlet (U_{max}) are used as length and velocity characteristic quantities, respectively. The nondimensional temperature θ is defined in terms of a constant characteristic temperature, T_c , and of the constant inlet temperature, T_i . For the constant wall temperature case, T_c is defined as the wall temperature value, T_w , and the dimensionless temperature is also normalized. For constant wall heat flux boundary condition, the characteristic temperature is defined as the ratio of the specified heat flux on the wall, q_w^* , by the fluid conductivity, k , times the characteristic length, H .

According to the nondimensional variables defined in Eq. (2-4), the Reynolds (Re) and Prandtl (Pr) numbers are defined as

$$Re = \frac{U_{max} H}{\nu}; Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (13)$$

where ν and α represent the kinematic viscosity and the thermal diffusivity, respectively.

The flow governing equations are rewritten in nondimensional vorticity-stream function form as

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u_x \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_y \xi}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

$$-\xi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (15)$$

with boundary conditions

$$\psi = \int_0^y f_i(y) dy; \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (16)$$

$$\psi = \int_0^y f_o(y) dy; \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (17)$$

$$\psi = 0; \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad y = h_l(x, y) \quad (18)$$

$$\psi = \int_0^l f_i(y) dy; \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad y = h_u(x, y) \quad (19)$$

and initial conditions

$$\psi = 0, \quad \xi = 0; \quad 0 \leq x < \infty, \quad h_l(x, y) < y < h_u(x, y) \quad (20)$$

Vorticity (ξ) and stream function (ψ) are respectively defined by the radial and tangential velocity components as

$$\xi = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (21)$$

and

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (22)$$

The vorticity values along the solid boundaries and at the channel inlet and outlet are initially unknown. These quantities are determined by an iterative solution procedure of the flow equations, which also accounts for the treatment of the non-linear terms present in Eq. (14).

3. Numerical Aspects

In the present work, the Finite Differences method is used for the numerical solution of the governing equations described above. The physical semi-infinite solution domain is truncated at $x = L / H$ where the outlet boundary conditions are applied. Numerical tests are performed for different values of L in order to guarantee the results independence on the truncated domain length. For the results shown in the present work, $L = 10$. A second order accurate implicit scheme is used for the spatial derivatives while a first order scheme is applied to the transient term. Furthermore, despite the transient nature of equations being solved, only the steady state results are analyzed in the present work.

Initially, the solution domain is split into three subdomains as shown in Fig. (2). Regularly spaced points are used with the subdomains, defining the discretizing grid. The resulting system of algebraic equations is solved by an iterative Gauss-Seidel procedure with sub-relaxation. In order to address the unknown vorticity values along the solution domain boundaries, an iterative procedure is employed. Initially, estimated vorticity values along the boundary are defined, allowing the solution of the vorticity transport equation, Eq. (14). With the obtained results, Eq. (15) is solved leading to the stream function distribution within the domain. Applying boundary conditions and the definitions of stream function and vorticity in terms of the primitive variables, the vorticity distribution along the boundaries is calculated. The obtained results allow the validation or correction of the initially estimated vorticity values. The iterative procedure is repeated until a specified tolerance criterion is satisfied, allowing a time step to be taken.

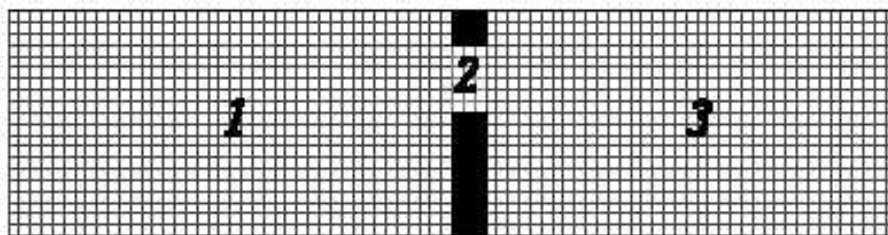


Figure 2 – Discretizing grid showing the three subdomains.

The numerical solution proceeds until the obtained vorticity and temperature fields for two consecutive time steps differ by an amount smaller than a given steady state tolerance. The Nusselt number along the channel walls defined by

$$Nu = \frac{2}{\theta_b - \theta_w} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=h_l(x,y)} \quad (23)$$

is evaluated using the steady state results. The dimensionless bulk temperature θ_b is defined by

$$\theta_b = \int_{h_l}^{h_u} (\theta u_x) dy / \int_{h_l}^{h_u} u_x \cdot dy \tag{24}$$

4. Results

The Graetz problem analytical solutions are used to validate the proposed numerical procedure. Graetz problems consider a fully developed velocity and a developing temperature profiles inside parallel plate channels. The formulation described by the Eqs. (1-9) is reduced to the Graetz problem formulation as the inlet and outlet velocity profiles are defined as $f_i(y) = 4y - 4y^2$ and $f_o(y) = 4y - 4y^2$, respectively. Constant wall temperature ($a_u = a_l = 1, b_u = b_l = 0, \phi_l = \phi_u = \theta_w$) and constant wall heat flux ($a_u = a_l = 0, b_u = b_l = 1, \phi_l = \phi_u = q_w$) thermal boundary conditions are considered. For the present analysis, the inlet and outlet temperature profiles are considered as uniform and fully developed, respectively. The numerical solution is performed in a physical domain where the obstruction height vanishes.

Table (1) shows the comparison between the analytical (Kays & Crawford, 1980) and numerical results for the Nusselt number within the thermal developed region. Within the precision of the calculation the analytical and numerical results agree for the case of $\theta_w = constant$. For the constant heat flux boundary condition a 0.6% deviation between analytical and numerical is present. Therefore, within this deviation, the numerical procedure provides an appropriate solution for the proposed problem.

Table 1- Nusselt number in the thermal developed region of the Graetz problems.

Nu			
$\theta_w = constant$		$q_w = constant$	
Numerical	Analytical	Numerical	Analytical
7.54	7.54	8.20	8.25

Symmetrical orifice plate results are shown in Figs. (3-6). The thermal and hydrodynamical entrance regions are evaluated considering uniform inlet velocity ($f_i(y) = 2/3$) and constant wall temperature. The temperature surface of the orifice plate is considered equal to the channel wall. The geometric and physical parameters for a base case are shown in Table (2)

Table 2 - Geometric and physical parameters for a base case.

Geometric Parameters				Physical Parameters	
A/H	B/H	C/H	D/H	Re	Pr
2	0.4	0.2	0.2	100	1

Stream function distributions for $Re = 10$ and $Re = 100$ are shown in Fig. (3) and Fig. (4), respectively. For $Re = 10$, the pronounced recirculation zone region behind the orifice plate, which is observed for $Re = 100$, presents a weaker intensity. The weaker intensity of the recirculation zone leads to a shorter hydrodynamic developing length after the orifice plate for the smaller Re . It is noteworthy mentioning that for the $Re = 100$ case – Fig. (4) – the flow reaches the orifice plate under developing conditions as shown by the nonparallel stream function profiles within the upstream orifice plate influence zone.

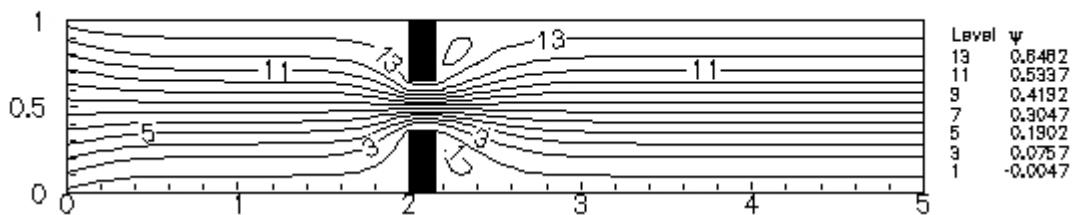


Figure 3 – Stream function considering a symmetric orifice plate and uniform inlet velocity profile ($Re = 10$).

Figures (5) and (6) depict the steady state temperature field for $Re = 10$ and 100 , respectively. A diffusion dominated process is observed for $Re = 10$ as shown in Fig. (5). Heat convection becomes important for $Re=100$ –

Fig.(6) - and the influence of the inlet fluid temperature affects the region downstream of the obstruction. Similarly to the hydrodynamic case, the thermal developed condition is reached for shorter lengths for small Re .

For the constant wall heat flux case and uniform inlet velocity profile, temperature field results present similar features when compared to the constant temperature case – Fig. (6). For the constant wall heat flux case, weak convective effects also lead to diffusion dominated processes within the recirculation flow, which is associated with the low temperatures zones located downstream of the orifice plate.

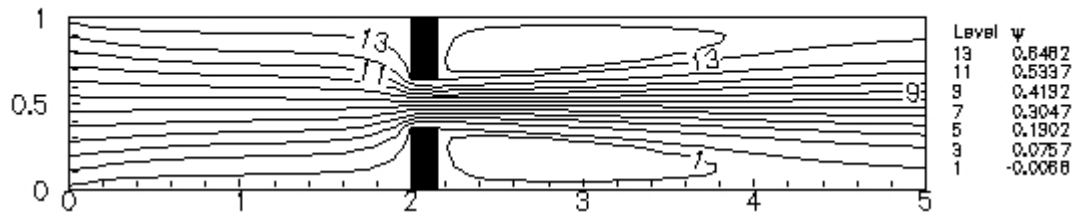


Figure 4 – Stream function considering a symmetric orifice plate and uniform inlet velocity profile ($Re = 100$).

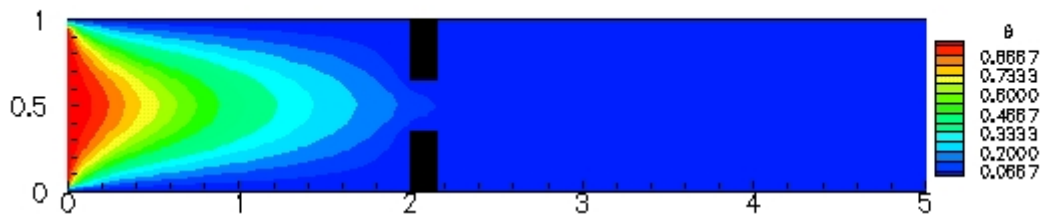


Figure 5 – Temperature field considering a symmetric orifice plate with uniform inlet velocity and temperature profiles – constant wall temperature case ($Re = 10$ and $Pr = 1$).

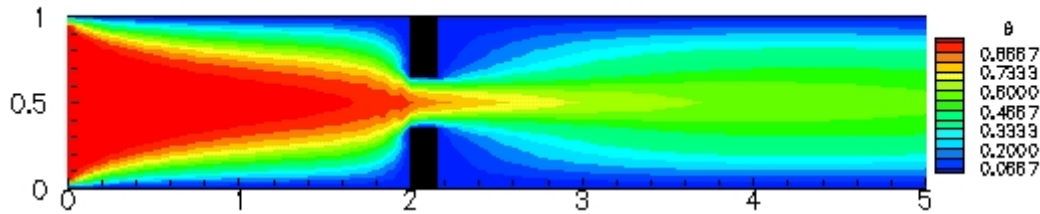


Figure 6 – Temperature field considering a symmetric orifice plate with uniform inlet velocity and temperature profiles – constant wall temperature case ($Re = 100$ and $Pr = 1$).

Considering a fully developed velocity profile at the inlet boundary and the same conditions described in Tab. (2), the analysis of an orifice plate located within the hydrodynamic fully developed region is performed. Stream function results are shown in Fig. (7), indicating a similar behavior of the velocity field downstream of the orifice plate when compared with the uniform inlet velocity profile case shown in Fig. (4). Upstream of the orifice plate, the flow field results shown in Fig. (7) indicate stream function profiles parallel to the channel walls. For the hydrodynamical developing case – Fig. (4) – the upstream stream function profile presents a converging behavior due to the existence of a transverse velocity component as the boundary layer develops. The qualitative independence of the downstream flow

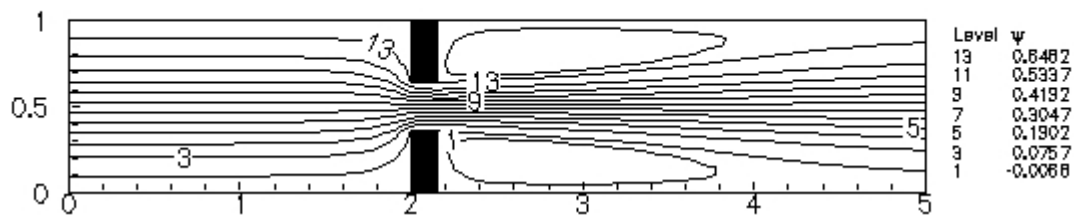


Figure 7 – Stream function considering a symmetric orifice plate and fully developed inlet velocity profile ($Re = 100$).

conditions from the inlet velocity profile can be explained by the enhanced momentum transfer caused by the obstruction.

The asymmetrical orifice plate case consider the constant wall and uniform velocity profile boundary conditions, differing from the base case - Tab. (2) – in the $B/H = 0.6$ dimension.

Results for the stream function and temperature fields are shown in Fig. (8) and in Fig. (9), respectively. The deflection of the center streamline is observed due to geometry asymmetry. The downstream zone is also affected by the orifice plate asymmetry, leading to different size recirculation zones. Within the recirculation zones the same behavior described for the symmetric orifice plate case is observed.

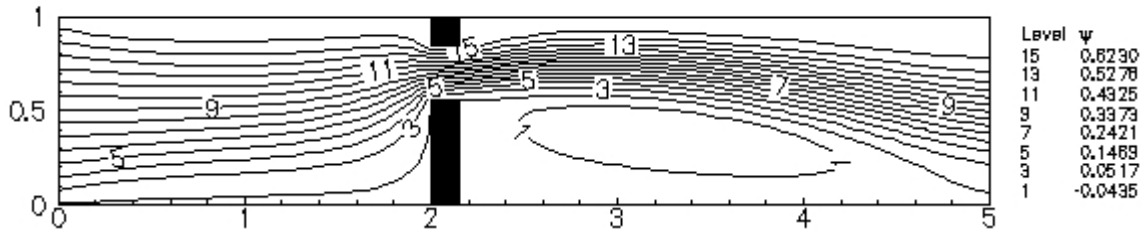


Figure 8 – Stream function considering an asymmetric orifice plate ($B/H = 0.6$) and uniform developed inlet velocity profile ($Re = 100$).

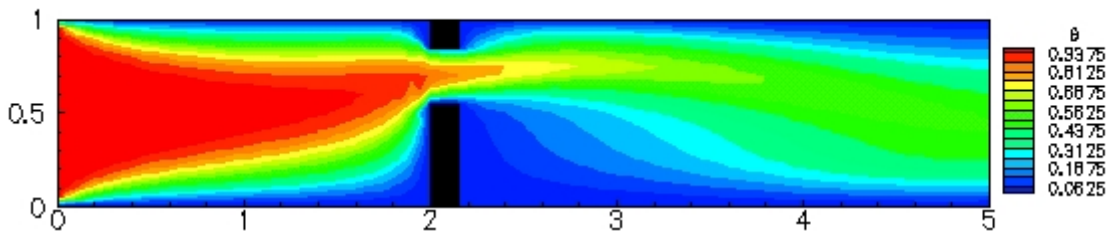


Figure 9 – Temperature field considering an asymmetric orifice plate ($B/H = 0.6$) with uniform inlet velocity and temperature profiles – constant wall temperature case ($Re = 100$ and $Pr = 1$).

Figure (10a) shows the Nusselt number behavior for the cases of symmetrical orifice plates, with $Re = 10$ and $Re = 100$, and for asymmetrical orifice plate with $Re = 100$. Uniform velocity inlet profile and constant wall temperature are considered. For all cases, the thermal effects of the orifice plate are represented by an abrupt increase of the Nusselt number at an upstream position near the orifice plate. The increase of Nu is associated with the higher velocities and temperature gradients present at the orifice plate opening region. Downstream of the orifice plate an abrupt decrease of Nu is also observed. Prior to abrupt increase, a reduction is also observed on Nu as the axial velocity decreases and a consequential weakening of convective effects follows. The reduction of Nu is associated with the recirculation zones and the broadening of the thermal boundary layer.

Within upstream region, the Nu increases with Re . For $Re = 10$, the Nusselt number reaches the asymptotic fully developed behavior before the orifice plate, being disturbed by the obstruction. For the downstream region, the effect of the recirculation zones on the heat transport leads to a Nu stabilization over a shorter channel length.

Comparing the results for the asymmetrical and symmetrical orifice plate cases within the downstream region, an overshooting of Nu values can be observed. The Nu overshooting is more significant for the asymmetric case and associated with the recirculation zone intensity.

The results in Fig. (10b) show that the Nusselt number is almost independent of the inlet velocity profile. Furthermore, the asymptotic Nu values observed in the Fig. (10a) and in the Fig. (10b) are in agreement with the values listed in Tab. (2) for the Graetz problems. So, the fully developed hydrodynamic and thermal profiles are reached downstream of the orifice plate, independently of the inlet and of the obstruction conditions.

5. Conclusions

The present study shows the influence of the orifice plates on the thermal and hydrodynamical entrance regions inside parallel flat plate channels. The intrusive aspects on thermal behavior due to the orifice plates served as motivation for the present work. The obtained results are used to evaluate quantitatively and qualitatively the effects of the boundary conditions, Reynolds number, axial position and asymmetry of the orifice plate on the flow and temperature behavior. Results show that variations of these geometric and flow conditions have strong influence on the momentum and energy transfer mechanisms. The Nusselt number is used as a reference parameter for the analysis of the thermal influence of the orifice plate. Results show a nonmonotonic behavior of the Nu in the orifice plate near region and an overshoot in the orifice downstream region for the higher Re . For the cases considered, the axial position of the orifice plate has no significant influence on the downstream behavior of the velocity field.

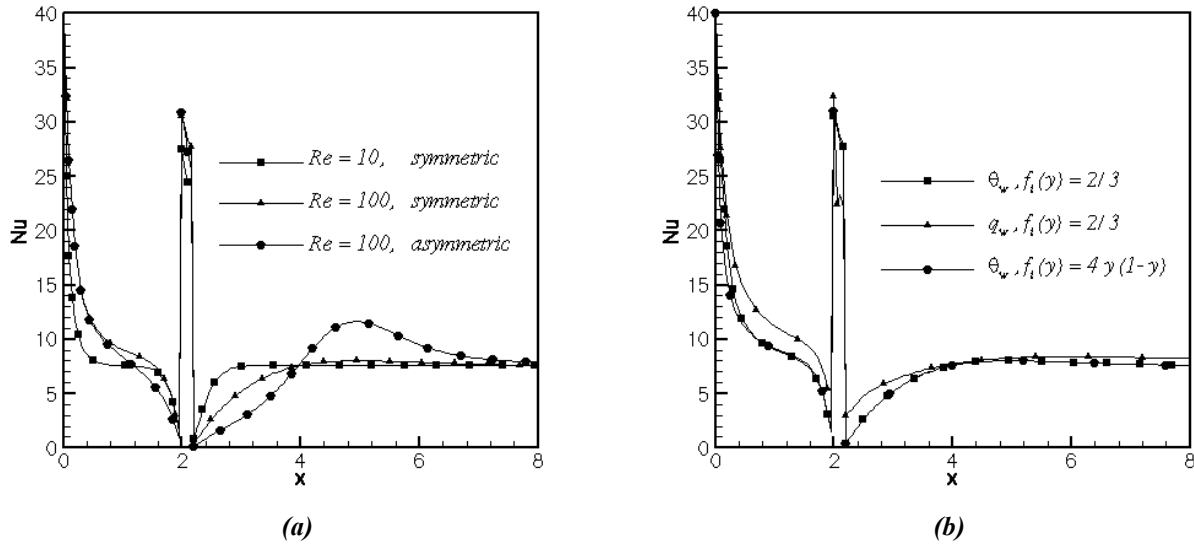


Figure 10 – Effects of the flow conditions on the Nusselt number. (a) *Re* and the asymmetry effects, (b) Variations on the velocity and thermal boundary conditions.

6. References

Alvi, S.H., Sridharan, K. and Lakshmana Rao, N.S., 1978, “Loss Characteristics of Orifices and Nozzles”, *J. of Fluids Engineering*, Vol. 100, pp. 299-307.

Anderson, D.A., Tannehill, J.C. and Pletcher, R.H., 1984, “Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer”, Ed. Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA.

Andrade, C.R. and Zapparoli, E.L., 1999, “Occurrence of Reverse Heat Flux in Conjugated Heat Transfer in Finned Concentric Tubes”, Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, CD-ROM, Rio de Janeiro, Brazil.

Holman, J.P., 1989, “Experimental Methods for Engineers”, Ed. McGraw-Hill, Singapore, Singapore.

Kays, W.M. and Crawford, M.E., 1980, “Convective Heat and Mass Transfer”, 2^o ed., Ed. McGraw-Hill.

Rowley, G.J. and Patankar, S.V., 1984, “Analysis of Laminar Flow and Heat Transfer in Tubes with Internal Circumferencial Fins”, *Int. J. of Heat Mass Transfer*, Vol. 27, No. 4, pp. 583-560.

Weeb, R.L., Eckert, E.R.G. and Goldstein, R.J., 1971, “Heat Transfer and Friction in Tubes with Repeated-Rib Roughness”, *Int. J. of Heat Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 601-617.

Yuan, Z., Tao, W. and Wang, Q., 1998, “Numerical Prediction for Laminar Forced Convection Heat Transfer in Parallel flat plate channels with Streamwise-periodic Rod disturbances”, *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, Vol. 28, No 9, pp. 1371-1387.

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA ÁREA DO ÂNODO NA DISTRIBUIÇÃO DE SOBREPOTENCIAL EM UM ELETRODO DE LEITO FLUIDIZADO (ELF).

Haroldo de Araújo Ponte

Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Química, Laboratório de Eletroquímica Aplicada. Centro Politécnico Cx. P. 19011- 81531-990- Curitiba, Pr, Brasil. hponte@engquim.ufpr.br

Maria José Jerônimo de S. Ponte.

Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Mecânica. Centro Politécnico Cx. P. 19011- 81531-990- Curitiba, Pr, Brasil. mponte@demec.ufpr.br

José Carlos Bianchi

Universidade Federal do Paraná, Programa Interdisciplinar de Engenharia de Materiais (PIPE). Centro Politécnico Cx. P. 19011- 81531-990- Curitiba, Pr, Brasil. jbianchi@cefetpr.br

Resumo: O uso de tecnologias limpas na resolução de problemas de poluição e, mais especificamente, na remoção de metais pesados de efluentes de processos de tratamento de superfície, está levando pesquisadores a analisarem com maior profundidade os Eletrodos de Leito Fluidizado (ELF). Estes estudos visam uma maior compreensão acerca de limitações destes reatores como, por exemplo, a existência de zonas de baixa taxa de deposição, zonas de dissolução e baixa eficiência de reator. Estas reações estão relacionadas à distribuição não uniforme do sobrepotencial no eletrodo particulado. Estas reações causam baixa eficiência de reator.

Este artigo analisa a influência da área superficial dos ânodos na distribuição de sobrepotencial dentro do reator. Foram utilizadas três diferentes áreas de ânodo de Pb/Sb a fim de se obter uma melhor compreensão da influência da área anódica na penetração das linhas de campo na zona do leito particulado. A densidade de corrente, a concentração inicial de íons a ser recuperada, a concentração de ácido sulfúrico, a expansão do leito e a distância entre eletrodos foram mantidos constante durante todos os experimentos.

A solução utilizada foi composta por sulfato de cobre, com 1500 ppm de íons cobre, em ácido sulfúrico 0,1 mol/L, pH 1. Um leito com partículas de cobre, com 1,0 mm de diâmetro, foi utilizado como catodo e para o ânodo foi utilizado liga de Pb/Sb.

Como consequência do aumento da densidade de corrente aplicada e da área anódica foi atingida uma eficiência de reator, para a reação de redução dos íons cobre, de cerca de 98%.

Palavras chave: Reatores Eletroquímicos. Tratamento de Efluentes. Eletrodos Fluidizados.

1- INTRODUÇÃO

A recuperação de metais pesados (Cu, Pb, Zn, Ni e Cr) de soluções diluídas, que estão presentes como resíduos industriais no setor de galvanoplastia e metalurgia extrativa, é necessária devido a problemas ecológicos e econômicos.

Do ponto de vista ecológico deve-se considerar que estes efluentes contendo metal, mesmo presentes em baixas concentrações, se constituem ainda em efluentes muito tóxicos, podendo ocasionar vários tipos de poluição: formação de bancos de lodo, extermínio da vida aquática e problemas relacionados com a saúde humana.

Para a recuperação destes metais pesados presentes em soluções diluídas, vêm sendo desenvolvidos os sistemas de eletrodos tridimensionais. Estes eletrodos têm sido considerados promissores, por possuírem uma grande área superficial específica e alta taxa de transferência de massa.

As partículas que constituem este leito são condutoras sendo na superfície das mesmas onde ocorrem reações eletroquímicas de redução do íon metálico presente na solução, quando aplicada uma determinada diferença de potencial ou corrente na célula. Este processo é constituído de apenas uma etapa o que propicia grandes benefícios, podendo conjugar redução de custos de implantação e maior eficiência.

Devido ao grande número de variáveis há a necessidade de se entender o comportamento interno destes sistemas, pois a reação eletroquímica local depende da distribuição do potencial local que terá grande influência na eficiência do processo [Ponte e Gubulin, 1992]. Assim, grande parte dos estudos experimentais tem investigado a distribuição do potencial metal-solução no interior dos reatores eletroquímicos.

Os principais problemas para a operação de eletrodos tridimensionais durante o processo de redução do íon metálico são: problemas com a distribuição de potencial e corrente (PONTE, 1998); a interferência da reação de evolução de hidrogênio e/ou oxigênio; a produção de dendritas ou depósitos esponjosos [Rajeshwar e Ibañez, 1997].

Alguns aspectos fundamentais devem ser considerados a princípio para um bom projeto e operação de FBE. Entre os mais importantes estão os conceitos de potencial e sobrepotencial de eletrodo, uma vez que estes determinam a seletividade da reação que irá acontecer [Germain et al., 1976 e Gaunand et al., 1977] e identificar uma condição ótima com relação a variação da concentração do íon Cu^{+2} (Ponte et al., 1999). Diante disso, este trabalho se propõe a estudar influência do ânodo, na distribuição do sobrepotencial e na eficiência de corrente deste sistema.

2- EXPERIMENTAL

2.1. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

A unidade experimental utilizada para a condução deste trabalho foi constituída por um conjunto de sistemas: escoamento do fluido, fornecimento de energia elétrica e o reator eletroquímico que se encontra na Fig. (1).

A Fig. (2) apresenta um desenho esquemático do reator eletroquímico utilizado. Nesta figura pode ser verificado o posicionamento paralelo entre eletrodos de forma que as linhas de corrente se mantêm paralelas ao fluxo de eletrólito. Neste caso, se for desprezado o efeito de bordas, pode ser considerado que há uma distribuição uniforme das linhas de corrente através da secção transversal do leito. Com esta distribuição uniforme das linhas de corrente, tem-se uma simetria com relação ao eixo central [Ponte, 1998]. Devido a esta simetria, as medidas de sobrepotencial foram feitas apenas no centro do leito.

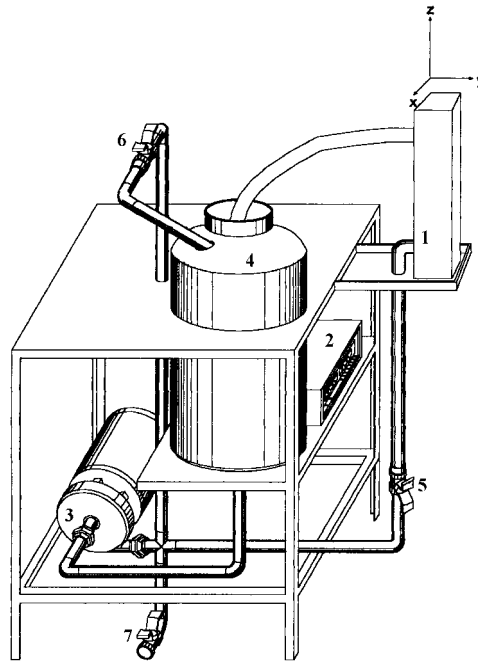


Figura 1- Esquema da unidade experimental utilizada. (1) reator eletroquímico; (2) fonte de corrente; (3) bomba centrífuga; (4) reservatório de eletrólito; (5) válvula da linha principal; (6) válvula do by-pass; (7) válvula da linha de esgotamento.

O reator eletroquímico utilizado foi construído em acrílico para visualização do processo. A corrente elétrica foi aplicada ao reator por meio de uma placa de cobre (alimentadora de corrente ou cátodo). Fechando contato elétrico no reator tem-se uma placa de liga de Pb/Sb (ânodo). O fluxo de eletrólito era ascendente e paralelo à direção das linhas de corrente elétrica. As partículas que constituíram o leito eram cilindros de cobre, de 1mm obtidos a partir de fio elétrico e atuavam como leito eletricamente condutor estando em contato direto com a placa alimentadora de corrente (cátodo). Na superfície de tais partículas ocorria reação eletroquímica de redução dos íons cobre presentes na solução. Durante o experimento observava-se, entretanto, que a reação de eletrodeposição ocorria preferencialmente numa região superficial até uma profundidade de aproximadamente 2mm. Nesta região verificava-se o crescimento das partículas sem, entretanto, haver aglomeração quando a expansão do leito era maior que 43%.

A distribuição de potencial no reator foi obtida através da utilização de uma sonda, sendo esta desenvolvida e construída conforme apresentado no trabalho de Ponte e Rodrigues [Rodrigues et al, 1997]. O eletrodo de referência utilizado foi de $\text{Hg}/\text{Hg}_2\text{SO}_4/\text{K}_2\text{SO}_4$ sat. , por apresentar o mesmo tipo de ânion do eletrólito.

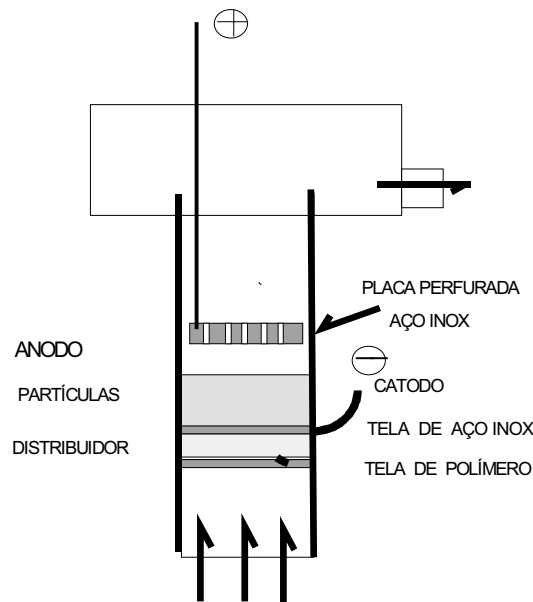


Figura 2- Reator a ser utilizado. Representação esquemática.

O eletrólito foi preparado utilizando-se ácido sulfúrico (H₂SO₄) suficiente para uma concentração 0,1 mol/L e sulfato de cobre (CuSO₄) na concentração de 0,024 mol/L equivalente a 1500 ppm em Cu.

Foram utilizados três ânodos de Pb/Sb com as seguintes áreas: 35,6 cm², 64,0 cm², 108,7 cm². O procedimento experimental utilizado consiste na seguinte seqüência de etapas:

Preparação e armazenamento do eletrólito; preenchimento do leito com as partículas até uma altura de leito predeterminada; ajuste da fonte de corrente elétrica de modo que a corrente determinada fosse conhecida; admissão do eletrólito no reator com uma vazão pré-estabelecida; encaixe da sonda em um suporte mecânico colocado no topo do reator; ligação de um multímetro à haste exposta da sonda e a um eletrodo de referência; ajuste da fonte de corrente elétrica; acoplamento dos contatos elétricos. Feita a leitura do potencial de equilíbrio no interior do leito; após esta etapa, iniciava-se a aplicação de corrente elétrica no sistema e iniciava-se a medida de distribuição dos potenciais em relação ao eixo z dentro do leito, em intervalos periódicos de tempo. Foram realizadas retiradas de amostras de solução e a sua concentração foi determinada através de análise eletrogravimétrica. Em todos os experimentos, a vazão foi mantida constante e a temperatura mantida em torno de 25 °C .

Este mesmo procedimento foi repetido para os experimentos com os três ânodos de distintas áreas superficiais.

2.2. DISTRIBUIÇÃO DOS SOBREPOTENCIAIS (h)

O sobrepotencial local h(z) dentro do reator foi obtido através dos dados experimentais do potencial metal-solução e do potencial de equilíbrio, obtido quando no reator não estava sendo submetido a aplicação de corrente elétrica, dito de circuito aberto [Vetter, 1967; Bard e Faulkner, 1982; Heita e Kreysa, 1986; Goodridge e Scott, 1995]. Estas grandezas estão correlacionadas através da Eq. (1), que pode ser escrita como:

$$\eta(z) = \theta_m - \theta_s - E_{eq} \tag{1}$$

Onde:

$E_{(z)}$ = $\theta_m - \theta_s$ é o potencial metal-solução; uma medida fornecida diretamente pela sonda em um determinado local delimitado por (z), quando da passagem de corrente;

E_{eq} é o potencial de equilíbrio metal-solução, uma medida fornecida diretamente pela sonda em um determinado local delimitado por z (mV), quando não há passagem de corrente, situação de circuito aberto.

3- ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nas Fig. (3) e Fig. (4) estão apresentados os resultados obtidos para a distribuição de sobrepotenciais no reator para os ânodos com diferentes áreas de superfície.

Com relação aos resultados obtidos, a partir das medidas de sobrepotencial no interior do leito, verificam-se três regiões distintas.

Uma primeira região em $z/Z = 0$ (no cátodo), onde se observam tendências para potenciais próximo do equilíbrio não apresentando condições eletroquímicas para reações significativas de deposição ou de dissolução.

Numa segunda região (região central) se observam sobrepotenciais negativos favorecendo a ocorrência de reações de redução.

Numa terceira região, em $z/Z = 1$ (no ânodo), observam-se sobrepotenciais ainda mais negativos. É nesta região em que onde ocorre a maior parte do processo de deposição de cobre com conseqüente aumento do diâmetro das partículas. A variação no diâmetro das partículas pode ser verificada na Fig. (5). Nesta figura observam-se, na base, as partículas em seu tamanho original. Já na parte superior pode ser observado o crescimento destas partículas causando, inclusive, aglomeração.

Observa-se também que, de um modo geral, o aumento da área dos ânodos causa uma diminuição dos sobrepotenciais catódicos principalmente próximos ao alimentador de corrente (cátodo) e ânodo. Estas variações de sobrepotencial, entretanto, não sofrem influência da variação de densidade de corrente aplicada.

A diminuição do sobrepotencial de deposição (negativo) não significa, necessariamente, que haverá diminuição na taxa de redução dos íons metálicos. Esta diminuição de sobrepotencial pode estar relacionada à diminuição da taxa de reações paralelas como a de redução de hidrogênio. Neste caso o que se teria é um aumento da eficiência do reator, com relação à remoção de metais do efluente.

Entretanto, não se observou influência da variação da área anódica na penetração das linhas de campo uma vez que não houve alteração na faixa da terceira zona (próxima ao ânodo) se mantendo em cerca de 30% de penetração. O que se observou foi uma alteração na relação entre faixas a primeira e segunda zona. Com o aumento da área anódica há uma diminuição da faixa da segunda zona com aumento da primeira.

O aumento da densidade de corrente também não apresenta influência aparente na penetração das linhas de campo mas causa uma sensível alteração nas relações entre as faixas da primeira e segunda zona. Esta alteração favorece maior redução na faixa da zona intermediária (segunda) e aumento na faixa da primeira. Uma conseqüência esperada deste comportamento é uma menor taxa de deposição no alimentador reduzindo o risco de bloqueio do fluxo de eletrólito, ou aumento de perda de carga.

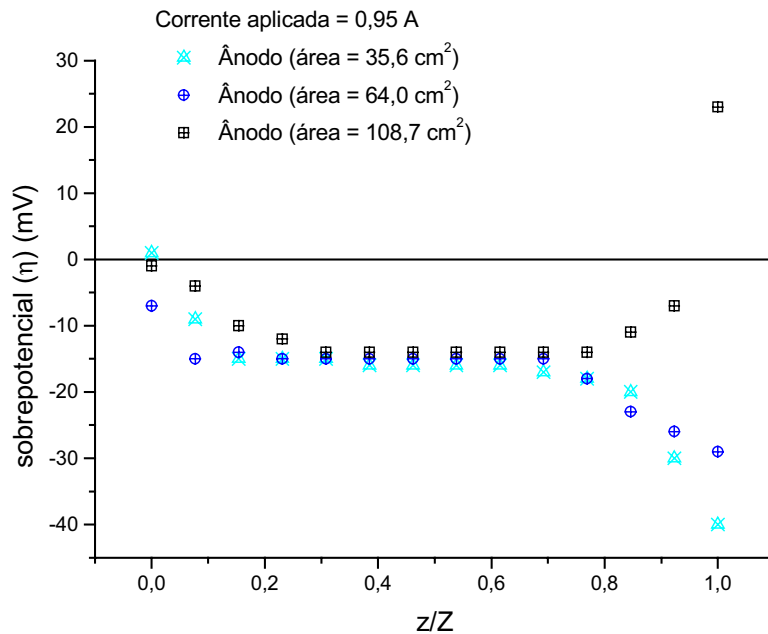


Figura 3 - Distribuição dos sobrepotenciais (η) em função de (z/Z) tendo como parâmetros áreas dos ânodos. Condições operacionais: solução CuSO_4 0,024 mol/L equivalente a 1500 ppm em Cu - H_2SO_4 0,1 mol/L; $Z = 1,4$ cm; $I = 0,95$ A.

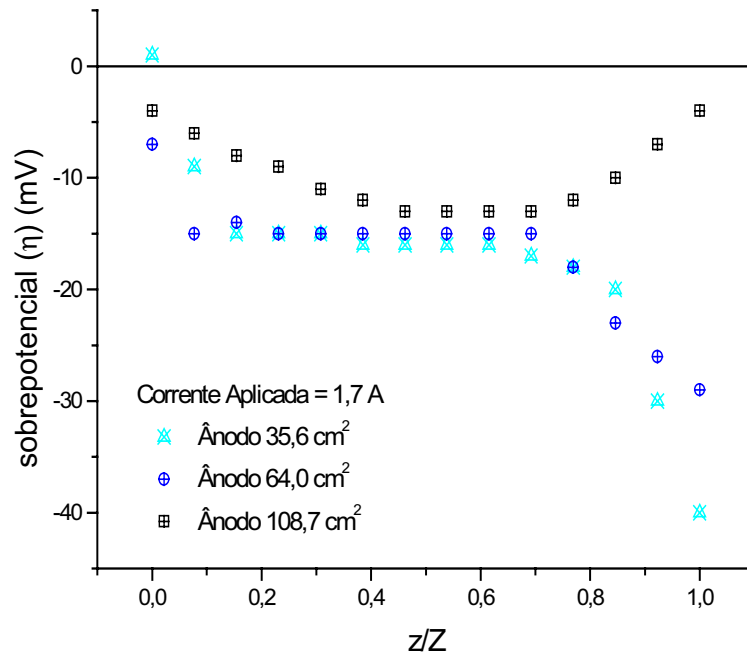


Figura 4 - Distribuição dos sobrepotenciais (η) em função de (z/Z) tendo como parâmetros áreas dos ânodos. Condições operacionais: solução CuSO_4 0,024 mol/L equivalente a 1500 ppm em Cu - H_2SO_4 0,1 mol/L ; $Z = 1,4$ cm ; $I = 1,7$ A



Figura 5 – Fotografia do reator indicando crescimento das partículas de cobre após processo de remoção dos íons cobre de solução.

Na Fig. (6) é apresentada a eficiência do processo em função da corrente aplicada tendo como parâmetros as áreas dos ânodos. Observa-se que a eficiência do processo de redução dos íons cobre aumenta com o aumento da corrente sendo, para menor densidade de corrente, maior para ânodos de área superficial intermediária e menor para o de maior área. Já para o caso de maior densidade de corrente esta situação se inverte apresentando maior eficiência de reação para o caso de ânodos de maior área.

Este aumento generalizado de eficiência de reação com o aumento da densidade de corrente indica um possível favorecimento das reações de deposição com diminuição de processos de dissolução química de partículas de cobre não protegidas catodicamente.

Já para o caso do aumento de área superficial, pode-se considerar que o aumento da eficiência para cerca de 98% para maiores áreas está associado ao menor sobrepotencial de redução. Desta forma há menor tendência para ocorrência de reações paralelas.

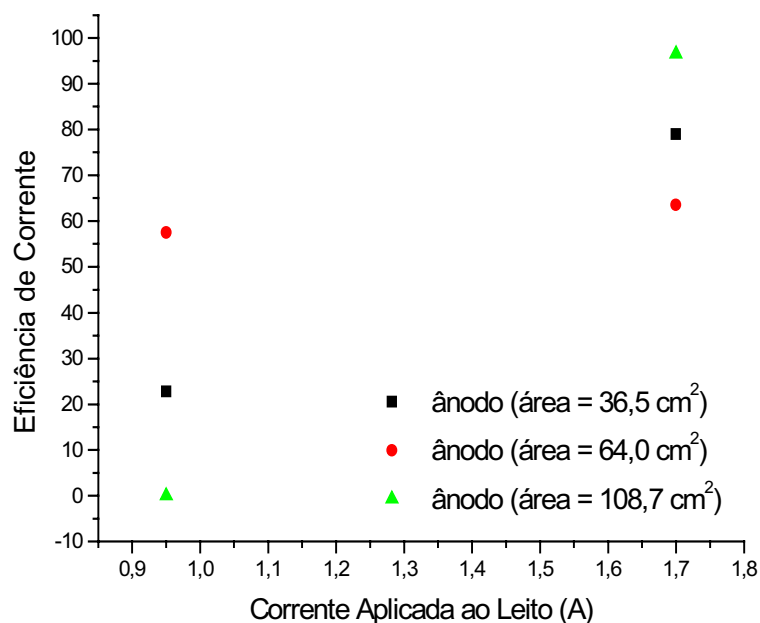


Figura 6 - Eficiência de corrente em função da corrente tendo como parâmetro a área dos ânodos

4- CONCLUSÃO

Diante dos resultados obtidos neste trabalho podem-se obter as conclusões discutidas a seguir.

O aumento da área dos ânodos causa uma diminuição dos sobrepotenciais de redução principalmente próximos ao alimentador de corrente (cátodo) e ânodo.

O aumento da eficiência do reator com a densidade de corrente, indica um favorecimento das reações de redução dos íons e menor dissolução química das partículas.

Há um maior aumento de eficiência para o caso de ânodo com maior área chegando a 98% de eficiência para reação de redução dos íons cobre.

5- REFERÊNCIAS

- Ponte, M.J.J. de S. e Gubulin, J.C., 1992, Eletrodeposição de metais pesados em sistemas particulados: uma revisão bibliográfica: In: XX Encontro sobre escoamento em meios porosos, São Carlos, 1992. Anais. São Carlos, UFSCar, 1992, p.669-678.
- Ponte, M.J.J. de S., 1998, Estudo da remoção do íon cobre de solução aquosa diluída em eletrodos de leito particulado. Tese. UFSCar, São Carlos – SP.
- Rajeshwar, K., e Ibañez, J.G., 1997, "Environmental Electrochemistry", 1ª ed., Academic Press, Londres.
- Germain, S. e Goodridge, F., 1976, Copper deposition in a fluidized bed cell. J. Electrochem. Acta, 21, 545-550.
- Gaunand, A., Hutin, D.E. e Coeuret, F., 1977, Potential distribution in flow- through porous electrodes under limiting current conditions. J.Electrochem. Acta, 22, 93-97.
- Ponte, M. J. J., 1998, Estudo da remoção do íon cobre de solução aquosa diluída em eletrodos de leito particulado. Tese de doutorado. UFSCar – DEQ, São Carlos, SP.
- Ponte, M.J.J. de S.; Ponte, H.A. e Gubulin, J.C., 1999, Eletroextração de metais por reator eletroquímico de leito particulado. Influência da concentração do íon metálico. In: XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia - SP. Cd do Congresso.
- Rodrigues, C.A., Ponte, M.J.J. de S. e Gubulin, J.C., 1997, Obtenção de um sistema para a realização de medidas de potenciais em eletrodos tridimensionais, In: XXV Encontro Sobre Escoamentos Meios Porosos, São Carlos - SP, Vol. 2, p.p. 327-332.
- Vetter, K.J., 1970. Electrochemical Kinetics - Theoretical and Experimental Aspects, NY and London, Academic Press.
- Bard, A.J. e Faulkner, L.R., 1980. Electrochemical Methods- Fundamentals and Applications, N.Y., John Wiley e Sons.

- Heitz, E. e Kreysa, G., 1970. Principles of Electrochemical Engineering. Weinheim Germain, VCH Verlagsgesellschaft mbh.
- Goodridge, F. e Scott, K. 1995. Electrochemical Process Engineering - A guide to the design of Electrolytic Plant. N.Y. and London, Plenum Press.

AN STUDY OF THE ELECTRODE AREA INFLUENCE ON THE OVERPOTENTIAL AND REACTION RATE DISTRIBUTION AT FLUIDIZED BED ELECTRODES (FBE)

Haroldo de Araújo Ponte

Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Química, Laboratório de Eletroquímica Aplicada. Centro Politécnico Cx. P. 19011- 81531-990- Curitiba, Pr, Brasil. hponte@engquim.ufpr.br

Maria José Jerônimo de S. Ponte.

Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Mecânica. Centro Politécnico Cx. P. 19011- 81531-990- Curitiba, Pr, Brasil. mponte@demec.ufpr.br

José Carlos Bianchi

Universidade Federal do Paraná, Programa Interdisciplinar de Engenharia de Materiais (PIPE). Centro Politécnico Cx. P. 19011- 81531-990- Curitiba, Pr, Brasil. jbianchi@cefetpr.br

Abstract: *The use of clean technologies in solving problems related to the pollution and, more specifically, for removing heavy metals in surface treatment effluents, is taking researchers to analyze in full detail the denominated Fluidized Bed Electrode (FBE). These studies seek a better understanding some of limitations of this reactors, as for example: areas with low deposition rates, areas with dissolution of the metals already recovered and low global yields. These reactions are related to the non-uniform overpotential distribution in the particulate electrode. Those reactions cause a low global yield.*

This paper analyzes the influence of the anode superficial area in the overpotential distribution inside the reactor. They were used three anodes of a Pb/Sb alloy with different superficial areas, in order to get a better understanding of the anodic area influence in the electric field penetration in the Fluidized Bed zone. The current density, the concentration of the ion to be recovered, the sulfuric acid concentration, the bed expansion and the distance between the electrodes were maintained constant during all the experiments. The solution used were a cooper sulfate solution, with 1500 ppm of copper ions in sulfuric acid 0,1 mol/l, pH 1. A bed with copper particles of 1,0 mm diameter was used as a cathode and electrodes of a Pb/Sb alloy as the anode.

With an increase of applied current density and the anodic area it was obtained a reactor yield, for the copper ion reduction reaction, of about 98%.

Keywords: Electrochemical Reactor. Effluent Treatment. Fluidized Electrodes.

ON KAPLUN LIMITS THE AND THE GENERALIZATION OF THE BLAISUS EQUATION FOR THE FLAT PLATE LEADING EDGE FLOW

Abstract. In the present work the Kaplun limits will be used to derive a generalized version of the boundary layer theory. The asymptotic analysis will be applied onto the Navier-Stokes equations and through the concept of principal equation proposed by Kaplun, a set of partial differential equations will be obtained which represents the asymptotic limit of the momentum equations as the Reynolds number approaches to infinite. These equations combine the inviscid flow formulation and the classical boundary layer equation into a single and more general theory which disregard the need of any type of Viscid-inviscid interaction. The proposed formulation will be used to study the flow over a flat plate, and a quasi-similar ordinary differential equation will be deduced which represents an extension of the Blasius equation. The validity domain of the quasi-similar equation will be analyzed and the asymptotic character of the Blasius solution, which is valid only when $(x Re) \Rightarrow \infty$ will be studied.

Key words: asymptotic analysis, boundary layer, viscid-inviscid interaction

1. Introduction

The boundary layer theory, represents one of the most important results obtained in the theoretical fluid dynamics history. Until the development of the theory by Prandtl in 1904 the external aerodynamics was almost a mystery. In the 19th century, the discrepancy between the perfect fluid theory for incompressible flow and the most elementary observations of the facts were not well explained since, the only known mechanical property of the air that had been neglected, namely the viscosity, could be considered to have a very little influence on the external flow at high Reynolds numbers. In fact the error was not on the perfect fluid theory employed, which can describe adequately the irrotational flow pattern, but on the boundary conditions used. In a very important article, Stokes (1851) had shown that the condition of zero relative velocity of the fluid and the solid surface, was the most justifiable boundary condition for the equations of motion of viscous fluids. Based on the fact that the perfect-fluid theory allows an arbitrary relative velocity tangential to the solid surface, the idea of the existence of transition layer between the solid surface, over which the no-slip condition should be applied, and the main stream flowing over it, was seriously discussed.

The formulation of the boundary layer theory came to explain the dynamics of the transition layer, and it was proved to be very fruitful in the modern fluid dynamics theory, describing accurately many fluid flow characteristics such as the frictional drag of bodies immersed in a flow, and the prediction of the beginning of the reverse flow region. In spite of its great success, the boundary layer theory still has some difficulties, basically connected to the division of the flow into two distinct regions namely, the near wall viscous region and the inviscid flow region. This division is perhaps a consequence of the 19th century way of thought in which the irrotational flow theory had to be corrected through the introduction of a transition layer, as mentioned before. According to this approach the boundary layer formulation is, in general, not a self-contained theory, in the sense that solution of the equations can only be obtained after the solution of the inviscid flow equations or after a viscous-inviscid interactive process.

Many articles can be found in the literature in which the viscous-inviscid interactive process is discussed for some practical situations [Whitfield,1981; Strawn 1984; Veldman 1981; Kwon 1986; DeJanette 1996; Tuncer,1995; Smith,1977; Smith,1984] and that the singular perturbation character of the boundary layer formulation is analyzed in detail. However, the discussion of which set of differential equations corresponds to the asymptotic limit of the Navier Stokes equations, as the Reynolds number tends to infinity is not complete yet, since neither the boundary layer equation or the inviscid formulation, described by the Euler equations, can characterize the flow alone.

In this work, the asymptotic structure of the Navier Stokes equation for high values of the Reynolds Number is analyzed. The intermediate variable technique developed by Kaplun [Kaplun,1967; Silva Freire,1990; Silva Freire,1999; Cruz et al,1998; Lagerstrom 1972; Cole,1968] is used to obtain a generalized formulation for the boundary layer theory. In this formulation, the classical division of the flow into a viscous region and an inviscid region disappears, making unnecessary any type of viscous-inviscid interaction. The flow over a flat plate is studied, and a quasi-similar ordinary differential equation, which is a generalization of the Blasius equation, is proposed. Numerical solutions of this equation are presented and analyzed.

2. The Fundamentals of the Theory

We shall consider perturbation methods to find approximate solutions to differential equations of the form

$$\varepsilon E_1(x, y, \dots, y^{(n)}) + (x, y, \dots, y^{(n-1)}, \varepsilon) + \dots = 0 \quad (1)$$

That is, equations where the small parameter E multiplies the highest derivative term. E is a given function of the variables $x, y, \dots, y^{(n)}, E$. Here $y^{(n)}$ is used to denote $d^n y / dx^n$.

The method to be studied here aims at developing a procedure to find approximate solutions to equations with form of Eq. (1) that are valid in different parts of the domain. This can be achieved by the introduction of a limit process that determines the terms of Eq (1) that have a dominant effect in the various regions of the domain.

To define this limit process some basic concepts need to be introduced. The following topology is introduced on the collection of order classes (Meyer, 1967)

For positive, continuous functions of a single variable ϵ defined on $(0,1]$, let $\text{ord } \eta$ denote the class of equivalence.

$$\text{ord } \eta = \{ \theta(\epsilon) \text{ such that } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta(\epsilon) / \eta(\epsilon) \text{ exists and is } \neq 0 \} \tag{2}$$

A partial ordering is constructed on these functions by defining

$$\text{ord } \eta_1 < \text{ord } \eta_2 \Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_1}{\eta_2} = 0, \epsilon \rightarrow 0 \tag{3}$$

A set D of order classes is said to be convex if $\text{ord } \delta_1, \text{ord } \delta_2 \in D$ and $\text{ord } \delta_1 < \text{ord } \theta < \text{ord } \delta_2$ together imply $\text{ord } \theta \in D$. A set D is said to be open if it is convex and if $\text{ord } \theta \in D$ implies the existence of functions γ, δ , such that $\text{ord } \theta > \text{ord } \gamma \in D$ and $\text{ord } \theta < \text{ord } \delta \in D$. A set D , on the other hand, is said to be closed if it is convex and has particular elements $\text{ord } \delta_1, \text{ord } \delta_2$ such that $\text{ord } \delta_1 < \text{ord } \theta < \text{ord } \delta_2$ for $\theta \in D$. Two order sets, D and D' , are said to be adjacent if: (1) $D' > D$ and (2) $\eta \in D'$ and $\eta' \in D \rightarrow \eta' > \eta$. We may refer to D' as being the upper adjacent region of. Analogously, D is said to be the lower adjacent region of D' .

Definition (Lagerstrom, 1988). We say that (x, ϵ) is an approximation to $g(x, \epsilon)$ uniformly valid to order $\delta(\epsilon)$ in a convex set D ((x, ϵ) is a δ -approximation to g), if

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - g(x, y)}{\delta(\epsilon)} = 0, \epsilon \rightarrow 0, \text{ uniformly for } x \text{ in } D \tag{4}$$

The function $\delta(\epsilon)$ is called a gauge function.

The essential idea of η -limit process is to study the limit as $\epsilon \rightarrow 0$ not for fixed x near the singularity point x_d , but for x tending to x_d in a definite relationship to ϵ specified by a stretching function $\eta(\epsilon)$. Taking without any loss of generality $x_d = 0$, we define

$$x_\eta = \frac{x}{\eta(\epsilon)}, \quad G(x_\eta; \epsilon) = F(x; \epsilon) \tag{5}$$

With $\eta(\epsilon)$ a function defined in Ξ .

Definition (Meyer, 1967). If the function $G(x_\eta; +0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x_\eta; \epsilon)$ exists uniformly on $\{x_\eta \mid |x_\eta| > 0\}$, then we define $\lim_\eta F(x; \epsilon) = G(x_\eta; +0)$.

Thus, if $\eta \rightarrow 0$ as $\epsilon \rightarrow 0$, then, in the limit process, $x \rightarrow 0$ also with the same speed of η , so that x_η tends to a non-zero limit value.

One of The central results of Kaplun's work is the extension theorem. Which is presented here in the following version (Meyer, 1967).

Kaplun's extension theorem. If $f(x; \epsilon)$ is a $\xi(\epsilon)$ -approximation to $g(x; \epsilon)$ uniformly in a closed interval D_0 , then it is so also in an open set $D \supset D_0$.

The above theorem was first published in Kaplun and Lagerstrom (1957) in connection with the Stokes paradox for flow at low Reynolds number. It needs to be complimented by an Axiom and by an Ansatz to relate the formal domain of validity of an equation with the actual domain of validity of its solution. The idea of Kaplun was to shift the emphasis to applying limit-processes directly to the equations rather than to the solutions, establishing some rules to determine the domain of validity of solutions from the formal domain of validity of an equation.

The set of equations that will result from passage of the limit is referred to by Kaplun as the "splitting" of the differential equations. The splitting must be seen as a formal property of the equations

obtained through a “ formal passage of the η -limit process“ .To every order of η a correspondence is induced, $\lim_{\eta} \rightarrow$ associated equation, on that subset of Ξ for which the associated equation exists

Definition: The formal limit domain of. an associated equation E is the set of orders η such that the η -limit process applied to the original equation yields E .

Passage of the η -limit will give equations that are distinguished in two ways: (1) they are determined by specific choices of η ; and (2) they are more complete, or in Kaplun’s words, “ richer” than the others, in the sense that application of the η -limit process to them will result in other associated equations, but neither of them can be obtained from any of the other equations.

Limit processes that yield “ rich” equations are called principal limit processes. The significance of principal limit processes is that the resulting equations are expected to be satisfied by the corresponding limits of the exact solution. The notion of principal equation is formalized below.

The above concepts and ideas can be given a more rigorous interpretation if we introduce Kaplun’s concept of equivalent in the limit for a given set of equations for a given point (η, δ) of the $(\Xi \times \Sigma)$ product space.

Given any two associated equations E_1 and E_2 , we define the remainder of E_1 with relation to E_2 as

$$\mathfrak{R}(x_{\eta}; \varepsilon) = E_1(x_{\eta}; \varepsilon) - E_2(x_{\eta}; \varepsilon) \tag{6}$$

Where ε denotes a small parameter.

According to Kaplun (1967), \mathfrak{R} should be interpreted as an operator giving the “ apparent force” that must be added to E_2 to yield E_1 .

Definition(of equivalence in the limit)(Kaplun,1967).Two equations E_1 and E_2 are said to be *equivalent in the limit* for a given limit process, \lim_{η} , and to a given order, δ , if

$$\frac{\mathfrak{R}(x_{\eta}; \varepsilon)}{\delta} \rightarrow 0, \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ } x_{\eta} \text{ fixed} \tag{7}$$

The following propositions are important; they can be found in Kaplun (1967).The symbol \sim is used to indicate equivalent in the limit, whereas $\not\sim$ indicates not equivalent in the limit.

Proposition 1:If $E \sim E'$ for the point (η, δ') of the product space $\Xi \times \Sigma$, then $E \sim E'$ for all points (η, δ) such that $\eta = \eta'$ and $\delta \gg \delta'$. Conversely, if $E \not\sim E'$ for the point (η, δ') , then $E \not\sim E'$ for all points (η, δ) such that $\eta = \eta'$ and $\delta \ll \delta'$.

Proposition 2:If $E \sim E'$ for the point (η, δ) of the product space $\Xi \times \Sigma$, and if associated equations for that point exist for E , then they exist also for E' and are indicated for both.

Proposition 3:If associated equations exist for E and E' , respectively, corresponding to $\eta = \eta'$ and the sequence $\delta = \delta'_0, \delta'_1, \dots, \delta'_n, \delta'$ where $\delta'_n > \delta > \delta'_{n+1}$ and are identical for both, then $E \sim E'$ for the point (η, δ') .

We can make the following definition.

Definition (of formal domain of validity).The formal domain of validity to order δ of an equation E of formal limit domain D is the set $D_{\varepsilon} = D \otimes D'_i$ s, where D'_i are the formal limit domains of all equations E'_i such that E and E'_i are equivalent in D'_i to order δ .

Definition(of principal equation).An equation E of formal limit domain D is said to be principal to order δ if: (1) one can find another equation E' of formal limit domain D' such that E and E' are equivalent in D' to order δ ; and (2) E is not equivalent to order δ to any other equation in D .

An equation that is not principal is said to be intermediate.

To relate the formal properties of equations to the actual problem of determining the uniform domain of validity of solutions, Kaplun (1967) advanced two assertions the Axiom of Existence and the Ansatz about domains of validity. These assertions constitute primitive and unverifiable assumptions of perturbation theory.

Axiom(of existence) (Kaplun,1967).If equations E and E' are equivalent in the limit to the order δ for a certain region, then given a solution S of E , which lies in the region of equivalence of E and E' there exists a solution S' of such that as $\varepsilon \rightarrow 0, S \rightarrow S'$ in the region of equivalence of E and E' .

In other words, the axiom states that there, exists a solution S' of E' such that the “ distance” between S and S' is of the same order of magnitude as that between E and E' .

In using perturbation methods, the common approach is to consider the existence of certain limits of the exact solution or expansions of a certain form. This is normally a sufficient condition to find the associated equations and to assure that the axiom is satisfied (Kaplun [1967]). Equivalence in the limit, however, is a necessary conditions as shown by propositions (1) to (3).

To the axiom of existence there corresponds an Ansatz, namely, that there exists a solution S of E , which lies in the region of equivalence of E and E' . More explicitly, we write.

ANSATZ (about domains of validity) (Kaplun, 1967). An equation with a given formal domain of validity D has a solution whose actual domain of validity corresponds to D .

The word “corresponds to” in the Ansatz was assumed by Kaplun to actually mean “is equal to”; this establishes the link we needed between the “formal” properties of the equation and the actual properties of the solution.

The Ansatz can always be subjected to a *canonical test*, which consists in exhibiting a solution S' of E' that lies in the region of equivalence of E and E' and is determined by the boundary conditions that correspond to S .

Because of the heuristic nature of Axiom and of the Ansatz, comparison to experiments will always be important for validation purposes. The theory, however, as implemented through the above procedure; is always helpful in understanding the matching process and in constructing the appropriate asymptotic expansions.

1.1. The proposition of the principal equations

The “splitting” of the equations obtained through the definition of equivalent in the limit may be extended to higher order by introducing a fictitious perturbation of an arbitrary order δ . Thus, according to Kaplun(1967), for higher order the splitting of the equations corresponding to arbitrary limit process becomes more complicated and less significant; the operation of splitting is then merely reduced to exhibit some of they typical associated equations and same of the sufficient conditions under which they are associated. In fact, Kaplun lists three reasons why the splitting for higher orders should not be considered in detail: (1) the equations associated with a given point (η, δ) depend on the choice of the δ'_n for the corresponding limit process and may depend on the amount of information used in connection with the preceding terms, (2) the δ'_n depend to greater extent on boundary conditions and hence are difficult to determine a priori, and (3) much trivial splitting of the associated equations arises, corresponding to expansions of the preceding terms by different limits process.

Here, we want to further extend the above notions. In what follows we will show that for certain point of the associated equations will depend on the choice of some discrete values of δ'_n . Results indicate that the order of validity of an approximation is defined by open intervals determined by the discrete δ'_n s. Furthermore, no trivial splitting results in these certain points.

To extend the previous results to higher orders, we consider solutions of the form

$$f = f_0 + \Delta(\epsilon)f_1 \tag{8}$$

where $\epsilon \in \Xi$.

Some questions are now in order. Which function is $f_1(\epsilon)$ for a given differential equation? Is $f_1(\epsilon)$ the same for all regions of the domain?

The first question is complex and involves speculating on the existence and uniqueness of solutions. Of course, uniqueness of $f_1(\epsilon)$ can never be assured because given any $f_1(\epsilon)$, one can always present another $f_1'(\epsilon)$, such that $f_1'(\epsilon)$ is exponentially close to $f_1(\epsilon)$. Thus, according to Kaplun, there will always be a “question of choice” for the determination of the appropriate asymptotic expansions that must be solved relying on intuition and physical insight. An adequate $f_1(\epsilon)$ can, however, be determined in a very natural way. We require $f_1(\epsilon)$ to be such that the resulting equation for f_1 does not provide a trivial solution. A $f_1(\epsilon)$ satisfying this condition is said to be a critical

$f_1(\epsilon)$. Analogously, its order, $ord f_1(\epsilon)$, is called critical order. More precisely:

Definition(of critical order) (Kaplun[1967]). An order $ord f_1(\epsilon)$ is said to be critical if: (1) the corrections to f_0 to any order ζ in $D, D = \{ \zeta / ord \zeta < 1 \}$ are trivial; and (2) the corrections to f_0 to any order ζ in the complement of D are not trivial.

The above definition suggests that approximate solutions for different regions of the domain should not in general have the same $f_1(\epsilon)$. Of course, equal f_1 ’s might happen as a mere coincidence; however, it is important to give emphasis to the fact that, normally, this is not the case.

To find the several order approximate equations we substitute Eq. (8) into the original equations and perform elementary operations such as addition, multiplication, subtraction, differentiation, and so on. If these operations are justified, that is, if they do not lead to any nonuniformity, we then collect the terms of same order of magnitude and construct a set of approximate equations. Thus, it is clear that in the process of collecting terms, to each term E_1 of order, say V , there will always correspond another term E_2 of order $V - 1(\epsilon)$. Consider now an equation E where E_1 and E_2 denote the first two critical order terms. We call the operator $P_1(E) = E_1$ the first-order projection of E onto E_1 . Analogously, the operator $P_2(E) = E_2$ is called the second-order projection of E onto E_2 .

We can then enunciate the following proposition.

Proposition (of the principal equations). If there is a principal equation, E_1 , at a point $(\eta, 1)$ of the (Ξ, Σ) product space, then there is also a principal equation, E , at a point (η, ϵ) of (Ξ, Σ) with $E_1 = P_1(E)$.

Proof: Suppose E_1 is a principal equation at a point $(\eta, 1)$ of the (Ξ, Σ) product space. Then one can find a term $R_{1/}$ such that $R_{1/}$ is order unity in D (the domain of E_1) but $\text{ord } 1 < \text{ord } R_{1/} < \text{ord } \varepsilon$ in D_u , the upper adjacent domain of D . Here ε denotes the first critical order. Define $E'_1 = E_1 - R_{1/}$. Let E_2 and E'_2 now denote the first-order associated equations in D and D_u , respectively. Then, there is a term $R_{2/}$ is order ε in D but $\text{ord } R_{2/} < \text{ord } \varepsilon$ in D_u . Define $E'_2 = E_2 - R_{2/}$.

As a result, the structure of the lower adjacent regions is

$$\text{ord } R_{1/} < \text{ord } E'_1 < \text{ord } R_{2/} < \text{ord } E'_2 \tag{9}$$

This shows that no other equation is equivalent to order ε to equation $E = E'_1 + R_{1/} + E'_2 + R_{2/}$ in D . However, E and E' ($=E'_1 + R_{1/} + E'_2$) are equivalent in D_u to order ε . We conclude that E is a principal equation at a point (η, ε) of the (Ξ, Σ) space, where η denotes the formal limit domain of E and ε the first critical order, then $\delta_1(E)$ is a principal equation at a point $(\eta, 1)$ of the (Ξ, Σ) space.

The converse of the above proposition is obviously true, that is if E is a principal equation at a point (η, ε) of the (Ξ, Σ) space, where η denotes the formal limit domain of E and ε the first critical order, then $\delta_1(E)$ is a principal equation at a point $(\eta, 1)$ of the (Ξ, Σ) space.

What the above proposition clearly states is that the proposition in the (Ξ, Σ) product space where the principal equations are located can be looked only at the lowest-order associated equations. Furthermore, it says that these lowest-order approximations are good up to the first critical order and that no trivial splitting will arise. This fact is only valid for the particular point in (Ξ, Σ) space where the principal equation holds. In the upper and lower adjacent domains trivial splitting occurs.

Results indicate that higher order splitting should not, in fact, be considered. The principal equations of the problem, those that retain most of the information about the problem solution, can have their position determined only through an analysis of the lowest order terms. Then the concept of critical order can be applied to the solution to find the appropriate asymptotic expansions for the problem.

2. The Generalized Boundary Layer Equation

The asymptotic method described in the former section, will now be used to analyze the asymptotic behavior of the Navier-Stokes equation as $Re \rightarrow \infty$. The main objective is to determine which set of differential equations can asymptotically describe the solution of the Navier-Stokes equations for high values of the Reynolds number. For a laminar incompressible, stationary and two dimensional flow of a newtonian fluid the continuity and the momentum equations can be written as follows:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \tag{11}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \tag{12}$$

In the above equations the non-dimension variables are defined using a characteristic length and a characteristic velocity of the flow.

The parameter Re represents the Reynolds number which is assumed to be large i.e. $(1/Re \ll 1)$

The intermediate variables are defined as:

$$y = \frac{y}{\eta(\varepsilon)} \tag{13}$$

$$v = \frac{v}{\eta(\varepsilon)} \tag{14}$$

where $\varepsilon = \frac{1}{Re}$.

Inserting equations (13) and (14) into equations (10), (11) and (12) the following expressions are derived.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\eta(\varepsilon)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (16)$$

$$\eta(\varepsilon)u \frac{\partial v}{\partial x} + \eta(\varepsilon)v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\eta(\varepsilon)} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\eta(\varepsilon) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (17)$$

Applying the η -limit onto equations (16) and (17) respectively one gets:
 For the momentum equation on x direction:

$$O(\eta) = O(1): u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (18)$$

$$O(1) > O(\eta) > O(\sqrt{\varepsilon}): u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (19)$$

$$O(\eta) = O(\sqrt{\varepsilon}): u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (20)$$

$$O(\eta) < O(\sqrt{\varepsilon}): \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

For the momentum equation on y direction :

$$O(\eta) = O(1): u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (22)$$

$$O(\eta) < O(1): \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

Each of the equations set above has a principal equation in the sense defined by Kaplun. The equation (20) represents the principal equation obtained through the application of the η -limit analysis, onto the mean momentum equation on x direction, and the relation (22) is the principal equation for the y direction. Since both the original equations for the two direction x and y have only one principal relations, the asymptotic behavior of the Navier-Stokes equation as $\varepsilon \rightarrow 0$ can be described by the solution of the following system :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (24)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

It is important to not that equations set (24) to (26) contains both the boundary layer and the inviscid flow formulation, as a particular case. The boundary layer equations can be obtained if one considers the case of $0(\eta)=0(\sqrt{\varepsilon})$. For this particular value of η the principal equation of the momentum equation for the x direction is obtained, (eq.(20)) but for the y direction, the equation that arises is not the principal one (eq.(23)). Therefore the boundary layer formulation, in the general case, is restricted to a near wall region since the equation (23) can only be applied for $0(\eta)< 0(1)$; and more than that because the relation (23) is not the principal equation it' s solution depend on the solution of the equation (22) which is not contained on the boundary layer formulation.

Hence, in this sense the boundary layer formulation is not a self contained theory. The same arguments can be used to show that the Euler equations are also not a self contained theory for the no slip boundary condition, thus none of the above cited formulations can alone be considered as the asymptotic limit (as $\varepsilon \rightarrow 0$) of the momentum equations.

Many authors have been used different types of viscid-inviscid procedures in order to describe the flow properties, using the boundary layer and the Euler equations to correct each other. Although those procedures have demonstrate their applicability in many situations, as the description of the separation region for example, their implementation is not always simple, and requires, sometimes the introduction of some artificial boundary conditions.

On the formulation described by the equations set (24) to (26), the viscid-inviscid interactions are not necessary, since no division of the flow into a viscous region near the wall, and inviscid region far from it is introduced.

3.The quasi-similar equation

As a first numerical result of the application of the proposed model, a quasi-similar equation will be deduced through the same procedure used to derive the Blasius equation.

Using the steam function the equations (24) to (26) can be rewritten as:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x^2} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \tag{27}$$

Defining now the following variables:

$$\tilde{\eta} = y \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\text{Re}}{x}} \tag{28}$$

$$\psi = \sqrt{2 \frac{x}{\text{Re}}} F(\tilde{\eta}) \tag{29}$$

Inserting equations (28) and (29) into eq.(27), the resulting transformed equation is obtained.

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} F'F'' - \frac{1}{2} FF''' - \frac{1}{2} F'''' + \frac{1}{\xi} \left[\left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right) \tilde{\eta} F'^2 - \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \tilde{\eta}^2 F'F'' - \right. \\ &\left. - \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right) FF' + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \tilde{\eta} FF'' + \frac{1}{8} \tilde{\eta}^2 FF''' \right] = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Where,

$$F^{(j)} = \frac{\partial^{(j)} F}{\partial \tilde{\eta}^{(j)}}$$

$$\xi = \text{Re } x$$

The equation (30) must be solved according to the following boundary conditions:

$$F'(0, x) = 0 \tag{31}$$

$$F(0, x) = 0 \tag{32}$$

$$F'(\tilde{\eta}_\infty, x) = 1 \tag{33}$$

$$F''(\tilde{\eta}_\infty, x) = 0 \tag{34}$$

Where $\tilde{\eta}_\infty$ represents a value of η assumed to be far enough of the solid wall. The equation (13) to (33) represents the classical boundary condition of the similar boundary layer flows, the additional boundary condition characterize the asymptotic behavior of the velocity on $\eta = \tilde{\eta}_\infty$. It is important to note that since the equation (30) has an asymptotic behavior as $\xi \rightarrow \infty$, the following relation is valid for some value of $\xi > 1$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \gg \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{35}$$

The equation (35) means that:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cong \frac{\partial F}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \tag{36}$$

The validity domain of this hypothesis will be analyzed later, in order to make clear the consistency of the analysis developed here.

4. Results and analysis

The equation (30) was numerically solved using a 4th order Runge-Kuta method and an interactive process to introduce the external boundary conditions at $\eta = \eta_0$. In figure 1 the development of the velocity profile for the flow over a flat plate is shown. The lowest values of η represents the velocity profile near the flat plate leading edge. The “overshoot” of the velocity profiles, has already been detected in some solutions of the N-S equations for the developing region of the flow between flat plates. For $Re_x = 1$ the solution of equation (30) is no longer valid, and the velocity profile shows some physically meaningless behavior such as very strong oscillations.

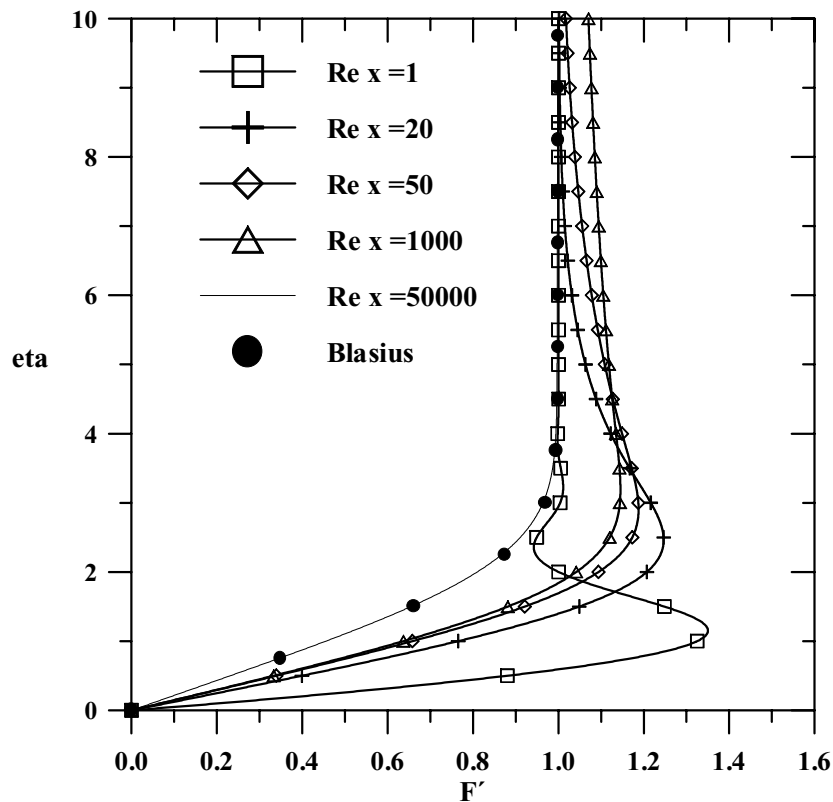


Figure 1 : Velocity profile for diverse values of Re x

As a conclusion of the present formulation, the “overshot” is a consequence high values of the velocity normal to the flat plate, that occurs in the early stages of the flow development. Thus it can not be predicted by the classical boundary layer theory without any higher order correction. Other important consequence of the solution of equation (30) is that the Blasius equation is mathematically valid only for $Re x \rightarrow \infty$. Therefore for some real flat plate with a finite length, the Blasius solution will never be completely reached. Of course for engineering purposes the Blasius solution is close enough of the equation (30) solution for much lower values of $Re x$, as can be seen in figure 1. This conclusion can be extended to other applications of the boundary layer formulation.

Figure 2 shows the relation $R = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x}$ for some values of $Re x$. As mentioned before this relation is small even for relatively low values of $Re x$. For $0(Re x) = 0(1)$ the formulation presented here is no longer valid and the flat plate leading edge solution of the flow must be used.

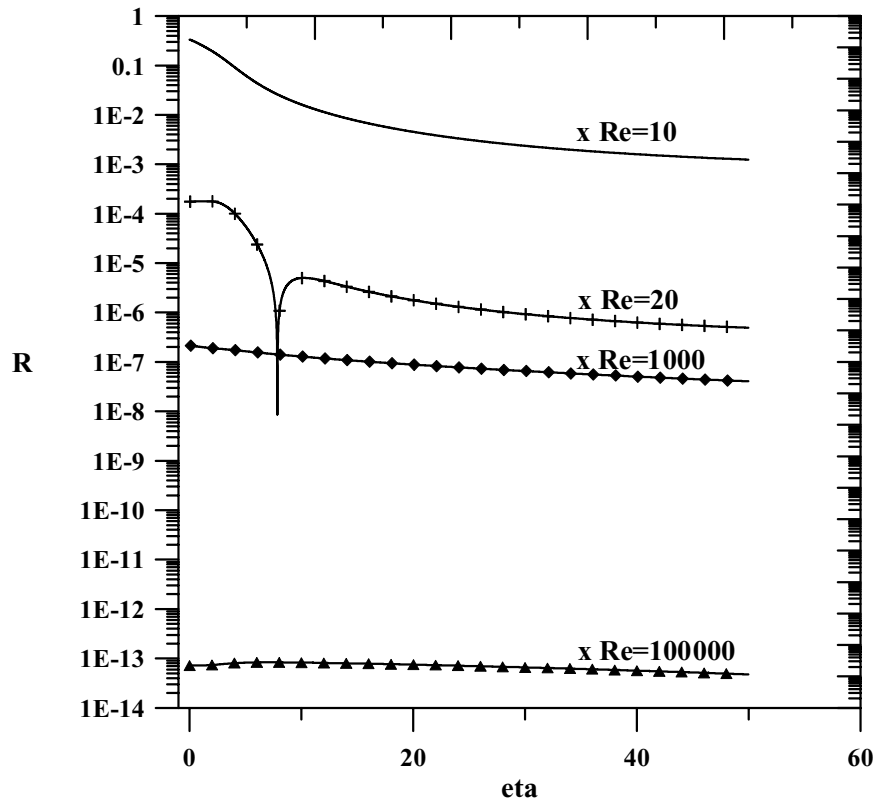


Figure 2: The relative influence of the derivatives related to x of the two variables of equation (30)

5.Conclusion

In this work the asymptotic behavior of the Navier-Stokes equation was analyzed using the Kaplun limits-intermediate variable technique. A set of partial differential equations were obtained, which represents a generalization of the classical Boundary Layer theory. The equations developed here represents a self contained theory, making unnecessary any type of viscid-inviscid interactive process. A quasi-similar equation for the flow over a flat plate was developed witch contains the Blasius formulation as a particular case. A numerical solution of the quasi-similar equation was presented, showing some characteristics behaviors of the numerical solutions of the Navier-Stokes equation for the flow over a flat plat.

The deduction of the equations set (24) to (26) is the central result of the present work. The Kaplun limits approach was used to determine the asymptotic behavior of a set of partial differential equations, resulting in a generalized Boundary Layer formulation.

The main difference between the classical Boundary Layer formulation and the approach used here is that in the later, the central focus of the analysis is to describe the near wall asymptotic behavior of the flow and not exactly, the asymptotic behavior of Navier Stokes equation, at the fluid region as a whole. The use of Kaplun limits permitted to obtain the principal asymptotic equation for each component of the velocity and to compose a “principal set “ set of equations. Witch are in fact, the combination of two well known formulation (the nonlinear inviscid flow and the

Boundary Layer) into a single more general theory, which describes the asymptotic solution of the Navier-Stokes equations for the entire flow region.

6. Acknowledgments

The author benefited from useful discussions with Prof. A P. Silva Freire

7. References

- Cole, J. D. 1968. " Perturbation Methods in Applied Mathematics." Massachusetts: Blaisdell.
- Cruz, D. O .A, and Silva Freire, A .P.,1998. " On Single Limits and the Asymptotic Behaviour of Separating Turbulent Boundary-Layer" . International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol.41,pp.2097-2111.
- DeJanette, F.R. and Radcliffe, R. A.,1996" Matching Inviscid/Boundary-Layer Flowfields" . AIAA Journal,Vol.34,pp.35-42.
- Kaplun, S. 1967 " Fluid Mechanics and Singular Perturbation" . New York; Academic Press
- Kwon, O.K and Pletcher, R.H ,1986" A Viscous-Inviscid Interaction Procedure-Part 1: Method for Computing Two-Dimensional Incompressible Separated Channel Flows" . Journal of Fluids Engineering,Vol.108,pp.64-75.
- Lagerstrom, P. A. and Casten, R.G. 1972. " Basic Concepts Underlying Singular Perturbation Techniques." SIAM Review,Vol.14,pp.62-121
- Smith, F.T ,Papageorgiou,D and J. W. Elliott 1984. " An Alternative Approach to Linear and Nonlinear Stability Calculations at Finite Reynolds Number." J. Fluid Mech., Vol.146,pp.313-330.
- Smith, F. T. 1977" The Laminar Separation of an Incompressible Fluid Streaming Past a Smooth Surface" Proc. R. Lond. Vol.356,pp.443-463.
- Silva Freire, A. P.,1999" On Kaplun Limits and the Multilayered Asymptotic Structure of the Turbulent Boundary Layer" Hybrid Methods in Engineering,Vol.1 pp.185-215.
- Silva Freire, A. P. and Hirata, M. H. 1990" Approximate Solution to Singular Perturbation Problems: The Intermediate Variable Technique" .Reprinted from Journal of Mathematical Analysis and Applications,Vol.145,pp.241-253.
- Strawn, R.C. Ferziger, J.H and Kline, S.J ,1984 " A New Technique for Computing Viscous-Inviscid Interactions in Internal Flows" .Journal of Fluids Engineering Vol.106, pp. 79-84.
- Tuncer, I H. Ekaterinaris, J. A. and Platzer, M. F.,1995" Viscous-Inviscid Interaction Method for Unsteady Low-Speed Airfoil Flows" . AIAA Journal,Vol.33,pp.152-153
- Whitfield , D.L, Swafford, T.W and Jacocks, J.L ,1981" Calculation of Turbulent Boundary Layers with Separation and Viscous-Inviscid Interaction" .AIAA Journal, Vol. 19, n10, pp.1315-1321.
- Veldman,A.E.P,1981" New,Quasi-simultaneous Method to Calculate Interacting Boundary Layers" .AIAA Journal,Vol.19,n1,pp. 79-85.

INTERAÇÃO VISCOSA /NÃO -VISCOSA PARA O CÁLCULO DO ESCOAMENTO SEPARADO E COLADO EM GRADES DE TURBOMÁQUINAS.

Ramiro Gustavo Ramirez Camacho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica. Av. BPS., 1303
ramirez@iem.efei.br

Nelson Manzanares Filho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica. Av. BPS., 1303
nelson@iem.efei.br

Denis Rinaldi Petrucci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica. Av. BPS., 1303
denispetrucci@uol.com.br

Resumo. O presente trabalho apresenta um modelo para o cálculo do escoamento viscoso em grades lineares representativas das turbomáquinas axiais. O modelo é baseado em modificações na técnica dos painéis de Hess e Smith (1967), de forma a introduzir os efeitos viscosos na região do fluxo colado, através das velocidades normais de transpiração, obtidas do cálculo da camada limite. Na região de fluxo descolado, são introduzidas velocidades normais, quantificadas através de uma intensidade de vazão fictícia obtida de modo semi-empírico e assumindo a hipótese de pressão constante na esteira. Na situação de não ser detectada a separação, é possível simular o efeito de uma pequena esteira descolada próxima ao bordo de fuga através da própria injeção de vazão numa região determinada pelos critérios do ajuste de Gostelow (1975). O modelo numérico apresenta dois ciclos de iteração, o primeiro para encontrar o ponto de separação e o segundo para realizar o acoplamento viscoso não-viscoso, no qual as velocidades de transpiração e de injeção de vazão são submetidas a um processo de sub-relaxação para garantir a convergência do método. Resultados das distribuições de pressões, ângulos de deflexão da grade e coeficientes de sustentação são comparados com dados experimentais, verificando-se a consistência do modelo.

Palavras-chave: Método dos painéis, separação da camada limite, grades lineares, iteração viscosa-não viscosa.

1. Introdução.

No projeto de grades de turbomáquinas, é necessário definir alguns parâmetros básicos, principalmente o ângulo de deflexão do escoamento e o coeficiente de sustentação das pás. Esses parâmetros devem ser suficientemente altos para garantir a maior elevação possível da pressão através da máquina, sem contudo comprometer a sua eficiência com carregamentos aerodinâmicos excessivos, típicos do “stall”. O resultado é que as grades de turbomáquinas axiais freqüentemente operam na sua condição ótima com significativas regiões de descolamento de camada limite. Este fato foi evidenciado por alguns pesquisadores tais como Lieblein (1959) e Schlichting (1959), sendo corroborado por análises teóricas de camada limite e ensaios experimentais em túneis de grades e compressores axiais. Nesse sentido, as situações de fluxo descolado devem ser necessariamente consideradas já nos estudos preliminares do projeto.

Ramirez et al. (2000) propuseram um modelo para simular o descolamento da camada limite em grades, baseado na técnica numérica dos painéis de Hess e Smith (1967), modificada na condição clássica de impenetrabilidade na superfície do perfil por uma injeção de vazão fictícia na região de descolamento, dada a partir das relações de Hayashi & Endo (1977). Resultados das distribuições de pressões, ângulos de deflexão máximos, e coeficientes de arrasto foram comparados com dados experimentais de perfis da serie NACA-65, verificando-se boa concordância.

No presente trabalho, apresenta-se um modelo mais completo, visando aplicações específicas em grades. Além da modificação da condição de impenetrabilidade pela injeção de vazão na região de fluxo descolado (Ramirez et al., 2000), os efeitos viscosos são introduzidos na região de camada limite colada através da técnica da transpiração. Por outro lado, a técnica dos painéis de Hess & Smith (1967) é mais uma vez reformulada sistematicamente de modo a permitir que a velocidade do escoamento na entrada da grade seja especificada diretamente em magnitude, W_1 , e ângulo de ataque, β_1 . Finalmente, resultados são apresentados para grades de perfis NACA-65 em toda a faixa de ângulos de ataque, incluindo-se a região do “stall”. O trabalho visa oferecer ao projetista uma ferramenta de “projeto direto” com baixo custo computacional. Outra motivação está nas possíveis extensões da metodologia ao “projeto inverso” de pás de turbomáquinas axiais, levando em conta a presença do descolamento e dos efeitos viscosos.

2. Formulação das Equações para o Cálculo do Escoamento em Grades Lineares.

Grades lineares são planos retificados de cortes cilíndricos em máquinas de fluxo axiais. A Fig. (2) mostra um esquema de uma grade linear infinita no plano complexo $z = x + iy$, sendo x o eixo axial e i a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

A grade é composta de perfis idênticos e igualmente espaçados de um passo t , com uma corda de comprimento l e ângulo de montagem β com relação a x .

Deseja-se estudar o campo de velocidades \vec{W} do escoamento relativo à grade, exteriormente aos perfis. As hipóteses de escoamento bidimensional, permanente, incompressível e potencial serão aqui consideradas. Os parâmetros do escoamento são representados pelos ângulos do escoamento na entrada e na saída, β_1 e β_2 , o ângulo de deflexão do escoamento na grade $\theta=(\beta_1-\beta_2)$; e pelas velocidades do escoamento na entrada e na saída \vec{W}_1 e \vec{W}_2 .

A velocidade do escoamento não perturbado é dada pela média vetorial das velocidades na entrada e na saída: $\vec{W}_\infty = (\vec{W}_1 + \vec{W}_2)/2$. A circulação no perfil é definida como $\Gamma_p = \oint W_{tan} ds$, onde W_{tan} é a velocidade tangencial externa ao contorno do perfil. A Fig. (1) apresenta as características geométricas de uma grade linear e o diagrama de velocidades.

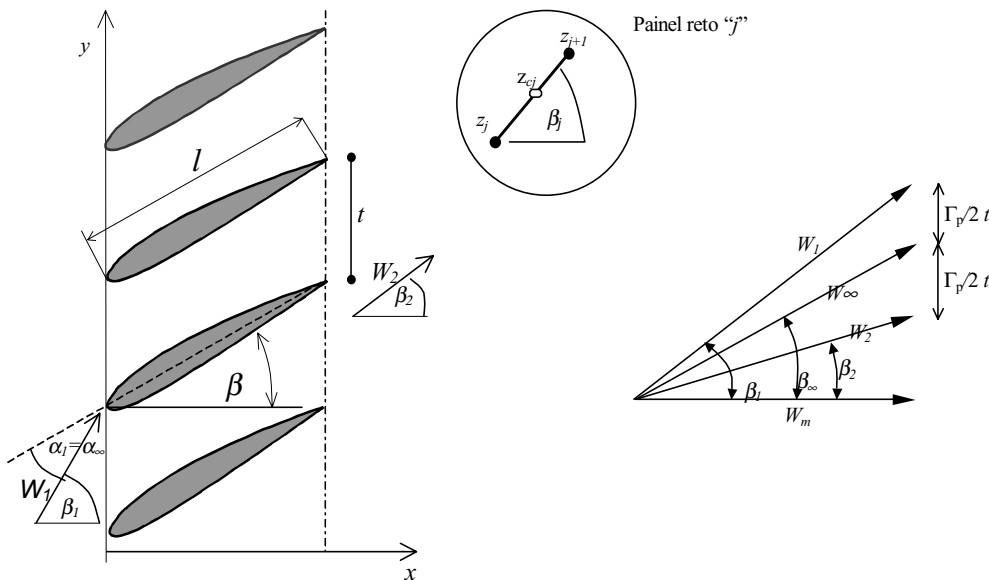


Figura 1. Grade linear e diagrama de velocidades.

2. Método dos painéis de Hess & Smith em grades.

A formulação básica do método dos painéis de Hess & Smith (1967) aqui empregada está descrita em detalhes no trabalho de Petrucci (1998). Os aerofólios são discretizados em painéis retos, concentrando-se maior quantidade deles nas regiões do bordo de ataque e de fuga. Utilizam-se distribuições uniformes de fontes e vórtices, sendo as intensidades de fontes tratadas como incógnitas e as intensidades de vórtices especificadas por uma função senoidal que se anula no bordo de fuga e atinge um valor máximo γ_{max} na região do bordo de ataque, $\gamma_{(s)} = \gamma_{max} \cdot F(s)$, tal que

$$F(s) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sen} \left[\pi \left(\frac{2 \cdot s}{s_l} - \frac{1}{2} \right) \right] \right], \tag{1}$$

onde s representa a coordenada do perfil partindo do bordo de fuga em $s = 0$, percorrendo o contorno do perfil com seu interior à direita e retornando ao bordo de fuga em $s = s_l$. Esse tipo de distribuição evita os carregamentos aerodinâmicos espúrios na região de um bordo de fuga afilado verificados no método clássico de Hess & Smith, que utiliza uma distribuição constante de vórtices em todo o perfil e, por isso, apresenta dificuldades na aplicação correta da condição de Kutta. Esta modificação na formulação básica de Hess e Smith foi testada com sucesso em varias situações de perfis com bordo de fuga afilado, como é o caso dos perfis Joukowsky isolados (Karamcheti, 1980) e a grade de Gostelow, 1984, no trabalho de Petrucci, 1998.

A expressão para a velocidade complexa conjugada no ponto de controle z_{ci} do painel i , induzidas pelas distribuições de fontes e vórtices de todos os painéis j , é dada por:

$$\vec{W}(z_{ci}) = \vec{W}_\infty + \sum_{j=1}^N \frac{g_j e^{-i\beta_j}}{2\pi} \log \left[\frac{\text{senh}(z_{ci} - z_j)/t}{\text{senh}(z_{ci} - z_{j+1})/t} \right], \tag{2}$$

onde g_j representa as densidades lineares de fontes e vórtices, $g_j = \sigma_j + i\gamma_j$, t o passo da grade, β_i o ângulo do painel i em relação ao eixo x e N o número de painéis. A Eq. (3) pode ser separada em duas parcelas, uma referente às fontes e outra aos vórtices. Para $i = j$, é necessária uma consideração especial para o efeito de auto-indução.

Dada a geometria da grade e o ângulo do escoamento médio, a Eq. (2) é aplicada em todos os pontos de controle, resultando um sistema de N equações algébricas lineares para as N intensidades de fontes. A intensidade máxima dos vórtices é determinada pela aplicação da condição de Kutta.

2.1. Reformulação do método de Hess & Smith fornecendo o ângulo na entrada.

É importante notar que a técnica numérica de Hess e Smith (1967) foi em princípio implementada para tratar o escoamento em perfis isolados na aerodinâmica de vôo. Nessa técnica, adota-se o ângulo de ataque α_∞ , medido com relação à corda do perfil, e a velocidade \bar{W}_∞ para o cálculo das distribuições de singularidades. Já na situação de perfis em grades representativas das turbomáquinas, a prática experimental costuma fixar a velocidade na entrada da grade W_1 e o ângulo de entrada, β_1 , medido com relação à direção axial (Emery et. al, 1957). Na primeira situação, para se obter o ângulo β_1 desejado, deverão ser testados iterativamente diferentes valores de α_∞ , até se obter uma circulação em torno dos aerofólios compatível com os diagramas de velocidade (Fig. 1). Esse procedimento pode aumentar significativamente o tempo de processamento computacional, principalmente quando se pretende efetuar interações viscosas/ não-viscosas. Nesse sentido, é interessante reformular o método de Hess e Smith visando fornecer diretamente o ângulo na entrada da grade e efetuar uma análise potencial sem iterações.

Da relação dos triângulos da Fig. (1), pode-se obter a relação entre as velocidades complexas conjugadas média \bar{W}_∞ e na entrada \bar{W}_1 :

$$\bar{W}_\infty = \bar{W}_1 + i \frac{\Gamma_{pa}}{2t} \quad (3)$$

A Eq. (3) é levada na Eq. (2), calculando-se em seguida as componentes de velocidade normal W_n e tangencial W_t ao contorno do perfil. Resulta que:

$$W_{t_i} = \mathbf{Re} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j e^{-i\beta_j}}{2\pi} \log(K) e^{i\beta_i} + \gamma_{max} \sum_{j=1}^N i \frac{e^{i\beta_j}}{2\pi} \log(K) \cdot e^{i\beta_i} \cdot F_i + \left(\bar{W}_1 + i \frac{\Gamma_{pa}}{2t} \right) e^{i\beta_i} \right) \quad (4)$$

$$W_{n_i} = -\mathbf{Im} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j e^{-i\beta_j}}{2\pi} \log(K) e^{i\beta_i} + \gamma_{max} \sum_{j=1}^N i \frac{e^{i\beta_j}}{2\pi} \log(K) \cdot e^{i\beta_i} \cdot F_i + \left(\bar{W}_1 + i \frac{\Gamma_{pa}}{2t} \right) e^{i\beta_i} \right) \quad (5)$$

onde K é o argumento da função logarítmica na Eq. (2).

A circulação em torno da pá é representada por uma integração numérica que faz uso da função peso definida na Eq.(2):

$$\Gamma_{pa} = \gamma_{max} \sum_{j=1}^N F_j \Delta s_j ; \quad \Delta s_j = \|z_{j+1} - z_j\| \quad ; \quad (6)$$

A Eq. (6) é substituída nas Eqs. (4) e (5), obtendo-se expressões para as velocidades tangencial e normal nos pontos de controle em termos da velocidade na entrada, com o efeito adequado da distribuição de vórtices:

$$W_{t_i} = \mathbf{Re} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j e^{-i\beta_j}}{2\pi} \log(K) e^{i\beta_i} + \gamma_{max} i \left(\sum_{j=1}^N \frac{e^{i\beta_j}}{2\pi} \log(K) \cdot e^{i\beta_i} \cdot F_i + (P) e^{i\beta_i} \right) + W_1 e^{-i\beta_1} \cdot e^{i\beta_i} \right\} \quad (7)$$

$$W_{n_i} = -\mathbf{Im} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j e^{-i\beta_j}}{2\pi} \log(K) e^{i\beta_i} + \gamma_{max} i \left(\sum_{j=1}^N \frac{e^{i\beta_j}}{2\pi} \log(K) \cdot e^{i\beta_i} \cdot F_i + (P) e^{i\beta_i} \right) + W_1 e^{-i\beta_1} e^{i\beta_i} \right\} \quad (8)$$

$$K(z_{c_i}, z_j) = \left[\frac{\sinh(z_{c_i} - z_j)/t}{\sinh(z_{c_i} - z_{j+1})/t} \right], \quad P = \frac{\sum_{j=1}^N F_j \Delta s_j}{2 \cdot t} \quad (9ab)$$

As Eqs (7) e (8) pode ser rescritas como o seguinte na forma do seguinte sistema compacto de equações matriciais:

$$\{W_t\} = [B]\{\sigma\} + \gamma_{max} \{D\} + \{W_{tan}^1\}, \quad (10)$$

$$\{W_n\} = [A]\{\sigma\} + \gamma_{max} \{C\} + \{W_{nor}^1\}. \quad (11)$$

onde as chaves $\{ \}$ representam vetores coluna $N \times 1$ e os colchetes $[\]$ matrizes quadradas $N \times N$. $[A]$ e $[B]$ são matrizes dos coeficientes de influência normal e tangencial, respectivamente, que dependem apenas da geometria do aerofólio, passo da grade, ângulo de montagem e número de painéis ; $\{D\}$ e $\{C\}$ representam os vetores de influencia tangencial e normal dos vórtices respectivamente; $\{W_{tan}^1\}$ e $\{W_{nor}^1\}$ são os vetores das componentes normal e tangencial do escoamento na entrada da grade; $\{W_n\}$ é o vetor das velocidades normais impostas em todo o contorno do perfil.

Segundo o método clássico de Hess & Smith para o escoamento potencial em torno de corpos, as incógnitas γ_{max} (vórtices) e σ (fontes) das Eqs. (10) e (11) são determinadas pela aplicação simultânea de duas condições. A primeira é a condição de contorno de impenetrabilidade, que exige uma velocidade normal nula sobre a superfície do corpo $\{W_n\}=0$; a segunda é a condição de Kutta clássica, que exige um escoamento que não contorne o bordo de fuga. Uma maneira aproximada de impor essa condição consiste em exigir que as velocidades tangenciais nos pontos de controle sobre os painéis do bordo de fuga sejam iguais, mas de sentido contrario em relação ao percurso, $W_{tN} = -W_{t1}$. As modificações na condição de contorno e na condição de Kutta para tratar o descolamento e as velocidades normais de transpiração, serão descritas nos próximos itens.

3. Simulação da esteira descolada.

A condição de contorno na velocidade normal W_n (Eq. 11) pode ser modificada no sentido de simular a esteira descolada, através de uma certa injeção de vazão fictícia. Hayashi e Endo (1977) obtiveram uma relação semi-empírica, que quantifica a vazão a ser injetada na região de descolamento.

Esses autores utilizam as direções tangenciais das velocidades de separação W_s nos pontos s_u (superior) e s_l (inferior), definidas pelos ângulos β_u e β_l respectivamente, como mostrado na Fig. (2a). A direção do escoamento é dado pelo ângulo β^* , num ponto arbitrário sobre a superfície do perfil, entre os pontos s_u e s_l , e admite-se que a componente normal de velocidade varie linearmente com a distância s ao longo da superfície.

Com base em dados experimentais, Hayashi e Endo (1977), obtiveram uma correlação semi-empírica entre a intensidade da vazão adimensional e os ângulos β_u e β_l , valida para diversos tipos de corpos rombudos e aerodinâmicos.

$$Q_E / l_{sp} W_s = 0.25 + 0.55 \cos\left(\frac{\beta_u + \beta_l}{2}\right) + 1.70 \sin\left(\frac{\beta_u - \beta_l}{2}\right) - 1.26 \cos\left(\frac{\beta_u + \beta_l}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_u - \beta_l}{2}\right), \quad (12)$$

onde Q_E é a vazão a ser injetada, W_s a velocidade no ponto de separação e l_{sp} , β_u , β_l , os parâmetros geométricos do perfil, como mostra a Fig. (2). A correlação foi estabelecida de forma a produzir uma pressão aproximadamente constante na esteira descolada através do modelo teórico desenvolvido pelos autores.

4. Efeito da camada limite colada.

O efeito da camada limite colada será tratado pela técnica da “transpiração”, que consiste na injeção de fluido no escoamento externo com base na espessura de deslocamento da camada limite Esta técnica foi proposta originalmente por Lighthill (1958), representada pela seguinte expressão:

$$W_{nt} = \frac{d}{ds} (W_t \delta^*), \quad (13)$$

onde W_t é a distribuição de velocidades tangenciais do lado externo da camada limite calculado pelo modelo potencial, $\delta^*(s)$ é a distribuição da espessura de deslocamento obtida através do cálculo da camada limite, e s é a coordenada natural em torno do perfil.

Para a determinação da distribuição da espessura de deslocamento δ^* , da espessura de quantidade de movimento θ , do fator de forma $H = \delta^*/\theta$, do coeficientes de atrito superficial c_f e do ponto de separação, resolve-se numericamente a equação da *quantidade de movimento* de von Kármán, dada uma distribuição de velocidades conhecida (o que equivale a especificar o gradiente de pressão). Para a solução desta equação são estabelecidos os seguintes métodos e critérios: o método integral de Thwaites para a região de camada limite laminar, o critério de Michel para a transição laminar – turbulenta e o método de Head para a região de camada limite turbulenta. Na separação turbulenta, adotou-se o valor do

fator de forma $H = 2,4$. O código computacional para o cálculo da camada limite foi obtido do trabalho de Cebeci & Bradshaw (1977).

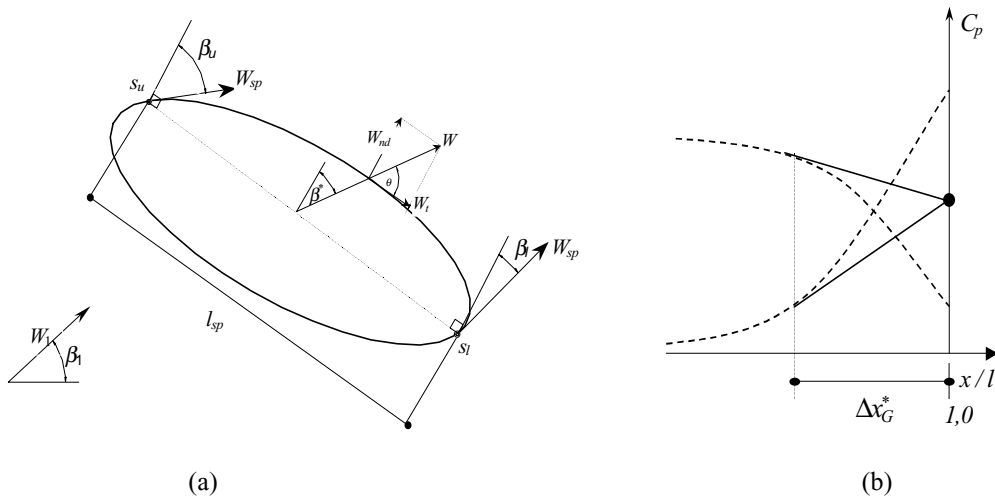


Figura 2. (a) Definição da componente normal de velocidade, W_{nd} . (b) Ajuste da distribuição de pressões na região do bordo de fuga, segundo Gostelow .

É importante notar que o código de camada limite implementado neste trabalho não permite modelar a formação de possíveis bolhas de descolamento sobre a superfície dos perfis aerodinâmicos. Essa irregularidade ocorre quando, a partir de um certo gradiente de pressão adverso, a camada limite laminar é separada e, em seguida, recolada numa condição turbulenta. Por exemplo, é possível detectar o efeito de uma bolha de recirculação nas curvas experimentais do coeficiente de pressão em grades de perfis NACA 65, operando com números de Reynolds intermediários (em torno de 10^5 , Emery et al., 1957). A pista é identificar a tendência de formação de um patamar de pressão constante logo após o ponto de pressão mínima do lado de sucção do perfil (e que demarca normalmente o final de uma região laminar estável). A modelagem bem sucedida de bolhas de separação permanece como tema ainda em aberto, requerendo estudos específicos que fogem ao escopo deste trabalho.

5. Simulação da esteira para pequenos ângulos de ataque.

O ajuste de Gostelow (1975) foi introduzido como um método de correção do escoamento potencial de maneira a simular os efeitos viscosos. Essa correção tem como finalidade reduzir a circulação e assim obter valores mais realistas dos coeficientes de pressão e de sustentação. A hipótese de Gostelow (1975) consiste em se efetuar um ajuste na distribuição de pressões, na região do bordo de fuga, de maneira a atender à condição de continuidade de pressões nesse local. A distância do bordo de fuga na qual é realizado o ajuste é denotada por Δx_G^* , como mostra na Fig. (2b) no gráfico do coeficiente de pressão, C_p em função de da abscissa adimensional, x/l . Admitindo-se a hipótese de que o valor de Δx_G^* representa uma medida dos efeitos viscosos na região do bordo de fuga, foram estabelecidos parâmetros de carregamento aerodinâmico capazes de quantificar esses efeitos e consequentemente determinar o valor de Δx_G^* . Pelas correlações de Lieblein (1959), verifica-se que a razão de difusão é uma medida do carregamento aerodinâmico, podendo ser utilizada para quantificar o valor de Δx_G^* . Lieblein define a razão de difusão potencial D_{pot} como a relação entre o valor máximo da velocidade potencial do lado de sucção e a velocidade média do escoamento na saída da grade. Efetuando análises de camada limite, Lieblein obteve uma correlação empírica a partir da qual é possível inferir um crescimento de Δx_G^* com a razão de difusão: $\Delta x_G^* = k_1 / (1 - k_2 \ln D_{pot})$ onde $k_1 = 0.020$ e $k_2 = 0.89$, são fatores de regressão ótima calculados em base dos resultados experimentais da difusão e Δx_G^* . Detalhes em relação a essa análise podem ser encontradas no trabalho de Manzanares Filho (1994).

A correlação mencionada acima será empregada neste trabalho visando situações em que o escoamento no lado de sucção não se separa do perfil, permanecendo praticamente colado até o bordo de fuga. Nessas situações, a modelagem de uma pequena esteira nas proximidades do bordo de fuga torna-se necessária para evitar que a espessura de deslocamento da camada limite cresça de modo descontrolado nessa região. Tendo em vista o objetivo deste trabalho, orientado ao projeto efetivo de turbomáquinas, e não especificamente às modelagens complexas de esteiras, será considerado um modelo bastante simplificado de esteira colada. A idéia é usar a própria injeção de vazão proposta por Hayashi e Endo (1977) para simular o efeito dessa esteira, utilizando a pequena região estabelecida pela distância de Gostelow, Δx_G^* , como região de injeção. Desse modo, ambos os efeitos de esteira descolada e de bordo de fuga passam a ser tratados de modo similar. A esteira será considerada descolada quando o ponto de separação for detectado a

montante da abcissa correspondente ao ajuste de Gostelow, $1 - \Delta x_G^*$. Caso contrário, será considerada uma esteira de bordo de fuga.

4. Extensão do método de Hess & Smith para perfis aerodinâmicos com e sem separação.

A extensão proposta neste trabalho será válida para tratar qualquer porção de uma camada limite colada, sendo os efeitos viscosos correspondentes quantificados através da técnica da transpiração. Já na região descolada, a extensão será válida unicamente para as situações de separação do lado de sucção do perfil (extradorso). Nessa região, a vazão de injeção teórica Q_T é dada pelas componentes de velocidades normais de separação (W_{nd}) e pelo comprimento ΔS do trecho do contorno com descolamento, considerando a hipótese de que as velocidades W_{nd} crescem linearmente a partir de zero no ponto de separação:

$$Q_T = \sum_{i=p_s}^N W_{nd_i} \Delta S_i / 2, \quad (14)$$

onde: p_s é o índice que representa o ponto de separação (de início arbitrário), ΔS é o comprimento ao longo da superfície do perfil na região de descolamento e N representa o número de painéis.

Relacionado-se convenientemente as Eq (14) e (12) é incorporando-se as velocidades de transpiração, tem-se:

$$\{W_n\} = \frac{2f(\beta_u, \beta_l)W_s}{l_{sep}} \{S\} + \{W_{nt}\}, \quad \{W_n\} = \{K\}W_s + \{W_{nt}\}, \quad \{K\} = \frac{2f(\beta_u, \beta_l)}{l_{sep}} \{S\}, \quad (15abc)$$

onde W_s é a velocidade de separação e $\{S\}$ é o vetor das coordenada locais da região descolada a partir do ponto de separação. Na Eq (15b), o primeiro termo da direita representa o vetor das velocidades normais de injeção em função da velocidade de separação W_s , e dos parâmetros geométricos; β_u , β_l , l_{sep} e S_i . No segundo termo dessa equação são calculadas as velocidades de transpiração da camada limite colada, resultando assim um vetor completo de velocidades normais em todo o contorno do corpo aerodinâmico W_n . Sendo assim é possível, substituir a condição de contorno de W_n (Eq. 15b) na Eq.(11), resultando o seguinte sistema de equações matriciais:

$$\{K\}W_s + \{W_{nt}\} = [A]\{\sigma\} + \gamma_{max} \{C\} + \{W_{nor}^1\}, \quad (16)$$

$$\{W_t\} = [B]\{\sigma\} + \gamma_{max} \{D\} + \{W_{tan}^1\}. \quad (17)$$

Isolando a intensidade de fontes σ da Eq (16) e substituindo na Eq (17), tem-se:

$$\{W_t\} = (-[B][A]^{-1}(\{W_{nor}^1\} + \{W_{nt}\}) + \{W_{tan}^1\}) + \gamma_{max} (-[B][A]^{-1}\{C\} + \{D\}) + W_s [B][A]^{-1}\{K\} \quad (18)$$

Fazendo as operações matriciais dos termos entre parêntesis da Eq (18), simplifica-se:

$$\{W_t\} = \{VINF\} + \gamma_{max} \{VGAMA\} + W_s \{VNOR\} \quad (19)$$

Na Equação (19), verifica-se que tanto a intensidade do vórtice γ_{max} como a velocidade de separação W_s , são incógnitas. Para determiná-las, modifica-se a condição de Kutta, fazendo com que a velocidade no ponto de separação W_s seja idêntica à velocidade do bordo de fuga do lado inferior; $W_s = W_{psep} = -W_1$. Então, da Eq (19), obtém-se um sistema de duas equações com duas incógnitas W_s , e γ_{max} , onde o sub- índice 1 refere-se ao primeiro painel do bordo de fuga do lado inferior e ps ao painel onde é fixada o ponto de separação.

$$-W_s = VINF_1 + \gamma_{max} VGAMA_1 + W_s VNOR_1; \quad W_s = VINF_{ps} + \gamma_{max} VGAMA_{ps} + W_s VNOR_{ps} \quad (20ab)$$

Resolvendo o sistema das Eqs (20ab) obtém-se os valores de γ_{max} e W_s :

$$\gamma_{max} = \frac{VINF_1 + VINF_{ps} + VINF_{ps} VNOR_1 - VNOR_{ps} VINF_1}{-VGAMA_1 - VGAMA_{ps} - VGAMA_{ps} VNOR_1 + VNOR_{ps} VGAMA_1}, \quad (21)$$

$$W_S = \frac{VIN F_{ps} + \gamma_{max} VGAMA_{ps}}{1 - VNOR_{ps}} \quad (22)$$

O valor do coeficiente de pressão, C_p , é calculado levando em conta as componentes das velocidades normais além das tangenciais:

$$C_{p1} = 1 - \left(\frac{W_{tan}}{W_1} \right)^2 - \left(\frac{W_n}{W_1} \right)^2 \quad (23)$$

5. Algoritmo de Cálculo.

A metodologia de cálculo do escoamento com separação em torno de perfis em grade, juntamente com a introdução dos efeitos viscosos através da iteração viscosa / não-viscosa é realizado utilizando-se dois códigos computacionais. (1), um código potencial de cálculo do escoamento em grades baseado na técnica numérica de Hess & Smith, com modificações para simular o efeito da esteira colada e descolada; (2) o código de cálculo de camada limite para determinação do ponto de separação e das velocidades de transpiração. A seguir será descrita sucintamente a metodologia do algoritmo de cálculo.

São fornecidos inicialmente para o 1º código: razão de solidez da grade $\sigma = l / t$, ângulo de montagem da grade β , ângulo do escoamento na entrada da grade β_1 , numero de painéis e coordenadas do perfil; estimativa inicial da posição do ponto de separação a partir do qual será determinada a injeção de vazão fictícia.

O cálculo do escoamento potencial modificado fornece as distribuições de velocidades com as quais o código de camada limite determina o ponto de separação do lado de sucção do perfil. As coordenadas naturais do perfil são retificadas de forma a simular o efeito de uma placa plana com gradiente de pressão

O código de camada limite é acionado iterativamente até convergir com o ponto de separação fixado para o cálculo potencial. Caso o ponto de separação calculado pelo código de camada limite estiver a jusante (montante) do ponto de separação fixado, esse é reposicionado mais a jusante (montante), até se obter convergência. Dependendo da posição inicial do ponto de separação escolhido, são necessárias de 15 a 20 iterações nos casos de 160 painéis, e de 7 a 10 iterações, no caso de 80 painéis. Após a convergência, se a distância do ponto de separação em relação ao bordo de fuga for menor que a distância do ajuste de Gostelow, ou caso não seja detectada a separação, adota-se a distância do ajuste de Gostelow para ser injetada a vazão fictícia. O programa oferece neste estágio resultados preliminares das distribuições de pressões do modelo potencial com influência da esteira descolada.

Inicia-se então o segundo processo iterativo, após ter sido definida a região de injeção. São introduzidas as velocidades normais de transpiração W_{nt} na região de fluxo colado, obtidas a partir da equação de Lighthill, Eq(11), sendo os valores das velocidades de transpiração sub-relaxados em cada iteração com fatores de relaxação FR escolhidos: $W_{nt(atual)} = FR W_{nt(atual)} + (1-FR)W_{nt(anterior)}$. As transpirações e a injeção de vazão interagem sucessivamente até que seja satisfeita a condição de convergência definida (por exemplo) pelo valor do coeficiente de arrasto total ($|C_{d\ atual} - C_{d\ anterior}| \leq 10^{-4}$). Após ter sido satisfeita a segunda convergência, testa-se se o ponto de separação não foi alterado; caso afirmativo, corrige-se o ponto de separação, e executa-se uma nova iteração completa.

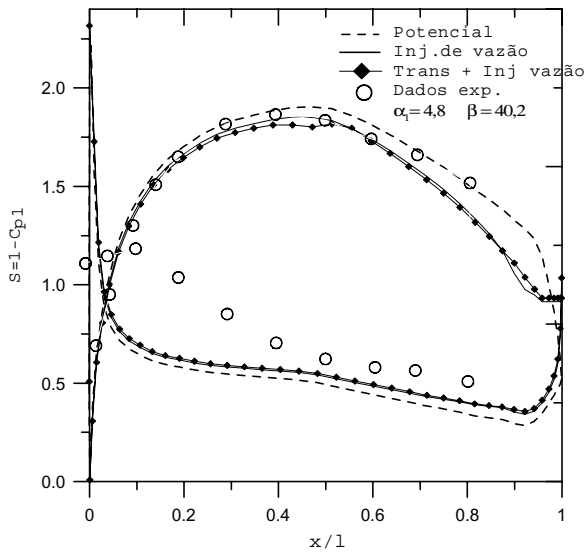
O ângulo de deflexão do escoamento é calculado pela circulação efetiva e pelo passo da grade (Fig. 1). A circulação efetiva é calculada pela integral das velocidades tangenciais em torno do perfil. Na região descolada, a velocidade tangencial efetiva é obtida a partir da velocidade de separação (constante) e das velocidades normais de injeção.

O coeficiente de sustentação é calculado pela integração dos coeficientes de pressão e dos coeficientes de atrito superficial. Na região do descolamento assume-se o coeficiente de pressão constante entre o ponto de separação o bordo de fuga. Nos exemplos subseqüentes, esta hipótese aparece explicitamente nos gráficos.

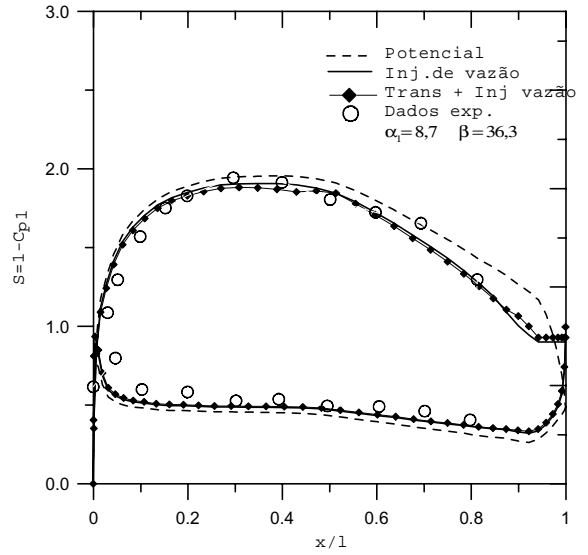
O programa computacional que implementa a metodologia foi desenvolvido em linguagem Fortran 95, utilizando-se as bibliotecas matemáticas IMSL® como ferramentas de apoio para a solução de equações matriciais, uso de “splines”, funções de interpolação e extrapolação.

6. Exemplo de aplicação.

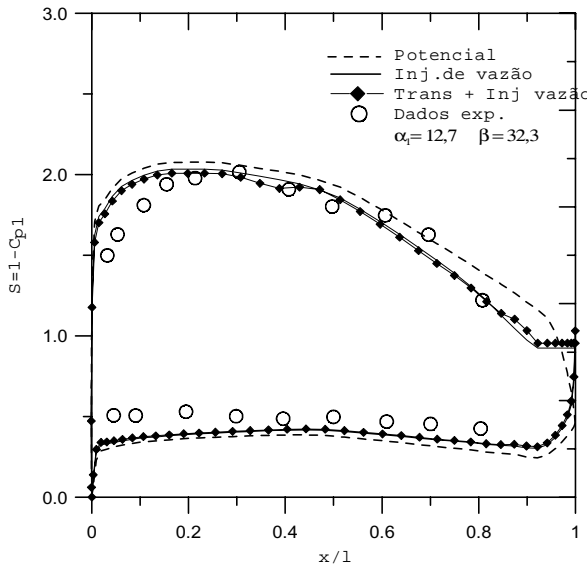
Para a validação da presente metodologia de cálculo do escoamento em grades, os resultados foram comparados com os dados experimentais de Emery et al. (1957) para perfil NACA65(18)10, com seis diferentes ângulos de montagem β e de ataque α_1 . Na Fig. (4), apresenta-se os resultados das distribuições de pressões para ângulo de entrada do escoamento $\beta_1 = 45^\circ$ ($\beta_1 = \beta + \alpha_1$) e razão solidez da grade $\sigma = 0.5$ ($\sigma = l/t$). Estão comparados o modelo potencial, o modelo com injeção de vazão pura, o modelo com injeção e transpiração de camada limite e os dados experimentais. Para todos os casos, foram utilizados 80 painéis na discretização da superfície do perfil e para o cálculo de camada limite adotou-se um número de Reynolds 2.54×10^5 baseado na corda e na velocidade de entrada .



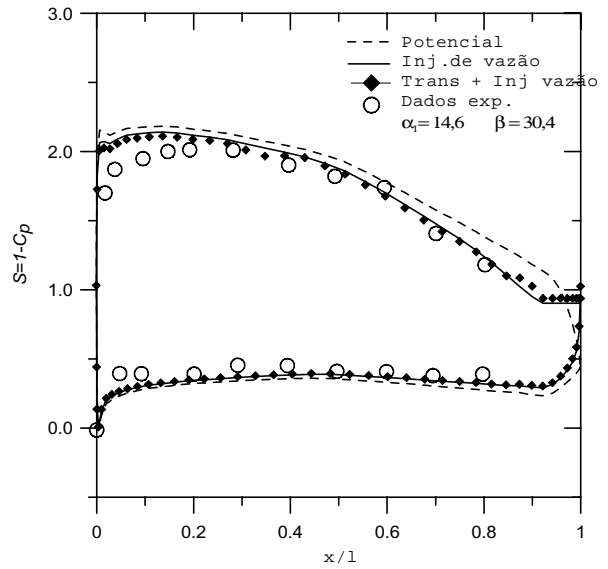
(a)



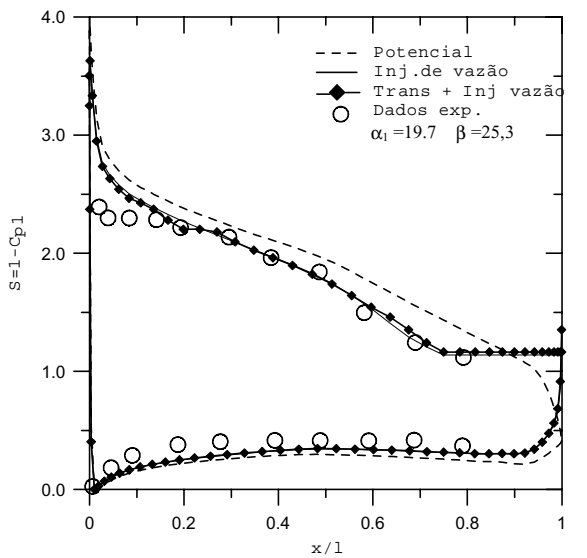
(b)



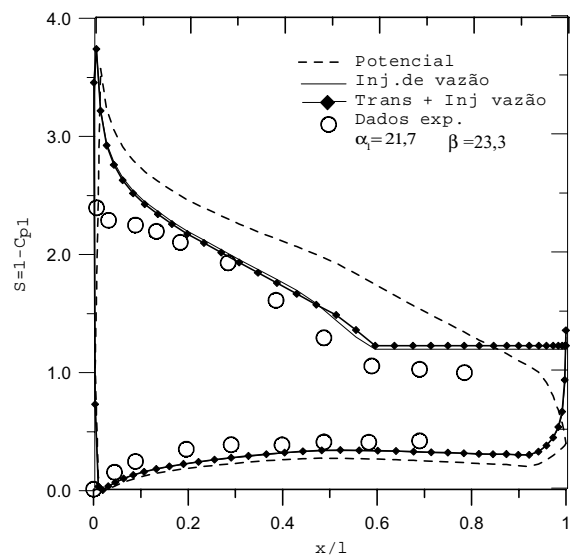
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4 – Distribuição de pressão, NACA65(18)10, $\beta=45^\circ$, $\sigma=0.5$

Foram necessárias de 20 a 60 iterações com fator de sub-relaxação igual a 0.1 para realizar o acoplamento viscoso/não-viscoso com um tempo de processamento entre 2 e 3 minutos num PC com microprocessador Pentium II de 400 Mhz. Quanto menor o ângulo de ataque, maior o número de iterações necessárias devido à maior importância relativa da transpiração da camada limite.

Para baixos ângulos de ataque, Fig (4a), verifica-se que as distribuições experimentais do lado de pressão do perfil, diferem fortemente do resultados do presente modelo devido a ocorrência de separação do lado de pressão, algo que no momento o presente modelo ainda é incapaz de tratar. Apenas nesse caso, o programa não tratou a esteira como descolada, utilizando a distância de Gostelow. Nos demais casos, Figs. (4b) até (4f), o critério para realizar a injeção de vazão foi definido pelo cálculo do ponto de separação da camada limite. Por outro lado, verifica-se nas Fig (4a)-(4d) que o efeito das velocidades de transpiração tem influência representativa nas distribuições de pressão resultando em diminuições do ângulo de deflexão de até 1° com relação ao modelo de injeção de vazão pura. Nas situações próximas do "stall", Figs. (4e) e (4f), verifica-se que a transpiração de camada limite tem efeito desprezível frente a injeção de vazão pura. Observa-se que, exceto na Fig. (4a), o modelo é capaz de corrigir satisfatoriamente as distribuições de pressão potenciais, resultando em ângulos de deflexão bem mais próximos dos experimentais, como mostra a Fig. (5a). De forma similar, para o coeficiente de sustentação, a Fig. (5b) mostra a boa concordância do modelo com os dados experimentais. Observa-se que o modelo potencial é incapaz de representar os valores reais do ângulo de deflexão e do coeficiente de sustentação, sobretudo na região de "stall". Salienta-se ainda que o modelo de injeção de vazão é capaz de prever satisfatoriamente os ângulos de deflexão máximos, de suma importância para o projeto das grades.

Os resultados experimentais de Emery et. al (1957) mostram que a máxima relação sustentação/arrasto ocorre na situação próxima à da Fig. (4d), onde a região descolada cobre aproximadamente 10% da corda. Essa é a situação ótima das grades para o ângulo de entrada considerado. Para grades com maiores ângulos de ataque, Figs. (4e) e (4f), a situação de "stall" se instala rapidamente, com zonas de descolamento em torno de 15 a 20% da corda. Essa tendência é típica das turbomáquinas axiais, que freqüentemente operam em condições nominais próximas do "stall".

Deve-se destacar que Emery et al (1957) indicam um erro experimental de $\pm 0,5^\circ$ para o ângulo de deflexão da grade, na região de projeto, podendo esse valor ser maior na região do "stall".

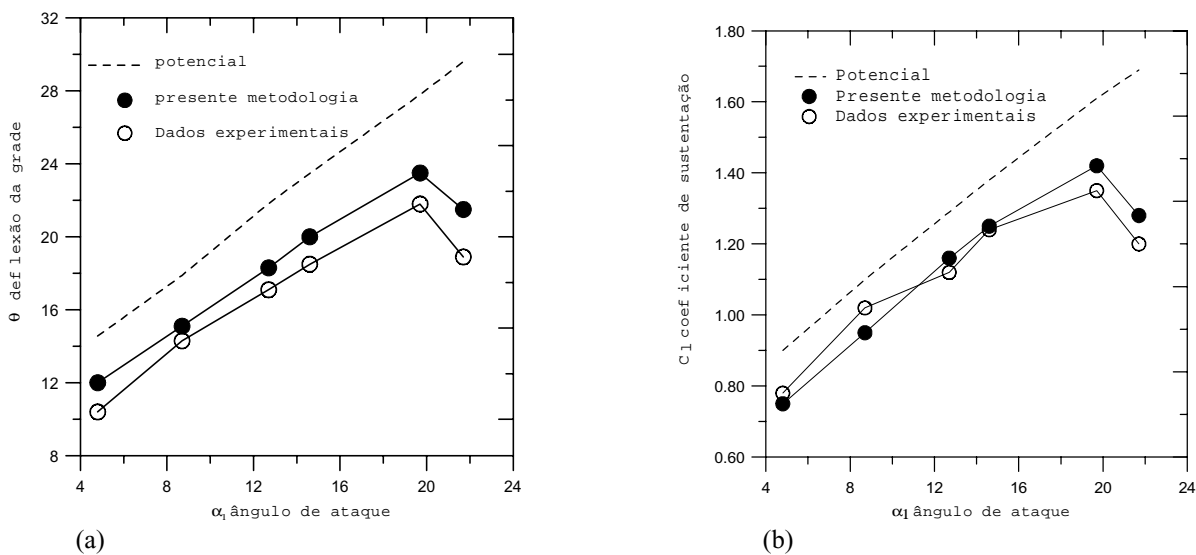


Figura 5. (a) Ângulo de deflexão da grade, NACA65(18)10, $\beta= 45^\circ$, $\sigma=0.5$ (b) Coeficiente de sustentação C_l

7. Conclusões.

A modificação do método de Hess & Smith (1967) para simular o escoamento em perfis em grades através da injeção de vazão e das velocidades de transpiração conduziu a resultados satisfatórios para as distribuições de pressões, ângulos de deflexão da grade e coeficiente de sustentação. Os resultados mostraram a forte influencia que representa a injeção de vazão, sobretudo na região próxima do "stall". A iteração viscosa/não-viscosa, mostrou-se eficiente com emprego de técnicas de relaxação nas velocidades normais de transpiração. Por outro lado, a implantação da metodologia tornou-se mais eficiente através da reformulação da técnica dos painéis de Hess & Smith, de forma a ser utilizada diretamente a velocidade na entrada da grade na determinação das distribuições de singularidades.

A metodologia de cálculo do escoamento em grades apresentada neste trabalho, baseada em formulações integrais de contorno, tem como vantagem o baixo custo computacional em relação aos métodos de discretização do campo de escoamento em malhas para a solução das equações de Navier Stokes completas. Esses modelos mais avançados, sem dúvida, podem ser fisicamente mais realísticos e apresentar maior precisão, porém a um custo computacional relativamente alto. Nesse sentido o presente modelo, serve de ferramenta de baixo custo na definição inicial do projeto de grades de turbomáquinas.

8. Referências.

- Cebeci, T., Bradshaw, P., 1977, "Momentum Transfer in Boundary Layers", McGraw-Hill/Hemisphere, Washington, D.C.
- Emery, J.C., Herrig, L.J., Erwin, J. R., Felix, R., 1957, "Systematic Two- Dimensional Cascade Tests of Naca 65- Series Copressor Blades at Low Speeds", NACA TN 1368, pp-23
- Hayashi, M., Endo, E., 1977, "Performance Calculation for Multi-Element Airfoil Sections with Separation", Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol 20, Nro 49.
- Hess, J.L., Smith, A.M.O., 1967, "Calculation of potential Flow About Arbitrary Bodies", Progress in Aeronautical Sciences, Pergamon Press, vol. 8, pp. 1-138.
- Lieblein S., 1959, "Loss and Stall Analysis of Compressor Cascades", Journal of Basic Engineering, pp 387- 400.
- Lighthill, M.J., 1958, "On displacement Thickness", J.F1 Mech., 4, pp.383
- Manzanas Filho, N., 1994, "Análise do Escoamento em Maquinas de Fluxo Axiais", Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos - Brasil.
- Petrucci, R.D., 1998, "Problema Inverso do Escoamento em Torno de Perfis Aerodinâmicos Isolados e em Grades de Turbomáquinas", Tese de Mestrado, EFEI, Itajubá – MG, Brasil.
- Ramirez, R.G., Manzanres, N.F., Petrucci, D.R., 2000, "Extensão do Método de Hess & Smith para Cálculo do Escoamento em Grades com Separação", Anais – CD- VIII Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas, ENCIT 2000, Porto Alegre - Brasil.
- Ramirez, R.G., Petrucci, D.R., Manzanas N.F., 1999, "Um Modelo de Escoamento Potencial para Cálculo da Distribuição de Pressões em Torno de Aerofólios com Separação Massiva", Anais IV Congreso Iberoamericano de Ingenieria Mecanica, CIDIM 99, Vol 3- Termofluidos, Santiago – Chile.
- Karamcheti, K., 1966, "Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics", John Wiley & Sonc. Inc., New York.
- Gostelow, J.P., 1984 "Cascade Aerodynamics", Pergamon Press Ltd., New York

INVISCID VISCOUS - INTERACTION CALCULATIONS OF ATTACHED AND SEPARATED FLOWS IN TURBOMACHINERY CASCADES.

Ramiro Gustavo Ramirez Camacho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica. Av. BPS., 1303
ramirez@iem.efei.br

Nelson Manzanas Filho

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica. Av. BPS., 1303
nelson@iem.efei.br

Denis Rinaldi Petrucci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica. Av. BPS., 1303
denisrpetrucci@uol.com.br

Abstract. *The present work presents a computational model for the viscous flow through rectilinear cascades of axial turbomachinery. The model is based on modifications of the classical panel method of Hess & Smith. The viscous effect of the attached flow portion is introduced by means of normal transpiration velocities obtained from the boundary layer calculations on the airfoil contour. At the separated flow portion, normal velocities are introduced, quantified semi-empirically by a fictitious flow rate and assuming the hypothesis of constant pressure in the wake. When the separation is not to be detected, it is possible to simulate the effect of the small wake near the trailing edge by using an injected flow on a distance based on the Gostelow (1975) fairing-in procedure. The numerical model presents two iteration cycles: the first to find the separation point, and the second to accomplish the viscous-inviscid interaction, in which the transpiration velocities and the flow injection are submitted to a relaxation process in order to guarantee the convergence of the method. Results for the pressure distributions, deflection angles and lift coefficients are compared with experimental data and the model consistency is verified.*

Word-key: *Method of the panels, separation of boundary layer, linear cascades, interaction inviscid -viscous.*

THE INFLUENCE OF THE DISTRIBUTOR PLATE ON THE BOTTOM ZONE OF A FLUIDIZED BED.

João Monney Paiva

Mechanical Eng. and Industrial Managt. Dept., ESTV, Campus Politécnico, 3504-510 Viseu, Portugal
jmonney@demgi.estv.ipv.pt

Carlos Pinho

Mechanical Eng. and Industrial Managt. Dept., Engineering Faculty, Porto University, 4200-465 Porto, Portugal
ctp@fe.up.pt

Rui Figueiredo

Mechanical Eng. Dept., Science and Techn. Faculty, Coimbra University, 3030-000 Coimbra, Portugal
rui.figueiredo@gtc.dem.uc.pt

Abstract. *The dynamics of the bottom zone of a narrow fluidized bed, from bubbling to turbulent regimes, was studied in a cold model of 0.1 m ID, 1.3 m high. Tested distributor types were perforated perspex plates, with six different perforation grids, metallic mesh and porous ceramic, with pressures drops ranging from 0.05 to 350 kPa, corresponding to superficial air velocities from 0.1 to 2.3 m/s. Group B silica ballotinis, within the range 0.355-0.425 mm, were used as bed material. The experimental data consisted of pressure drop and absolute pressure fluctuating signals, together with visual observations. The bottom zone presented a dynamic condition that produced higher pressure drop values than those expected with the incipient fluidization condition, particularly for the distributor plates with an higher open area. A simple model is used to describe the axial solids distribution and the dynamics characteristics of the voids created in that zone, and an attempt is made to differentiate the bubbles voidage from that of the dense phase, with a value of through flow estimated in a systematic way.*

Keywords: *Fluidization regimes, Bottom zone, Distributor plate.*

1. Introduction

The present work analyses the influence of some distributor types (porous ceramics, metallic mesh and perforated perspex), under different fluidization velocities, covering bubbling and turbulent regimes, on the bottom zone of a fluidized bed using Group B silica ballotinis within the range 0.355-0.425 mm. Although the bottom zone represents only a small part of the bed, it is of considerable importance in what concerns the reactions taking place in a fluidized bed reactor, due to the high solids concentration and the retention of the reactants (Schlichthaerle and Werther, 1999). Svensson *et al.* (1993), based in experimental values of the pressure profile, had defined the height of the bottom zone as the level at which that profile starts to deviate from a straight line. Schlichthaerle and Werther (1999) proposed that it should be defined as the height of the column where the solid concentration begins to decrease.

As for the hydrodynamic structure of that region of the bed, some authors consider it to be core-annulus type (Sun *et al.*, 1999), others cluster-like (Brereton and Grace, 1993), bubbling at all times (Werther, 1994, Svensson *et al.*, 1996b), turbulent (Schnitzlein and Weinstein, 1988, Bolton and Davidson, 1988, Bai *et al.*, 1996), or with a turbulent core region and a dense bubbling condition at the wall (Schlichthaerle and Werther, 1999). Finally, Malcus *et al.* (2000), using an electrical capacitance tomography method, found no significant change of the hydrodynamic behavior of the gas-solid suspension, measured between two different heights inside the bed. As for the influence of the distributor plate, apart the work of Svensson *et al.* (1996a), no other references were found on the way it might affect the bottom of the bed, either from the point of view of the different type of used plates, or concerning the pressure drop across the distributor. Several authors considered a constant voidage at the bottom bed, extrapolating the pressure drop profile between the lowest pressure tap and the distributor (Johnsson and Leckner, 1995, Zijerveld *et al.*, 1997), or found no inflexions of voidage (Malcus *et al.*, 2000).

The present work pretends to analyze some experimental results concerning the changes occurring in the fraction of solids with height. Different velocities and eight different types of distributor plates were used in the experiments. A technique to estimate the porosity fluctuations of the dense phase, in the bottom of the bed, is also proposed.

2. Experimental Work

The experimental work was done in a cold, atmospheric fluidized bed, with a 100 mm internal diameter perspex tube, using air at ambient conditions as the fluidizing medium (Fig. 1).

The fluidized bed was established by fluidizing Group B silica ballotinis, 355-425 μm , previously screened and statistically weighed with *t* tests using SPSS. The air flow rate was measured with orifice plate flowmeters, equipped with Furness Control FCO18 differential pressure transducer, connected to a data acquisition system. Those measurements had an associated uncertainty of 25.2 Pa (Coleman and Steele, 1999).

The static bed height was 300 mm and the pressure measurements were made at each one of the 6 horizontal slices of 50 mm high the bed was divided in. The experimental conditions are summarized in Table 1.

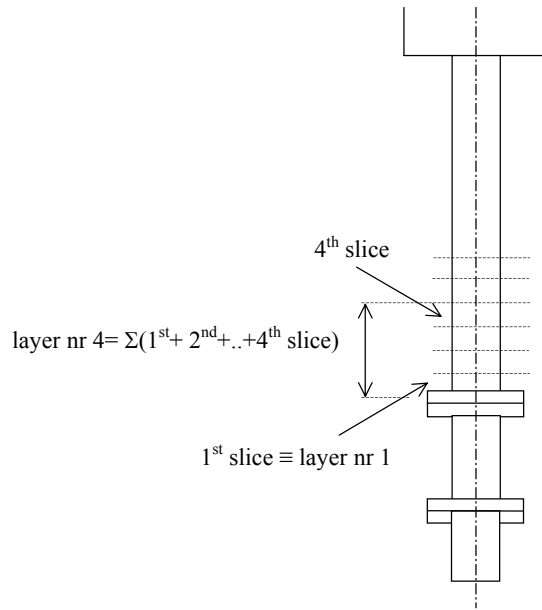
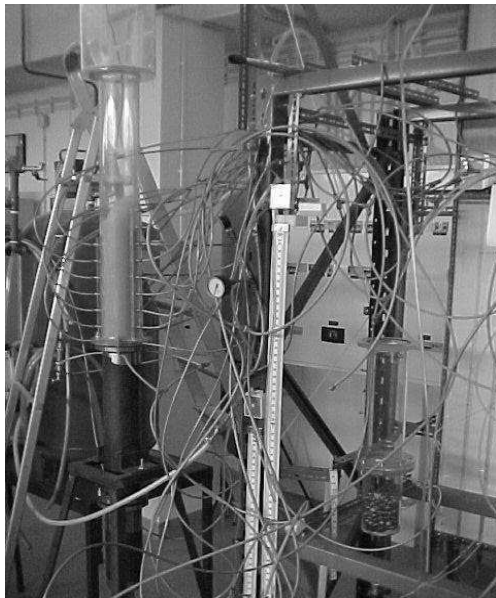


Figure 1- Photo and schematics of the experimental setup.

Three pressure probes were used at each level, placed at angular intervals of 120°. The data acquired represented cumulative values for each layer, *i.e.*, the values of the first layer represent the slice ‘1’ pressure drop, the values of the second layer the slice ‘1 plus 2’ pressure drop, and so on until the sixth layer, corresponding to the sum of the measured pressure drops from slices 1 to 6. Each probe was calibrated against U-tube water pressure manometers.

Table 1- Experimental conditions

Data on the experimental setup	Value
Internal bed diameter, D (m)	0.10
Height of the unit, L (m)	1.8
Ambiant pressure, P (Pa)	97500
Bed temperature, T (°C)	15
Fluidization velocity, U_0 (m/s)	0.1 ... 2.3
Bed material	Silica ballotinis
Bed material density, ρ_p (kg/m ³)	2485
Average particle diameter $d_p = 1/(\sum x_i/d_{pi})$ (µm)	372
Minimum fluidization velocity, U_{mf} (m/s)	0.1
Static bed height, H (m)	0.3

Values for the pressure drop of each slice were recorded for consecutively decreasing flowrates, using Furness Control differential transducers FCO15 and 16 and Klay Peramic pressure transmitters CER8000, connected to a data acquisition system, with an associated uncertainty of 7.1, 12.9 and 25.2 Pa, respectively (Coleman and Steele, 1999). All the uncertainty evaluation was performed in accordance with a 95% confidence interval.

Figure 2 shows a typical example of the pressure measured by a probe located in the fifth layer and of the differential pressure signal measured between two probes (2nd and 3rd, slice 2).

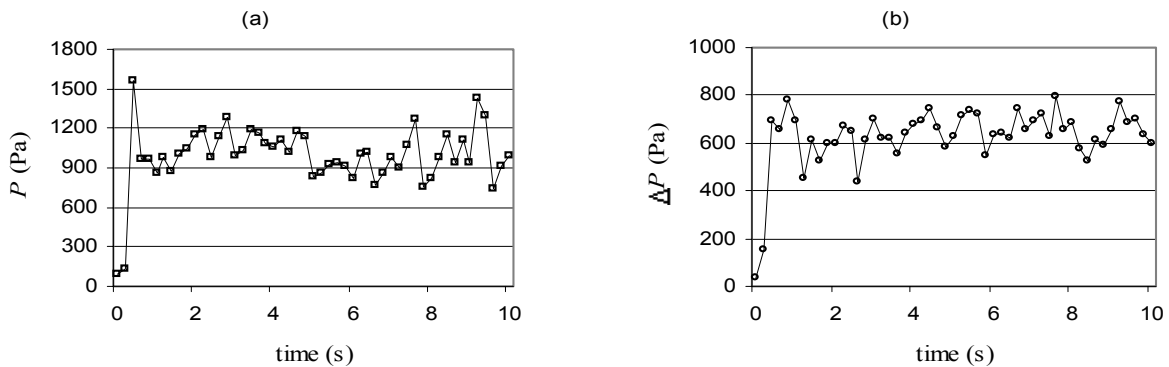


Figure 2. Time sequence of, *e.g.*, pressure measured by a probe located on the top of (a) the fifth layer and (b) a differential transducer measuring the pressure drop in the second slice.

The data acquisition system used a sampling frequency of 5 Hz to ensure sufficient accuracy in the statistical analysis, an average of 1000 samples being taken for each spectrum; those readings were then weighed in order to output values corresponding to arithmetically averaged one second intervals.

The plates pressure drop evolution for the tested gas flow range for each distributor type, was measured with pressure probes calibrated against U-tube mercury pressure manometers. Eight different distributors were used: six perforated perspex plates, one metallic mesh and one porous ceramic, with pressures drops ranging from 60 to 300 kPa, and superficial gas velocities going from 0.1 to 2.3 m/s at standard pressure and temperature. The relevant data for the distributors are given in Table 2.

Table 2- Data on distributors/orifices

Type	Plate reference	Nr of orifices N_{or}	Open area (%)	Maximum U_0 (m/s)	Orifice diameter d_{or} (mm)
Perforated plate with triangular pitch (p#x)	p0x	50	0.045	0.6	0.3
	p1x	109	0.098	1.0	0.3
	p2x	199	0.179	1.2	0.3
	p3x	300	0.270	1.7	0.3
	p4x	386	0.347	2.0	0.3
	p9x	948	0.853	2.2	0.3
Metallic mesh (dyn)	dyn		0.675	2.2	O 0.3
Porous ceramic (ker)	ker		8.482	2.3	O 0.3

A more detailed description of the experimental setup can be found in Paiva *et al.* (2000a, b).

3. Experimental Results and Analysis

In order to calculate the evolution of the bed axial solids concentration, ε_s , we will use the experimental values of the pressure drop per slice, ΔP_{s_j} , so that the sum of successive values will determine the pressure drop of each layer under analysis, from the first to the sixth, ΔP_i :

$$\Delta P_i = \sum_{j=1}^i \Delta P_{s_j} \quad (1)$$

The values of ΔP_i are shown in Fig. 3 for two different types of distributor, 'p9x' and 'dyn', for increased values of U_0/U_{mf} , from the first to the sixth layer.

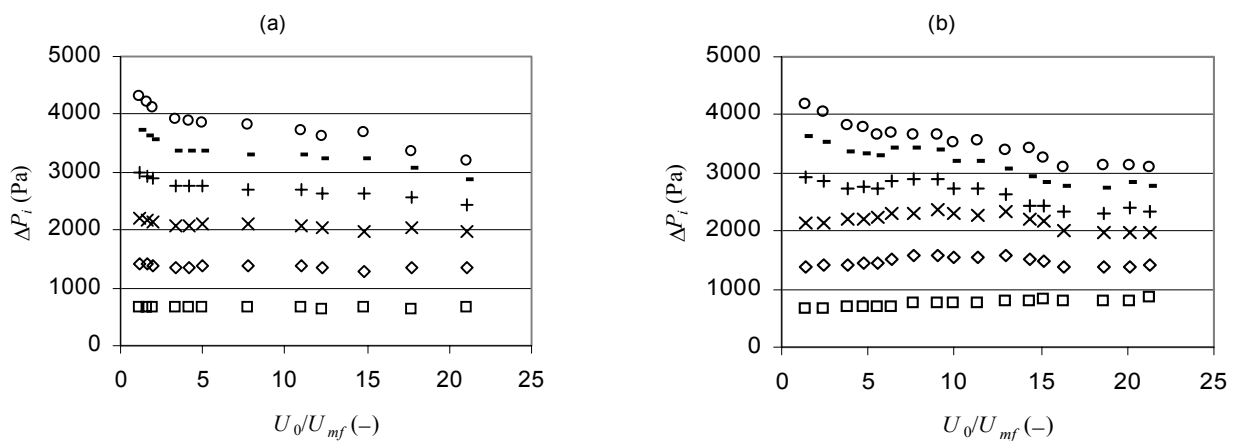


Figure 3. Typical evolution of the bed pressure drop using (a) 'p9x' and (b) 'dyn' distributor plates, for increasing values of U_0/U_{mf} (\square : 1st layer, \diamond : 2nd, \times : 3rd, $+$: 4th, $-$: 5th, \circ : 6th)

Svensson *et al.* (1993) used the axial pressure profile to define the height of the bottom zone. The axial solids concentration is calculated from the pressure gradient considering that the pressure drop is due not only to the hydrostatic head of solids between two differential pressure taps but also to the incipient entrainment and the effects of the neighboring particles (Paiva *et al.*, 1999):

$$\frac{dP_{calc}}{dH} = \left[(\rho_p - \rho_f)g + \frac{3}{4} \lambda \left(\frac{U_{mf}}{\varepsilon_{mf}} - U_p \right)^2 \rho_f \frac{D^2}{d_p^3} \right] \varepsilon_s \quad (2)$$

with ρ_p and d_p being the density and the average diameter of the particles, ρ_f the fluid density, D the bed diameter, λ a factor accounting for the friction effects between the particles and the particles and the walls, correlated with

$$\lambda = 1,5 \times 10^{-4} \left(\frac{U_0}{U_{mf}} \right)^{1,5} \quad (3)$$

and the difference between the interstitial velocity, U_{mf}/ε_{mf} , and the particles velocity, U_p , is the terminal velocity, U_t ,

$$U_f - U_p \equiv U_t = \sqrt{\frac{4 \rho_p g d_p}{3 C_{Dc} \rho_f}} \quad (4)$$

using the correlation suggested by Klinzing (1981) to find the drag coefficient for a cloud of particles, C_{Dc} :

$$C_{Dc} = C_{Ds} \varepsilon_{mf}^{-4,7} \quad (5)$$

In Eq. (2), ε_s equals the product of the fraction of solids in the dense phase by the remainder of the fraction of bubbles regarding the whole bed,

$$\varepsilon_s = (1 - \varepsilon_{mf})(1 - \delta) \quad (6)$$

and the values of ε_s are those that make the dimensionless pressure drop, ΔP^+ , a ratio between the experimental pressure drop values, ΔP_{exp} , and the calculated ones, Eq. (2), equal to unity:

$$\Delta P^+ = \frac{\Delta P_{exp}}{\Delta P_{calc}} \quad (7)$$

Figure 4 shows the results obtained for the evolution of the fraction of solids with height, for several values of the ratio U_0/U_{mf} and distributor plates 'p9x' and 'dyn'. As the fluidizing velocity increases, the solids concentration decreases, but at a certain height around 0.15 m, mainly for lower velocities, it seems to reach a maximum, and then decreases again.

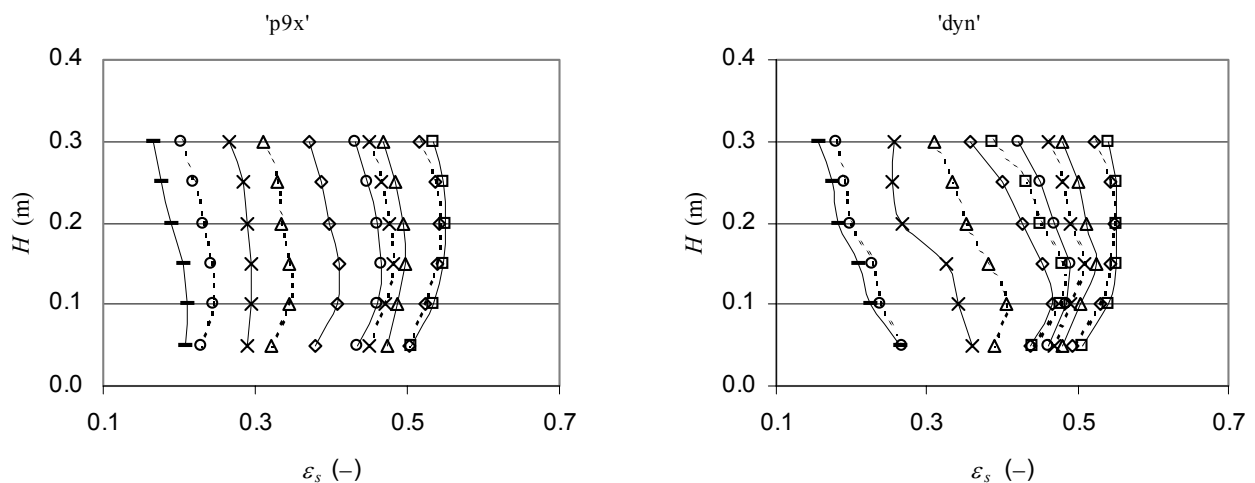


Figure 4. Evolution of the bed axial solids concentration, ε_s , for values of U_0/U_{mf} (\square , solid line: $U_0/U_{mf}=1$, \diamond , dashed line: 2, \circ , solid line: 3, \times , dashed line: 4, \circ , solid line: 5, \square , dashed line: 7, \diamond , solid line: 10, \circ , dashed line: 13, \times , solid line: 17, \circ , dashed line, 20)

The evolution described becomes more evident in the next figure, Fig. 5, where the several distributors used are compared for increasing velocity values, from 1 to 20 U_0/U_{mf} .

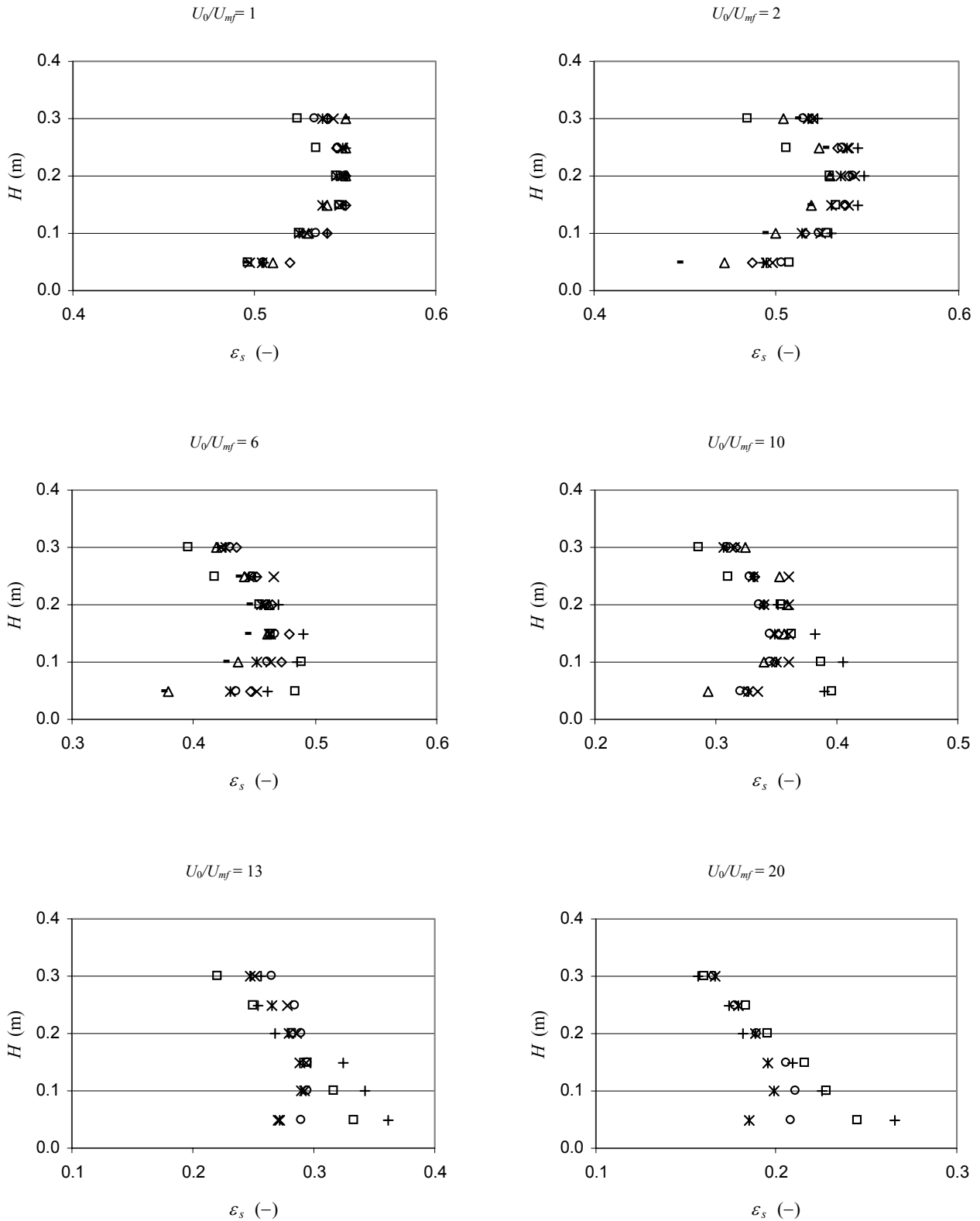


Figure 5. Axial solids concentration profiles, ϵ_s , in the fluidized bed for various fluidization ratios of U_0/U_{mf} (□, ‘ker’, ○, ‘p9x’, +, ‘dyn’, *, ‘p4x’, ×, ‘p3x’, ◇, ‘p2x’, ⋈, ‘p1x’, -, ‘p0x’)

At low fluidizing velocities, differences between the several distributors are minor. Nevertheless, the curves appear to have a similar behavior to those described before, presenting a maximum solids concentration for values of H in the interval 0.15 to 0.20 m. Near the distributor orifices, where the influence of emerging gas jets strongly disrupts the uniform distribution of the solid phase, there is no distinction of the pattern of behavior. However, differences become increasingly apparent for higher fluidization velocities. In particular, the lower pressure drop plates (namely ‘ker’ and

‘p9x’) reveal a distinct maximum value due to the presence of solids in the lower portion of that region of the bed, while the others plates keep showing the same pattern of behavior.

Several references in the literature agree that, with the model of Werther and Wein (1994), it appears that void sizes found experimentally under conditions of superficial velocities (and for Group B particles) typical for combustors, were in fairly good agreement with the calculated values of bubbles diameters and rising velocities. Similar good results for the whole bed were obtained in the present work, with the range of particles used in these experiments. The first layers revealed, however, some differences when using the lower pressure drop plates, as can be seen in Fig. 6 (where those results are presented for the first and the sixth layer).

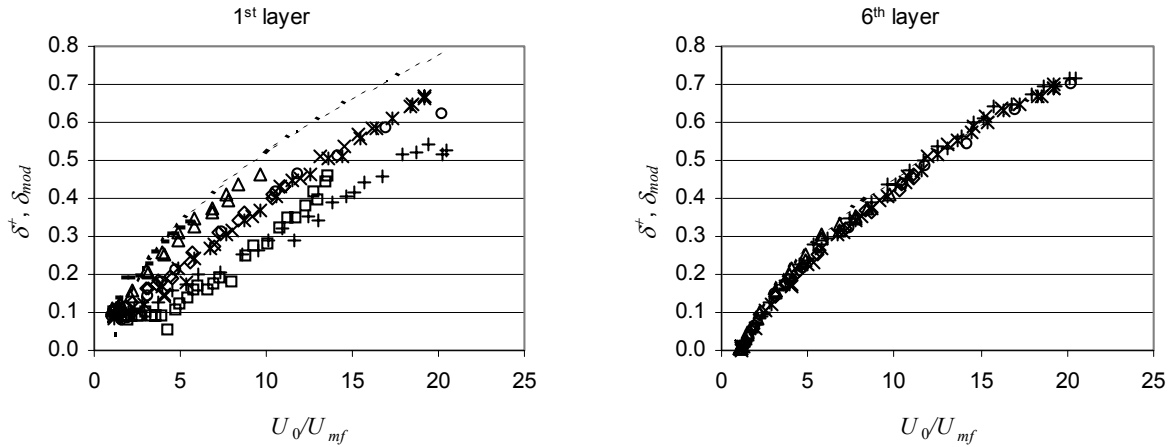


Figure 6. Evolution of the bed bubble fraction, δ_{mod} , Eq. (8), and the resulting values for δ^+ , with different distributors, for several values of U_0/U_{mf} (\square : ‘ker’, \circ : ‘p9x’, $+$: ‘dyn’, $*$: ‘p4x’, \times : ‘p3x’, \diamond : ‘p2x’, κ : ‘p1x’, $-$: ‘p0x’)

If the bottom bed is modeled with equations (8) to (10), according to the model of Werther and Wein (1994), with a slight modification on the expression of the bubbles voidage, δ ,

$$\delta = 1.45Ar^{-0.18} \frac{U_0 - U_{mf}}{\sqrt{U_{ba}}} \tag{8}$$

where the bubble absolute velocity, U_{ba} , is

$$U_{ba} = 1.45Ar^{-0.18}(U_0 - U_{mf}) + 0.71v g^{0.5} d_b \tag{9}$$

v takes the value $2\sqrt{D}$ for $0.1m < D < 1.0$ m, and the expression for the bubble diameter, d_b , is

$$\frac{d(d_b)}{dH} = \left(\frac{2\delta}{9\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{10}$$

it will result in an implicit procedure concerning the calculation of δ . Thereafter, an evolution of the dense phase porosity, or more properly, of the emulsion porosity, ϵ_e , to pull through an expression from Kunii and Levenspiel (1969), can be estimated from

$$\epsilon_e = \epsilon_{mf} \pm \Delta\epsilon = 1 - \frac{1 - \delta}{1 - \delta^+} (1 - \epsilon_{mf}) \tag{11}$$

where δ represents the values of the fraction of bubbles calculated from Eq.s (8) to (10) and δ^+ the values that makes ΔP^+ equal to 1; $\Delta\epsilon$ represents the range of variation of the dense phase voidage around the incipient conditions value.

The results of applying this expression to the experimental data reveals a change in the porosity of the emulsion, away from the postulated constant dense phase porosity, ϵ_{mf} , especially in the lower part of the bed, as the fluidization velocity increases and reaches the transition from bubbling to turbulent regime. As for the upper layers, values of porosity are almost constant, approaching 0.45, which, for these 0.355-0.425 mm Group B silica ballotinis is a perfectly expected value. This would explain, on the other hand, why the experimentally based calculated values of the bubbles void fraction, δ^+ , were distant of the Werther and Wein (1994) model results, meaning that the need to allow the passage of the excess of air was not completely performed by the bubbles phase (either visible or invisible), but that the dense phase “widens” to accommodate the extra gas flow, a dynamic phenomenon described by Wilhelm and Kwauk

(1948), Lewis *et al.* (1949) and Wen and Yu (1966), especially when moving nearer the feeding point of the fluidizing medium.

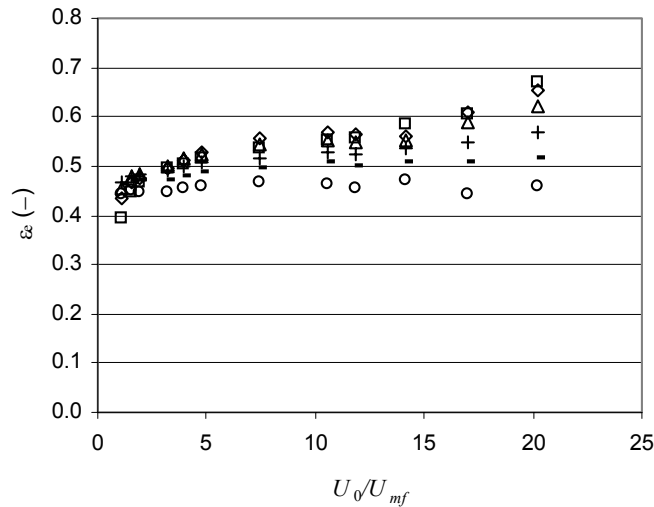


Figure 6. Evolution of the porosity of the emulsion, ε_e , Eq. (11), for several values of U_0/U_{mf} (\square : layer 1, \diamond : layer 2, \circ : layer 3, +: layer 4, -: layer 5, \circ : layer 6)

4. Conclusions

An investigation of the bottom zone of a fluidized bed, using three types of distributor plates, was performed using pressure drop measurements. The results show that the flow changes with variation of the operating conditions. The measurements at several different equal heights show changes in the hydrodynamic behavior of the gas-solid suspension. For the tested Group B particles and static bed height, there is no linear decrease, or even a sustained uniform trend towards a decrease of the solids concentration with height in that region of the bed. Furthermore, using a model for the calculation of the fraction of bubbles, the results include the detection of a fluctuation in the values of the porosity of the emulsion, with height and with the fluidization velocity. Further work still needs to be made using other particle sizes and static bed heights.

5. References

- Bai, D. Shibuya, E., Masuda, Y., Nakawaga, N. and Kato, K., 1996, "Flow structure in a fast fluidized bed", *Chemical Engineering Science*, 51, pp. 997-966.
- Bolton, L.H. and Davidson, J.F., 1988, "Recirculation of particles in fast fluidized risers", in P. Basu and J.F. Large *Circulating fluidized bed technology II*, pp. 139-146, Oxford Pergamon Press.
- Brereton, C.M.H. and Grace, J.R., 1993, "Microstructural aspects of the behavior of circulating fluidized beds", *Chemical Engineering Science*, 48, pp. 2565-2572.
- Coleman, H.W. and Steele, W.G., 1999, "Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers", John Wiley & Sons, Inc.
- Darton, R.C., LaNauze, R.D., Davidson, J.F. and Harrison, D., 1977, "Bubble Growth due to Coalescence in Fluidized Beds", *Trans IChemE*, 55, pp. 274-280.
- Fan, L.-S. and Zhu, C., 1998, "Principles of Gas-Solid Flows", Cambridge University Press.
- Holman, J.P., 1994, "Experimental Methods for Engineers", 6th edition, McGraw-Hill, Inc.
- Kunii, D. and Levenspiel, O., 1969, "Fluidization Engineering", Robert E. Krieger Publishing Company, Inc.
- Johnsson, F. and Leckner, B., 1995, "Vertical Distribution of Solids in a Circulating Fluidized Bed in a Circulating Fluidized Bed Furnace", *Proc. Of FBC 13*, May 7-10, Orlando, K.J. Heinschel (ed.), p. 671.
- Lewis, W.K., Gilliland, E.R. e Bauer, W.C., 1949, *Ind. Eng. Chem.*, 41, p. 1104.
- Malcus, S., Chaplin, G. and Pugley, T., 2000, "The hydrodynamics of the high-density bottom zone in a CFB riser analyzed by means of electrical capacitance tomography (ECT)", *Chemical Engineering Science*, 55, pp. 4129-4183.
- Paiva, J.M., Pinho, C.T. e Figueiredo, R.A., 1999, "Pressure drop behavior inside an atmospheric fluidized bed, from minimum to incipient fast fluidization, using different distributor plates", *Proceedings of the 15th COBEM-Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, November 1999, Águas de Lindóia, São Paulo, CD ed.
- Paiva, J.M., Pinho, C. and Figueiredo, R., 2000a, "Distributor Plate Influence on Fluidization Quality, Measuring Pressure Drop Evolution in Adjacent Slices Through the Bed", paper ref. 11026, *Proceedings of the FEDSM2000-ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, June 11-15 2000, Boston, Massachusetts, CD ed.

- Paiva, J.M., Pinho, C. and Figueiredo, R., 2000b, "Distributor Plate Influence on Fluidization Quality", paper ref. S21P04, Proceedings of the 8th ENCIT- Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, October 3-6 2000, Porto Alegre, CD ed.
- Schlichthaerle, P. and Werther, J., 1999, "Axial pressure profiles and solid concentration distributions in the CFB bottom zone", in J. Werther Circulating fluidized bed technology VI, pp. 185-190, Germany, DECHEMA e.V.
- Schnitzlein, M.G. and Weinstein, H., 1988, "Design parameters determining solids hold-up in fast fluidized bed system", in P. Basu and J.F. Large Circulating fluidized bed technology II, pp. 205-211, Oxford Pergamon Press.
- Sun, G., Chao, Z, Fan, Y. and Shi, M., 1999, "Hydrodynamic behavior in the bottom region of a cold FCC riser", in J. Werther Circulating fluidized bed technology VI, pp. 179-184, Germany, DECHEMA e.V.
- Svensson, A., Johnsson, F. and Leckner, B., 1993, "Fluid-dynamics of the bottom bed of circulating fluidized bed boilers", in L. Rubow, Proceedings of the 12th international conference on fluidized bed combustion, pp. 887-897, New York, ASME.
- Svensson, A., Johnsson, F. and Leckner, B., 1996a, "Fluidization regimes in non-slugging fluidized beds: the influence of pressure drop across the air distributor", Powder Technol., 86, pp. 299-312.
- Svensson, A., Johnsson, F. and Leckner, B., 1996b, "Bottom Bed Regimes in a Circulating Fluidized Bed Boiler", Int. J. Multiphase Flow, 22, 6, pp. 1187-1204.
- Wen, C. Y. and Y. H. Yu, 1966, Chem. Eng. Progr. Symposium Ser. No. 62, p. 62.
- Wilhelm, R.H. e Kwauk, M., 1948, Chem. Eng. Progr., 44, p. 201.

DENSITY-WAVE OSCILLATIONS IN HEATED BOILING CHANNELS

Mauricio Antoniazzi Pinheiro Rosa

Instituto de Estudos Avançados – CTA
12231-970 – São José dos Campos – SP – Brasil
pinheiro@ieav.cta.br

Michael Z. Podowski

Rensselaer Polytechnic Institute – RPI
12281 – Troy – New York – USA
podowm@rpi.edu

Abstract: *The purpose of this work is to analyze several interesting characteristics of boiling channel time responses for unstable operating conditions using the DYNBOSS code. It has been observed only supercritical bifurcation instability and a detailed analysis of the converged limit cycle amplitude and frequency as well as flow reversal condition has been performed for a wide range of operating conditions and channel geometry.*

Keywords: *two-phase flow instability, density-wave oscillations, nonlinear dynamics, multi-channel boiling system*

1. Introduction

Whereas some important characteristics such as threshold of instabilities, period of oscillations, etc... of a boiling channel response to various perturbations can be conveniently analyzed using linear models, several important questions can only be investigated using complete nonlinear models. This applies to both stable and unstable situations. Although several interesting nonlinear aspects of two-phase flow have been investigated using analytical methods, the most commonly used practical approach to such models is via direct integration of the governing equations in the time domain. DYNBOSS (DYNamics of NOnlinear BOiling SystemS) is a computer code which calculates time-dependent parameters in the entire BWR (Boiling Water Nuclear Reactor) nuclear steam supply system (NSSS). DYNBOSS has also the important option of calculating a multi-parallel-channel boiling system which is totally independent of the remaining models.

The purpose of this work is to analyze several interesting characteristics of a boiling channel time response for unstable operating conditions using the DYNBOSS code. It has been observed only supercritical bifurcation instability and a detailed analysis of the converged limit cycle amplitude and frequency as well as flow reversal condition has been performed for a wide range of operating conditions and boiling channel geometry.

2. Model Description and Numerical Methods

The major two-phase flow modeling assumptions for vertical upward flows in heated boiling channels considered in this work are:

- One-dimensional two-phase flow;
- The vapor is at saturation, i.e., $h_v = h_g(p)$, $r_v = r_g(p)$, and $T_v = T_{sat}(p)$, whereas the liquid phase can be either subcooled (thermodynamic non-equilibrium between phases) or saturated;
- Kinematics non-equilibrium between liquid and vapor phases;
- Thermophysical properties of both phases are evaluated with respect to the average system pressure which may vary during transients;
- The liquid density is taken at saturation, i.e., $r_l = r_f$.

The boiling system consists of N parallel channels having common inlets and exits as shown schematically in Fig. (1). The model governing equations for each channel are:

Volumetric Flux Equation

$$\frac{dj}{dz} = \Gamma v_f g - v_g a \frac{jr}{t} - v_f (1-a) \frac{jr}{t} \quad (1)$$

Void Propagation Equation

$$\frac{\overline{a}}{\overline{t}} + \frac{\overline{j_g}}{\overline{z}} = v_g \left(\Gamma - \overline{a} \frac{\overline{r_g}}{\overline{t}} \right) \quad (2)$$

Mixture Energy Conservation Equation

$$\frac{\overline{[r_f h_l (1-a) + r_g h_g a]}}{\overline{t}} + \frac{\overline{[r_f j_l h_l + r_g j_g h_g]}}{\overline{z}} = \frac{q'}{A_{xs}} + \frac{\overline{p}}{\overline{t}} \quad (3)$$

Mixture Momentum Conservation Equation

$$\frac{\overline{G}}{\overline{t}} + \frac{\overline{[r_f j_f^2 + r_g j_g^2]}}{\overline{z}} + \frac{\overline{p}}{\overline{z}} + g[r_f(1-a) + r_g a] + [f_{lo}^2 \frac{f_{lo}}{D_H} + \sum_n k_n f_n(z-z_n)] \frac{G^2}{2r_f} = 0, \quad (4)$$

where Γ is the volumetric evaporation rate, all flow parameters are averaged over the flow cross sectional area, and the remaining notation is conventional (Lahey and Moody,1977).

For a given total flow rate into the multi-parallel-channel system shown in Fig. (1), the flow rates into individual channels are calculated simultaneously for all channels by using the common-pressure-drop boundary condition

$$D p_n = D p_m, \quad (n, m = 1, \dots, N) \quad (5)$$

and the inlet flow rates into individual channels must satisfy

$$\sum_{n=1}^N W_n = W_{C,IN} \quad (6)$$

where $D p_n$ is the pressure drop in channel- n , W_n is the inlet flow rate to channel- n and $W_{C,IN}$ is the total flow rate.

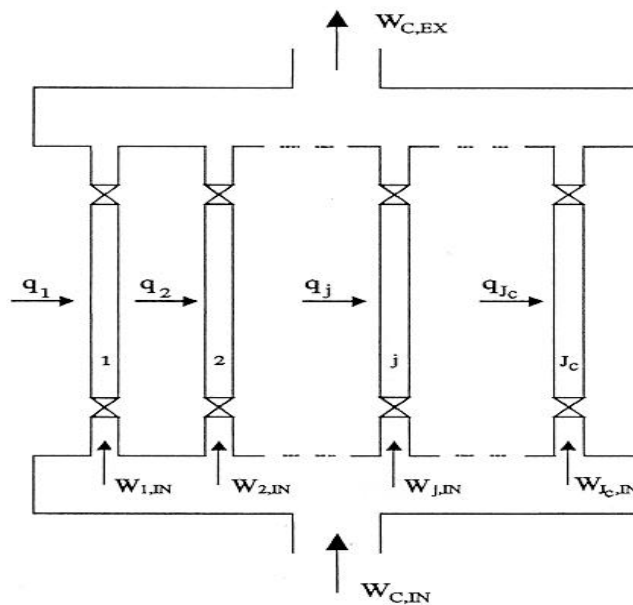


Figure 1. A schematic of the multi-parallel-channel system.

The governing equations for single-phase liquid flow can be derived from the two-phase flow equations, Eqs. (1) through (4), by setting \overline{a} , Γ and $\overline{j_g}$ to zero, and $f_{lo}^2 = f_n^2 = 1$.

The numerical methodology, implemented in the DYNBOSS code, used to solve the set of governing equations (1) through (4) subjected to boundary conditions given by Eqs. (5) and (6), has been presented and extensively tested before [Rosa(1994,1995)], therefore will not be repeated herein.

3. Nonlinear Effects in Boiling Channel Dynamics

The results presented in this section are for a boiling system consisted only of two channels: a heated (test section) and an unheated (bypass) channel given in Tab. (1).

The present boiling channel model has also been used to investigate various nonlinear aspects of boiling channel dynamics and stability. A comparison between the predictions of a linear model and a full nonlinear model is given in Fig. (2). As can be seen, the inclusion of nonlinear effects stabilizes the system without affecting the frequency of oscillations. Since the linear response is based on a rigorous analytical solution of the linearized governing equations in the frequency domain (subsequently converted to the time domain using the Fast Fourier Transform method), this results also provides additional evidence confirming the accuracy of the present direct integration method of the full nonlinear model. As expected, the two methods yield similar results for small magnitude perturbation. When the perturbation grows, the difference between the nonlinear and linear models first appears as higher initial flow overshoot in the former case. Later, however, the nonlinear model converges quickly to the linear solution. For large magnitude perturbations, this initial difference in the magnitude gradually disappears, instead, the effects of model nonlinearities manifest in faster initial dumping and, consequently lower amplitude oscillations. The responses shown in Fig. (2) are typical of boiling channels operating at stable equilibrium points.

Table 1. Two-channel boiling system data (Saha,1974).

	Fluid Freon-113 at 175 psia pressure	
	Heated Test Section	Unheated Bypass Channel
Height (cm)	274.3	274.3
Diameter (cm)	1.02	5.08
Inlet Loss Coefficient	2.85	Variable
Exit Loss Coefficient	2.03	0
Froude Number	0.036	----
Friction Number	2.73	----

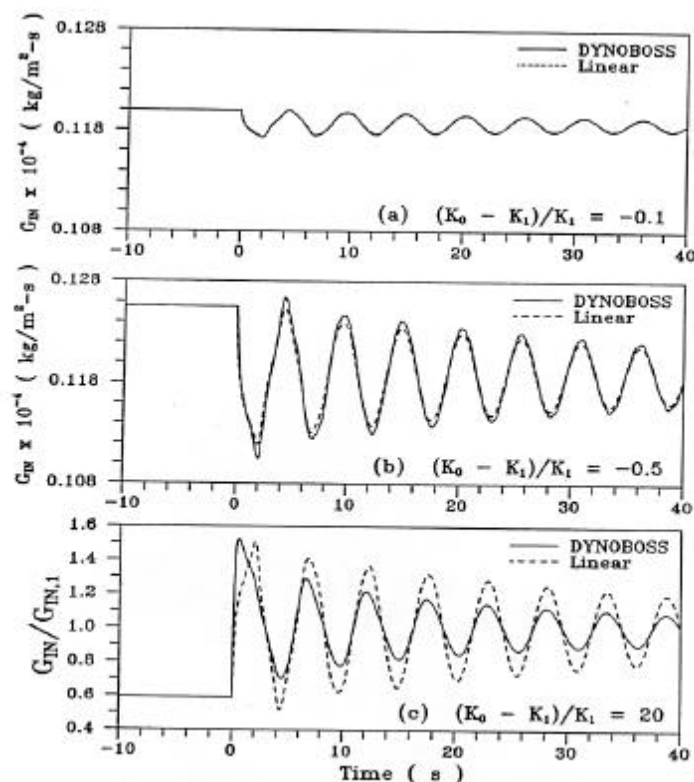


Figure 2. A comparison between nonlinear and linear responses of a boiling channel. The effect of a step change in the inlet loss coefficient on the channel inlet mass flux.

Figure (3) shows the effect of nonlinearities on the transient response of an unstable boiling channel where the solution converges to self-sustained oscillations, i.e., a limit cycle. It is important to mention that only supercritical bifurcation has been observed for the range of operating conditions analyzed, i.e., the system is always stable in the region of linear stability, and exists a periodic (limit cycle) solution in some region of linear instability.

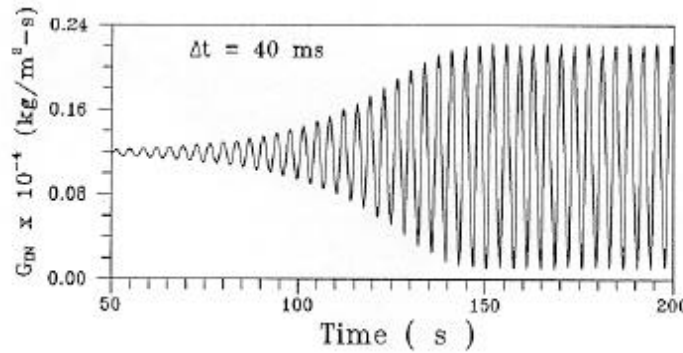


Figure 3. Transient response of an unstable boiling channel to a perturbation in the wall heat flux.

Figure (4) shows a typical boiling channel stability map. Also in this figure is shown a comparison between the instability threshold calculated by the nonlinear time domain code DYNBOSS and the linear stability code LINSTAB (Podowski and Zhou,1991), as can be seen, they agree very well with each other which confirms the convergence of the numerical method used in the DYNBOSS code. The stability map is plotted in the non-dimensional $N_{SUB} \times N_{PCH}$ plane, for fixed L and Fr where the non-dimensional numbers are defined as

$$N_{SUB} = \frac{(h_f - h_{in,0})v_{fg}}{v_f h_{fg}} \equiv \text{subcoolingnumber},$$

$$N_{PCH} = \frac{P_0 v_{fg}}{G_{in,0} h_{fg}} \equiv \text{phase-changenumber},$$

$$L = f_{lo} \frac{L_H}{2D_H} \equiv \text{frictionnumber},$$

$$Fr = \frac{G_{IN,0}^2 v_f^2}{g L_H} \equiv \text{Froudenumber},$$

where the subscript “0” denotes the parameter values used for the calculation of the boiling channel equilibrium point. The map shows that for points to the left of the instability threshold line the boiling channel is stable (stable region), that is the time response to a perturbation returns to the initial stable equilibrium point, whereas for the points to the right of this line the solution converges to a limit cycle solution (unstable region). For points on the instability threshold line the equilibrium point is said to be marginally stable.

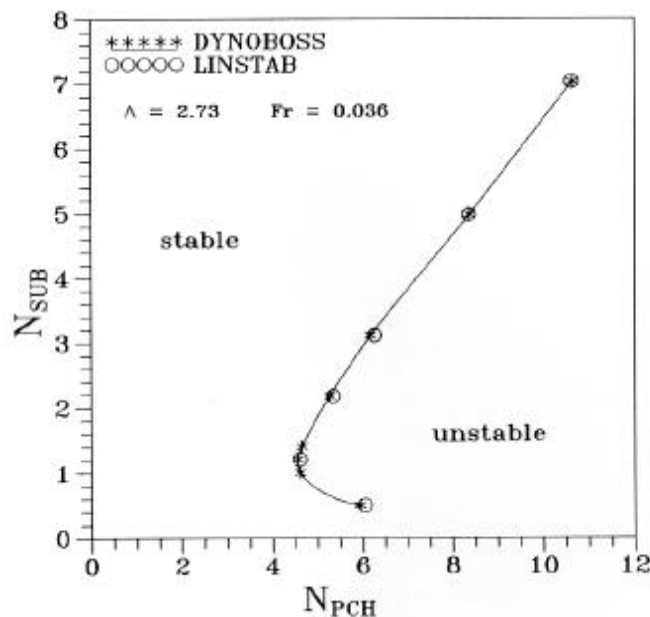


Figure 4. The instability threshold boundary calculated by the linear code LINSTAB and the nonlinear code DYNBOSS for the homogeneous equilibrium model.

In order to better appreciate the effect of changes in the operating conditions inside the unstable region on the response of a boiling channel, Fig. (5) shows, for the sake of clarity, the inlet mass flux oscillation envelopes for the same small perturbation in the wall heat flux for different values of the phase-change number, N_{PCH} , and fixed subcooling number, $N_{SUB} = 5$. As can be seen in this figure not only the amplitude of the limit cycle oscillations increases but also the oscillation growth rate in the time domain is higher for higher values of the phase-change number. Figure 6 shows the inlet mass flux envelopes for the same operating condition and different initial perturbations to the unstable boiling channel. As can be seen, the oscillation growth rate (for perturbations inside the limit cycle) and the limit cycle oscillation amplitude and frequency are indeed characteristic of the operating condition, therefore they do not depend on the initial perturbation.

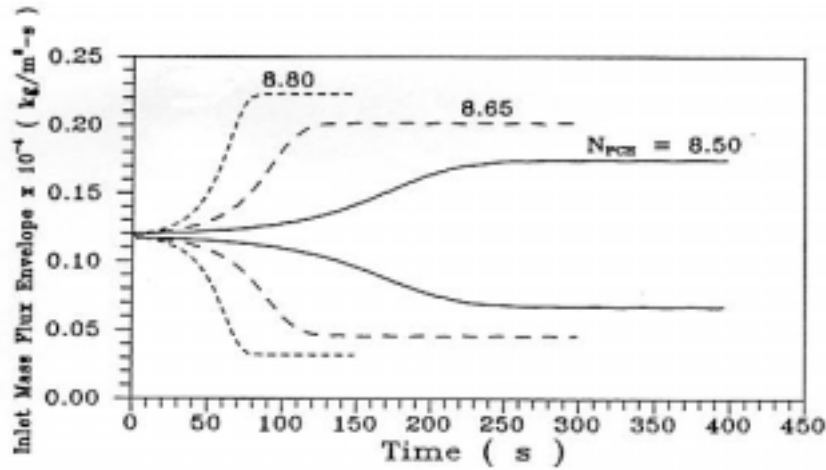


Figure 5. The envelopes of oscillating unstable boiling channel responses for different values of the phase-change number, N_{PCH} .

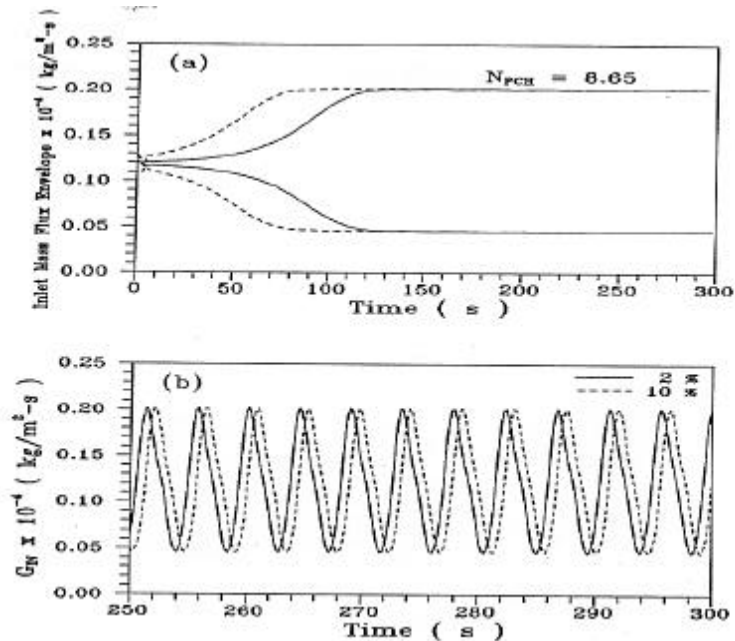


Figure 6. The responses of an unstable boiling channel to perturbations of different magnitudes: (a) limit cycle envelope, (b) the magnitude and period of limit cycle oscillations.

The behavior of an unstable boiling channel was analyzed for several operating conditions. The effect of the operating conditions on the amplitude of the self-sustained oscillations (limit cycle) is shown in Fig. (7.a) for two values of the subcooling number, $N_{SUB} = 3.1$ and $N_{SUB} = 7$. In each case, calculations were performed for several values of the phase-change number, N_{PCH} . The results indicate the classical case of supercritical Hopf bifurcation. The amplitude of the limit cycle oscillations is basically proportional to the square root of the relative phase-change number. The upper limit on N_{PCH} was due to the flow reversal which is not modeled in DYNOBOSS. As shown in Fig. (7.a), the amplitude of oscillations strongly depends on the channel operating conditions. If the subcooling number is high, the

amplitude of oscillations increases more gradually with respect to N_{PCH} , whereas for low N_{SUB} the increase is much faster. This is a very important result, since in the latter case only a small departure from the instability threshold may already result in flow reversal and, thus, very likely lead to wall overheat and subsequent damage to the heater. It is interesting to notice that for both subcooling numbers the rate of growth of the limit cycle amplitude with respect to changes in the phase-change number is higher for operating conditions near the instability threshold and becomes more gradual for higher values of the phase-change number until flow reversal occurs. The results in Fig. (7) confirm qualitatively the analytical prediction of the limit cycle amplitude growth in the unstable region given by Achard(1985). These results can also be seen in Fig. (7.b) where it is shown the marginally stable (MSB) and the flow reversal (FRB) boundaries for different values of subcooling number. For operating conditions on the left of the MSB the channel is stable and the oscillations decay off. For operating conditions between the MSB and the FRB lines the channel is unstable and the only mode of oscillations observed in the range of operating conditions shown in Fig. (7) was limit cycle oscillations. Finally, for operating conditions to the right of the FRB, limit cycle oscillations can not be observed anymore since the amplitude of the oscillations grows to a point that the inlet mass flux to the channel becomes negative (flow reversal). Figure (7.b) is also suitable to show the margin for flow reversal in the stability map. This margin becomes smaller by decreasing the subcooling number as shown by the closeness of both boundary lines.

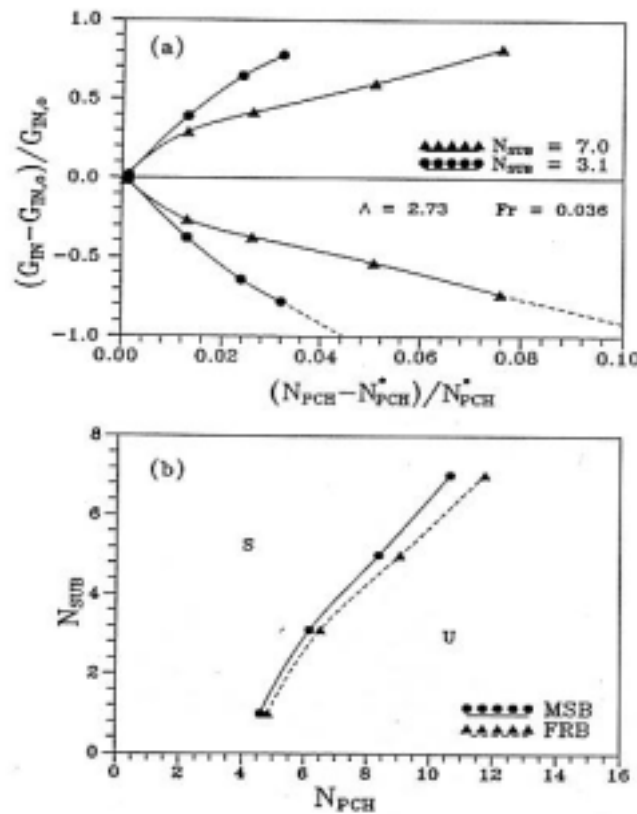


Figure 7. The effect of channel operating conditions on the amplitude of the limit cycle oscillations: (a) the relative amplitude for $N_{SUB} = 3.1$ and $N_{SUB} = 7$ (N_{PCH} is on the MSB), (b) the channel stability map showing the marginally stable boundary (MSB) and the flow reversal boundary (FRB).

Since local pressure losses are known for having a significant impact on the stability of boiling channel systems, a sensitivity analysis to the inlet and exit local loss coefficients on the amplitude of the limit cycle has been performed. The local loss coefficients were varied around the values in Tab. (1) for two subcooling numbers $N_{SUB} = 3.1$ and $N_{SUB} = 7.0$. The results are shown in Fig. (8) and can be noticed that the limit cycle amplitude is more sensitive to changes in both inlet and exit local loss coefficients for operating conditions with the smaller subcooling number ($N_{SUB} = 3.1$). This is similar to the effect observed for changes in the phase-change number (see Fig. (7)) indicating that the same observations there can be extended also to changes in the channel geometry although the limit cycle amplitude is much more sensitive to power than it is for local coefficient variations since only 10% increase in the power takes the channel from stable condition to flow reversal (see Fig. (7)). Whereas the same change in the local loss coefficient only changes in 2% to 4% the amplitude of the limit cycle. Therefore, an unstable boiling channel operating at a small subcooling number may either become stable or experience flow reversal even for small changes in both local loss coefficients. Also in Fig. (8) can be seen that the inlet and exit local loss coefficients have opposite effects on the channel stability. Although in opposite directions, changes in both the inlet and exit local loss coefficients had basically the same effect on the amplitude of the limit cycle.

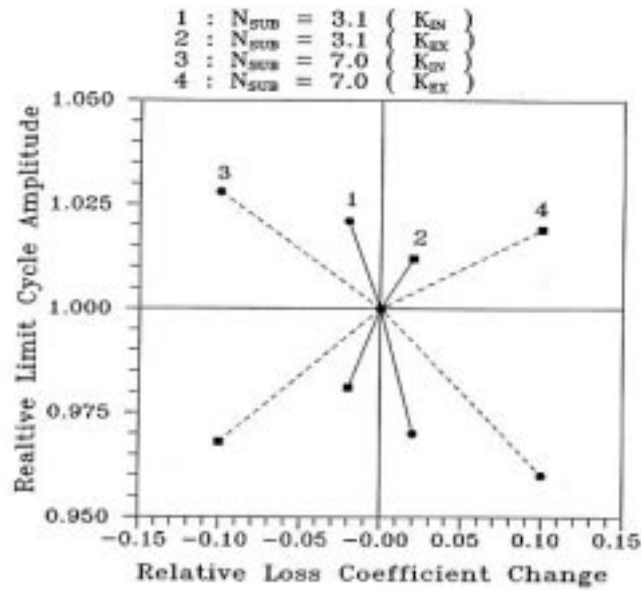


Figure 8. The effect of changes in the inlet and exit local loss coefficients on the amplitude of the limit cycle for two values of subcooling numbers.

A particular behavior has been found for boiling channels with low Froude numbers. Physically this means operating at low flows. Decreasing sufficiently the Froude number the conditions of instability can be reached at small exit qualities (Lahey et al.,1989).

Channel geometry and operating conditions are presented in Tab. (2) in terms of the non-dimensional numbers.

Figure (9) shows that subsequent to a small and temporary perturbation in the heat flux the presence of higher frequency components in the solution is clearly noticed which was not observed in the range of operating conditions for higher Froude number. As can be seen in this figure, the high frequency components of the solution die out and the solution develops to self-sustained oscillations (limit cycle) with the frequency of the component with the lowest frequency. Figure (10) shows, in the mass flux - subcooled length plane, that there are periods during the transient in which the channel is totally filled with liquid since the boundary between single and two-phase regions has reached the exit of the channel. Figure (10.b) shows that the solution converges to a limit cycle, also shown is the location of the unstable equilibrium point. In both figures can be seen the reduction in the flow when the boiling boundary approaches the end of the channel because of the decrease in the buoyancy force.

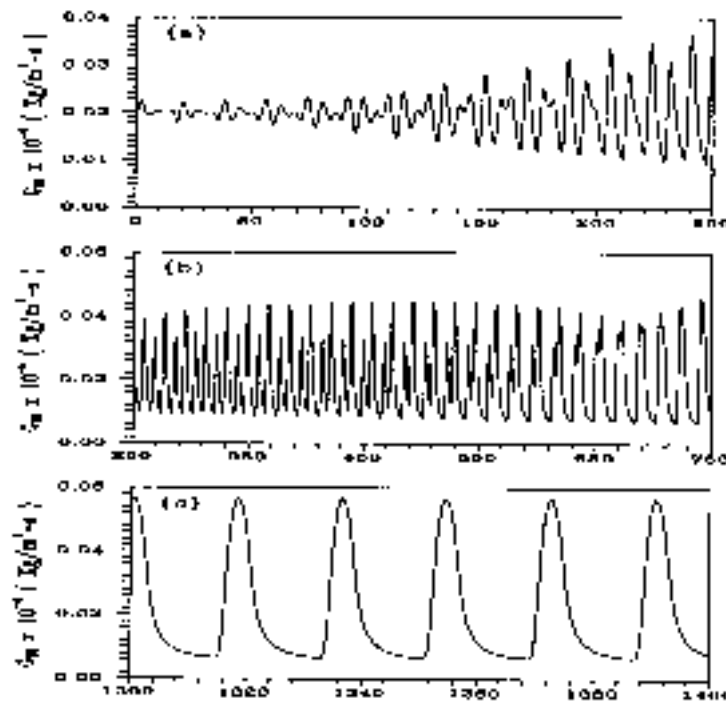


Figure 9. Details of the nonlinear effects on the response of an unstable boiling channel operating at low flow and high inlet subcooling.

Table 2. Low Froude number boiling system data.

	Fluid Freon-113 at 175 psia pressure	
	Heated Test Section	Unheated Bypass Channel
Height (cm)	274.3	274.3
Diameter (cm)	1.02	5.08
Inlet Loss Coefficient	2.85	Variable
Exit Loss Coefficient	2.03	0
Froude Number	0.001	---
Friction Number	2.85	---

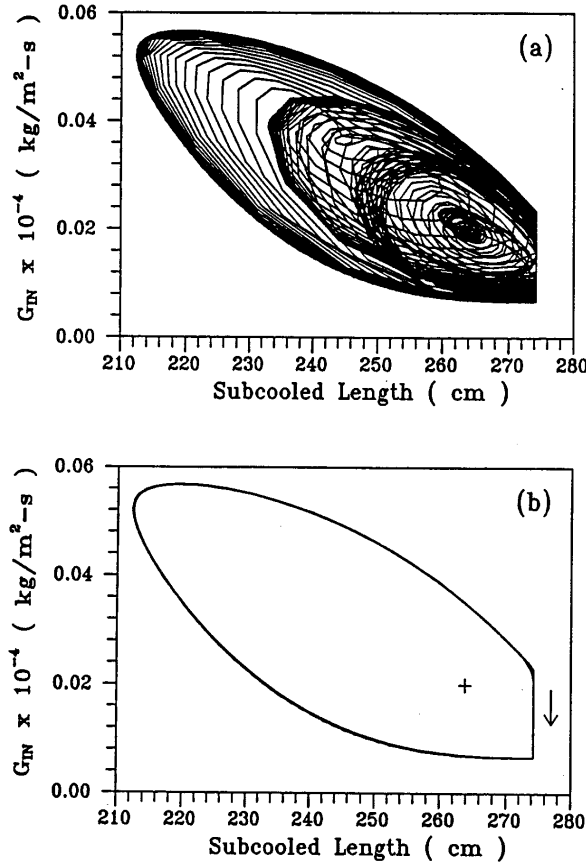


Figure 10. The transient solution in the mass flux –subcooled length plane: (a) $0 \leq t \leq 1500 \text{ s}$; (b) $1200 \leq t \leq 1400 \text{ s}$.

4. Comments and conclusions

The transients for unstable boiling channel conditions shown in this work are hypothetical since they can only be obtained in numerical simulations. These transients assume that the unstable boiling channel is initially operating at steady-state before a perturbation removes it from this condition. This is not possible in practice since any small perturbation (noise) or, more precisely, the perturbation that forced the system to move inside of the unstable region would have already forced the system to respond with growing oscillations and eventually reach limit cycle. Nevertheless, these results serve quite well for the intended purpose of showing some important characteristics of unstable boiling channels.

Comparisons between the solutions of the linear and nonlinear models for stable operating conditions revealed that, especially for large initial perturbations, the latter yield faster convergence to the operating equilibrium point and a smaller magnitude of oscillations. This means, in turn, that the linear models provide conservative approximations of the actual response of boiling channels, and thus can be used as a convenient tool in quantifying stability margins since the linearized equations can be solved analytically, therefore it is not susceptible to errors associated with numerical methods. On the other hand, the linear models contain strong inherent limitations since they are valid only for small departures from the equilibrium point therefore nonlinear models are required for the analysis in the large (large departure from equilibrium point) and, consequently, to the analysis of unstable system solutions.

The analysis of unstable situations over the range of operating conditions analyzed has indicated that a stable limit cycle is the most likely mode of oscillations even for the case of small Froude number which showed a sort of chaotic behavior during a part of the transient.

The growth of the limit cycle amplitude when the operating conditions depart from the stability boundary is much faster if the inlet subcooling is low, and becomes more gradual for high subcooling. In particular, the possibility of flow reversal, and of subsequent channel wall overheat, is more likely to occur in the former case since the margin to prevent flow reversal is smaller in this case when the channel becomes unstable.

Although experimental studies are required to confirm the suitability of the models and numerical methods implemented in the DYNBOSS code for the analysis of the amplitude and frequency of limit cycles in the supercritical cases, the DYNBOSS code has shown the capability of calculating important characteristics of unstable boiling channel responses which can be useful in the experimental analysis.

5. References

- Achard, J. L., Drew, D. A. and Lahey, Jr., R. T., 1985, "The Analysis of Nonlinear Density-Wave Oscillations in Boiling Channels", *J. Fluid Mech.*, 155, 213-232.
- Lahey, Jr., R. T. and Moody, F., 1977, "The Thermal-Hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor", ANS, 1977.
- Podowski, M. Z. and Zhou, J., 1991, "Hydrodynamic Stability Analysis of an Industrial Two-Phase Thermosyphon Heat Rejection System", RPI Report.
- Rosa, M. P. and Podowski, M. Z., 1997, "DYNBOSS: A Computer Code for the Nonlinear Analysis of Boiling Water Nuclear Reactors", *Proceedings of the Fifth International Topical Meeting on Nuclear Thermal-hydraulics, Operations & Safety, NUTHOS-5, Beijing, China, 14 a 18 de abril.*
- Rosa, M. A. P. and Podowski, M. Z., 1994, "Nonlinear Effects in Two-Phase Flow Dynamics", *Nuc. Eng. Des.*, 146, pp. 277-288.
- Rosa, M. A. P., 1995, "A Numerical Analysis of the Dynamics and Stability of Multi-Parallel Boiling Channel Systems", *Anais do XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano em Engenharia Mecânica (COBEM-CIDIM'95), Belo Horizonte, Brazil.*
- Saha, P., 1974 "Thermally Induced Two-Phase Flow Instabilities, Including the Effect of Thermal Non-equilibrium Between Phases", Ph.D. Thesis at Georgia Institute of Technology.

VOID FRACTION CALCULATIONS IN TWO-PHASE FLOW USING NEUTRON RADIOGRAPHY

Ademir X. da Silva

PEN/COPPE/UFRJ

Caixa Postal 68 509

21945-970, Rio de Janeiro, Brasil

ademir@lmn.con.ufrj.br

Verginia R. Crispim

[PEN/COPPE - DNC/EE]CT/UFRJ

Caixa Postal 68 509

21945-970, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. *The neutron radiography technique has been applied to visualize and analysis the flow of fluids, the evaporation and the condensation processes in closed metal objects and tube systems, such as valves, engine or transmission components, etc. In this work, has been shown that thermal neutrons (25 meV), because of their relatively high scattering reaction rate with hydrogen, are sensitive to small changes in water thickness and that neutron radiography techniques potentially can be used to measure void fractions and to study the dynamic behavior of flowing fluids inside metal enclosures. Neutron radiography images have been simulated using the Monte Carlo method to calculate the void fraction air-water of two-phase flow in a metallic duct. For the numerical simulation of the neutron radiography images of the test section, continuous energy Monte Carlo code MCNP4B was used. The results have shown that the neutron radiography correctly determines the void fraction, demonstrating the viability of this technique for measuring void fraction of two-phase flow in metallic duct.*

Keywords: *Neutron radiography, Fluids mechanics, Void fraction, Monte Carlo.*

1. Introduction

The study of the dynamics of fluids encased in metal enclosures is important to many industries and a useful tool in related research. The neutron radiography, which has complementary characteristics to X-ray or gamma-ray radiography, has been used for visualization of multiphase flow in metallic casing (Hibiki *et al.*, 1994) and liquid metal (Takenaka *et al.*, 1994). Neutron radiography is based on the register of images on photographic films (static method) or CCD-camera (real time method). In conventional neutron radiography the object is placed between a collimated neutron flux and a set converter-film (detector), which records a two-dimensional image (Crispim, 1993). This image contains information about the composition and structure of the sample interior, as a results of the difference in attenuation characteristics of neutrons in matter (Domanus, 1992). Thermal neutrons (25 meV) easily penetrate heavy materials like dense metals, while they are attenuated well by light materials such as those containing hydrogen. Hence, the dynamics of fluids flowing inside metal enclosures can be visualized with neutron radiography.

The present work aims to demonstrate, using Monte Carlo simulation, the viability of neutron radiography technique for to determine void fraction air-water of two-phase flow in a metallic duct. The Monte Carlo code MCNP was used for to calculate the void fraction and to obtain radiography images of the test section.

1.1.Void Fraction Calculation Method

A air-water two-phase flow in a metallic duct was taken as an example of a measuring object. Figure (1) shows the schematic diagram for the basic concept of the neutron radiography. Since the flux of incident thermal neutron beam ϕ_{th} decreases exponentially with the product of the total macroscopic cross section Σ and object thickness, δ , the detected beam, ϕ , that includes the internal information of the two-phase flow in the duct is give by:

$$\phi = \phi_{th} \cdot \exp\left(-\Sigma_G \delta_{MG} - \Sigma_L \delta_{ML} - \Sigma_T \delta_T\right) \quad (1)$$

where subscripts of G, L, MG, ML and T denote the gas (air) or gas single-phase, the liquid (water) or liquid single-phase, the gas phase of two-phase mixture, the liquid phase of two-phase mixture, and the test section, respectively. Ignoring the neutron absorption in the gas phase (air), the detected beams are given by the following equation for the gas-filled (ϕ_G), liquid-filled (ϕ_L) and two-phase mixture-filled (ϕ_M) test sections:

$$\phi_G = \phi_{th} \cdot \exp(-\sum_T \delta_T) \tag{2}$$

$$\phi_L = \phi_{th} \cdot \exp(-\sum_L \delta_L - \sum_T \delta_T) \tag{3}$$

$$\phi_M = \phi_{th} \cdot \exp(-\sum_L \delta_{ML} - \sum_T \delta_T) \tag{4}$$

The void fraction (α) can be calculated by using Eqs. (2), (3) and (4) as follows :

$$\alpha = 1 - \frac{\delta_{ML}}{\delta_L} = \frac{\ln\left(\frac{\phi_L}{\phi_M}\right)}{\ln\left(\frac{\phi_L}{\phi_G}\right)} \tag{5}$$

1.2. Monte Carlo Simulation

The Monte Carlo code of particle transport MCNP, version 4B (Briesmeister, 1997), was used for the numerical simulation of the neutron radiography images of the test section (neutron flux profile) and void fraction calculation of air-water two-phase flow in small diameter tubes. MCNP is a general purpose Monte Carlo radiation transport code for three-dimensional, continuous energy, time-dependent neutron, photon and electron transport and was developed at Los Alamos National Laboratory.

A diagram of the physical layout for a typical MCNP4B run is show in Fig. (1). It consist of a cylindrical shape phantom (air, water and aluminum) which is conveyed through a could of thermal neutron beam. The test section consists of a small tube of aluminum with a diameter of 30 mm, a height of 50 mm and a wall thickness of 2.5 mm filled with water involving another cylindrical tube with a diameter of 5 mm containing air. The neutron beam, which penetrated horizontally across a vertical air-water flow in an aluminum test section, is attenuated in proportion to the thickness of the water layer along its path. The neutron beam, with an energy of 25 meV, were started from a single source plane and given a direction parallel to each other. The imaging plane was segmented into 103 tally subregions to represent the individual pixel locations with areas of 500 μm by 500 μm . This simulation could be considered as an “ideal” experiment using neutron radiography.

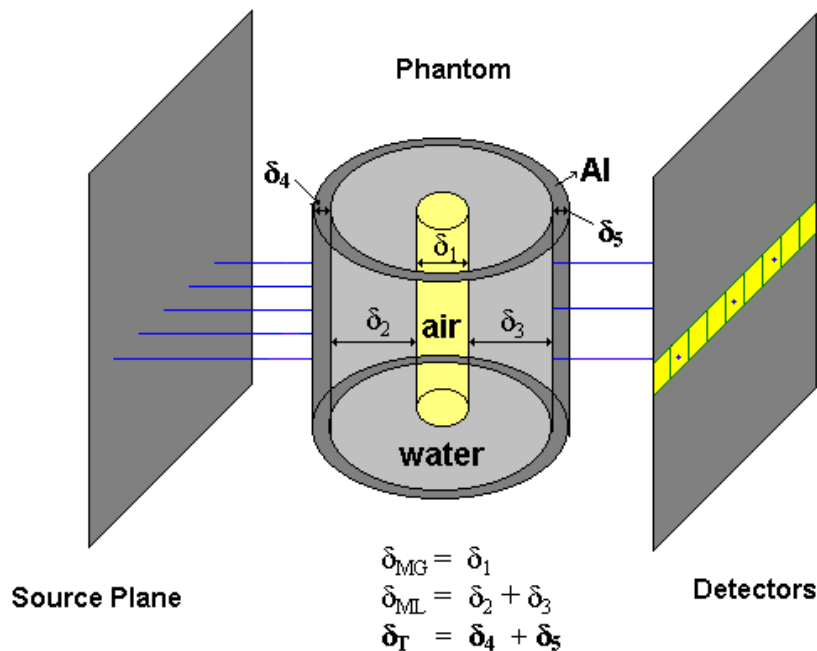


Figure 1. Model of the geometric configuration of the simulated neutron radiography system.

2. Results

Figure (2) shows the Monte Carlo simulation of the neutron flux profiles, of cylindrical phantom used, at various air-layer (δ_{MG}) thickness, obtained with a parallel incident beam. The same procedure was adopted substituting the aluminum tube by another one made iron, with the same height, diameter and wall thickness. The neutron flux profiles can be seen in Fig. (3). Note that, in both cases, there is a more pronounced increase in the unattenuated beam in detectors near the edge of the cylindrical phantoms (positions -15 mm and 15 mm). This is caused by scattered neutrons in the phantoms. The scattered flux component is indistinguishable from the true unattenuated flux component and the calculated unattenuated flux in the image will be greater than the actual unattenuated flux. The effect of the scattered neutron could not be ignored for quantification of the images taken by the neutron radiography. It could affect the final results of void fraction.

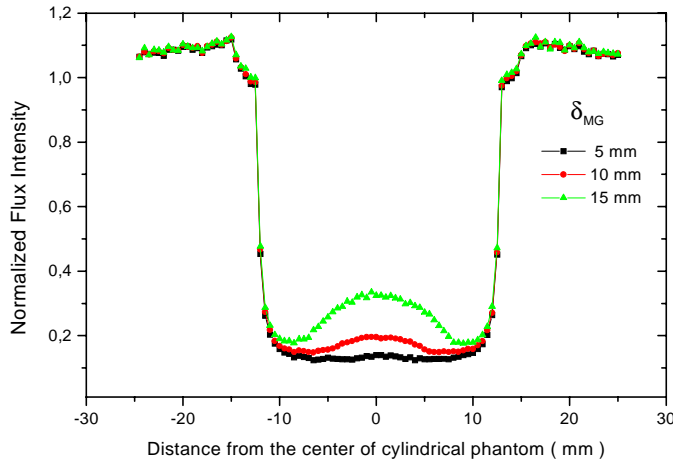


Figure 2. Projection profile of the transmitted neutrons through aluminum cylindrical phantom, at various δ_{MG} (air phase in two-phase mixture).

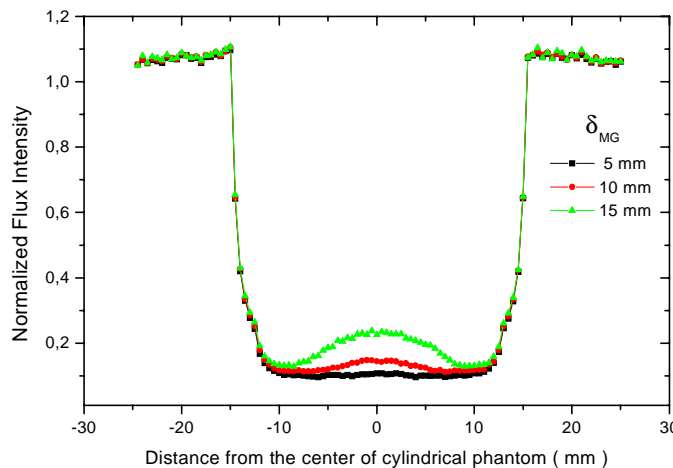


Figure 3. Projection profile of the transmitted neutrons through iron cylindrical phantom, at various δ_{MG} (air phase in two-phase mixture).

In calculation the void fraction a point neutron beam with an energy of 25 meV was used. Thermal neutron attenuation by water is predominantly due to scattering and not absorption. Thus, the direction point beam was centered on the a single detector extremely small ($10\mu\text{m}\times 10\mu\text{m}$), so that scattered neutrons has a very high probability of being scattered out of the region of interest (detector).

The results of the void fractions calculated, using eq. (5), for the phantoms either made of aluminum or iron, at various δ_{ML} (or δ_{MG}) thickness, are shown in Tab. 1. These results have shown that the numerical simulation used in this work aiming to obtain ϕ_L , ϕ_M and ϕ_G (eqs. (2), (3) and (4), respectively) was very adequate. The values of void fractions (α) were successfully reproduced by the Monte Carlo simulation. These values are in good agreement with those predetermined or known, *i.e.*, $(1 - \delta_{ML} / \delta_L)$; the relative errors are less than 4%.

Table 1. Values of void fractions predetermined (known), α_p , and obtained by MCNP, α_m , for the tube test section made of aluminum and iron.

	δ_L (cm)	δ_{ML} (cm)	^(a) α_p	ϕ_L (arb. Unit)	ϕ_M (arb. Unit)	ϕ_G (arb. Unit)	^(b) α_m	Relative Error ^(c)
Aluminum Tube	2.5	1.0	0.600	3.992E-03	1.61E-01	9.531E-01	0.599	0.20 %
	2.5	1.5	0.400	3.992E-03	3.570E-02	9.531E-01	0.400	0 %
	2.5	2.0	0.200	3.992E-03	1.242E-02	9.531E-01	0.207	3.50 %
Iron Tube	2.5	1.0	0.600	2.277E-03	6.164E-02	5.503E-01	0.601	0.20%
	2.5	1.5	0.400	2.277E-03	2.061E-03	5.503E-01	0.401	0.25%
	2.5	2.0	0.200	2.277E-03	7.012E-03	5.503E-01	0.205	2.50%

- (a) void fraction predetermined (value real);
- (b) void fraction obtained by MCNP;
- (c) defined as $(\alpha_p - \alpha_m) / \alpha_p$.

3. Conclusion

In this study, we consider the Monte Carlo simulations with a thermal neutron beam as “ideal” experiments, free of various factors contributing to the degradation of the neutron radiography images, such as beam angular divergence, statistical noise, collimator ratio, neutron energy spectrum and detector efficiency. The contribution of neutrons scattered in phantoms cannot be ignored in measuring neutrons falling on the detector. The effect of scattered neutron may affect the final results of the void fraction in this case.

The results obtained by Monte Carlo simulation have demonstrated the viability of neutron radiography techniques for the quantitative measurement of void fraction of air-water two-phase flow in metal tubes. By this technique, the void fraction could be estimated within the relative error of less than 4%, when we considered an “ideal” experiment.

The good agreement of the Monte Carlo simulation with the values predetermined (real values) demonstrat the MCNP code predictions could be effectively used to guide future experimental work.

4. Acknowledgements

The authors would like to thank the Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) for their financial support.

5. References

Briesmeister, J. F., 1997, MCNP - A General Monte Carlo N-Praticle Transport Code, Version 4B. Los Alamos, NM: Los Alamos National Laboratory; LA-12625-M, March.

- Crispim, V. R., 1993, *Desenvolvimento de Ensaios Não-Destrutivos com Neutronografias*. Ph.D. tesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Domanus, J.C., 1992, *Practical Neutron Radiography*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland.
- Hibiki, T., Mishima, K., Yoneda, K., Fujine, S., Kanda, K., Nishihara, H., Tsuruno, Matsubayashi, M. and Ohtomo, S., 1994, "Study on Two-Phase Flow Using Image". NEUTRON RADIOGRAPHY (4): *Proceedings of Fourth World Conference on Neutron Radiography*. May 10-16, 1992, pp. 317, J. P. BARTON, San Francisco, California, USA, Ed. Gordon and Breach Science Publishers.
- Takenaka, N., Fujii, T., Ono, A., Sonoda, K., Tazawa, S., and Nakanii, T., 1994, "Visualization of Streak Lines in Liquid Metal by Neutron Radiography". NEUTRON RADIOGRAPHY (4): *Proceedings of Fourth World Conference on Neutron Radiography*. May 10-16, 1992, pp. 355, J. P. BARTON, San Francisco, California, USA, Ed. Gordon and Breach Science Publishers.

PLANEJAMENTO FATORIAL APLICADO A UMA VÁLVULA PARA ALIMENTAÇÃO DE SÓLIDOS PARTICULADOS QUENTES

Júlio César Dainezi de Oliveira

Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM – Unicamp. Rua Mendeleiev, s/nº, Caixa Postal 6122. CEP: 13083-970
dainezi@fem.unicamp.br

Arai Augusta Bernárdez Pécora

Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM – Unicamp. Rua Mendeleiev, s/nº, Caixa Postal 6122. CEP: 13083-970
arai@fem.unicamp.br

Resumo. Este trabalho apresenta o estudo experimental de uma válvula de alimentação, denominada válvula cônica, adequada para controle da descarga de sólidos particulados quentes provenientes de reatores operando em regime de leito fluidizado borbulhante. Um levantamento da literatura sobre quais fatores influem na descarga de sólidos particulados através da válvula foi efetuado como base para a realização de um planejamento experimental de dois níveis, que permitiu determinar o efeito de cada uma das variáveis e suas interações sobre o processo estudado. Foram analisadas as influências das seguintes variáveis: razão área de abertura/área do tubo de entrada, diferença de pressão entre as extremidades da válvula, diâmetro médio do particulado (areia) e temperatura do leito fluidizado. A análise dos resultados mostrou que a razão área de abertura/área do tubo de entrada e diferença de pressão entre as extremidades da válvula apresentaram influências estatisticamente significativas sobre a descarga de sólidos escoando através da válvula.

Palavras chave: Válvula de alimentação, Planejamento Fatorial de Experimentos, Sistemas Gás-Sólidos.

1. Introdução

O sucesso das atividades industriais que utilizam sistemas gás-sólidos está, na maioria dos casos, diretamente ligado à escolha do sistema responsável pela alimentação das partículas sólidas. A válvula ou mecanismo utilizado para essa alimentação deve ser efetivo e confiável no controle da descarga de sólidos entrando em um processo. As deficiências e falhas no controle dessa descarga resultam em condições finais de operação adversas do previsto na fase de projeto dos equipamentos, gerando maiores custos de produção e de consumo de energia.

A descarga de sólidos particulados de um reator operando com leito fluidizado pode ser realizada de várias maneiras e com diferentes princípios de operação. A seleção, o projeto e o desenvolvimento do sistema de alimentação devem ser direcionados à eliminação de problemas ou dificuldades impostas pelo escoamento do material particulado. Em cada uma dessas etapas é de fundamental importância obter variadas informações sobre o processo e as características do equipamento para que se atinjam os menores custos de fabricação e operação e a melhor relação potência/consumo energético. Essas informações são obtidas a partir de questionamentos como:

- Quais as propriedades do sólido particulado e do material de construção da válvula?
- Quais as condições de projeto e de operação?
- Qual a aplicação industrial envolvida?
- Como a diferença de pressão entre as extremidades da válvula de alimentação influencia a descarga de sólidos através dela?
- Qual a vazão de ar disponível?

A válvula apresentada neste trabalho é uma válvula mecânica, tipo cônica, com o princípio de controle da descarga de sólidos baseado na variação da abertura em função do movimento progressivo ou regressivo do conjunto cone de fechamento/haste em relação ao orifício sede do tubo de entrada da válvula. As principais considerações no projeto e desenvolvimento da válvula foram assegurar que a descarga de sólidos particulados ocorresse de forma contínua e que a repetibilidade de operação fosse possível.

A técnica estatística aplicada neste estudo foi o planejamento ou delineamento experimental. Montgomery (1997), definiu o planejamento experimental como um conjunto de ensaios estabelecidos através de critérios científicos e estatísticos com o objetivo de determinar o efeito de cada uma das variáveis e suas interações sobre o processo estudado. Entre os benefícios das técnicas estatísticas destacam-se: reduzido número de ensaios, sem prejuízo da qualidade da informação; estudo simultâneo de diversas variáveis, permitindo a análise dos efeitos individualmente e de suas interações e finalmente permitir a elaboração de conclusões a partir de resultados qualitativos. A aplicação do planejamento experimental foi dividida em três etapas: determinação dos fatores de influência e da variável de resposta; atribuição de valores aos fatores de influência e determinação da confiabilidade dos resultados.

Nas duas primeiras etapas do planejamento experimental utilizou-se de um levantamento da literatura sobre quais fatores influem na descarga de sólidos particulados através de uma válvula. Foram analisadas as influências das seguintes variáveis sobre a descarga de sólidos: razão entre as áreas de abertura e do tubo de entrada da válvula, diferença de pressão entre as extremidades da válvula; diâmetro médio do material particulado e temperatura do leito fluidizado.

2. Metodologia

A maioria das técnicas estatísticas atualmente aplicadas nos estudos experimentais foi desenvolvida no início do século passado, sempre objetivando obter do estudo proposto o máximo de informações úteis com o mínimo de experimentos possíveis. Silveira (2000) apresentou uma revisão sobre tais técnicas, com enfoque para o método de Taguchi.

O planejamento experimental aplicado foi o planejamento fatorial em dois níveis (Box, Hunter e Hunter, 1978), útil quando se deseja determinar quais fatores apresentam ou não influência sobre a resposta procurada. Nesse tipo de planejamento experimental os fatores são variados em apenas dois níveis; o superior e o inferior de cada um dos fatores.

A determinação de quais fatores de influência serão estudados para a obtenção da variável de resposta deve ser precedida de um levantamento bibliográfico, que foi a primeira etapa da metodologia utilizada, seguida da técnica estatística.

2.1. Levantamento bibliográfico

A literatura relata a utilização de variados mecanismos para o controle da descarga de sólidos particulados, desde os mais simples, como orifícios, aos mais complexos, como válvulas de esfera atuadas pneumáticamente. Diversos estudos apresentam correlações empíricas para prever a descarga de sólidos através de sistemas de alimentação, podendo ser citados os de Geldart e Haesebrouck (1983); Sarkar *et al.* (1991); Yang e Knowlton (1993) e Arena *et al.* (1998). Em geral essas correlações possuem aplicação restrita às condições de operação, às características do particulado e à geometria do equipamento, sendo úteis na estimativa inicial de parâmetros de projeto.

Para o desenvolvimento da válvula proposta focou-se o levantamento bibliográfico no entendimento dos princípios de funcionamento de válvulas mecânicas e não mecânicas, responsáveis pelo controle da descarga de sólidos particulados.

A Tabela (1) apresenta diferentes configurações de válvulas e suas principais características de operação.

Tabela 1. Configurações e características de válvulas de alimentação (Cheng, 1998).

Equipamento	Configuração	Principais Características
Entrada com orifício interno.		<ul style="list-style-type: none"> - Fácil ajuste da descarga de sólidos; - Influência sobre a concentração de sólidos na coluna principal.
Válvula V e Selo Reverso.		<ul style="list-style-type: none"> - Regime estável na operação; - Indicada para sólidos do grupo B; - Descarga de sólidos limitada; - Forte restrição de entrada.
Válvula L.		<ul style="list-style-type: none"> - Fácil controle; - Simples construção; - Indicada apenas para sólidos do grupo B; - Ampla faixa de descarga; - Operação fortemente dependente da geometria e projeto da coluna de retorno.
Válvula J.		<ul style="list-style-type: none"> - Fraca restrição de entrada; - Influência significativa sobre a concentração de sólidos na coluna principal.
Entrada inclinada, com válvula borboleta.		<ul style="list-style-type: none"> - Opera em regime fluidizado ou movente no tubo inclinado; - Fácil ajuste da descarga pela variação da abertura; - Operação menos estável em altas descargas.
Válvula cônica.		<ul style="list-style-type: none"> - Fácil ajuste da circulação de sólidos pela variação da abertura; - Altas taxas de circulação; - Baixa queda de pressão através da válvula

→ Direção dos sólidos

⇒ Injeção de gás

As válvulas não mecânicas são equipamentos de simples construção e baixo custo. Os princípios de operação e de projeto de uma válvula não mecânica são os mesmos para os diversos modelos existentes. O controle da descarga de sólidos através de uma válvula não mecânica é função da geometria e da quantidade de gás injetado na válvula (Knowlton e Hirsan, 1978). Em geral, são montadas na parte inferior da coluna de retorno em um sistema de leito fluidizado circulante (LFC). As Válvulas não mecânicas operam melhor com material particulado do grupo B da classificação de Geldart (1973), em regimes de leito movente, leito fluidizado ou transporte pneumático. O modelo mais utilizado de válvula não mecânica é a do tipo L que, segundo Knowlton e Aquino (1988), apresenta melhor desempenho em relação aos demais modelos.

Knowlton e Hirsan (1978), verificaram que a posição da tomada de injeção de ar em uma válvula L deveria ser o mais próximo do cotovelo da válvula, sendo essa posição determinante na descarga de sólidos através dela e que a vazão de gás injetado para um controle efetivo do fluxo de material escoando aumentava com o aumento da massa específica e do tamanho da partícula.

A relação direta da queda de pressão através de uma válvula L e da descarga de sólidos particulados foi verificada por da Silva *et al* (1994), podendo, segundo os autores, em primeira aproximação correlacionar os dados por uma equação do tipo linear.

As válvulas mecânicas são utilizadas quando o modo de contato gás-partícula está em regime de leito fixo, deslizantes, ou fluidizado. A utilização de válvulas mecânicas em sistema gás-sólido é normalmente adotada para condições de operação normais, isto é, temperaturas e pressões ambiente. As válvulas cônicas são usadas para controlar o escoamento de sólidos deixando um leito fluidizado ou um leito deslizante. Devido à forma cônica de seus internos, essas válvulas mantêm suas características de regulação mesmo depois de considerável desgaste interno. As vantagens de uma válvula cônica foram sumarizadas por Sankar e Smith (1986) em relação a outros sistemas de alimentação, como a rosca transportadora e as válvulas não mecânicas. As vantagens citadas foram: seleção de qualquer descarga pelo simples ajuste da abertura da válvula; descarga de sólidos constante para uma abertura fixa; repetibilidade e confiabilidade.

2.2. Planejamento fatorial em dois níveis

O planejamento fatorial em dois níveis é o mais simples dos planejamentos experimentais. A execução do planejamento consiste em estudar o efeito de cada um dos fatores de influência sobre a resposta desejada, variando-os em seus dois níveis, o superior e o inferior. Os experimentos foram realizados de modo que os níveis dos fatores fossem combinados entre si. Genericamente, o número de experimentos necessários para obter as possíveis combinações é o fatorial 2^k, sendo k os fatores, variáveis controladas, estudados no processo. Uma maneira eficiente de relacionar todas as combinações é elaborar uma listagem, denominada matriz de planejamento, e representar os níveis de operação na forma de sinais algébricos (coeficientes de contraste). Essa matriz aplicada para 4 fatores é representada na Tab. (2), onde constam os elementos: fatores, suas interações e os coeficientes de contraste.

Tabela 2. Matriz de planejamento completa.

Experimento	Fatores Principais				Interações entre Fatores										
	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
1	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
2	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
3	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-
4	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+
5	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-
6	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+
7	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+
8	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
9	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
10	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+
11	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
12	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-
13	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+
14	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-
15	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Para verificar estatisticamente a influência de um determinado fator sobre a resposta procurada é necessário primeiro estimar o efeito de cada um dos fatores e então aplicar a este efeito o teste t de Student. O valor do efeito é calculado a partir da Eq. (1).:

$$E_f = \bar{y}^+ - \bar{y}^- \tag{1}$$

onde

\bar{y}^+ resposta média para o nível superior;

\bar{y}^- resposta média para o nível inferior.

Os fatores, 1 a 4, apresentados neste trabalho referem-se à:

- Fator 1: razão entre área de abertura e área do tubo de entrada da válvula (A_o/A_i);
- Fator 2: diferença de pressão entre as extremidades da válvula (ΔP_v);
- Fator 3: diâmetro médio do particulado (\bar{d}_p);
- Fator 4: temperatura do leito fluidizado (T_L)

3. Descrição do conjunto experimental

O conjunto experimental utilizado nos testes é esquematizado na Fig. (1), constituído basicamente dos equipamentos: silo de armazenagem dos sólidos particulados (1); válvula pneumática (2); câmara de combustão operando com leito fluidizado (3), válvula cônica (4), trocador de calor para coleta do sólido nos testes a quente (5) e sopradores (9).

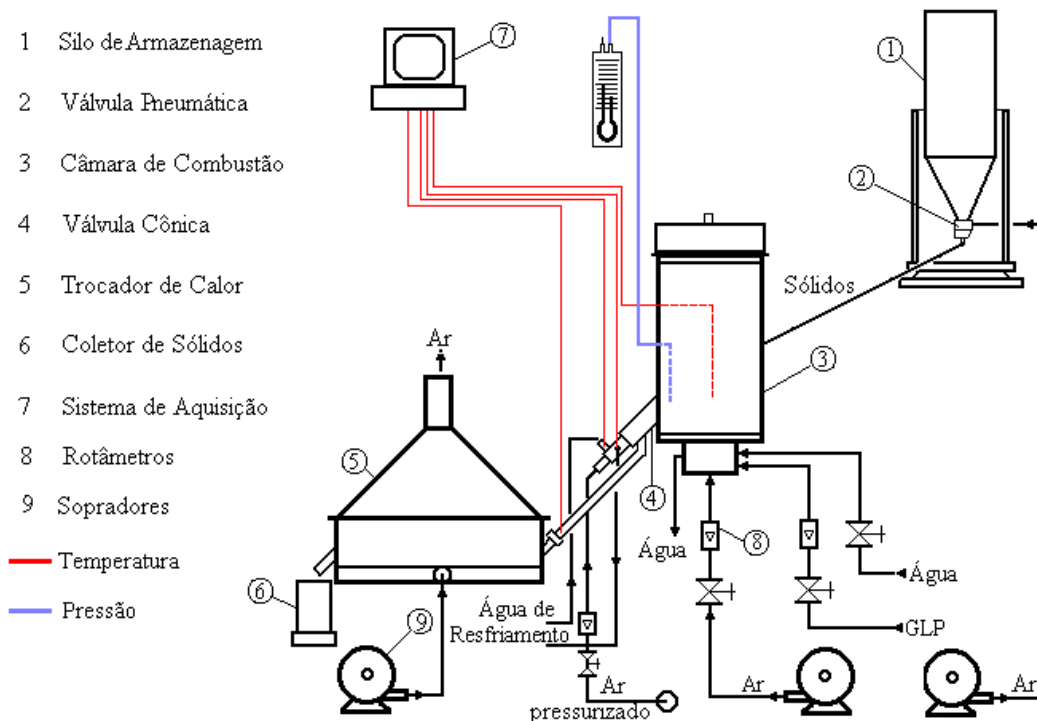


Figura 1. Esquema do conjunto experimental.

A seqüência básica de operação compreendeu as etapas de alimentar a câmara de combustão (3), através da válvula pneumática (2) conectada ao silo de armazenagem de sólidos (1); controlar a descarga de sólidos aquecidos deixando a câmara de combustão através da válvula cônica (4), em direção ao coletor de sólidos (6), passando previamente através do trocador de calor (5). O trocador foi utilizado apenas nos testes onde o leito fluidizado apresentava temperaturas elevadas (testes a quente).

A válvula cônica estudada neste trabalho foi projetada para atender a necessidade de transferir sólidos particulados, em elevadas temperaturas, de maneira contínua e controlada. A válvula possui um sistema interno de circulação de água para resfriamento dos componentes interiores, evitando dilatações e conseqüentes deformações da válvula. Para assegurar o efetivo controle da descarga de sólidos, dentro de uma ampla faixa de operação, foi inserido um tubo para injeção de ar, de modo a manter a suspensão gás-partícula ao longo do tubo de saída da válvula. O material especificado na fabricação da válvula foi aço inox ASTM A 276 T 310, exceto os tubos de injeções de ar e de condução da água de resfriamento, confeccionados em cobre.

O material sólido utilizado nos experimentos foi areia com diâmetros médios de $1,85 \times 10^{-4}$ m e $2,85 \times 10^{-4}$ m, e massa específica de 2710 kg/m^3 , pertencente ao grupo B da classificação de Geldart. Os diâmetros de partícula

escolhidos estão dentro da faixa usualmente encontrada no descarte de cinzas provenientes de reatores com leito fluidizado operando com combustíveis sólidos (Munts *et al.*, 1990).

A Figura (2) mostra a válvula utilizada no presente trabalho, com suas principais medidas. O mecanismo de controle da descarga de sólidos consiste em um movimento progressivo ou regressivo do conjunto cone de fechamento/haste(6), através do cursor (4), em relação ao orifício sede do tubo de entrada (1). A determinação da descarga de sólidos deixando a câmara de combustão foi feita por cronometragem e pesagem, utilizando balança eletrônica com precisão de 0,02 kg. A vazão da água de resfriamento, usada nos experimentos com altas temperaturas, foi monitorada utilizando-se de uma proveta e de um cronômetro. O monitoramento das temperaturas foi feito através de termopares tipo T e tipo K via sistema de aquisição de dados, Lynx CAD 12/32. A leitura da pressão na entrada da válvula foi feita através de manômetros com tubo em U.

Na extremidade esquerda da Fig. (2) observam-se as conexões para a água de circulação interna (7) e o tubo de injeção de ar (8). A temperatura de saída da suspensão gás-partícula (T_s) foi medida através de termopares instalados perpendicularmente ao tubo de saída.

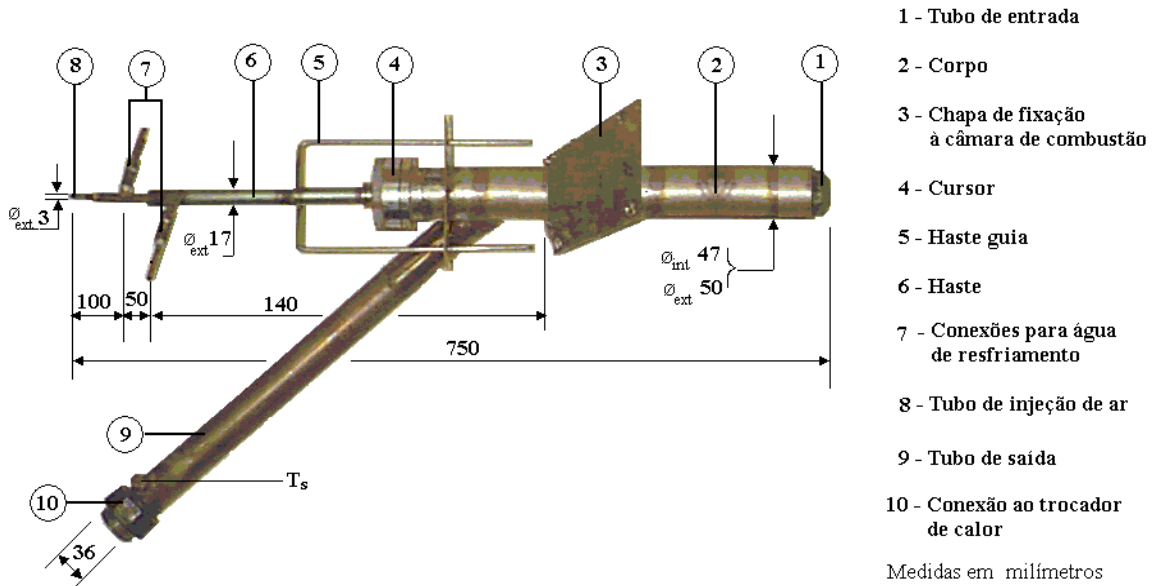


Figura 2. Válvula cônica.

Os valores para os níveis dos fatores são apresentados na Tab. (3); estabelecidos em função das características construtivas da câmara de combustão e limitações do conjunto experimental. As alturas do leito fluidizado na câmara de combustão, que estão relacionada à diferença de pressão entre as extremidades da válvula, foram: 0,370 e 0,570 m.

Tabela 3. Níveis dos fatores.

Fator	Nível inferior	Nível superior
1 - A_o/A_t [-]	0,1	0,28
2 - ΔP_v [kPa]	1,372	2,745
3 - \bar{d}_p [$\times 10^{-4}$ m]	185	285
4 - T_L [K]	300	1023

4. Resultados e discussões

Os resultados experimentais obtidos a partir do planejamento fatorial proposto foram determinados através da realização dos experimentos em duplicata, possibilitando a estimativa do desvio do efeito. A partir desse desvio foi possível avaliar a significância estatística dos efeitos, utilizando-se do teste “t” de Student, para um nível de confiança nos resultados de 95% e 16 graus de liberdade, que corresponde ao valor 2,120 (Holman, 1994).

O desvio padrão do efeito (S_{e_f}) foi calculado segundo Barros Neto *et al.* (1995). Obteve-se o desvio calculando a variância de cada um dos experimentos, e posteriormente foi calculada uma estimativa conjunta da variância experimental a partir de todas as combinações possíveis dos níveis dos fatores. O valor encontrado de 6,7 kg/h refere-se ao desvio do efeito.

A incerteza experimental na medida de descarga de sólidos variou entre 0,32 e 12,92 kg/h.

A Tabela (4) apresenta os resultados obtidos das duas medidas realizadas e os respectivos valores médios.

Tabela 4. Convalidação dos resultados.

Experimentos	Fatores Principais				Resposta - \dot{M}_s [kg/h]		
	A_o/A_t [-]	ΔP_v [kPa]	\bar{d}_p [x 10 ⁻⁴ m]	T_L [K]	1° Medição	2° Medição	Média
1	0,10	1,372	185	300	18	14,4	16,2
2	0,28	1,372	185	300	396,0	403,2	399,6
3	0,10	2,745	185	300	21,6	18,0	19,8
4	0,28	2,745	185	300	658,8	633,6	646,2
5	0,10	1,372	285	300	18,0	21,6	19,8
6	0,28	1,372	285	300	352,8	331,2	342,0
7	0,10	2,745	285	300	21,6	25,2	23,4
8	0,28	2,745	285	300	633,6	640,8	637,2
9	0,10	1,372	185	1023	79,2	97,2	88,2
10	0,28	1,372	185	1023	338,4	403,2	370,8
11	0,10	2,745	185	1023	126,0	129,6	127,8
12	0,28	2,745	185	1023	518,4	453,6	486,0
13	0,10	1,372	285	1023	122,4	118,8	120,6
14	0,28	1,372	285	1023	288,0	309,6	298,8
15	0,10	2,745	285	1023	151,2	162,0	156,6
16	0,28	2,745	285	1023	460,8	489,6	475,2

A informação sobre a influência de cada um dos fatores sobre a resposta procurada é fundamental para avaliar a importância estatística de cada um deles e de suas interações. Essa informação é obtida através do cálculo dos efeitos. Os efeitos foram calculados como representado pela Eq. (1). A avaliação estatística foi complementada comparando-se os efeitos dos fatores ou interações à uma análise conjunta do desvio padrão do efeito e do teste “t” de Student ($S_{ef} \times t$). O efeito será significativo estatisticamente se seu valor em módulo for maior que ($S_{ef} \times t$). O valor obtido dessa análise no presente trabalho foi de 14,2 kg/h.

A Tabela (5) mostra os resultados obtidos e também a representação da significância estatística de cada um dos fatores ou das interações, sendo NSE (Não Significativo Estatisticamente) os fatores com módulo da estimativa do efeito inferior a 14,2 e SE (Significativo Estatisticamente) os fatores com módulo da estimativa do efeito superior a 14,2.

Tabela 5. Resultados da análise estatística dos efeitos.

Fatores e Interações	Estimativa do Efeito M_s (kg/h)	Resultado Estatístico
1 (A_o/A_t)	385,43	SE
2 (ΔP_v)	114,53	SE
3 (\bar{d}_p)	-10,13	NSE
4 (T_L)	2,48	NSE
12	93,83	SE
13	-27,23	SE
14	-101,03	SE
23	13,28	NSE
24	-22,73	SE
34	4,73	NSE
123	14,18	NSE
124	-39,83	SE
134	-8,78	NSE
234	-1,13	NSE
1234	2,02	NSE

Os sinais negativos existentes na Tab. (5) significam que ao mudar do nível inferior para o nível superior de um fator principal haverá uma perda na resposta de interesse, ou seja, diminui a descarga de sólidos através da válvula. Os efeitos positivos têm interpretação contrária. A interpretação dos resultados dos efeitos da Tab. (5) permite concluir qual entre os fatores e interações significativos estatisticamente tem maior relevância, ou seja, quanto maior for o valor em módulo da estimativa do efeito, maior será o ganho ou perda da variável de resposta. Para este estudo os fatores principais de maior influência sobre a descarga de sólidos particulados através da válvula cônica foram a razão área de abertura/área do tubo de entrada (A_o/A_t) e a diferença de pressão entre as extremidades da válvula (ΔP_v). As grandes flutuações na resposta quando há variação no nível do fator razão A_o/A_t confirmam a forte influência desse fator sobre a descarga de sólidos através da válvula.

Deve-se considerar que a faixa de diâmetro da partícula analisada foi estreita, em função de limitações do conjunto experimental, havendo a necessidade de ampliá-la para que o resultado obtido através do planejamento experimental seja confirmado.

O fato de alguns efeitos de interação serem significativos indica que os efeitos principais devem ser interpretados conjuntamente, i.e., na interação 12 (A_o/A_t e ΔP_v) a influência do fator razão A_o/A_t sobre a descarga de sólidos através da válvula depende em que nível, superior ou inferior, o fator ΔP_v está configurado. Igualmente, a influência de ΔP_v sobre a resposta depende do nível da razão A_o/A_t . Considerando essa interação, em média, a influência da razão A_o/A_t é 291,6 para o nível inferior de ΔP_v e 479,25 para o nível superior de ΔP_v ; e os efeitos do fator ΔP_v são 20,7 para o nível inferior da razão A_o/A_t e 208,35 para o nível superior da razão A_o/A_t . Estes valores mostram que a interação 12 conduz a um aumento nos valores da descarga de sólidos através da válvula quando ambos fatores, A_o/A_t e ΔP_v , estão em seus níveis superiores.

Análise semelhante é feita para a interação 13, que promove a diminuição da descarga de sólidos através da válvula quando os fatores A_o/A_t e \bar{d}_p estão em seus níveis superior e inferior, respectivamente; sendo os efeitos da razão A_o/A_t sendo 412,65 para o nível inferior de \bar{d}_p e 358,2 para o nível superior de \bar{d}_p , enquanto a influência de \bar{d}_p é 17,1 para o nível inferior de A_o/A_t e -37,35 para o nível de A_o/A_t superior.

Embora uma das interações de ordem 3 tenha influência estatística, esta pode ser, segundo Barros Neto *et al.* (1995), atribuída às flutuações aleatórias ao processo estudado; possibilitando que a análise estatística restrinja-se aos fatores principais e às interações de ordem 2, sem perda da qualidade da informação.

Há também uma maneira gráfica para a interpretação da influência das interações sobre a resposta desejada. O diagrama típico é mostrado nas Figs. (3) e (4). Neste tipo de representação é possível, além da interpretação das interações de dois fatores que a compõem, analisar a influência de um ou ambos fatores principais, de acordo com a significância estatística de cada um deles.

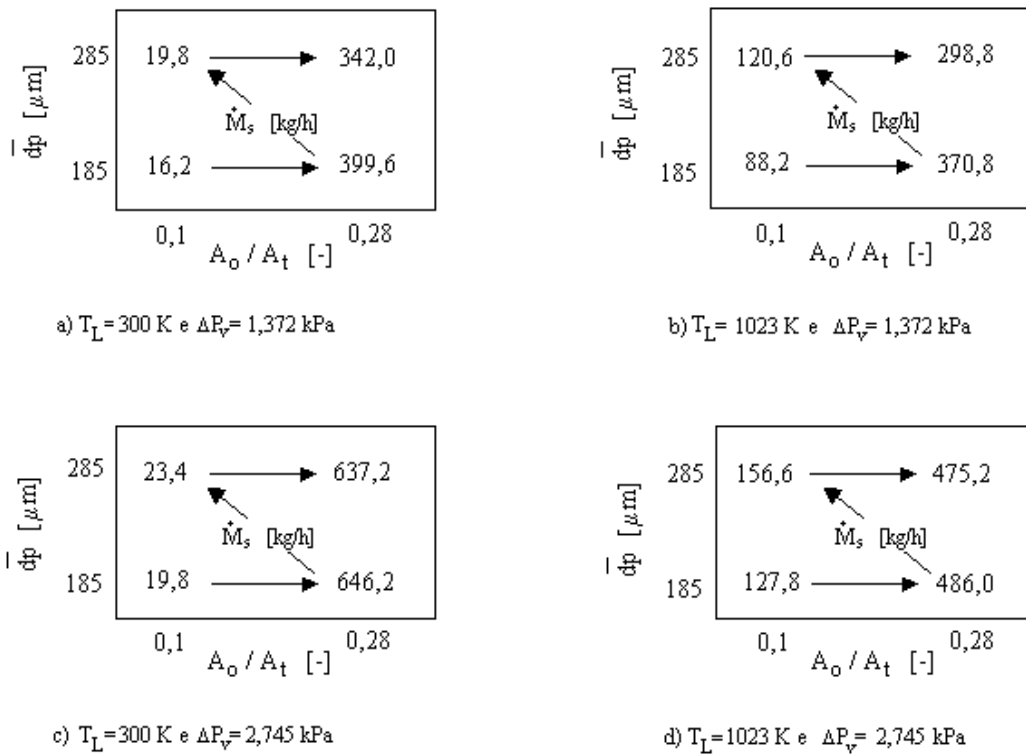


Figura 3. Diagrama para interpretação dos efeitos: A_o/A_t e \bar{d}_p sobre a descarga de sólidos através da válvula.

A análise estatística da interação 13 (A_o/A_t e \bar{d}_p) mostra sua influência negativa sobre a resposta, ou seja, a variação dos níveis diminui a descarga de sólidos. A mesma conclusão é obtida interpretando a Fig. (3), onde a influência da interação é verificada pela diagonal que liga os níveis superiores. A Fig. (3) também possibilita interpretar a influência do fator razão A_o/A_t , para o qual a mudança do nível inferior (0,10) para o nível superior (0,28) produz um aumento na descarga de sólidos, como encontrado na análise estatística.

A Figura (4) é interpretada como o caso anterior. Nessa figura, ao passar do nível inferior para o nível superior, para ambos fatores, há um ganho na descarga de sólidos. A interação destes dois fatores (12), ao contrário do verificado na Fig. (3), aumenta a descarga de sólidos. Gráficamente, esse aumento é observado através da diagonal que interliga o nível (- -) ao nível (+ +).

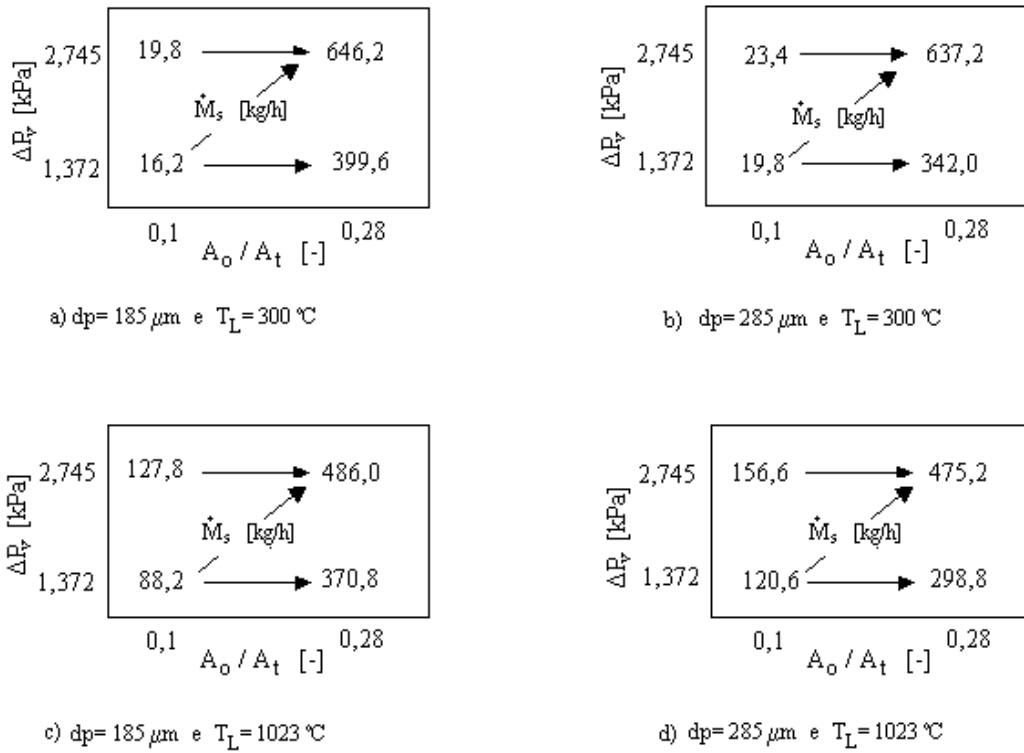


Figura 4. Diagrama para interpretação dos efeitos: A_o/A_t e ΔP_v sobre a descarga de sólidos através da válvula.

As Figuras (5) e (6) mostram a relação direta do aumento da diferença de pressão entre as extremidades da válvula com o aumento da descarga de sólidos, para um maior número de razões área de abertura/área do tubo de entrada (A_o/A_t). As Figuras (5) e (6) referem-se aos resultados obtidos para os diâmetros de partícula de $1,85 \times 10^{-4}$ e $2,85 \times 10^{-4}$ respectivamente.

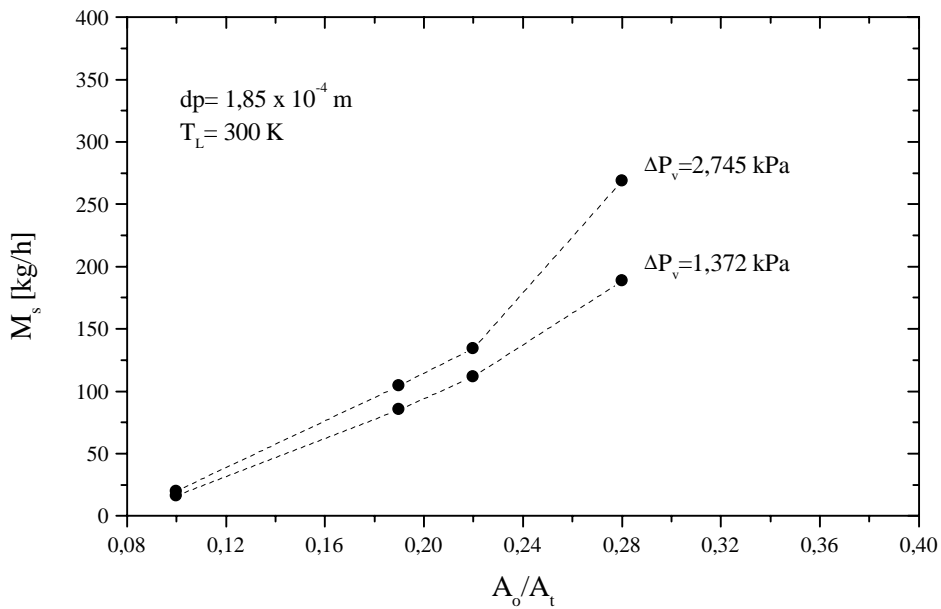


Figura 5. Descarga de sólidos em função da razão A_o/A_t .

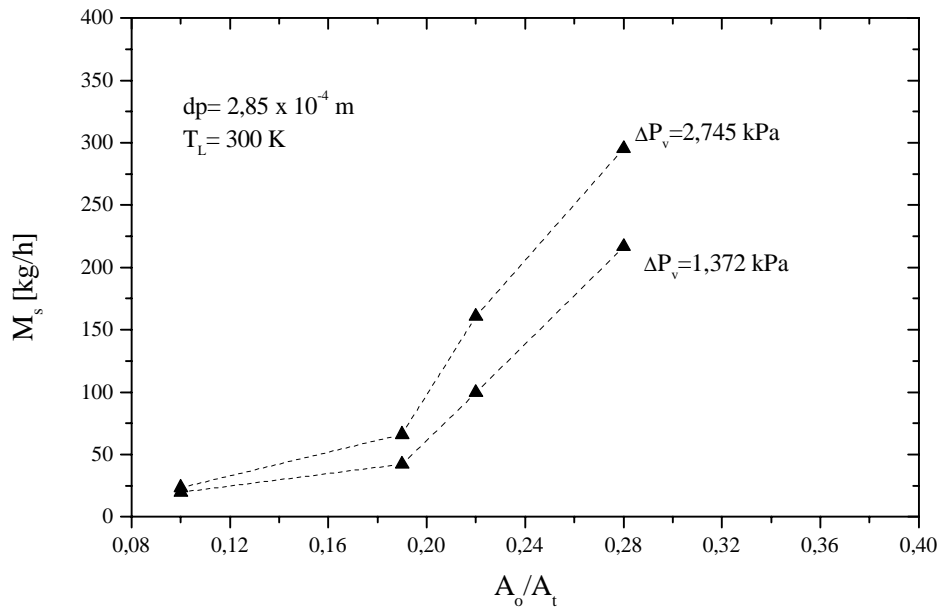


Figura 6. Descarga de sólidos em função da razão A_o/A_t .

A análise dessas figuras mostra que para ambas as partículas, o aumento da diferença de pressão entre as extremidades da válvula provoca o aumento da descarga de sólidos escoando através dela, principalmente quando as maiores aberturas são utilizadas.

5. Conclusões

A metodologia de planejamento experimental aplicada ao presente trabalho permitiu determinar entre os fatores analisados quais foram estatisticamente significativos no estudo da descarga de sólidos particulados através da válvula cônica. A análise dos resultados mostrou que os fatores de influência foram a queda de pressão entre as extremidades da válvula e a razão área de abertura/área do tubo de entrada.

A descarga de sólidos através da válvula é diretamente proporcional ao aumento da razão área de abertura/área do tubo de entrada e à diferença de pressão entre as extremidades da válvula.

A válvula estudada apresentou estabilidade e repetibilidade nos valores da descarga de sólidos particulados.

O efeito da temperatura do leito fluidizado sobre a descarga de sólidos através da válvula não foi estatisticamente significativo.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem a Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo suporte financeiro na execução deste trabalho.

7. Referências Bibliográficas

- Arena, U., Langeli, C.B., Cammarota, A., 1998, "L-valve Behaviour with Solids of Different Size and Density", Powder Technology, Vol. 98, No. 3, pp. 231-240.
- Barros Neto, B., Scarminio, I.S., Bruns, R.E., 1995, "Planejamento e Otimização de Experimentos", Ed. da Unicamp, Campinas, Brasil, 299 p.
- Box, G.E.P., Hunter, W.G., Hunter, J.S., 1978, "Statistics for Experiments – An Introduction to Design, Data Analysis and Model Building", New Jersey.
- Cheng, Y., Wei, F., Yang, G., Jin, Y., 1998, "Inlet and Outlet Effects on Flow Patterns in Gas-Solid Riser", Powder Technology, Vol. 98, No. 2, pp. 151-156.
- da Silva, M.G.C., *et. al.*, 1994, "Estudo do Desempenho da Válvula L em um Leito Fluidizado Circulante", Proceedings of 10º Congresso Brasileiro de Engenharia Química, São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Geldart, D., 1973, "Types of Gas Fluidization", Powder Technology, Vol. 7, No. 5, pp. 285-292.
- Geldart, D., Haesebrouck, M., 1983, "Studies on the Intermittent Discharge of Coarse Solids from Fluidized Beds", Chemical Engineering Research Design, Vol. 61, No. 4, pp. 224-232.
- Holman, J.P., 1994, "Experimental Methods for Engineers", ed. McGraw-Hill, Inc, 6th edition, 616 p.

- Knowlton, T.M., Aquino, M.R.Y., 1981, "A Comparison of Several Lift-Line Feeders", Proceedings of 2nd Congress of Chemical Engineering, Montreal, Canada.
- Knowlton, T.M., Hirsan, I., 1978, "L-Valves Characterized for Solids Flow", Hydrocarbon Processing, Vol. 57, No. 3, pp. 149-156.
- Montgomery, D. C., 1997, "Design and Analysis of Experiments" ed. John Wiley & Sons, 4th edition, New York, 704 p.
- Munts, V.A., Baskakov, A.P., Fedorenko, Y.N., Kozlova, Y.G., 1990, "The Circulation Factor in Furnaces with a Circulating Fluidized-Bed", Thermal Engineering, Vol. 37, N° 4, pp. 176-180.
- Sankar, S. R., Smith, T.N., 1986, "Slip Velocities in Pneumatic Transport – Part II", Powder Technology, Vol. 47, No. 2, pp. 179-194.
- Sarkar, M., Gupta, S.K., Sarkar, M.K., 1991, " An Experimental Investigation of the Flow of Solids from a Fluidized-Bed through an Inclined Pipe", Powder Technology, Vol. 64, No. 3, pp. 221-231.
- Silveira, Z.C., Cavalca, K.L., 2000, "Uma Abordagem sobre Confiabilidade Robusta em Sistemas Mecânicos" Proceedings of COCIN-CONAE, Valparaiso, Chile.
- Yang, W.C., Knowlton, T.M., 1993, "L-Valve Equations", Powder Technology, Vol. 77, No. 1, pp. 49-54.

8. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído neste trabalho.

Factorial Experimental Design Applied to a Hot Particles Feeder Valve

Júlio César Dainezi de Oliveira

Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM – Unicamp. Rua Mendeleiev, s/nº, Caixa Postal 6122. CEP: 13083-970

dainezi@fem.unicamp.br

Arai Augusta Bernárdez Pécora

Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM – Unicamp. Rua Mendeleiev, s/nº, Caixa Postal 6122. CEP: 13083-970

arai@fem.unicamp.br

Abstract. This paper reports an experimental study of a feed valve, named cone valve, suitable for mass flow rate control of solid particles leaving fluidized bed reactors. Literature review showed the factors that are important to be considered in a two level experimental design in order to identify the effect of each variable and their interaction on the process. The following variables were investigated: ratio between opening area/transversal tube area at the valve entrance; valve pressure difference between the valve extremities; particle diameter and temperature of the fluidized bed. Results showed that valve pressure drop and the ratio between opening area/transversal entrance tube area were factors statistically significant on the solid mass flow rate through the cone valve.

Keywords: Feed valve; Factorial experimental design; Gas-solid system.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA BIDIMENSIONAL DE INTERAÇÃO PARALELA AEROFÓLIO-VÓRTICE NAS VIZINHANÇAS DE UMA PAREDE.

Flávia dos Reis Carreiro

Departamento de Engenharia Mecânica, EE/COPPE/UFRJ
flavia@serv.com.ufrj.br

Gustavo C. R. Bodstein

Departamento de Engenharia Mecânica, EE/COPPE/UFRJ
C.P: 68503
21945-970 – Rio de Janeiro, R.J
gustavo@serv.com.ufrj.br

Resumo. A interação de um aerofólio com um vórtice gerado à montante é um fenômeno conhecido como Interação Aerofólio - Vórtice. A presença de uma parede representa a condição de vôo próxima ao solo e afeta o escoamento em torno da pá. Neste trabalho, um método numérico, baseado no método de vórtices, é implementado para estudar o escoamento não-permanente, bidimensional e incompressível que ocorre durante uma interação Paralela Vórtice-Aerofólio nas vizinhanças de uma parede. A vorticidade na superfície do aerofólio foi simulada usando o método dos painéis com distribuição de vorticidade linear. O vórtice principal é modelado como um vórtice de Lamb e o efeito solo é obtido usando o método de imagens. A esteira é modelada por um conjunto de vórtices de Lamb que são gerados no bordo de fuga do aerofólio para assegurar a conservação da circulação e garantir que a condição de Kutta seja satisfeita. O vórtice principal e todos os vórtices da esteira são convectados usando um esquema Lagrangeano de primeira ordem de marcha no tempo. A difusão de vorticidade que ocorre na esteira é simulada usando o método de avanço randômico. Os coeficientes de pressão, sustentação e momento são calculados. Resultados numéricos obtidos são comparados com outros resultados disponíveis na literatura, mostrando boa concordância. Os resultados revelam que este modelo é capaz de representar muito bem a variação temporal das cargas aerodinâmicas e a evolução não linear da esteira que ocorrem durante a interação.

Palavras chave: *Interação Aerofólio – Vórtice, Método de Vórtices, Método dos Painéis, Método de Avanço Randômico, Aerodinâmica.*

1. Introdução

O estudo de escoamentos não-permanentes e incompressíveis resultantes da interação de um vórtice e superfícies de sustentação que ocorrem na vizinhança de uma parede plana encontram aplicação em muitos problemas de engenharia. Algumas destas aplicações são o escoamento em torno de um aerofólio com efeito solo ou o escoamento em torno de uma pá durante a decolagem ou aterrissagem de um rotor de helicóptero. Durante a interação da pá de um helicóptero e um vórtice, conhecida como Interação Aerofólio-Vórtice, os vórtices que se formam atrás da pá interagem com o solo presente na vizinhança. A interação que ocorre quando o vórtice está paralelo ao eixo da pá é classificada como Interação Paralela Aerofólio-Vórtice BVI.

Um grande número de artigos sobre escoamentos não-permanentes e incompressíveis em torno de aerofólios têm sido publicados. Para a Interação Paralela Aerofólio-Vórtice que ocorre em torno do rotor de helicópteros, sem a presença de parede, Panaras(1987), Poling et al.(1989), Lee e Smith(1991), Fonseca et al.(1997), entre outros, têm desenvolvido modelos numéricos com base no método de vórtices discretos, não-viscoso em conjunto com a teoria potencial e o método dos painéis. Investigações experimentais detalhadas sobre a interação paralela aerofólio-vórtice vêm sendo apresentadas por Seath et al.(1989), Straus et al.(1990) e Chen e Chang(1997). O escoamento potencial em torno de aerofólios esbeltos com efeito solo têm sido tratado analiticamente por Havelock(1938) e Green(1947).

Fonseca et al.(1997) simularam a interação paralela entre um aerofólio e um vórtice. O objetivo deste trabalho é estender o método de vórtices de Fonseca et al.(1997) para escoamentos não-permanentes, bidimensionais, não-viscosos e incompressíveis para estudar o efeito solo em interações aerofólio-vórtice que ocorrem durante uma interação paralela, levando em consideração a interação não-linear vórtice-esteira. Utiliza-se o método de painéis lineares e contínuos para discretizar a vorticidade do contorno do aerofólio, cuja intensidade é encontrada impondo-se a condição de contorno de impenetrabilidade nos pontos de controle do aerofólio. A condição de Kutta é imposta através da continuidade do campo de pressão no bordo de fuga do aerofólio, combinada com o teorema da circulação de Kelvin. Este procedimento fornece um modelo para simular a folha de vorticidade no bordo de fuga, responsável por injetar vorticidade na esteira. O vórtice principal que interage com o aerofólio e a vorticidade na esteira são modelados como 2-D vórtices de Lamb. Todos os vórtices do escoamento são movidos por convecção usando um esquema Lagrangeano de primeira ordem de marcha no tempo. Os resultados obtidos com este modelo são comparados com os resultados experimentais de Straus et al.(1990) e os resultados numéricos de Fonseca et al.(1997).

2. Modelo Matemático

Considere um aerofólio bidimensional com corda c imerso em um escoamento uniforme com velocidade de incidência U_∞ sujeito a uma interação paralela com um vórtice principal. O aerofólio encontra-se a uma altura H acima do solo (a partir do bordo de ataque). Todas as variáveis a seguir encontram-se adimensionalizadas por U_∞ and c . O vórtice tem intensidade constante Γ_v (sentido horário de rotação considerado positivo), o qual ocupa a posição $(x_v(t), y_v(t))$ no instante t . O solo é representado por uma parede plana infinita. Na Figura (1) pode-se observar a geometria do escoamento e o sistema de coordenadas cartesianas usado. O escoamento é considerado bidimensional, não-permanente, incompressível e não-viscoso. Para este escoamento, o campo de velocidades deve satisfazer as equações de Navier-Stokes e continuidade, e as condições de contorno associadas, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{na região do escoamento,} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{na região do escoamento,} \quad (2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_a = 0 \quad \text{na superfície do aerofólio,} \quad (3a)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_g = 0 \quad \text{na superfície da parede,} \quad (3b)$$

$$|\mathbf{u}| \rightarrow 1 \quad \text{no infinito.} \quad (3c)$$

onde $Re_c \equiv U_\infty c / \nu$, e ν é a viscosidade cinemática.

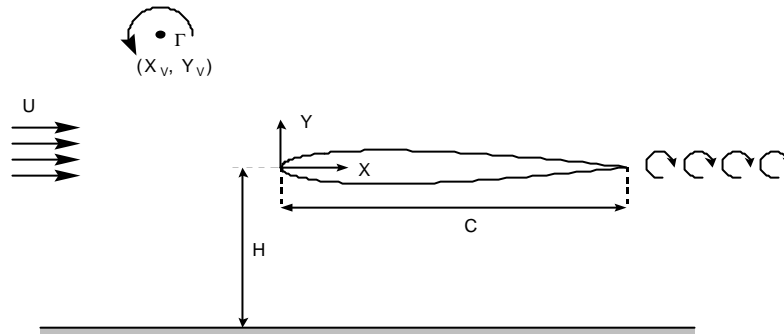


Figura 1. Interação Aerofólio-Vórtice nas vizinhanças de uma parede.

O vórtice principal é modelado como sendo um vórtice de Lamb, e a esteira como sendo um conjunto de vórtices de Lamb. A vorticidade da camada limite se concentra na superfície do aerofólio, a camada limite da parede foi desconsiderada. Assim, este escoamento é rotacional somente na esteira, no vórtice principal e na superfície do corpo, sendo irrotacional no restante do escoamento. A equação de transporte de vorticidade será utilizada, na sua forma adimensional, como se segue:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{w} = 0 \quad (4)$$

Em uma representação Lagrangeana a Eq. (4) significa que a taxa de mudança de \mathbf{w} que acompanha uma partícula de fluido é zero, e a vorticidade se move com o fluido. Isto possibilita o uso de um esquema Lagrangeano de marcha no tempo para convectar qualquer vórtice de Lamb pela solução de um sistema linear de equações diferenciais ordinárias para sua posição.

$$\frac{d\mathbf{x}_v}{dt} = \mathbf{u}_v(\mathbf{x}_v(t), t) \quad (5)$$

A camada limite do aerofólio é modelada como possuindo espessura infinitesimal e com isso utiliza-se uma fina folha de vorticidade sobre a superfície do corpo para representá-la. Pode-se demonstrar que a vorticidade por unidade de comprimento distribuída ao longo da superfície do aerofólio é dada por:

$$\mathbf{g}(s, t) = u_s(s, t) \quad (6)$$

Com exceção da superfície do aerofólio e dos pontos ocupados pelo vórtice principal e vórtices da esteira, todo o escoamento é irrotacional, e pode-se escrever as Eqs. (1) e (3) em termos da velocidade potencial \mathbf{f} :

$$\nabla^2 \mathbf{f} = 0 \quad \text{na região do escoamento,} \quad (7a)$$

$$\nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na superfície do aerofólio,} \quad (7b)$$

$$\nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na superfície da parede,} \quad (7c)$$

$$|\nabla \mathbf{f}| \rightarrow 1 \quad \text{no infinito.} \quad (7d)$$

Por se tratar de um problema de valor de contorno linear, as Eqs. (7) podem ser escritas como uma superposição de soluções na forma:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\infty + \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_w + \mathbf{f}_g \quad (8)$$

de modo que cada contribuição do lado direito da Eq. (4) satisfaça a equação de Laplace (7a). O potencial de velocidade do escoamento incidente e do vórtice principal são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{f}_\infty = x \quad (9a)$$

$$\mathbf{f}_v = \frac{\Gamma_v}{2\mathbf{p}} \tan^{-1} \left[\frac{y - y_v(t)}{x - x_v(t)} \right] \quad (9b)$$

O potencial de velocidade do aerofólio devido a vorticidade do contorno da superfície do mesmo é encontrada usando o método de painéis, onde o contorno do aerofólio é discretizado em N pequenos painéis com vorticidade linearmente distribuída ao longo do comprimento de cada painel. Portanto, modela-se \mathbf{f}_a como:

$$\mathbf{f}_a = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sum_{i=1}^N \int_{s_i} \mathbf{g}(s_i, t) \tan^{-1} \left[\frac{y - y_i(s_i, \mathbf{q}_i)}{x - x_i(s_i, \mathbf{q}_i)} \right] ds \quad (9c)$$

O potencial de velocidade da esteira é composto por dois termos: um deles corresponde a $(M-1)$ vórtices de Lamb gerados no instante anterior t_1, \dots, t_{M-1} ; e o outro devido à quantidade de vorticidade $\Delta\Gamma_w$ injetada na esteira no instante t_M pelo bordo de fuga do aerofólio. Modela-se $\Delta\Gamma_w$ como um painel extra com vorticidade constante distribuída por unidade de comprimento \mathbf{g} e comprimento S_w , onde $\Delta\Gamma_w = \mathbf{g} \Delta S_w$. No instante t_{M+1} , o painel extra é transformado em um vórtice de Lamb com intensidade $\Gamma_w = \Delta\Gamma_w$, e um novo painel extra é criado. Portanto \mathbf{f}_w em t_M pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}_w = -\frac{1}{2} \mathbf{g}_w \int_{S_w} \tan^{-1} \left[\frac{y - y_w(s_w, \mathbf{q}_w, t)}{x - x_w(s_w, \mathbf{q}_w, t)} \right] ds + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\Gamma_{w,k}}{2\mathbf{p}} \tan^{-1} \left[\frac{y - y_{w,k}(t)}{x - x_{w,k}(t)} \right] \quad (9d)$$

O efeito do solo no escoamento é considerado usando o método de imagens, o qual consiste em adicionar um escoamento refletido (em relação ao eixo x) do escoamento original. Portanto, o potencial de velocidade da parede \mathbf{f}_g é expresso pela soma das imagens do vórtice principal, do aerofólio e dos potenciais da esteira, i.e.,

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{f}_{v,im} + \mathbf{f}_{a,im} + \mathbf{f}_{w,im} \quad (9e)$$

Refletir com relação ao eixo x significa que os sinais da intensidade de todos os vórtices devem ser mudados, e suas posições (x_v, y_v) nas Eqs. (9b,c,d) devem ser substituídas por $(x_{v,im}, y_{v,im})$, onde $x_{v,im} = x_v$, $y_{v,im} = -(y_v + 2h_g)$; a razão entre a distância do aerofólio à parede e a corda é definida como $h_g = h/c$. As Equações (9b,c,d,e) individualmente, tendem a zero no infinito e, portanto, não afetam as condições de contorno (7d), a qual é satisfeita pela Eq. (9a). A inclusão da Eq. (9e) torna a condição de contorno (7c) automaticamente satisfeita a cada instante. Assim, a condição de contorno (7b) no aerofólio pode ser imposta a fim de determinar as incógnitas \mathbf{g} de \mathbf{f}_a . Usando Eqs. (8) e (9e) pode-se escrever a Eq. (7b) como:

$$(\nabla \mathbf{f}_a + \nabla \mathbf{f}_v + \nabla \mathbf{f}_w + \nabla \mathbf{f}_{a,im} + \nabla \mathbf{f}_{v,im} + \nabla \mathbf{f}_{w,im} + \nabla \mathbf{f}_\infty) \cdot \mathbf{n}_a = 0 \quad (10)$$

Para que se tenha solução única deve-se impor a condição de Kutta, que exige a continuidade do campo de pressão no bordo de fuga do aerofólio

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2} = 1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 1 - \nabla \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{f} - 2 \frac{d}{dt} \int_p \nabla \mathbf{f} \cdot ds \quad (11)$$

Calculando a Eq. (11) para as superfícies superior e inferior no bordo de fuga e aplicando a condição de Kutta , tem-se

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_{u,te} - \mathbf{f}_{l,te}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{f}_{l,te} \cdot \nabla \mathbf{f}_{l,te} - \nabla \mathbf{f}_{u,te} \cdot \nabla \mathbf{f}_{u,te}) \quad (12)$$

A quantidade $(\mathbf{f}_{u,te} - \mathbf{f}_{l,te})$ está relacionada à quantidade Γ_a em torno do contorno C_a que envolve apenas o aerofólio de acordo com a equação

$$\Gamma_a(t) \equiv \oint_{C_a} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_a} \nabla \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{f}_{u,te}(t) - \mathbf{f}_{l,te}(t) \quad (13)$$

Diferenciando a Eq.(13) com respeito a t e usando as Eqs. (12) e (6), obtém-se:

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{f}_{l,te} \cdot \nabla \mathbf{f}_{l,te} - \nabla \mathbf{f}_{u,te} \cdot \nabla \mathbf{f}_{u,te}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{l,te}^2 - \mathbf{g}_{u,te}^2) \quad (14)$$

A variação de Γ_a com o tempo pode ser escrita adimensionalmente em termos da circulação do vórtice principal, aerofólio e esteira aplicando o Teorema da circulação de Kelvin. Se a circulação inicial no escoamento, Γ_o , é dada por $\Gamma_o \equiv \Gamma(t=0) = \Gamma_v = \text{constante}$, a circulação total é $\Gamma_v + \Gamma_a(t) + \Gamma_w(t) = \Gamma_o$, então escreve-se

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\frac{d\Gamma_w}{dt} \quad (15)$$

que determina a quantidade de vorticidade eliminada no bordo de fuga, fornecendo, portanto, um modelo de geração de vorticidade na esteira.

Com a Eq. (11), os coeficientes de sustentação e momento são dados, respectivamente, por

$$C_l \equiv \frac{l}{(1/2)\rho U_\infty^2 c} = \oint_{C_a} C_p \cos \mathbf{q}(s) ds \quad (16a)$$

$$C_m \equiv \frac{m}{(1/2)\rho U_\infty^2 c} = \oint_{C_a} (\cos \mathbf{q}(s)X(s) + \sin \mathbf{q}(s)Y(s))C_p ds \quad (16b)$$

O momento é positivo no sentido horário e calculado com relação ao bordo de ataque.

3. Modelo Numérico

O potencial de velocidade do aerofólio \mathbf{f}_a é calculado usando o método dos painéis. O contorno do aerofólio é discretizado em N pequenos painéis, com uma concentração maior de painéis nas vizinhanças dos bordos de fuga e de ataque. Cada painel tem uma distribuição linear de vorticidade ao longo do comprimento na forma $\mathbf{g}(s_i) = \mathbf{g} + (\mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g})(s_i/S_i)$. Então, a integral da Eq. (9c) pode ser calculada e a componente normal da velocidade induzida pelo $i^{\text{ésimo}}$ painel no ponto médio (ponto de controle) do $j^{\text{ésimo}}$ painel pode ser escrito como forma de matriz como segue

$$(\nabla \mathbf{f}_a \cdot \mathbf{n})_i = \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} \mathbf{g}_j \quad (17)$$

A fim de escrever \mathbf{g}_i em termos de \mathbf{g} e \mathbf{g}_{i+1} no bordo de ataque, discretiza-se a condição de Kutta dada pela Eq. (14) na forma:

$$\Delta \Gamma_a \equiv \Gamma_a(t_M) - \Gamma_a(t_{M-1}) = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{g}_{l,te}^2 - \mathbf{g}_{u,te}^2) = (\mathbf{g}_{l,te} - \mathbf{g}_{u,te}) \left[\frac{(\mathbf{g}_{l,te} + \mathbf{g}_{u,te})}{2} \Delta t \right] \quad (18)$$

onde $\Gamma_a(t)$ é dada por $\Gamma_a(t) = (1/2) \sum_{i=1}^N (\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_{i+1}) S_i$. Da Eq. (19) usa-se a relação $\mathbf{g}_{l,te} = -\mathbf{g}$ e $\mathbf{g}_{u,te} = \mathbf{g}_{N+1}$ e define-se \mathbf{g}_w , o qual é constante ao longo do painel extra, por

$$\mathbf{g}_w \equiv (\mathbf{g}_{l,te} - \mathbf{g}_{u,te}) = -(\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_{N+1}) \quad (19)$$

A Equação (15) para a conservação da circulação permite que $\Delta\Gamma_w$ seja expressa como

$$\Delta\Gamma_w \equiv \mathbf{g}_w S_w = -\Delta\Gamma_a \quad (20)$$

Usando as Eqs.(19) e (20), a Eq. (18) pode ser escrita como:

$$\Delta\Gamma_w = (\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_{N+1})S_w \quad (21a)$$

onde o comprimento do painel extra é definido como:

$$S_w \equiv \frac{\mathbf{g}_{N+1} - \mathbf{g}_1}{2} \Delta t \quad (21b)$$

O ângulo entre o painel extra e o eixo x, \mathbf{b}_w , é determinado impondo-se que a vorticidade injetada na esteira pelo bordo de fuga segue ao longo da linha de corrente local e instantânea, i.e,

$$\mathbf{b}_w = \tan^{-1} \left(\frac{v_w}{u_w} \right) \quad (22)$$

As $(N+1)$ incógnitas \mathbf{g} 's estão determinadas a partir da condição de contorno de impenetrabilidade da Eq. (10), que é imposta nos N pontos de controle do aerofólio. Com a ajuda das Eqs. (9) e (21a) o termo remanescente da Eq. (10) pode ser escrito na forma matricial para o i -ésimo painel como segue

$$\sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} \mathbf{g}_j + (\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_{N+1}) A_{w,i} + B_{v,i} \Gamma_v + \sum_{k=1}^{M-1} B_{w,ik} \Gamma_{w,k} + \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij_{im}} \mathbf{g}_j + (\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_{N+1}) A_{w,i_{im}} + B_{v,i_{im}} \Gamma_v + \sum_{k=1}^{M-1} B_{w,ik_{im}} \Gamma_{w,k} + (\nabla \mathbf{f}_\infty \cdot \mathbf{n})_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

Os termos do lado esquerdo da Eq. (23) correspondem, respectivamente, a: painéis do aerofólio, painel extra, vórtice principal, vórtices da esteira, suas imagens, e escoamento uniforme incidente. A fim de tornar o sistema linear de equações algébricas da Eq. (24) determinado, o qual é composto de $N+1$ incógnitas e apenas N equações, inclui-se as Eqs. (21) e (22), que adicionam duas incógnitas, S_w e \mathbf{b}_w . Os cálculos computacionais são executados por iteração desde que S_w e \mathbf{b}_w estejam primeiramente informadas. Após obtida a solução, as Eqs. (21b) e (22) são novamente usadas para calcular os valores de S_w e \mathbf{b}_w . Este procedimento é repetido até as duas variáveis convergirem. O vórtice principal e os vórtices da esteira são movidos por convecção usando um esquema de Euler de primeira ordem de marcha no tempo. Neste trabalho, a difusão é simulada utilizando-se o método de avanço randômico de Lewis que caracteriza-se por fazer a simulação da difusão de vorticidade através de uma nuvem de vórtices pontuais. O método consiste em calcular os números randômicos P e Q , que situam-se entre zero e um, segundo o algoritmo sugerido por Lewis, e obter os valores de \mathbf{D} e $\mathbf{D}q$ segundo as equações:

$$\Delta q = 2pQ \quad (24)$$

$$\Delta r = \sqrt{\frac{8\Delta t}{\text{Re}} \ln \left(\frac{1}{P} \right)} \quad (25)$$

onde o deslocamento difusivo é dado por:

$$\mathbf{x}_d(t) = (\Delta r \cos(\Delta q), \Delta r \sin(\Delta q)) \quad (26)$$

O deslocamento total dos vórtices é, então, a soma dos deslocamentos convectivo e difusivo, de acordo com a equação abaixo

$$\mathbf{x}_v(t + \Delta t) = \mathbf{x}_v(t) + \mathbf{u}_v(\mathbf{x}_v, t) \Delta t + \mathbf{x}_d(t) \quad (27)$$

Sujeita à condição inicial (x_{v0}, y_{v0}) em $t=0$ para o vórtice principal (ponto onde o vórtice principal é lançado no escoamento). O painel extra da esteira é transformado em um vórtice de Lamb com intensidade $\Gamma_w = \Delta\Gamma_w$, que

também segundo a Eq. (27). Ao fim do passo, o tempo de computação adimensional t_M é somado a Δt e o procedimento é repetido integralmente.

Neste trabalho, um novo algoritmo para o cálculo de pressão é utilizado, que consiste em assumir para o valor de referência um valor nulo e então calcular a pressão em cada painel segundo a equação

$$p_m = p_{m-1} + \left(g_{m-1}^2 - g_m^2 \right) - 2 \left(\frac{g_m(t + \Delta t) - g_m(t)}{\Delta t} \right) \Delta s_m \quad (28)$$

Após calcular o valor de p_m , para cada painel, o valor máximo deve ser encontrado para aquele instante t , e a pressão de estagnação, p_s , assumirá, então, este valor. Desta forma o coeficiente de pressão, C_p , em cada painel no instante t será calculado por

$$C_{pm} = p_m + 1 - p_s \quad (29)$$

O valor de C_p total no painel m , no instante t , é obtido fazendo-se o somatório de todos os C_p 's até o painel m .

$$C_p(t) = \sum_{n=1}^m C_{pn} \quad (30)$$

4. Resultados

Os resultados numéricos obtidos pelo modelo apresentado neste trabalho são comparados aos resultados numéricos de Fonseca et al.(1997) e experimentais de Straus et al. (1990), os quais foram obtidos em túnel de vento para um aerofólio NACA 0012, com ângulo de ataque nulo, e sem presença de parede. Nos experimentos de Straus et al. (1990), o vórtice principal foi gerado com um aerofólio NACA 0018, e dois casos foram estudados: no primeiro caso, o vórtice principal possui sentido anti-horário de rotação, intensidade $\Gamma_{vórtice} = -0.15$ e foi gerado no túnel de vento na posição $X_v = -3.33$ e $Y_v = 0.24$; no segundo caso, o vórtice principal gira no sentido horário, possui intensidade $\Gamma_{vórtice} = 0.16$ e foi gerado na posição $X_v = -3.33$ e $Y_v = 0.19$.

Segundo Fonseca et al.(1997), pode-se definir um parâmetro adimensional K como $K = \Gamma / U_\infty H = \Gamma_{vórtice} / h_v$ onde H é a distância entre a superfície superior do aerofólio e o vórtice e $h_v = H / c$. Este parâmetro relaciona a intensidade do vórtice, Γ , com a distância adimensional entre a superfície do aerofólio e o vórtice, h_v . Quando $\Gamma = 0.16$ obtém-se $K = 1.23$ e quando $\Gamma = -0.15$ obtém-se $K = -0.63$.

Nas Figuras (2a) e (2b) comparam-se os resultados numéricos do modelo deste trabalho com os resultados também numéricos de Fonseca et al.(1997) para a variação temporal do coeficiente de pressão, C_p , em dois pontos localizados a $1/4$ de corda do bordo de ataque do aerofólio, um na superfície superior e outro na superfície inferior. Observa-se uma boa concordância entre os resultados numéricos para os dois casos, comprovando-se que os dois cálculos de pressão utilizados são equivalentes, havendo, no entanto, alguma discrepância quando o vórtice passa nas vizinhanças do bordo de fuga do aerofólio. Esta discrepância é mais acentuada para o caso $\Gamma = 0.16$.

Embora o trabalho de Straus et al. (1990) não leve em conta a presença de parede, os valores de alguns dos parâmetros utilizados neste estudo foram os mesmos de Straus et al.(1990). O ângulo de ataque do aerofólio foi mantido em $\alpha = 0^\circ$ para todos os casos analisados. As comparações entre os resultados de Straus et al.(1990) estão mostrados na Fig.(3).

Os resultados obtidos para $\Gamma_{vórtice} = 0.16$ são semelhantes aos obtidos na interação do vórtice de intensidade $\Gamma_{vórtice} = -0.15$, para a situação sem parede, apresentando, porém, um desvio maior entre os resultados experimentais e o modelo numérico, na região próxima ao bordo de fuga do aerofólio. Nesse caso, conforme ressaltado por Straus et al.(1990), é possível que tenha ocorrido separação na superfície superior do aerofólio, durante os experimentos, embora os resultados experimentais não sejam conclusivos. Em seu artigo, Straus et al.(1990) destacam que, para o número de Reynolds escolhido para os experimentos ($3.75 \cdot 10^5$), a ocorrência de separação no aerofólio é perfeitamente possível.

As mesmas observações podem ser feitas para o gráfico do coeficiente de momento mostrado na Fig.(4). No caso em que a parede não está presente, o coeficiente de momento é negativo durante a maior parte da interação, porque a força de sustentação sobre o aerofólio é positiva. Como a aproximação da parede provoca sucção e, conseqüentemente, uma força de sustentação negativa, o valor do coeficiente de momento é definido pelo efeito que for mais forte.

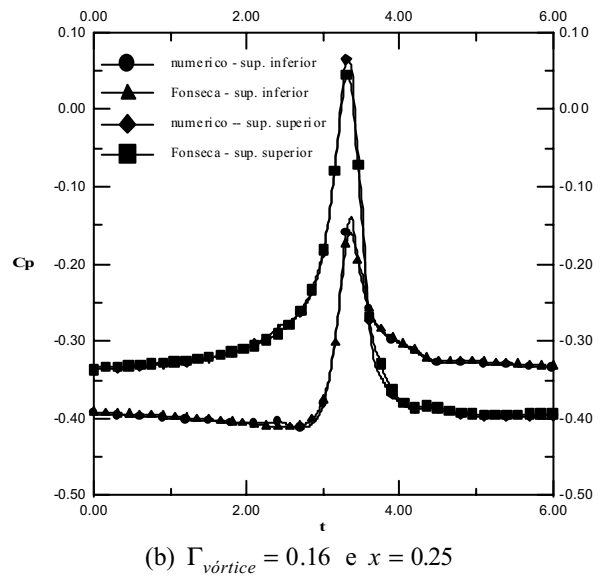
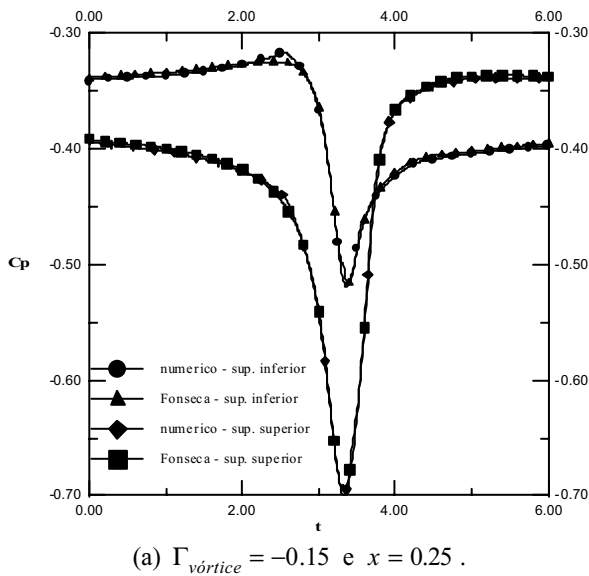


Figura 2. Variação Temporal do C_p no ponto $x = 0.25$ nas superfícies superior e inferior do aerofólio.

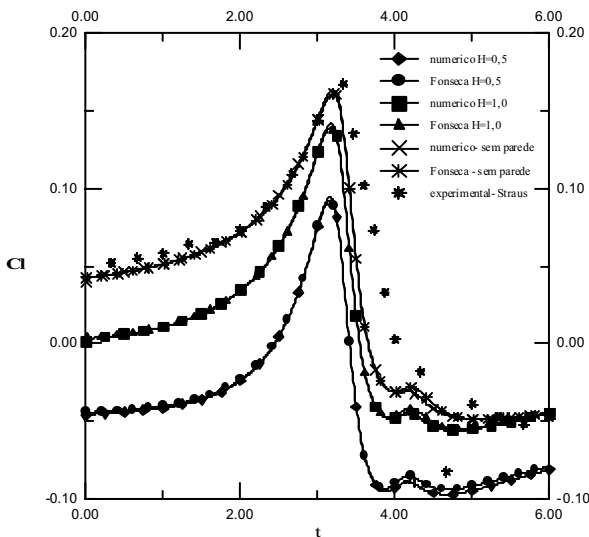


Figura 3. Efeito de H sobre a variação temporal do C_L , $\Gamma_{vórtice} = -0.15$, NACA 0012 e $\alpha = 0^0$.

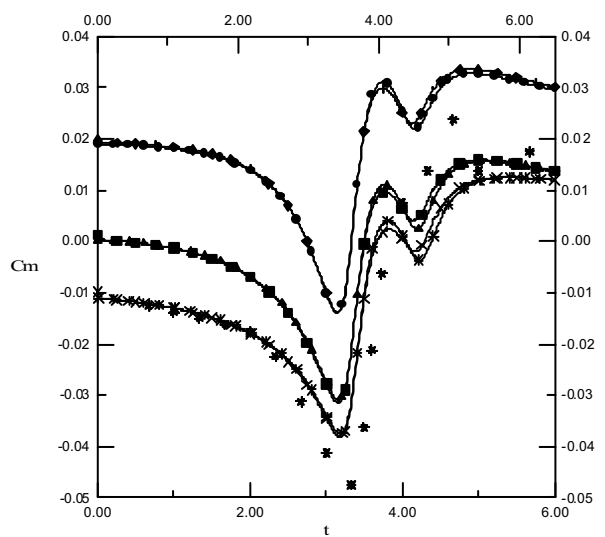


Figura 4. Efeito de H sobre a variação temporal do C_M , $\Gamma_{vórtice} = -0.15$, NACA 0012 e $\alpha = 0^0$.

O efeito de H sobre a variação temporal de C_L e C_M para o caso em que $\Gamma_{vórtice} = 0.16$ pode ser visto nas Figs. (5) e (6). A característica mais interessante desta interação é o fato de que a presença da parede pode aumentar ou diminuir o efeito da sucção sob a superfície inferior do aerofólio. De forma análoga ao que acontece para o caso $\Gamma_{vórtice} = -0.15$, o gráfico do coeficiente de momento, Fig.(6), segue as mesmas tendências qualitativas do gráfico do coeficiente de sustentação, Fig.(5). Ocorre porém, uma amplificação da diferença entre as curvas devido ao braço de alavanca entre o bordo de ataque do aerofólio e o ponto de atuação das forças em sua superfície, além de uma mudança no sinal. Para $H = 1.0$ o C_M é menor que no caso $H \rightarrow \infty$ a montante do aerofólio, e maior à jusante, enquanto que, para $H = 0.5$, o C_M é sempre maior.

O efeito da proximidade da parede sobre a esteira para os resultados obtidos com o modelo deste trabalho é visto nas Figuras 7 a 10, no instante $t = 6.0$. Nota-se que a esteira formada pelo aerofólio quando a parede está à distância $H = 0.5$ é semelhante à situação em que $H = 1.0$. Conclui-se que a presença da parede pouco afeta a configuração espacial da esteira.

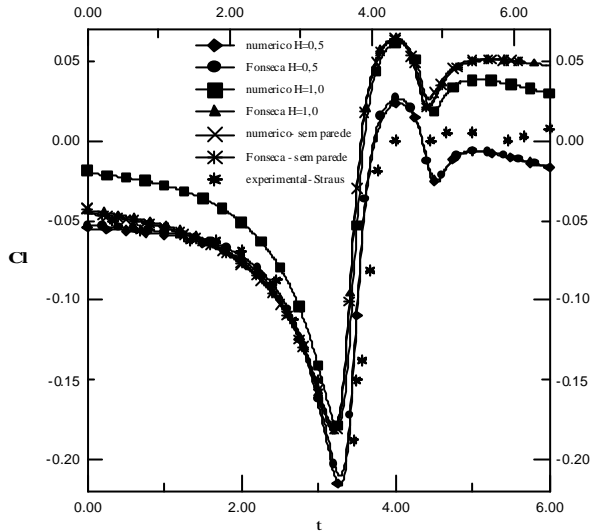


Figura 5. Efeito de H sobre a variação temporal do C_L $\Gamma_{vórtice} = 0,16$, NACA 0012 e $\alpha = 0^0$.

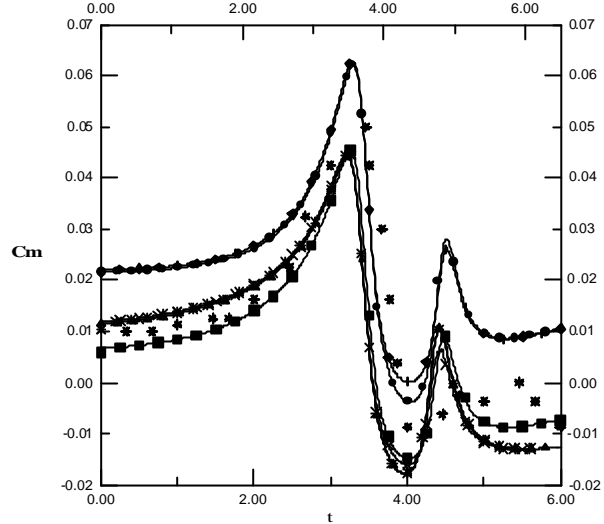


Figura 6. Efeito de H sobre a variação temporal do C_M $\Gamma_{vórtice} = 0,16$, NACA 0012 e $\alpha = 0^0$

Nas Figuras de 11 a 14 pode-se observar a esteira formada, obtida pelos resultados do modelo apresentado neste trabalho e pelos resultados numéricos de Fonseca et al.(1997) na situação sem parede. Observe a diferença entre a esteira formada, utilizando este modelo com relação à esteira de Fonseca et al.(1997), quanto ao efeito difusivo. Observe que a adição de um núcleo ao vórtice principal (com área diferente de zero) deu à esteira uma estrutura mais suave.

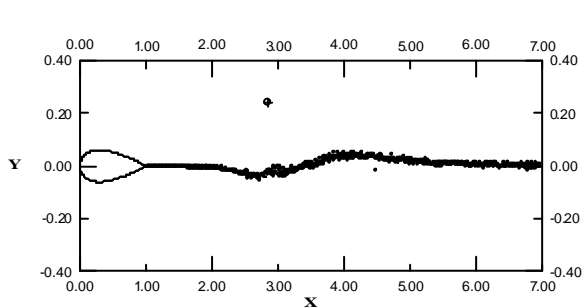


Figura 7. $\Gamma_{vórtice} = -0.15$, $H = 0.5$, numérico.

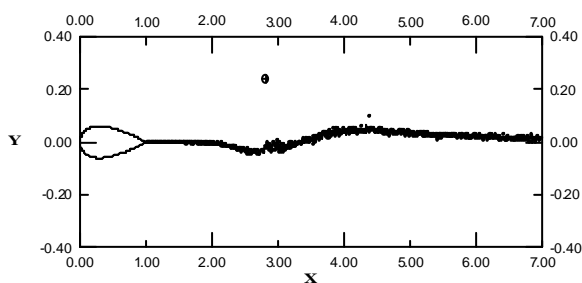


Figura 8. $\Gamma_{vórtice} = -0.15$, $H = 0.5$, Fonseca et al. (1997).

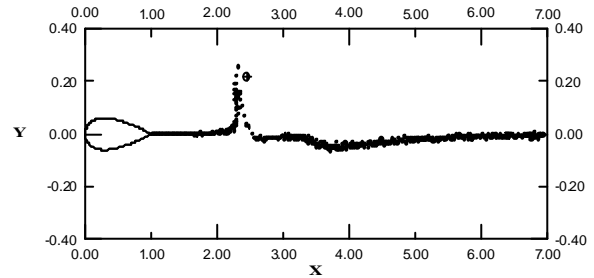


Figura 9. $\Gamma_{vórtice} = 0.16$, $H = 1.0$, numérico.

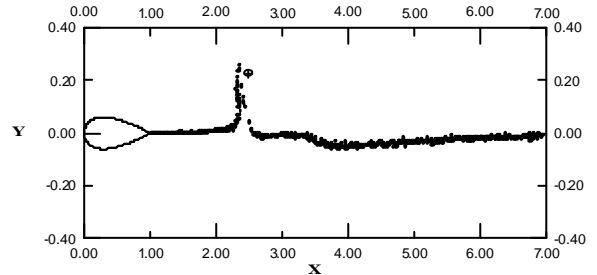


Figura 10. $\Gamma_{vórtice} = 0.16$, $H = 1.0$, Fonseca et al. (1997).

Nota-se também que dobrar a intensidade da vorticidade do vórtice principal é equivalente à reduzir à metade a distância h_v como pode ser observado pela definição do parâmetro K .

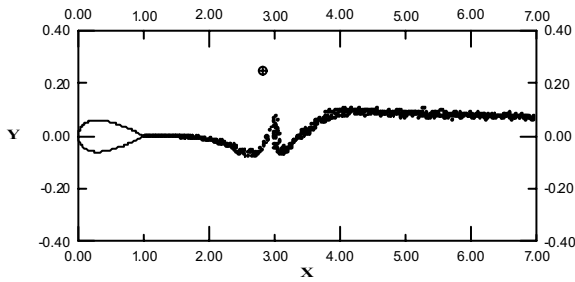


Figura 11. $\Gamma_{vortex} = -0.30, H \rightarrow \infty$, numérico.

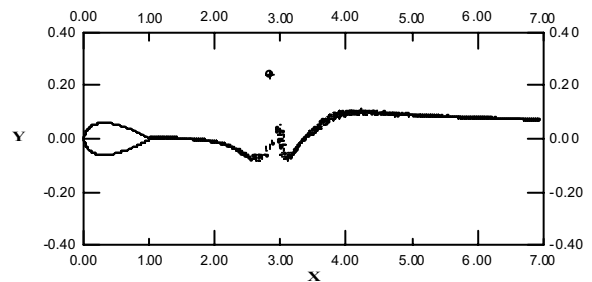


Figura 12. $\Gamma_{vortex} = -0.30, H \rightarrow \infty$, Fonseca et al. (1997).

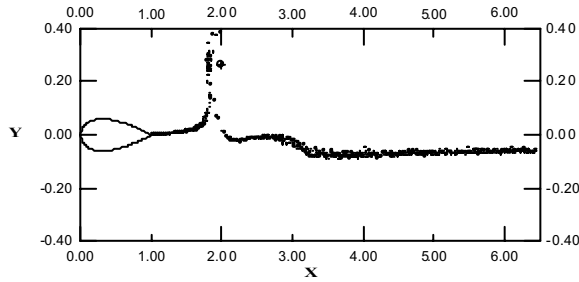


Figura 13. $\Gamma_{vortex} = 0.32, H \rightarrow \infty$, numérico.

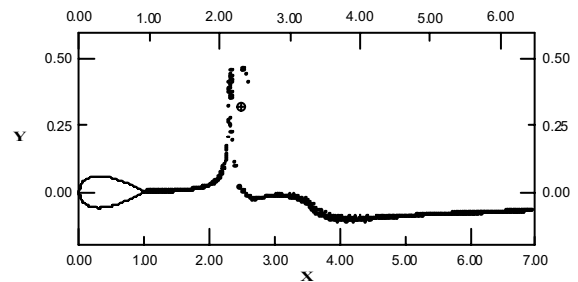


Figura 14. $\Gamma_{vortex} = 0.32, H \rightarrow \infty$, Fonseca et al. (1997).

5. Conclusões

Os resultados numéricos obtidos para a interação aerofólio-vórtice, sem a presença de parede, são comparados aos resultados experimentais de Straus et al.(1990) e numéricos de Fonseca et al.(1997) apresentando boa concordância. A interação aerofólio-vórtice pode ser quantificada por um parâmetro adimensional K , que relaciona a intensidade do vórtice principal e sua distância à superfície superior do aerofólio. Os resultados apresentam boa concordância com os resultados experimentais de Straus et al.(1990) e numéricos de Fonseca et al.(1997) para valores pequenos de K , que significa interação menos intensa. A maior discrepância observada ocorreu para os casos em que $\Gamma = 0.16$, nos momentos em que o vórtice encontra-se próximo ao bordo de fuga do aerofólio. Esta situação corresponde a um caso em que a interação é muito forte.

Para a situação de interação aerofólio-vórtice com presença de parede os resultados apresentaram boa concordância com os de Fonseca et al.(1997). Straus et al.(1990) não possuem resultados experimentais disponíveis para estas simulações. A situação em que a intensidade do vórtice principal é duplicada apresentou boa concordância com a situação equivalente de reduzir à metade a distância do aerofólio à parede. As esteiras para o instante $t = 6.0$ para o modelo deste trabalho e o modelo de Fonseca et al.(1997) apresentaram-se semelhantes quanto ao perfil, sendo que no caso de Fonseca et al.(1997) observa-se alguma difusão numérica e no modelo deste trabalho a difusão é mais intensa devido ao método de avanço randômico.

A hipótese de escoamento não-viscoso, impossibilita a utilização deste modelo em simulações de escoamentos com ângulo de ataque muito grande, ou seja, a ocorrência de separação do escoamento, seja na superfície do aerofólio ou da parede, não pode ser prevista. Estes efeitos, poderiam ser modelados utilizando-se, por exemplo, um algoritmo, baseado no método de vórtices, que fosse capaz de gerar vorticidade em toda a superfície sólida do corpo além de satisfazer a condição de não-escorregamento nestas superfícies.

6. Referências

- Chen, J. M., e Chang, D.-M., "Unsteady Pressure Measurements for Parallel Vortex-Airfoil Interaction at Low Speed," *Journal of Aircraft*, Vol. 34, No. 3, 1997, pp. 330–336.
- Fonseca, G. F., Bodstein, G. C. R., e Hirata, M. H., "A Numerical Inviscid Vortex Model Applied to Parallel Blade-Vortex Interaction," *RBCM-Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. 19, No. 3, 1997, pp. 341–356.
- Green,, A. E., "The Two-Dimensional Airfoil in a Bounded Stream," *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 18, 1947, pp. 167–177.
- Havelock, T. H., "The Lift and Moment on a Flat Plate in a Stream of Finite Width," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 166, 1938, pp. 178–196.

- Lee, D. J., e Smith, C. A., 1991, "Effect of Vortex Core Distortion on Blade-Vortex Interaction", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 9, pp. 1355–1362.
- Panaras, A. G., "Numerical Modeling of the Vortex/Airfoil Interaction," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 1, 1987, pp. 5–11.
- Plotkin, A., e Kennell, C. G., "Thickness-Induced Lift on a Thin-Airfoil in Ground Effect," *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 11, 1981, pp. 1484–1486.
- Poling, D. R., Dadone, L., e Telionis, D. P., 1989, "Blade-Vortex Interaction", *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 6, pp. 694–699.
- Seath, D. D., Kim, J.-M., e Wilson, D. R., "Investigation of Parallel Blade-Vortex Interaction at Low Speed," *Journal of Aircraft*, Vol. 26, No. 4, 1989, pp. 328–333.
- Straus, J., Renzoni, P., e Mayle R. E., "Airfoil Pressure Measurements During a Blade Vortex Interaction and a Comparison with Theory," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 2, 1990, pp. 222–228.

TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATION OF PARALLEL AIRFOIL-VORTEX INTERACTION IN THE VICINITY OF A GROUND PLANE

Flávia dos Reis Carreiro

Department of Mechanical Engineering, EE/COPPE/UFRJ
 C.P: 68503
 Cep 21945-970 – Rio de Janeiro, R.J
flavia@serv.com.ufrj.br

Gustavo C. R. Bodstein

Department of Mechanical Engineering, EE/COPPE/UFRJ
 C.P: 68503
 Cep 21945-970 – Rio de Janeiro, R.J
gustavo@serv.com.ufrj.br

Abstract. The Interaction of a vortex generated upstream with an airfoil is a phenomenon known as Airfoil-Vortex Interaction. The presence of a wall nearby, affects the flow around the blade even further. In this paper a numerical vortex method is employed to study the unsteady, two-dimensional, incompressible flow that occurs during a Parallel Blade-Vortex Interaction in the vicinity of a Ground Plane. We model the airfoil bound vorticity using a panel method with linear piecewise-continuous vorticity distribution. The vortex is considered to be a Lamb vortex and the ground effect is obtained using the method of images. The wake is modeled by an array of Lamb vortices that are generated at the airfoil trailing edge to insure that circulation is conserved and that the Kutta condition is satisfied. The main vortex and all vortices in the wake are convected using a first order Lagrangian time marching scheme. The vorticity diffusion that occurs in the wake is simulated using the random walk method. The pressure, lift and moment coefficients are calculated. Numerical results are obtained and compared to others available in the literature, showing good agreement. The results reveal that the model is able to predict very well the time-varying loads and the non-linear wake evolution that happen during the interaction.

Key words: *Airfoil-Vortex Interaction, Vortex Method, Panel Methods, Random Walk Method, Aerodynamics.*

SIMULATION OF 3-D FREE-SURFACE FLOWS WITH SURFACE TENSION

Norberto Mangiavacchi – norberto@icmc.sc.usp.br

Fabricio Simeoni de Sousa – fsimeoni@icmc.sc.usp.br

Antonio Castelo Filho – castelo@icmc.sc.usp.br

Luiz Gustavo Nonato – gnonato@icmc.sc.usp.br

Murilo F. Tomé – murilo@lcad.icmc.sc.usp.br

José A. Cuminato – jacumina@icmc.sc.usp.br

Universidade de São Paulo, Departamento de Ciências de Computação e Estatística

Cx.P. 668 – 13560-161 – São Carlos, SP, Brasil

Abstract. This work presents a method for simulating three-dimensional free-surface flows dominated by surface tension. The surface tension effects are incorporated into the free surface boundary conditions through the computation of the capillary pressure. For the required calculus of curvature, three methods of local surface approximation were designed, with different complexities and precision, by fitting paraboloids and quadratics using the tracking markers in the cell and its closest neighbours. All methods were analysed comparing the numerical estimates with the analytical values of the curvature in three different geometries to validate the code. A free-surface Navier-Stokes code using these methods is shown to produce accurate results when compared with exact solutions of selected fluid dynamic problems involving surface tension, like the sessile drop.

Keywords: Numerical simulation, 3-D flows, Free-surface flows, Surface tension.

1. Introduction

Surface tension effects are relevant to many industrial problems, for example, coating, paint drying and moving drops occurring for instance in ink jet printing. FREEFLOW3D is a program designed for simulating three-dimensional free-surface flows. It is based on the GENSMAC (Tome & McKee, 1994) method, and was motivated by the need to simulate container filling in the food industry. Food material tends to be a high viscosity, usually shear-thinning fluid and as such surface tension could be disregarded without any serious loss of accuracy. In the present work we describe a method which allows the incorporation of surface tension into the FREEFLOW3D code, enabling the application of the code to a much larger variety of industrial problems. We consider incompressible, constant properties, Newtonian flows. The governing equations are the non-dimensional mass and momentum equations in conservative form which in three-dimensional coordinates may be written as

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_y \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_z \quad (4)$$

where $Re = UL/\nu$ and $Fr = U/\sqrt{Lg}$ denote the Reynolds number and the Froude number respectively. Here L and U are the length and velocity scales respectively, ν is the kinematic viscosity and g denotes the gravitational constant, $g = |g| = |(g_x, g_y, g_z)|$. Furthermore, $\mathbf{u} = (u, v, w)^t$ is the velocity vector while p is the non-dimensional pressure. According to the GENSMAC method, these equations are solved as follows: it is supposed that at a given time t_0 , the velocity field $\mathbf{u}(x, y, z, t_0)$ is known and boundary conditions for the velocity and pressure are given. The updated velocity field $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ at $t = t_0 + \delta t$ is calculated as follows:

1. Let $\tilde{p}(x, y, z, t)$ be a pressure field which satisfies the correct pressure condition on the free surface. This pressure field is computed according to the required boundary stress conditions.

2. Calculate the intermediate velocity field $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ from the discretised form of

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \left[-\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_x \right]_{t=t_0} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \left[-\frac{\partial(vu)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial(vw)}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_y \right]_{t=t_0} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \left[-\frac{\partial(wu)}{\partial x} - \frac{\partial(wv)}{\partial y} - \frac{\partial w^2}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_z \right]_{t=t_0} \quad (7)$$

with $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t_0) = \mathbf{u}(x, y, z, t_0)$ using the correct boundary conditions for $\mathbf{u}(x, y, z, t_0)$. It can be shown (Tomé *et al.* 2000) that $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ possesses the correct vorticity at time t . However, $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ does not satisfy Eq. (1). Let

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) - \nabla\psi(x, y, z, t) \quad (8)$$

$$\text{with } \nabla^2\psi(x, y, z, t) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t). \quad (9)$$

Thus, $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ now satisfies Eq. (1) and the vorticity remains unchanged. Therefore, $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ is identified as the updated velocity field at time t .

3. Solve the Poisson equation, Eq. (9).

4. Compute the velocity Eq. (8).

5. Compute the pressure using

$$p(x, y, z, t) = \tilde{p}(x, y, z, t) + \frac{\psi(x, y, z, t)}{\delta t}. \quad (10)$$

6. Update the positions of the marker particles.

The last step in the calculation involves moving the marker particles to their new positions. These are virtual particles whose coordinates are stored and updated at the end of each cycle by solving

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

by Euler's method. This provides a particle with its new coordinates, allowing us to determine whether or not it moved to a new computational cell or if it left the containment region through an outlet. Only marker particles on the free surface are considered.

For the solution of Eqs. (5), (6) and (7), appropriate boundary conditions are applied. At solid walls null velocities are enforced. At the free surface, the boundary conditions need to satisfy mass conservation. The Poisson equation Eq. (9) is solved satisfying Dirichlet boundary conditions at the free surface and Neumann at the solid boundaries.

At the free surface the boundary conditions for pressure and velocity, assuming zero viscous stress in the gas phase, are given by

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p_{\text{cap}} \quad (11)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_1 = 0 \quad (12)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_2 = 0 \quad (13)$$

where \mathbf{n} , \mathbf{m}_1 and \mathbf{m}_2 are the local normal and tangential vectors to the free surface. \mathbf{T} is the viscous stress tensor and $p_{\text{cap}} = \kappa/\text{We}$ is the capillary pressure, originating from the effects of surface tension σ . Here $\text{We} = \rho LU^2/\sigma$ is the Weber number, and κ is the non-dimensional curvature. The computation of p_{cap} and κ will be discussed in more detail in the following sections.

Similarly to MAC (Welch *et al.*, 1965), and SMAC (Amsden & Harlow, 1970), in GENSMAC (Tome & McKee, 1994) method, the Eqs. (5)–(9) are discretized by finite differences in a staggered grid. However, in FREEFLOW3D, the fluid domain is tracked using particles only at the free surface. Additionally, the nonlinear terms in the momentum equation are discretized using high order upwind schemes (Cuminato *et al.*, 1999). Using the tracking particles, the free surface is approximated by a piecewise linear surface and represented by the “halfedge3d” structure. The flow properties are represented in a three-dimensional regular grid, in which the cells are classified as: [B] (Boundary) if more than half of its volume belongs to a rigid boundary; [I] (Inflow) if more than half of its volume belongs to an inflow boundary; [E] (Empty) if it does not contain fluid nor more than half of its volume belongs to the fluid inflow or a rigid boundary; [S] (Surface) if it contains part of the free surface and it is in contact with a E cell; and [F] (Full) if it contains fluid, and it is not in contact with E cells.

In the computation of the free surface boundary conditions in each S cell, we need to have approximations for the surface normals. These are usually obtained according to the classification of the neighboring cells. For example: $\mathbf{n}_c = (\pm 1, 0, 0)$, $\mathbf{n}_c = (0, \pm 1, 0)$ or $\mathbf{n}_c = (0, 0, \pm 1)$ if only one neighbour is a E cell; $\mathbf{n}_c = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ if there are two E cell neighbours in the x and y directions, and; $\mathbf{n}_c = (\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$ if there are three E cell neighbours in the x , y and z directions.

For the implementation of the surface tension effects it is also necessary to estimate the surface curvature at the center of each surface cell, and to take into account sub-cell surface tension effects. In the following sections we describe the methodology employed in the implementation of the surface tension effects. This methodology results in a better estimate of the surface normal. This normal is used in the computation of the capillary pressure. Additionally, it can be used to improve the accuracy of the approximation of the free surface boundary conditions employed by the code.

2. Surface Tension Effects

Surface tension effects are incorporated using an approach very similar to the one described in Castelo *et al.* (1999) for the two-dimensional case. In this section we will stress the modifications required for the three-dimensional geometry. The computation of the surface tension is performed at two levels: first at sub-grid level, where small undulations on the free surface are eliminated, and second at cell level, where the free surface curvature at each **S** cell is approximated. This approximation will be used in the implementation of the pressure boundary condition at the free surface.

2.1. Curvature Approximation

The curvature of the free surface in a **S** cell is approximated by the surface that best fits the points in that cell and its neighbours. In the present work, we use three different approximations: a revolution paraboloid, given by

$$z = ar^2 + b, \tag{14}$$

where the plane $r - z$ is rotated around the z axis; a quadratic approximation, given by

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + d; \tag{15}$$

and a complete quadratic, with linear terms, given by

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \tag{16}$$

Immediately, we note the different complexities involved in each case. In the first approximation, we need to determine two coefficients, however in the second we have four, and the last case involves the calculation of six coefficients. In all approximations, we first need to determine the normal vector at the cell center. We can summarize the method of curvature approximation at the cell center by the following steps.

1. Given a **S** cell, consider all points that lie inside a sphere centered in the cell center and given radius. The choice for the radius of this neighbourhood is discussed in section 3;
2. Fit a plane to these points, and compute its normal vector;
3. Take a new coordinate system normal to the surface, using the previous computed normal vector;
4. Consider a new neighbourhood of the cell center and map the points in this neighbourhood to the new coordinate system. The choice for the size of this neighbourhood is also discussed in section 3;
5. Fit one of the surfaces given by Eq. (14), (15) or (16) to the mapped points, using the new coordinate system;
6. Compute the total curvature of the fitted surface using

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{17}$$

where f is the fitted surface equation, ξ and η are the axis where the curvature will be calculated.

Next, we will describe with details each of the three methods of approximation considered above.

2.1.1. Plane Fitting

Let $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, \dots, m$ be the points given in the step 1, taken in a cell and its neighbours. The plane equation in step two will be either of $z = f(x, y)$, $y = f(x, z)$ or $x = f(y, z)$, according the maximum absolute value of cell normal vector components. For example, if $|\langle \mathbf{n}_c, (0, 0, 1) \rangle| > |\langle \mathbf{n}_c, (1, 0, 0) \rangle|$ and $|\langle \mathbf{n}_c, (0, 0, 1) \rangle| > |\langle \mathbf{n}_c, (0, 1, 0) \rangle|$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the inner product, the equation of the plane is given by $z = f(x, y) = ax + by + c$, and we need to determine the coefficients a, b and c , such that the plane $z = ax + by + c$ approximates the given points. The least squares approximation can be obtained by solving the normal equations

$$\begin{pmatrix} A^t \cdot A & A^t \cdot B & A^t \cdot C \\ B^t \cdot A & B^t \cdot B & B^t \cdot C \\ C^t \cdot A & C^t \cdot B & C^t \cdot C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^t \cdot A \\ Y^t \cdot B \\ Y^t \cdot C \end{pmatrix} \tag{18}$$

where

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}.$$

In this case, the normal vector of $z = ax + by + c$ is given by

$$\mathbf{n}_s = \frac{(a, b, -1)}{\|(a, b, -1)\|}. \quad (19)$$

For the other cases, this process is analogous. This procedure determines \mathbf{n}_s , but the sign may be incorrect. The correct sign can be determined comparing \mathbf{n}_s with the normal at cell center \mathbf{n}_c , obtained based on neighbouring cell classification. If $\langle \mathbf{n}_c, \mathbf{n}_s \rangle > 0$ the sign is correct, otherwise must be changed.

2.1.2. Revolution Paraboloid Fitting

The simplest approximation method used here for the computation of curvature is the revolution paraboloid fitting. Let $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, \dots, m$ be the points in the neighbourhood of the cell center, and let \mathbf{n}_s be the approximated normal vector to the free surface at the cell center, using a fitting plane π . Let s be a straight line passing by \mathbf{x}_c , in direction of \mathbf{n}_s . We define a cylindrical coordinate system $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ with the \hat{z} axis aligned with \mathbf{n}_s , and with origin at \mathbf{x}_c , where $\hat{r} = \text{dist}(\mathbf{x}, s)$ and $\hat{z} = \text{dist}(\mathbf{x}, \pi)$. Considering Fig. (1), we can write

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \text{proj}_\pi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \\ \hat{z} &= \text{proj}_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c). \end{aligned}$$

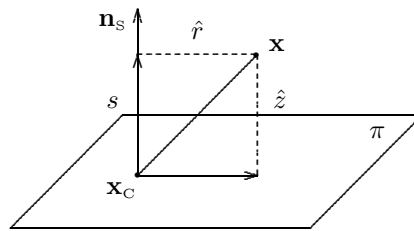


Figure 1. Determination of r and z .

These equations map the points $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ into the points $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{r}_i, \hat{z}_i)$, $i = 1, \dots, m$. Using these coordinates, we fit a parabola by the least squares method solving the normal equations

$$\begin{pmatrix} A^t \cdot A & A^t \cdot B \\ B^t \cdot A & B^t \cdot B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^t \cdot A \\ Y^t \cdot B \end{pmatrix} \quad (20)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \vdots \\ \hat{r}_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \vdots \\ \hat{z}_m \end{pmatrix}.$$

The total curvature is approximated by the total curvature of the revolution paraboloid. As the two main curvatures of this paraboloid are equal, from Eq. (17) we have

$$\kappa = -2(a + a) = -4a \quad (21)$$

The curvature is negative since the normal vector is taken to be outward to the free surface.

2.1.3. Incomplete Quadratic Fitting

The method presented in section 2.1.2 is very simple, however may be inaccurate. This led us to consider another approximation that can adjust the curvature at two different orthogonal planes, producing, possibly, more accurate results. Let $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, \dots, m$ be the points lying in the neighbourhood of the cell center. Using \mathbf{n}_s , the normal vector approximation given by plane fitting, we choose another two tangent vectors at the surface, such that, together with the normal vector, form an orthonormal basis. First, we choose two of the three vectors \vec{x} , \vec{y} or \vec{z} such that their projection on \mathbf{n}_s vector are smallest. Second, we apply the Gram-Schmidt method to obtain the orthonormal basis. Thus, we have a new coordinate system, and the points \mathbf{x}_i can be written, using this new coordinate system, as $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)$. Then, we fit a quadratic given by $\hat{z} = a\hat{x}^2 + b\hat{x}\hat{y} + c\hat{y}^2 + d$, by the least squares method. The parameters a , b , c and d are obtained by solving the normal equations

$$\begin{pmatrix} A^t \cdot A & A^t \cdot B & A^t \cdot C & A^t \cdot D \\ B^t \cdot A & B^t \cdot B & B^t \cdot C & B^t \cdot D \\ C^t \cdot A & C^t \cdot B & C^t \cdot C & C^t \cdot D \\ D^t \cdot A & D^t \cdot B & D^t \cdot C & D^t \cdot D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^t \cdot A \\ Y^t \cdot B \\ Y^t \cdot C \\ Y^t \cdot D \end{pmatrix} \quad (22)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \hat{y}_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \hat{y}_1^2 \\ \vdots \\ \hat{y}_m^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \vdots \\ \hat{z}_m \end{pmatrix}.$$

The total curvature is then given by the sum of the curvatures in the directions of the choosen tangent vectors. Thus, we have

$$\kappa = -2(a + c) \quad (23)$$

2.1.4. Complete Quadratic Fitting

The quadratic approximation without the linear terms is accurate when the normal approximation is accurate, but, as we will see in section 3, it is very sensitive to normal approximation errors. If we include linear terms in the approximation, they will work like correction terms, eliminating these dependencies.

Consider the same points \mathbf{x}_i and the same coordinate system, given by the normal vector approximation plus two choosen tangent vectors as in section 2.1.3, the complete quadratic, now is given by the equation $z = a\hat{x}^2 + b\hat{x}\hat{y} + c\hat{y}^2 + d\hat{x} + e\hat{y} + f$. The parameters $a, b, c, d, e,$ and f are obtained by solving

$$\begin{pmatrix} A^t \cdot A & A^t \cdot B & A^t \cdot C & A^t \cdot D & A^t \cdot E & A^t \cdot F \\ B^t \cdot A & B^t \cdot B & B^t \cdot C & B^t \cdot D & B^t \cdot E & B^t \cdot F \\ C^t \cdot A & C^t \cdot B & C^t \cdot C & C^t \cdot D & C^t \cdot E & C^t \cdot F \\ D^t \cdot A & D^t \cdot B & D^t \cdot C & D^t \cdot D & D^t \cdot E & D^t \cdot F \\ E^t \cdot A & E^t \cdot B & E^t \cdot C & E^t \cdot D & E^t \cdot E & E^t \cdot F \\ F^t \cdot A & F^t \cdot B & F^t \cdot C & F^t \cdot D & F^t \cdot E & F^t \cdot F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^t \cdot A \\ Y^t \cdot B \\ Y^t \cdot C \\ Y^t \cdot D \\ Y^t \cdot E \\ Y^t \cdot F \end{pmatrix} \quad (24)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \hat{y}_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \hat{y}_1^2 \\ \vdots \\ \hat{y}_m^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_m \end{pmatrix}, \\ F = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \vdots \\ \hat{z}_m \end{pmatrix}.$$

The total curvature is now given by

$$\kappa = -2 \left(\frac{a}{(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{(1+e^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (25)$$

3. Validation of the Code

A number of tests were performed to validate the methods presented in this work, and to assess their robustness and precision. In this section, to validate the curvature approximation, we present the results of the above methods when applied to the computation of the curvature of objects with known analytical curvatures. Additionally, the simulations of sessile drops show the robustness and applicability of the code to free-surface flows.

3.1. Validation of the Curvature Calculation

To validate the curvature approximation and to show the differences of the methods introduced in section 2.1, the numerical results were compared with the analitical values of the curvature using three different objects: a sphere, a cylinder and a hyperbolic cylinder. The numerical calculations were performed varying the mesh size and the density of points in each cell.

As seen in section 2.1, the calculation of the normal vector and the curvature depend on the size of the neighbourhood taken in each cell. Thus, the numerical tests were performed varying also the size of these neighbourhoods. The results are shown in the Tabs. (1)-(3). In these tables, the radius size is a factor that is multiplied by $(dx + dy + dz)/3$, where dx, dy and dz are the mesh sizes in each direction, σ is the standart deviation, the error for the normal vector is given by

$$Error = \sqrt{\frac{\sum ||\mathbf{n} - \mathbf{n}_A||^2}{\sum ||\mathbf{n}||^2}} \quad (26)$$

were \mathbf{n} is the normal vector approximation and \mathbf{n}_A is the analytical normal vector. The error for the curvature approximation is given by

$$Error = \sqrt{\frac{\sum (\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_A)^2}{\sum (|\kappa_1| + |\kappa_2|)^2}} \quad (27)$$

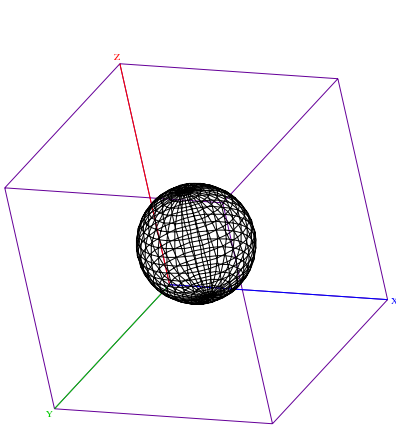


Figure 2. Sphere.

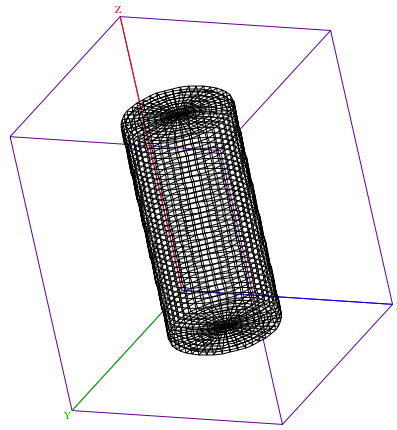


Figure 3. Cylinder.

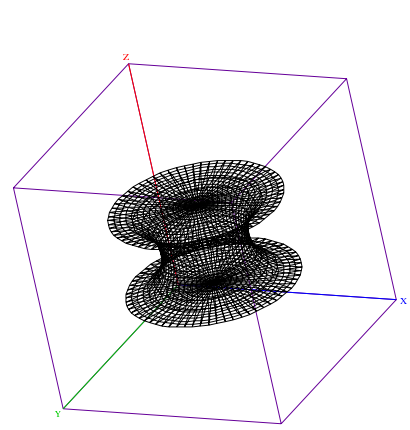


Figure 4. Hyperbolic cylinder.

were κ_1 and κ_2 are the numerical curvature in each axis and κ_A is the analytical curvature. All the results were obtained on uniform regular grids and the objects can be seen in Figs. (2)-(4).

Analysing the results in Tabs. (1)-(3), we see that all the methods give good results in simple geometries, as the sphere and the cylinder, but they tend to worsen in more complex geometries. The revolution paraboloid fitting method gave the worst results, as expected. In more complex geometries, as the hyperbolic cylinder, where the principal curvatures are opposite, the error for this method is quite large.

The incomplete quadratic fitting method produced satisfactory results. However, it was observed that this method entails large errors when the normal vector is inaccurate, mainly in the hyperbolic cylinder. This dependence on the normal vector can be corrected by adding the linear terms in the quadratic approximation, thus producing a method which we called *complete quadratic fitting*. This last method produced the best results, and it was shown to be very robust, even when the normal vector approximation is not very good.

Figures (5)-(8) are examples of how the optimum neighbourhood radius varies, depending on the geometry, size of the

Table 1. Results of curvature calculations using the sphere, in a 20x20x20 grid with density of 2 points per cell in each direction. (a) Revolution paraboloid; (b) Incomplete quadratic; (c) Complete quadratic.

Radius	Normal vector		Curvature (a)		Curvature (b)		Curvature (c)	
	σ	Error	σ	Error	σ	Error	σ	Error
0.50	0.348505	0.496122	39.438798	0.991491	0.731663	1.315811	0.484789	3.860100
0.75	0.076770	0.083142	6.631324	1.023645	3.291603	0.985184	0.938420	0.707625
1.00	0.008242	0.017575	0.182463	0.137360	0.166231	0.125490	0.001898	0.004464
1.25	0.008361	0.017545	0.133363	0.086862	0.123300	0.080656	0.001823	0.007550
1.50	0.010409	0.018152	0.078732	0.050514	0.083002	0.052327	0.002819	0.011471
1.75	0.010551	0.019924	0.068818	0.037943	0.059768	0.032436	0.002632	0.015994
2.00	0.018305	0.026103	0.087860	0.046959	0.097054	0.051269	0.003212	0.021014
2.25	0.018239	0.027108	0.091175	0.045884	0.081595	0.040799	0.003482	0.026807
2.50	0.024079	0.033777	0.115004	0.058264	0.103091	0.051565	0.004296	0.033207

Table 2. Results of curvature calculations for the cylinder, in a 20x20x20 grid with density of 2 points per cell in each direction. (a) Revolution paraboloid; (b) Incomplete quadratic; (c) Complete quadratic.

Radius	Normal vector		Curvature (a)		Curvature (b)		Curvature (c)	
	σ	Error	σ	Error	σ	Error	σ	Error
0.50	0.150239	0.192214	0.000000	7.644730	0.000000	2.103133	0.000000	59.678872
0.75	0.003310	0.008784	0.261476	1.385509	0.349484	0.600254	0.400466	0.499420
1.00	0.003974	0.011893	0.257781	0.277366	0.049431	0.092278	0.001000	0.003884
1.25	0.003500	0.007118	0.227056	0.301434	0.039881	0.053989	0.000922	0.005000
1.50	0.005623	0.009693	0.153002	0.176760	0.030243	0.034670	0.001453	0.009421
1.75	0.002664	0.005710	0.044164	0.190224	0.007396	0.011545	0.000505	0.011392
2.00	0.005989	0.010081	0.117266	0.126265	0.028313	0.028166	0.001571	0.016216
2.25	0.005910	0.010258	0.051468	0.145779	0.015131	0.016572	0.000524	0.018985
2.50	0.008908	0.011850	0.104254	0.111232	0.022915	0.028201	0.002314	0.026291

Table 3. Results of curvature calculations using the hyperbolic cylinder, in a 20x20x20 grid with density of 2 points per cell in each direction. (a) Revolution paraboloid; (b) Incomplete quadratic; (c) Complete quadratic.

Radius	Normal vector	Curvature (a)	Curvature (b)	Curvature (c)
	Error	Error	Error	Error
0.50	0.520479	0.999387	0.432011	0.402517
0.75	0.052931	0.987237	0.244822	0.157061
1.00	0.014317	0.982166	0.041077	0.010730
1.25	0.027040	0.876056	0.092550	0.010206
1.50	0.043198	0.870167	0.126438	0.013086
1.75	0.049864	0.857519	0.160590	0.016107
2.00	0.058970	0.882885	0.171237	0.020681
2.25	0.081354	0.902724	0.252255	0.031149
2.50	0.117601	1.008039	0.430312	0.260609

mesh and point density per cell. For the choice of an optimum radius, we should also consider the amount of neighbouring cells visited, that depends exclusively on the length of the radius.

A detailed analysis of the data shows that the optimum radius for the computation of the curvature can be taken between 1.0 and 1.5, while for the normal vector approximation, we have a radius between 1.0 and 1.25.

Figure (9) shows the convergence of the complete quadratic fitting method. The results were obtained in four different meshes, with $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$, for three neighbourhood radius $r = 1.0, 1.25, 1.5$, and plotted in log scale. Note that for the three radius, the convergence rate is the same, always between linear and quadratic. Fitting a curve on the given data, we find that the convergence order is approximately 1.42.

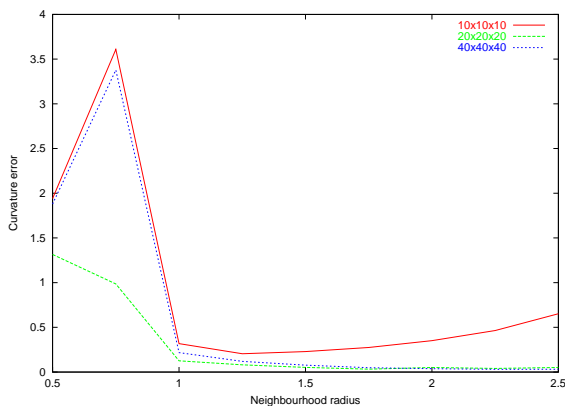


Figure 5. Curvature error in a sphere in three different meshes; $10 \times 10 \times 10$, $20 \times 20 \times 20$ and $40 \times 40 \times 40$.

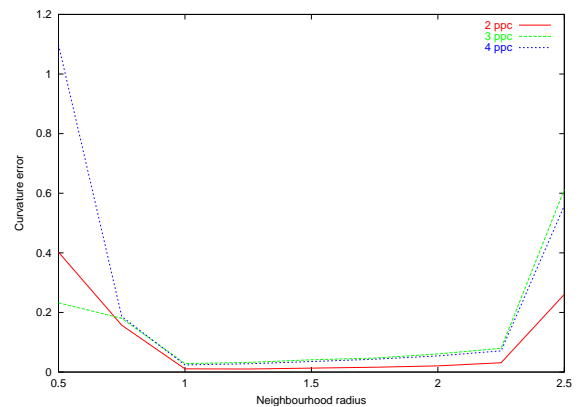


Figure 6. Curvature error in a hyperbolic cylinder, varying the points density; 2, 3 and 4 points per cell in each direction.

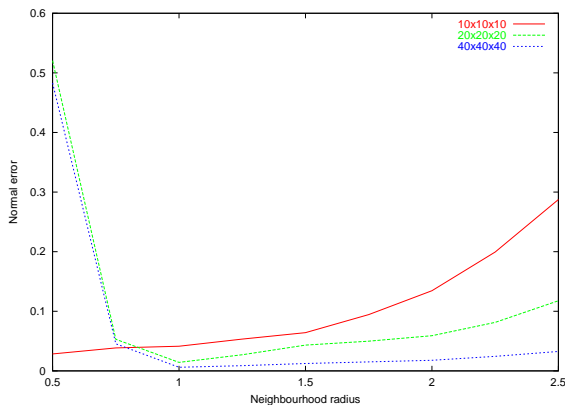


Figure 7. Normal error in a hyperbolic cylinder in three different meshes. $10 \times 10 \times 10$, $20 \times 20 \times 20$ and $40 \times 40 \times 40$.

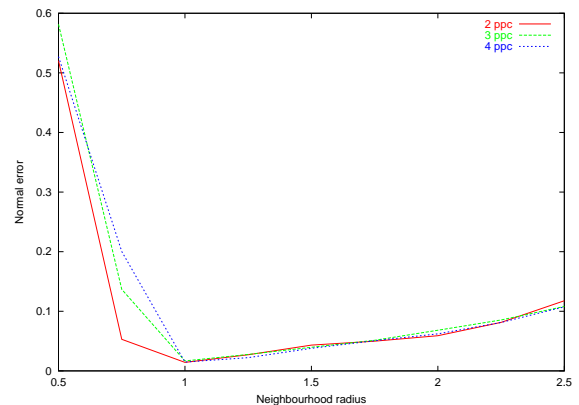


Figure 8. Normal error in a hyperbolic cylinder, varying the points density. 2, 3 and 4 points per cell in each direction.

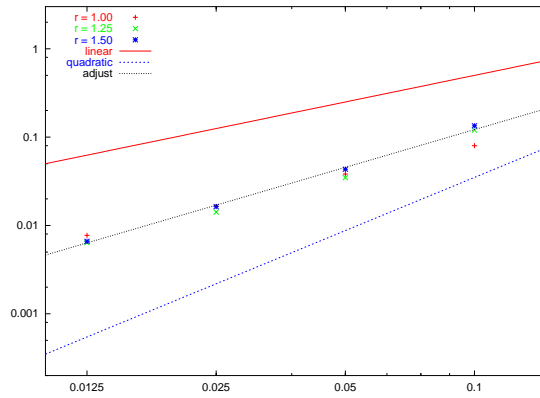


Figure 9. Convergence of the complete quadratic fitting method in log scale.

3.2. Sessile Drop Simulation

To show the robustness and applicability of the method to compute surface tension effects, we simulated a sessile drop, using the FREEFLOW3D method, with the complete quadratic approximation method to compute the required curvature. The steady state numerical solutions were obtained from the asymptotic steady state solutions of the transient solution, starting from a spherical drop initially at rest over the floor. The semi-analytical solutions were obtained by the numerical integration of the equations for the equilibrium position of an axisymmetric free surface, in non-dimensional form

$$\frac{d\theta}{ds} = \text{Bo}(p_0 - z) - \frac{\cos \theta}{r}; \quad \frac{dr}{ds} = -\sin \theta; \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta \tag{28}$$

where θ is the angle between the surface outward normal and the r axis, s is the coordinate along the surface, Bo is the Bound number, and p_0 is a non-dimensional reference pressure

$$\text{Bo} = \frac{\rho g L^2}{\sigma}; \quad p_0 = \frac{\hat{p}_0}{\rho g L} \tag{29}$$

A fourth-order Runge-Kutta method was used to integrate Eq. (28), using a integration step $\Delta s = 0.0001$. Hence the semi-analytical solutions can be regarded as being very accurate, aside from the region in the vicinity of the axis $r = 0$, where the singularity $\sin \theta/r$ may degrade the accuracy of the solution. To avoid integrating close to the singularity, we start the integration from the point of maximum r , and integrate up to the meniscus, and down to the contact point, from this initial position. The loss of accuracy of the semi-analytical solution is therefore restricted to a very small region in the vicinity of the axis, and is therefore innocuous for our purposes. A quantitative comparison of the two results can be seen in Fig. (11), that shows a very good agreement between the analytical and numerical profiles. It is remarkable that the above results were obtained using just about $28 \times 28 \times 11$ computational cells in the range of the drop.



Figure 10. Volume rendering with Phong shading (left) and pressure using pseudo-colors (right) of a sessile drop. Steady state ($t = 1.0$), $B_o = \rho g D^2 / \sigma = 7.884$, $dx = dy = dz = 0.05D$, where D is the bubble diameter.

The largest departure from the analytical solution is observed on the top of the drop, where the numerical solution shows some short wavelength (subgrid) undulations. The occurrence of this type of undulations has been observed to become more pronounced as the Reynolds number is increased (Castelo *et al.*, 1999), thus requiring the application of a subgrid filter when simulating flows with higher Reynolds number (above 50). The application of a subgrid filter is expected to further improve the results of the method, particularly for high Reynolds number flows.

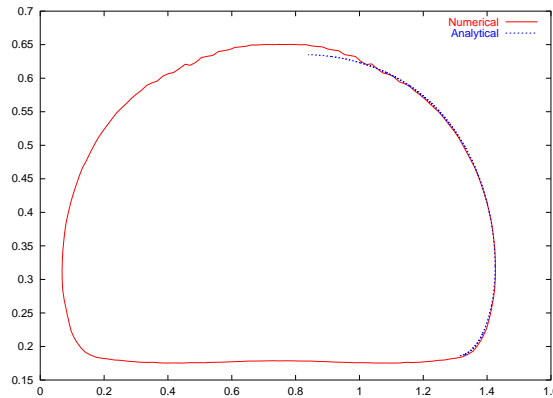


Figure 11. Comparison between numerical and analytical solutions for a sessile drop in the $x - z$ plane.

4. Conclusions

In the present work we describe a method which allows the incorporation of surface tension into the FREEFLOW3D code. The surface tension effects are incorporated on the scale of a cell, into the free surface boundary conditions through the computation of the capillary pressure. For the required curvature, three approximation methods of the free-surface were designed, fitting a least square paraboloid, incomplete quadratic and complete quadratic to the free surface using the tracking particles in the cell and in its close neighbours. The complete quadratic fitting shows to be robust and accurate, and through the analysis of the results, we choose the correct neighbourhood that minimizes the error. This approximation resulted in improved surface normal estimates which can be used in a more accurate implementation of the boundary conditions. The resulting code was shown to be robust, and to produce accurate results when compared with exact solutions of selected fluid dynamic problems involving surface tension effects. In particular, sessile drops were simulated with satisfactory results. However, on a sub-cell scale, short wavelength perturbations can occur when the Reynolds number is high (above 50), and a filter that eliminate these small undulations, with mass preservation, is required, and is currently being developed.

Acknowledgements

We gratefully acknowledge support given by Fapesp grant 00/03385-0 and CNPq. One of the authors (F.S.S.) acknowledges support given by Fapesp grant 99/10997-3.

REFERENCES

- Amsden, A. A. and Harlow, F. H., 1970, The SMAC method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flow, Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-4370.
- Castelo, A., Mangiavacchi, N., Cuminato, J. A., Fortuna, A. O., Oliveira, J., McKee, S., and Tomé, M. F., 1999, Surface tension implementation for GENSMAC2D, proc. COBEM99, CD-ROM.
- Cuminato, J. A., Ferreira, V. G., Fortuna, A. O., Mangiavacchi, N., Tomé, M. F., and McKee, S., 1999, Application of Upwind-based Schemes to Three-Dimensional Free Surface Flows, proc. COBEM'99, CD-ROM.
- Mangiavacchi, N., Castelo, A., Tomé, M. F., Cuminato, J. A., Fortuna, A., Ferreira, V. G., Nonato, L. G. and McKee, S., 2000, Numerical Simulation of Surface Tension Dominated Axisymmetric Free Surface Flows, proc. ENCIT 2000, CD-ROM.
- Tome, M. F. and McKee, S., 1994, GENSMAC: A Computational Marker-and-Cell Method for Free Surface Flows in General Domains, *Journal of Computational Physics*, vol.110, pp. 171-186.
- Tome, M. F. , Castelo, A., Murakami, J., Cuminato, J. A., Minghim, R., Oliveira, M. C. F., Mangiavacchi, N., and McKee, S., 2000, Numerical Simulation of Axisymmetric Free Surface Flows, *Journal of Computational Physics*, vol.157, pp. 441-472.
- Welch, J. R., Harlow, F. H., Shannon, J. P., and Daly, B. J., 1965, The MAC Method, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3425.

NUMERICAL SIMULATION OF MULTI-PHASE FLOWS USING THE FREEFLOW-2D SYSTEM

Fernando Luiz Pio dos Santos – fpio@icmc.sc.usp.br

Norberto Mangiavacchi – norberto@icmc.sc.usp.br

Antonio Castelo Filho – castelo@icmc.sc.usp.br

Murilo F. Tomé – murilo@lcad.icmc.sc.usp.br

José Alberto Cuminato – jacumina@lcad.icmc.sc.usp.br

Universidade de São Paulo, Departamento de Ciências de Computação e Estatística

Cx.P. 668 – 13560-161 – São Carlos, SP, Brasil

Sean McKee – caas29@maths.strath.ac.uk

University of Strathclyde, Glasgow, Scotland

Abstract. This work describes a methodology to expand the applicability of the free-surface flow simulation system FreeFlow-2D to deal with multi-phase flows. This new methodology allows the simulation of incompressible multi-phase flows with an arbitrary number of phases having different densities and viscosities. Surface and interface tension effects were also considered. The method is based on the GENSMAC (Tome & McKee, 1994) Front-Tracking method. The velocity field is computed using a finite-difference discretization of the Navier-Stokes equations. These equations together with the continuity equation, in two-dimensional Cartesian coordinates, are solved for the multi-phase flow, with properties varying according to the position of the interfaces in the flow. We use a regular Eulerian grid for the solution of these equations, and an one-dimensional irregular grid for the discretization of the free surface and the interfaces. The method was implemented in three modules in the FreeFlow-2D simulation system: a modeling module, a simulation module, and a visualization module. The method was validated by comparing numerical results with analytical results for a number of simple problems and it was also tested in the simulation of complex problems for which no analytical solution is available, and it was shown to be a robust and computationally efficient method.

Keywords: Numerical simulation, Multi-phase flows, Free-surface flows, Surface tension.

1. Introduction

Multi-phase flows have several important applications in many industries, such as oil, nuclear, chemical, and food industry. Moreover, surface and interface tension effects are relevant to many industrial problems, for example, coating, paint drying and moving drops occurring for instance in ink jet printing. In the present work we describe a method which allows the incorporation of multi-phase flow simulation capabilities into the FreeFlow-2D system enabling the application of the code to a much larger variety of industrial problems. We consider variable properties according to the position of the marker particles. The governing equations for the incompressible flows are the Navier-Stokes equations together with the continuity equation. These equations may be written in non-dimensional form as follows:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} \{-\nabla p + \frac{1}{Re} [\nabla \cdot (2\mu S)] + \frac{1}{Fr^2} \rho \mathbf{g} + \frac{1}{We} \kappa \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \mathbf{n}\}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

where $Re = UL/\nu_0$, $Fr = U/\sqrt{Lg}$ and $We = \rho_0 LV^2/\sigma$ denote the Reynolds number, the Froude number and the Weber number, respectively. Here L and U are the length and velocity scales respectively, ν is the kinematic viscosity, σ is the interface tension, ρ and μ are the density and viscosity of the fluid. g denotes the gravitational constant, $g = |\mathbf{g}|$. Furthermore, $\mathbf{u} = (u, v)^T$ is the velocity field while p is the non-dimensional pressure, $S = 1/2[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$ is the rate of strain, κ is the curvature, and \mathbf{n} is a normal to the interface separating the fluids. $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)$ is a delta function that is zero everywhere, except at the interface position, where $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f$.

These equations are solved as follows: it is supposed that at a given time t_0 , the velocity field $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$ is known and boundary conditions for the velocity and pressure are given. The updated velocity field $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ at $t = t_0 + \delta t$ is calculated as follows:

1. Let $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ be a pressure field which satisfies the correct pressure condition on the free surface. This pressure field is computed according to the required boundary stress conditions.
2. The intermediate velocity field $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, is computed using the explicitly discretized form of

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{Re} \nabla \cdot (2\mu S) + \frac{1}{Fr^2} \rho \mathbf{g} + \frac{\kappa}{We} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \mathbf{n} \right] \quad (3)$$

with $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$ using the correct boundary conditions for $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$. It can be shown (Tomé *et al.* 2000) that $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ possesses the correct vorticity at time t . However, $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ does not satisfy Eq. (1).

The final velocity is given by

$$\mathbf{u}(x, t) = \tilde{\mathbf{u}}(x, t) - \frac{1}{\rho} \nabla \psi(x, t) \quad (4)$$

$$\text{with } \nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \psi(x, t) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x, t). \quad (5)$$

Thus, $\mathbf{u}(x, t)$ now satisfies (1) and the vorticity remains unchanged. Therefore, $\mathbf{u}(x, t)$ is identified as the updated velocity field at time t .

3. Solve the equation, Eq. (5).

4. Compute the velocity Eq. (4).

5. Compute the pressure using

$$p(x, t) = \tilde{p}(x, t) + \psi(x, t)/\delta t. \quad (6)$$

6. Update the positions of the marker particles.

The last step in the calculation involves moving the marker particles to their new positions. These are virtual particles whose coordinates are stored and updated at the end of each cycle by solving

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v$$

by Euler's method. This provides the particles with their new coordinates, allowing us to determine whether or not they have moved to a new computational cell or if they have left the containment region through an outlet. By the Front-Tracking method (Unverdi & Tryggvason, 1991) only marker particles on the free surface and interface are considered.

For the solution of Eqs. (4) and (5), appropriate boundary conditions are applied. At solid walls null velocities are enforced. At the free surface, the boundary conditions need to satisfy mass conservation. Equation Eq. (5) is solved satisfying Dirichlet boundary conditions at the free surface and Neumann condition at the solid boundaries.

At the free surface the boundary conditions for pressure and velocity, assuming zero viscous stress in the gas phase, are given by $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0$ and $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p_{\text{cap}}$, where \mathbf{m} is the tangential vector to the free surface. \mathbf{T} is the viscous stress tensor and $p_{\text{cap}} = \kappa/\text{We}$ is the capillary pressure, originating from the effects of surface tension σ . Here $\text{We} = \rho L_0 U_0^2 / \sigma$ is the Weber number, and κ is the non-dimensional curvature.

Similarly to MAC (Welch *et al.*, 1965), SMAC (Amsden & Harlow, 1970), and GENSMAC (Tome & McKee, 1994) methods, Eqs. (3)–(6) are discretized by finite differences on a staggered grid. However, in the GENSMAC method the fluid domain is tracked using particles only at the free surface and interface. Additionally, the nonlinear terms in the momentum equation are discretized using high-order Upwinding schemes (Ferreira *et al.*).

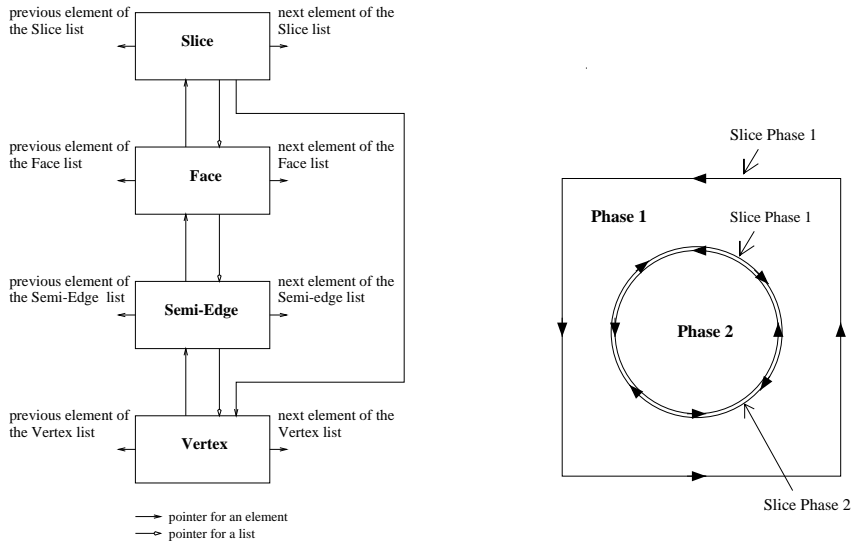
2 Data Structure

The geometrical objects may be represented by a closed curve with a counter-clockwise orientation, where only the boundary is considered. Therefore, there is a type of data structure denominated *Boundary Representation* - (B-Rep) which represents the objects by front, ie, face, edge and vertex. We use a data structure for the FreeFlow2D denominated "halfedge2d" based in the B-Rep data structure. The hierarchy of this data structure is showed in the Fig. (1.a).

In the multi-phase code, a *vector of structures* denominated *vphase* was added to the data structure. This vector stores the properties of each phase considered and a number, denominated *nphase*, for the identification of each phase. Each slice has an attribute called *fphase* indicating to which phase that slices belongs, i.e, *vphase[fphase]*. Each fluid body of a specific phase is completely surrounded by a surface labelled with the number of the phase, see Fig. (1.b). Using this method, it is possible to deal with an arbitrary number of phases, limited only by computer memory. In the following section we describe the methodology employed in the treatment of the interface between the phases.

2.1 Representation of the Interface

Using the tracking particles, the free surface and interface are approximated by a piecewise linear surface and represented by the "halfedge2d" structure. The flow properties are represented using a grid of square cells which are classified as: [B] (Boundary) if more than half of its volume belongs to a rigid boundary; [I] (Inflow) if more than half of its volume belongs to an inflow boundary; [E] (Empty) if it does not contain fluid nor more than half of its volume belongs to the fluid inflow or a rigid boundary; [S] (Surface) if it contains part of the free surface and it is in contact with an E cell; and [F] (Full) if it contains fluid, and it is not in contact with E cells. This classification is applied for each one of the different phases. For instance, a \mathbf{F}_i cell may be a F cell of the phase i and E for the other phase j , $i \neq j$. If this cell is a S cell for both phases i and j , then it will be an **Interface** cell between phases i and j , $[\mathbf{F}]_{i,j}$, see Fig. (2).



(a) Halfedge2d data structure of the FreeFlow-2D.

(b) Strategy for the inclusion of phases.

Figure 1: Data structure and inclusion of phases

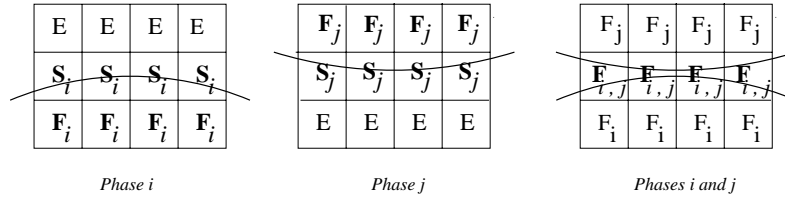


Figure 2: Configuration of the cells on the multi-phase code

Based on GENSMAC2D, we use two types of representation for cell data: a matrix representation, that allows for representing all kinds of cells and a tree data structure representation, which allows for representing specific cell groups with complementary information, i.e. [F], [S], [I], [B] cells, and Interface cells. This representation allows an efficient implementation and easy access to the data stored. See Castelo *et al.* (1999) for more details of this representation. In the computation of the free surface boundary conditions in each **S** cell, we need approximations for the surface normals. These are usually obtained according to the classification of the neighbouring cells, as follows: $\mathbf{n} = (1, 0)$ if only the right neighbour is **E**; $\mathbf{n} = (-1, 0)$ if only the left neighbour is **E**; $\mathbf{n} = (0, 1)$ if only the top neighbour is **E**; $\mathbf{n} = (0, -1)$ if only the bottom neighbour is **E**; $\mathbf{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ if only right and top neighbour are **E**; and so on.

3. Discretization

A staggered grid is employed. The velocities $u_{i,j}$ and $v_{i,j}$ are staggered by a translation of $\delta x/2$ and $\delta y/2$, respectively. The variables pressure and the properties density and viscosity are positioned at the cell centre. The divergence $D_{i,j}$ and velocity potential $\psi_{i,j}$ are also positioned at the cell centre.

3.1 Discretization in Time

A forward difference, is employed,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\delta t}, \quad \text{where } \delta t \text{ is the time-step.} \tag{7}$$

3.2 Convective Term

We use the VONOS method (Ferreira *et al.* 2001) for the approximation of the convective terms. The main advantage of this high-order scheme is that it allows to simulate high Reynolds number flows. According to this scheme, we have:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_U & \text{if } \hat{\phi}_U \notin [0, 1], \\ 10\phi_U - 9\phi_R & \text{if } 0 \leq \hat{\phi}_U < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3\phi_D + 6\phi_U - \phi_R) & \text{if } 3/74 \leq \hat{\phi}_U < 1/2, \\ 1.5\phi_U - 0.5\phi_R & \text{if } 1/2 \leq \hat{\phi}_U < 2/3, \\ \phi_D & \text{if } 2/3 \leq \hat{\phi}_U \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

where ϕ_f is the generic variable computed in a face f of a cell. $\hat{\phi}_U$ is given by $\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$, being ϕ_U the Upstream value, ϕ_R the Remote-Upstream value and ϕ_D the Downstream value.

The procedure of the approximation, for example, the convective term $\frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}$ of equation (1), is

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = (v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) / \delta y \quad (9)$$

were the transport velocity v is approximated by

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.5(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}), \quad v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0.5(v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}).$$

The transported velocities $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ and $u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ are approximated using the neighbouring points. To Approximate $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ by the VONOS method described above, we have to consider the sign of the velocity $v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$. If $v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} > 0$, the points of the approximation are $D = (i + \frac{1}{2}, j + 1)$, $U = (i + \frac{1}{2}, j)$ and $R = (i + \frac{1}{2}, j - 1)$. If $v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} < 0$, then $D = (i + \frac{1}{2}, j - 1)$, $U = (i + \frac{1}{2}, j)$ and $R = (i + \frac{1}{2}, j + 1)$. The velocity $u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ is approximated in the same manner.

We employ the same procedure to approximate the other convective terms: $\frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial(uu)}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}$ and $\frac{\partial(vu)}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}$.

3.3 Viscous Term

Approximating the viscous terms of the Eq. (1), we obtain:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] \approx \\ & \frac{1}{Re} \nu_{i+\frac{1}{2},j} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{(\delta y)^2} \right) - \left(\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i+1,j-\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x \delta y} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2},j} Re} \left[2 \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta x} \right) \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \right] \\ & + \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2\delta y} \right) + \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta x} \right) \right] \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad \text{and} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho Re} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] \approx \\ & \frac{1}{Re} \nu_{i,j+\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - v_{i-\frac{1}{2},j+1} + v_{i-\frac{1}{2},j} - v_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y \delta x} \right) + \left(\frac{2v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{(\delta x)^2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\rho_{i,j+\frac{1}{2}} Re} \left[2 \left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta y} \right) \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \right]_{i,j+\frac{1}{2}} \right] \\ & + \left[\left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{2\delta x} \right) + \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta y} \right) \right] \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \right]_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad (12) \end{aligned}$$

where $\nu_{i+\frac{1}{2},j} = 4 / \left(\frac{1}{\mu_{i+1,j}} + \frac{1}{\mu_{i,j}} \right) (\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j})$, $\nu_{i,j+\frac{1}{2}} = 4 / \left(\frac{1}{\mu_{i,j+1}} + \frac{1}{\mu_{i,j}} \right) (\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j})$,

$$\rho_{i+\frac{1}{2},j} = (\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j}) / 2.0 \quad \text{and} \quad \rho_{i,j+\frac{1}{2}} = (\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}) / 2.0.$$

3.4. Computation and implementation of the Interface Tension

For the implementation of the surface and interface tension effects, it is necessary to estimate the surface curvature at the centre of each surface cell, and to take into account sub-cell surface tension effects. The capillary pressure is given by $p_{cap} = \kappa/W e$, where $\kappa = L/R$ is the non-dimensional curvature of the surface or interface cell and R is the curvature radius. This is done by using the least squares method to approximate the free surface or interface between phases by an arc of circumference or by a parabola that best fits the surface or interface points in the cell and its neighbours. See (Castelo *et al.* 1999) for more details of this curvature approximation. The non-dimensional interface tension terms are:

$$(\mathbf{F}_x) = \pm \left(\frac{\delta t}{\delta x} \right) \frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2},j} W e} \kappa; \quad (\mathbf{F}_y) = \pm \left(\frac{\delta t}{\delta y} \right) \frac{1}{\rho_{i,j+\frac{1}{2}} W e} \kappa \quad (13)$$

The tree data structure of the interface cells is used to identify the cells that will receive contribution from the interface tension term. Half the interface tension term is added on each face of the interface cell if the corresponding neighbouring cell is a F cell of the some phase. Figure 3 shows schematically the distribution of (\mathbf{F}_x) in tree interface cells: (i, j) , $(i, j + 1)$ and $(i + 1, j + 1)$. The face between cells $(i, j + 1)$ and $(i + 1, j + 1)$ does not receive any contribution since it is surrounded by interface cells. The sign of the contribution is chosen according to the interface normal used in the computation of the curvature. We employ the same procedure to distribute of the interface tension (\mathbf{F}_y) .

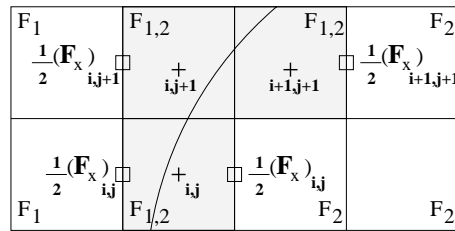


Figure 3: Distribution of the interface tension (\mathbf{F}_x) in the interface cells neighbours.

3.5 Discretization of Eq. (5)

From equation Eq. (5), we have

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \psi \Big|_{i,j} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \Big|_{i,j} \quad \text{where} \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \Big|_{i,j} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{i,j}. \quad (14)$$

The divergence operator is consistently approximated on both sides of the equation. Approximating the left side of this equation by finite differences, we obtain

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \psi \Big|_{i,j} = \left[\frac{-\left(\frac{1}{\rho}\right)_{i-\frac{1}{2},j} [\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}] + \left(\frac{1}{\rho}\right)_{i+\frac{1}{2},j} [\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}]}{\delta x^2} + \right. \quad (15)$$

$$\left. + \frac{-\left(\frac{1}{\rho}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} (\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}) + \left(\frac{1}{\rho}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} (\psi_{i,j} - \psi_{i,j+1})}{\delta y^2} \right] \quad (16)$$

and approximating $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \Big|_{i,j}$ by second-order finite difference scheme, we have

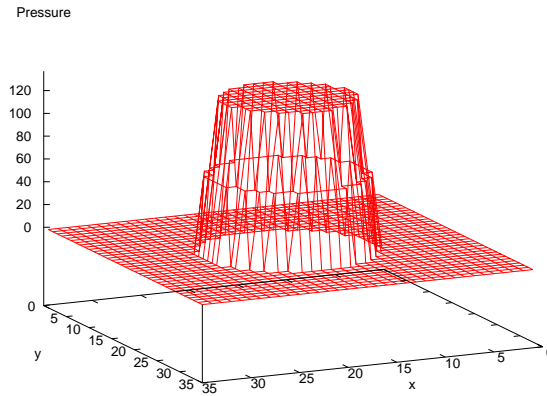
$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \Big|_{i,j} = \left(\frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) + \left(\frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right). \quad (17)$$

4. Validation of the Code

A number of tests were performed to validate the code and to assess its robustness and precision. In this section some representative results will be presented. In the following subsection the numerical results obtained with this code are compared with analytical solutions in the case of circular drops and oscillation of elliptic drops. Additionally, results of the numerical simulation of a bubble rising in a continuous phase with various values of interface tension are presented. These tests show the robustness and applicability of the code to multiphase flows.

4.1 Capillary Pressure of Circular Drops

To validate the computation of the interface tension and capillary pressure and show the robustness of the method, we simulated circular drops without gravity with various curvature radius. In the tests, we used a grid 24 x 25, $\sigma = 1$, $\rho = 1$



and $\mu = 1$ for the both phases. Figure (4) shows the jump of the pressure due to the interface tension on the surface of the drop. The pressure inside the drop is higher than the pressure of outside, and the pressure in the interface cells has an intermediate value. There are no hydrostatic effects in this case.

Figure 4: Capillary pressure of a circular drop; grid 24x25

We calculated the capillary pressure for the following bubble radius: 4.5, 5.5, 6.5, 7.5 and 9.5. Figure (5) shows the non-dimensional numerical capillary pressure tending to the analytic capillary pressure, i.e. $p_{cap} = 1$. The non-dimensional capillary pressure was obtained by the expression $(p.We)/\kappa$.

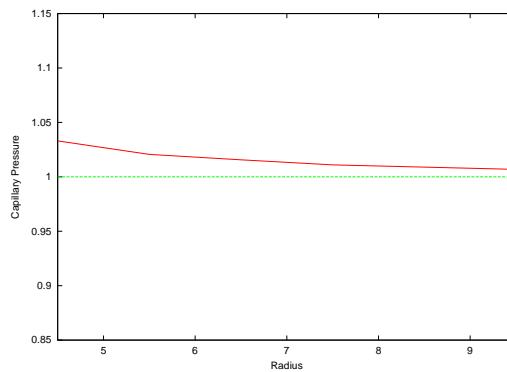


Figure 5: Numerical capillary pressure tending to the analytical capillary pressure.

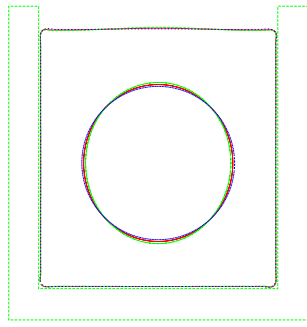
The relative error between the numerical results and the analytical solution is shown in Tab (1).

Table 1. Comparison of numerical and analytical capillary pressure Table 1.

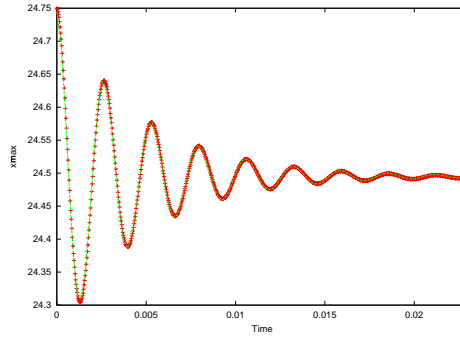
$R/\Delta x$	$p.We/\kappa$	$pressure$	Relative Error
Numerical	Numerical	analytical	%
4.5	1.0330	1	3.30
5.5	1.0206	1	2.06
6.5	1.0156	1	1.56
7.5	1.0110	1	1.10
9.5	1.0069	1	0.69

4.2 Oscillation of an Elliptic Drop

In order to demonstrate the accuracy of the capillary pressure computations in hydrostatic conditions and to show the correct behaviour of the code we simulated the problem of the oscillating bubble. The non-dimensional parameters for the two phases were: density $\rho = 1$, viscosity $\mu = 0.001$. The shape of the perturbed bubble is given by the ellipse $(x - x_0)^2/(R + \epsilon) + (y - y_0)^2/(R - \epsilon) = 1$, where the undisturbed radius of the bubble is $R = 0.0075$, the amplitude of the perturbation is $\epsilon = 0.00025$ and the interface tension $\sigma = 1$. A uniform mesh 24 x 25 cells was used for this test.



(a) Bubble shapes: $t = 0.0$, $t = 0.007$ and $t = 0.013$



(b) Maximum x-coordinate of the bubble, $x_{max} \times 10^3$

Figure 6: Oscillation of an elliptical bubble driven by surface tension; grid 24x25

Figure (6.a) illustrates the oscillation of an elliptic bubble due to interface tension, expressed by the maximum x-coordinate of the bubble (x_{max}). To show the correct dynamical behavior of the code, we compare the numerical solution with the analytical solution, see Fig. (6.b). The red line represents of the numerical results. The initial amplitude of the oscillation decays exponentially due to the viscosity. Thus, the analytical solution for the case of the oscillation of the bubble is given by the expression: $x_{max} = a \cos(2\pi t/\lambda)exp(-bt) + c$, where a,b and c are constants; $\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{(\rho_i + \rho_j)R^3}{6\sigma}}$ is the period of the oscillating bubble; ρ_i, ρ_j are densities of the phases i and j and σ is the interface tension. The analytical value of λ is 0.002356. In this test, we obtained $\lambda = 0.00265$, which corresponds to a relative error of 12 %, and $a = 0.25$, $b = 210$ and $c = 24.495$. The numerical results are in agreement with results reported by Sussman, Smereka & Osher, (1994).

4.3 Bubble rising in a continuous phase

This example, see Fig. (7), shows a bubble rising in a continuous phase under the gravity force. Two different grid sizes were used in these tests: 36x64 and 64x128. In both tests, we have $Re = (2R)^{2/3} \sqrt{g\rho_c/\mu_c} = 5.0$, $Bd = 4\rho_c g R^2/\sigma = 0.4$, $\rho_c/\rho_b = 40.0$ and $\mu_c/\mu_b = 500$.

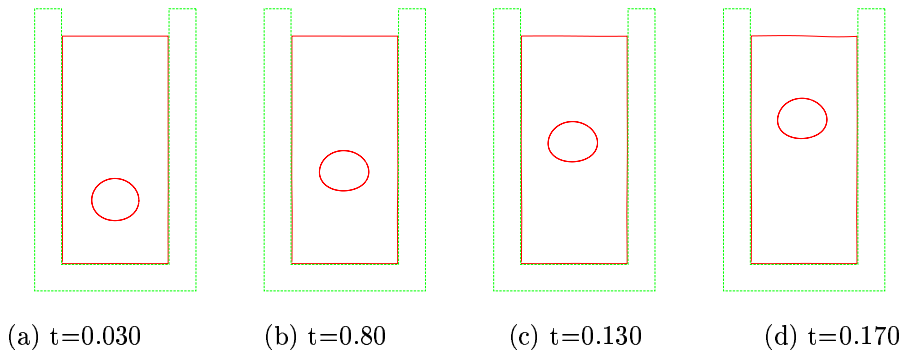


Figure 7: Evolution of a rising bubble; grid 64x128; $Re = 5$; $Bd = 0.4$

The fluid outside the bubble is more viscous and dense than the bubble. This difference of properties causes a considerably large change in the pressure field, see Fig. (8). The pressure inside the bubble is higher than the ambient pressure due to the interface tension on the surface of the bubble. Due to the hydrostatic effects, the pressure increases towards the bottom of the domain.

Figure (9.a) and Fig. (9.b) show the raising velocity and minor axis of the bubble plotted with respect to the time, respectively. The red trace represents the results on the finest grid, i.e., 64x128. These plots show that the bubble reaches a steady state after the non-dimensional time $t \approx 2.5$. These results agree with the results obtained by (Sussman, Smereka & Osher, 1994).

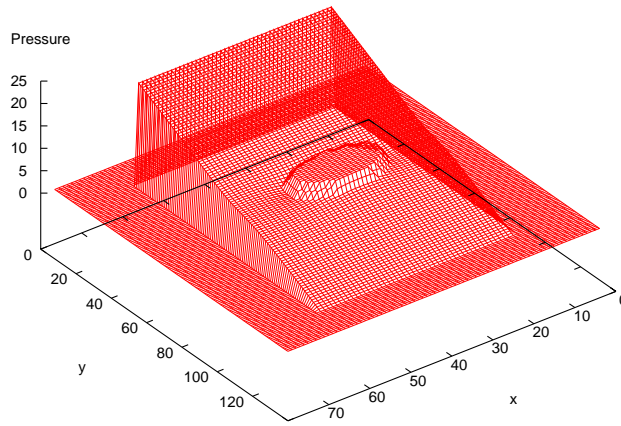
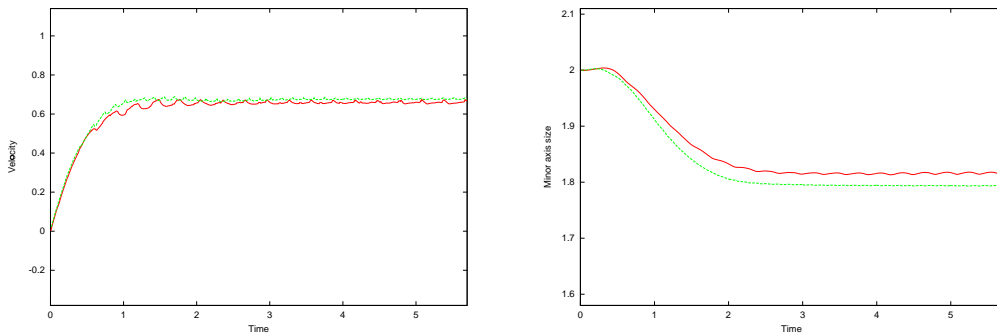


Figure 8: The pressure field for $Re = 5$ (Hydrostratic effects); grid 64x128



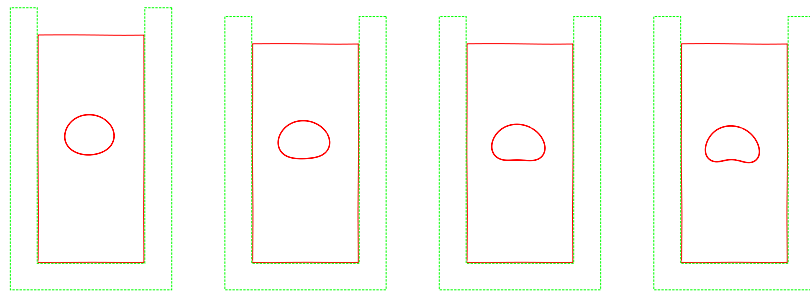
(a) Raising Velocity of the bubble

(b) Minor axis of the bubble

Figure 9: Velocity and minor axis size of the bubble

4.4 Effects of Interface Tension

In this test, we investigated the effects of the variation of interface tension in the rising bubble problem. In Fig. (10), we compared the results at $t = 0.14$, for various values of Bond number. The velocity and minor axis for each test were also plotted in Fig. (11). The red line corresponds to the test with the smallest Bond number. Note that the velocity decreases as the Bond number is increased.



(a) $Bd=0.4$

(b) $Bd=0.8$

(c) $Bd=1.6$

(d) $Bd=3.2$

Figure 10 : Interface tension effects on bubble rising with $Re = 10$, density ratio 500/1, viscosity ratio 40/1 and grid 36 x 64.

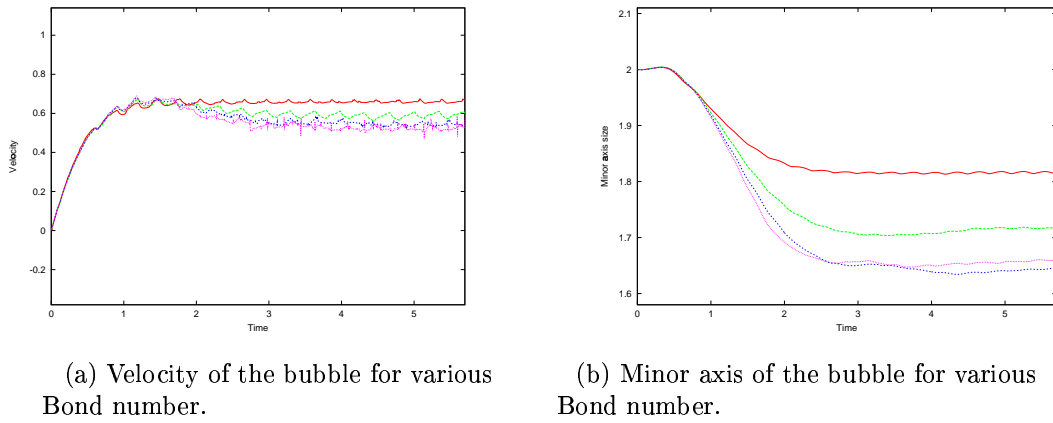


Figure 11: Behaviour of the velocity and the axis of bubble for various Bond number.

4.5 Multi-Phase Flow

To illustrate the ability of the code to deal with multi-phase flows, we simulated, Fig. (11), two bubbles rising in a continuous phase. All phases have different properties. The parameters of this test are: $\rho_c/\rho_1 = 40/1$, $\rho_c/\rho_2 = 80$, $\mu_c/\mu_1 = 250$, $\mu_c/\mu_2 = 500$, where c corresponds to the continuous phase, and 1 and 2 refers to the phases on the two bubbles. The Reynolds number was $Re = (2R)^{2/3}\sqrt{g\rho_c/\mu_c} = 10$ and $Bd = 4\rho_cgR^2/\sigma = 0.8$. An uniform mesh 36 x 64 cells was used.

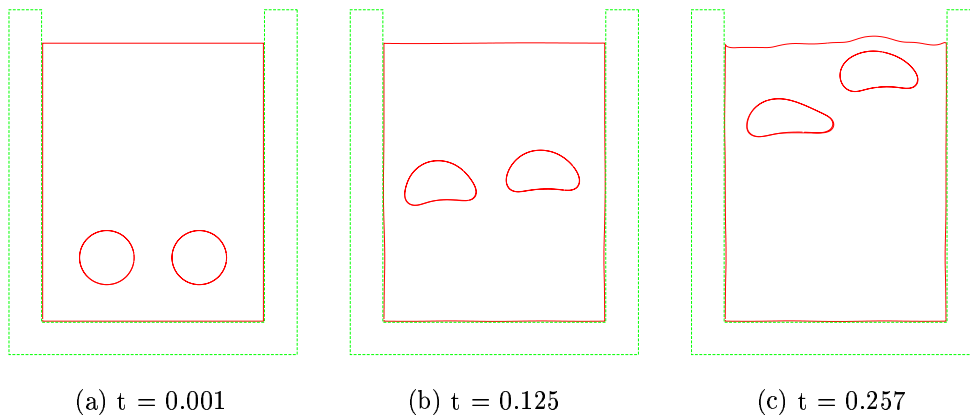


Figure 12: Two bubbles rising in a continuous phase with Reynolds number $Re = 10$, $Bd = 0.8$.

In the following test, Fig. (13), we considered five bubbles rising a continuous phase. All phases have different properties.

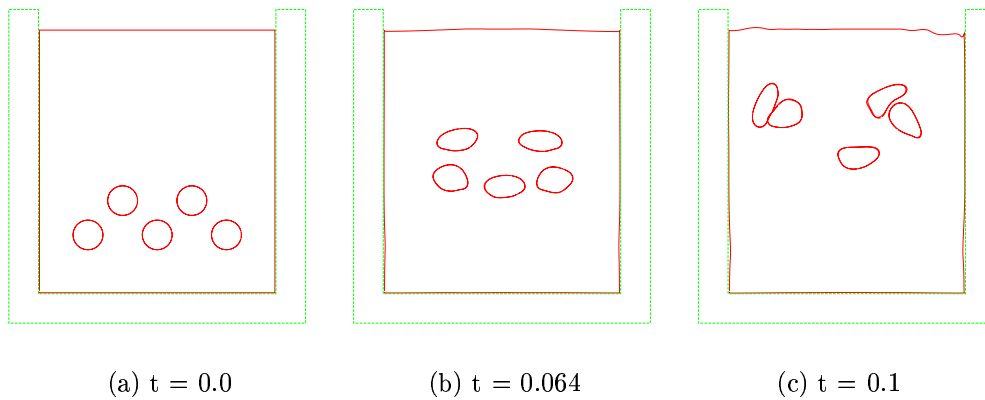


Figure 13: Five bubbles rising in a continuous phase; grid 36 x 64.

5. Conclusions

In this work we described a method which allows the simulation of multi-phase flows with interface tension in the FreeFlow-2D system. The approach is an extension of the numerical procedure described by Mangiavacchi *et al.* (2000), for multi-phase flows. The surface and interface tension effects are incorporated separately on two different scales. This approximation resulted in improved surface normal estimates which can be used in a more accurate implementation of the boundary conditions. An efficient implementation is obtained through a dual representation of the cell data, using both a matrix representation, for the easy at identifying neighbouring cells, and a tree data structure, which permits the representation of specific groups of cells with additional information pertaining to that group. The resulting code showed to be robust, and produced accurate results when compared with exact solutions of selected fluid dynamic problems involving multi-phase flows with interface tension. In particular, we considered oscillating drops problems with various values of interface tension.

Acknowledgements

We gratefully acknowledge support given by CNPq.

References

- Amsden, A. A. and Harlow, F. H., 1970, The SMAC Method: a Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flow, Los Alamos
- Castelo, A., Mangiavacchi, N., Cuminato, J. A., Fortuna, A. O., Oliveira, J., McKee, S., and Tomé, M. F., 1999, Surface tension implementation for GENSMAC2D, proc. COBEM99, CD-ROM.
- Ferreira, V. G., Tome, M. F., Mangiavacchi, N., Castelo, A., Cuminato, J. A. and Fortuna, A. O., High Order Upwinding and the Hydraulic Jump, 2001, to appear in International Journal for Numerical Methods in Fluids.
- Mangiavacchi, N., Castelo, A., Tomé, M. F., Cuminato, J. A., Fortuna, A. O., Ferreira V.G., Nonato, L. G. and McKee, S., 2000, Numerical Simulation of Surface Tension Dominated Axisymmetric Free Surface Flows, proc. ENCIT 2000, CD-ROM.
- Sussman, M., Smereka, P., 1997, Axisymmetric free boundary problems, Journal of Fluid Mechanics, vol. 341, pp. 269-294.
- Tome, M. F. and McKee, S., 1994, GENSMAC: A Computational Marker-and-Cell Method for Free Surface Flows in General Domains, Journal of Computational Physics, vol.110, pp. 171-186.
- Tome, M. F. , Castelo, A., Murakami, J., Cuminato, J. A., Minghim, R., Oliveira, M. C. F., Mangiavacchi, N., and McKee, S., 2000, Numerical Simulation of Axisymmetric Free Surface Flows, Journal of Computational Physics, vol.157, pp. 441-472.
- Unverdi, S. G. and Tryggvason, G., 1992, A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-Fluid Flows Journal of Computational Physics, vol. 100, pp. 25-37.
- Welch, J. R., Harlow, F. H., Shannon, J. P., and Daly, B. J., 1965, The MAC Method, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3425.

A TÉCNICA DE MULTI GRELHA EM LUBRIFICAÇÃO ELASTO HIDRO DINÂMICA

Silvia Carolina Lebrón

Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Av. João Naves de Ávila, 2160
Campus Santa Mônica - Bloco 1M
CEP 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil
Fone: (034) 239 4148/4192/4150 Fax: (034) 239 4206
e-mail: sclebron@mecanica.ufu.br,
web page: <http://www.mecanica.ufu.br/>

Carlos Roberto Ribeiro

Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Av. João Naves de Ávila, 2160
Campus Santa Mônica - Bloco 1M
CEP 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil
Fone: (034) 239 4148/4192/4150 Fax: (034) 239 4206
e-mail: cribeiro@mecanica.ufu.br,
web page: <http://www.mecanica.ufu.br/>

Resumo: A lubrificação elasto hidro dinâmica (LEH) identifica-se com as situações onde a deformação elástica dos sólidos em contato exerce um papel importante nos processos de contatos lubrificadas hidrodinamicamente. A análise da LEH em contatos elípticos requer a solução simultânea das equações de Reynolds para a pressão e da equação de elasticidade. O grande problema desta abordagem reside na dependência exponencial da viscosidade em relação à pressão, tornando o sistema acoplado de equações diferenciais altamente não linear. O objetivo deste trabalho é simular numericamente alguns casos de LEH, resolvendo-os com o auxílio de técnicas de multi níveis

Palavras chave: multi grelha, lubrificação elasto hidro dinâmica, métodos computacionais.

1. Introdução

A simulação numérica tem desempenhado um papel de importância primordial no campo da ciência e tecnologia, sendo indispensável no campo da lubrificação elasto hidro dinâmica (LEH) onde há grandes dificuldades experimentais associadas a um problema sem solução analítica.

Como vantagens imediatas destas simulações destacam-se a rapidez e o custo, fornecendo, além disso, acesso a resultados onde o procedimento experimental é técnica ou economicamente inviável. Adicionalmente, a simulação permite maior facilidade na investigação dos vários parâmetros que influenciam no fenômeno sem que para isso sejam necessárias grandes mudanças nos códigos computacionais que os simulam.

O contato lubrificado possui uma característica altamente pontual, com grandes gradientes para a pressão, o que leva à necessidade de malhas extremamente finas, gerando assim sistemas de ordem elevada que, associados à não linearidade numérica, tendem a produzir soluções instáveis.

A maioria dos trabalhos em LEH versa sobre contatos lineares. Grubin, em 1949, foi o primeiro a tentar uma solução do problema de LEH linear isotérmico. Na análise de Grubin admitiu-se que a forma, elasticamente deformada dos sólidos, num contato lubrificado, altamente carregado, era a mesma que a forma produzida num contato seco (Hertziano). Esta hipótese facilitou a solução da equação de Reynolds na região de entrada do contato e permitiu o cálculo da separação dos sólidos, porém, não apresentou resultados compatíveis com a realidade.

Para uma solução completa do problema de LEH deve-se satisfazer simultaneamente as seguintes equações: a equação de Reynolds, a relação entre a viscosidade e a pressão e as equações da elasticidade, o que foi feito por Dowson e Higginson, em 1959, obtendo a solução do problema por métodos inversos que apresentaram bons resultados para casos unidimensionais mas para problemas bidimensionais ainda não se conseguiu a convergência das duas formas: o filme hidrodinâmico e a superfície elástica.

Hamrock e Downson, 1981, apresentaram métodos iterativos de solução da LEH obtendo alguns resultados satisfatórios. Estudos mais recentes (Venner, 1994; Smeeth e Spikes, 1997; Jang e Tichi, 1995) tentam diferentes métodos de solução mas no entanto, este problema não pode ser considerado completamente resolvido.

Neste trabalho utilizaremos a discretização proposta por Hamrock e Downson e o auxílio da técnica de Multi Grelha (MG) para possibilitar o emprego de malhas finas na região do contato posto que, como a MG acelera a convergência de grandes sistemas lineares, o custo computacional decorrente permanece em limites aceitáveis.

2. Lubrificação Elasto Hidrodinâmica

O campo de pressão que surge devido à atuação da carga (w) num contato elíptico seco é denominado de campo Hertziano de pressão. Hertz (1881) obteve uma expressão para o cálculo da pressão em contatos secos elípticos,

$$p = p_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} \quad (1)$$

Se a pressão for integrada sobre a área de contato resulta,

$$p_{\max} = \frac{3w}{2\pi ab} \quad (2)$$

Onde a e b correspondem aos semi-eixos da elipse de contato que surge devido à deformação dos sólidos submetidos à ação de uma carga w . Esta elipsóide é definida como:

$$k = \frac{a}{b} \quad (3)$$

Em muitos contatos entre elementos de máquinas transmitem-se forças através de finos, embora contínuos, filmes de fluido, provocando deformações elásticas nos sólidos em contato. Este tipo de fenômeno é denominado lubrificação elasto hidrodinâmica (LEH) entre dois contatos e é governado pela equação clássica de Reynolds (Hamrock & Dowson, 1981):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(u_a + u_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho(v_a + v_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (4)$$

onde,

p é o campo de pressão que surge entre os contatos lubrificados

$h(x,y)$ é a separação entre as superfícies

ρ a densidade

η a viscosidade

u_a e u_b , v_a e v_b são as velocidades das superfícies deslizantes.

A forte dependência da viscosidade com a pressão representa o maior problema de não linearidade na equação de Reynolds e mais, para as elevadas pressões que ocorrem nos problemas elasto hidro dinâmicos, o líquido não mais pode ser considerado incompressível, introduzindo mais não linearidades.

Para a viscosidade, utilizaremos a relação proposta por Roelands em 1966, aplicável a fluidos não Newtonianos em condições isotérmicas:

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{p}{2000}\right)^Z \times 10^{1.2 \left(1 + \frac{p}{2000}\right)^{-1}} \quad (5)$$

onde,

η_0 é a viscosidade do lubrificante a pressão atmosférica;

Z é uma constante adimensional de indexação da viscosidade com a pressão e

p a pressão, kgf/cm².

Neste trabalho, a relação da densidade em função da pressão adotada foi a sugerida por Dowson e Higginson, em 1966,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\gamma_1 p}{1 + \gamma_2 p} \quad (6)$$

Onde,

ρ_0 é a densidade do lubrificante a pressão atmosférica, e as constantes γ_1 e γ_2 são inerentes ao lubrificante utilizado.

Para pressões pequenas, a separação das superfícies pode ser considerada rígida, ou seja, depende somente da geometria do contato ignorando-se o efeito da pressão na variação da altura de lubrificante,

$$h(x, y) = h_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2R_x} + \frac{(y - y_0)^2}{2R_y} \quad (7)$$

Onde h_0 representa a altura mínima da película de fluido e as demais parcelas referem-se à separação geométrica dos sólidos em contato. Se forem consideradas as deformações elásticas sofridas pelos sólidos, que é o caso da lubrificação elasto hidro dinâmica (LEH), torna-se necessária a solução simultânea das equações da elasticidade e da hidrodinâmica. Na pratica a área sobre a qual ocorre deformação elástica dos corpos sob a ação de uma carga (w) é muito pequena quando comparada com o raio dos corpos que se tocam.

Seja (x, y) um ponto genérico de um domínio infinito Ω onde se deseja calcular a deformação elástica provocada por um campo de pressão que atua neste domínio. Segundo Timoshenko e Goodier, 1951, uma força elementar situada em (ξ, η) , isto é $P(\xi, \eta)d\xi d\eta$, provoca um deslocamento em (x, y) dado por:

$$\delta(x, y; \xi, \eta) = \frac{2P(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\pi E' \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (8)$$

Para obter-se a deformação total, abrangendo todo o campo de pressão, basta integrar-se a Eq. (5), isto é,

$$\delta(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{P(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (9)$$

Assim sendo, à Eq. (7) deverá ser acrescentada a deformação sofrida pelo corpo resultando:

$$h(x, y) = h_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2R_x} + \frac{(y - y_0)^2}{2R_y} + \delta(x, y) \quad (10)$$

Desta forma a lubrificação elasto hidro dinâmica fica determinada por meio do sistema de equações diferenciais acopladas composto pelas equações (4), (5), (6) e (10).

Um dos complicadores na busca de uma solução numérica da Eq. (4) é o termo ρ/η dependente da pressão, responsável pela não linearidade do problema. Uma das maneiras de se abordar esta dificuldade é utilizar a chamada pressão reduzida que consiste em uma mudança da variável dependente P para a variável q (pressão reduzida) segundo a seguinte transformação:

$$q(\rho) = \frac{(1 - e^{-c\rho})}{c} \quad \text{que implica em} \quad \rho = -\frac{\ln(1 - qc)}{c} \quad (11)$$

$$q_x = e^{-c\rho} \rho_x \quad q_y = e^{-c\rho} \rho_y$$

Rearranjando-se a Eq. (4), já na forma adimensional fica,

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho}{\eta} H^3 e^{c\rho} \frac{\partial q}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho}{\eta} H^3 e^{c\rho} \frac{\partial q}{\partial Y} \right) = 12U \left(\frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial \left(\frac{\rho}{\eta} H \right)}{\partial X} \quad (12)$$

Como η varia exponencialmente com a pressão a transformação adotada torna o termos $\left(\frac{\rho}{\eta} H^3 e^{c\rho} q_x \right)$ e $\left(\frac{\rho}{\eta} H^3 e^{c\rho} q_y \right)$ mais tratáveis numericamente, isto é, Resolver a Eq. (12) é equivalente a resolver a Eq. (4) com a vantagem de que a Eq. (12) é quase linear em q , exceto pela dependência de ρ com $p(q)$.

3. Multi Grelha

Os métodos iterativos de solução de sistemas lineares ($Au = f$) tais como o de Gauss-Seidel, de Jacobi, do Gradiente Conjugado, do Gradiente Bi-Conjugado ou das Relaxações Sucessivas (SOR), possuem a característica de convergirem rapidamente no inicio do processo iterativo. Assim que as oscilações bruscas do erro são eliminadas nestes estágios iniciais, a eficiência dos métodos decai significativamente tornando-os excessivamente lentos.

Para superar este obstáculo surge o Multi Grelha, que utiliza a característica de rápida convergência inicial dos métodos iterativos e, a partir do ponto de colapso, transfere os cálculos para uma malha mais grosseira, onde os benefícios da convergência inicial rápida são readquiridos. A seguir os resultados da malha grosseira são transferidos de volta à malha mais fina. Este processo de transferência de informações entre malhas é realizado por alguns ciclos, utilizando-se esquemas de interpolação (Briggs, 1987).

Para entender melhor este processo considere o sistema linear a seguir, cuja solução é buscada de forma iterativa:

$$Au = f \tag{13}$$

Seja \tilde{u} uma aproximação da solução exata u , em uma iteração qualquer, isto é

$$A(e + \tilde{u}) = f \tag{14}$$

Onde e é o desvio, ou erro, da aproximação \tilde{u} em relação à solução exata u . Re-arranjando a Eq. (14) resulta:

$$Ae = f - A\tilde{u} \tag{15}$$

Ou

$$Ae = r \tag{16}$$

Resolver o sistema da Eq. (16) é exatamente análogo a resolver o sistema da Eq. (13). A solução de um implica no outro e vice-versa. A solução da Eq. (13) fornece diretamente as incógnitas u , enquanto que a solução de (16) deve ser somada à \tilde{u} , seja qual for, para se obter u . A Eq. (16) é chamada de equação residual da Eq. (13) e é utilizada nos esquemas Multi Grelha pois os valores de e , por se situarem em torno de zero em um processo iterativo, é mais adequada nos processos de interpolação que transferem resultados entre as malhas.

Seja Ω^h uma malha discretizada com uma dimensão característica h e Ω^{2h} uma malha mais grossa com dimensão característica $2h$. De uma forma geral o método Multi Grelha segue o seguinte processo iterativo (Wagner, 1998/1999):

- 1) relaxar algumas vezes $A^h u^h = f^h$ na malha Ω^h obtendo um valor inicial r^{2h} ,
- 2) calcular o resíduo $r^h = (f^h - A^h \tilde{u}^h)$,
- 3) transferir os valores deste resíduo r^h para a malha mais grossa Ω^{2h} , com auxílio de funções interpoladoras obtendo-se r^{2h} .
- 4) relaxar algumas vezes a equação residual $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ na malha Ω^{2h} , obtendo-se valores para e^{2h} ,
- 5) transferir os valores deste erro e^{2h} para a malha mais fina Ω^h , com auxílio de funções interpoladoras obtendo-se e^h .
- 6) corrigir a aproximação da malha fina com $u^h \leftarrow \tilde{u}^h + e^h$,

O termo relaxar que aparece nos passos 1 e 4 referem-se ao método iterativo utilizado para resolver o sistema linear propriamente dito. Neste trabalho o método empregado foi o SOR (successive over relaxation).

A prática tem demonstrado que o mecanismo de transferência de informações da malha fina para a grossa (passo 3) pode ser realizado linearmente, com bons resultados. Denotando esta operação, chamada restrição, por I_h^{2h} , tem-se:

$$I_h^{2h} r^h = r^{2h} \quad \text{onde} \quad r_j^{2h} = r_{2j}^h$$

A transferência dos erros (passo 5) da malha mais grossa para a mais fina, denominada prolongação, é denotada por I_{2h}^h e pode, bi-dimensionalmente, ser realizada do seguinte modo:

$$I_{2h}^h e^{2h} = e^h$$

$$e_{2i,2j}^h = e_{i,j}^{2h}$$

$$e_{2i+1,2j}^h = \frac{1}{2} (e_{i,j}^{2h} + e_{i+1,j}^{2h})$$

$$e_{2i,2j+1}^h = \frac{1}{2} (e_{i,j}^{2h} + e_{i,j+1}^{2h})$$

$$e_{2i+1,2j+1}^h = \frac{1}{4} (e_{i,j}^{2h} + e_{i+1,j}^{2h} + e_{i,j+1}^{2h} + e_{i+1,j+1}^{2h})$$

$$\text{com } 0 \leq i \leq \frac{M}{2} - 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq j \leq \frac{M}{2} - 1$$

onde M é o número de pontos em x e y .

Este procedimento, ilustrado para duas malhas pode ser estendido recursivamente até se atingir a malha mais grosseira possível, isto é, a de 3 pontos, e daí retornando-se à mais fina, onde reside afinal a solução do problema original.

O percurso de descida e subida pode ser realizado de formas diferentes, surgindo daí os diversos tipos de ciclos Multi Grelha. Uma descida simples até o fundo com retorno imediato à superfície é chamada de ciclo V. O ciclo W, como o próprio nome o sugere, desce da malha mais fina para a mais grosseira, como no ciclo V, porém no retorno interrompe a subida em uma malha intermediária, voltando novamente ao fundo, para só então retornar definitivamente à superfície. A convergência do problema em questão indica o tipo de ciclo adequado e o número de sub-malhas necessárias. Neste trabalho foi usado o ciclo em V.

3. Implementação numérica

O processamento numérico dado às equações da LEH segue o seguinte processo iterativo:

- 1) Cálculo da pressão Hertziana P_h (Eq. 2),
- 2) $P = P_h = P_{antigo}$,
- 3) Cálculo da deformação elástica (Eq. 9),
- 4) Cálculo da altura do fluido (Eq. 10),
- 5) Cálculo da pressão reduzida (Eq. 12) com o auxílio do Multi Grelha com o SOR como método de relaxação,
- 6) $\bar{P} \leftarrow q$ (Eq. 11),
- 7) $P = \alpha \bar{P} + (1 - \alpha) P_{antigo}$,
- 8) $P_{antigo} = P$,
- 9) Retorno ao passo 3 até ser obtida a convergência.

O parâmetro $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ utilizado no passo 7 é um fator de relaxação que serve para que a pressão calculada iterativamente seja atualizada paulatinamente, de modo a evitar saltos bruscos que causam instabilidade no processo.

4. Resultados

Visando verificar a eficiência do MG, neste trabalho, foi resolvido inicialmente um caso simplificado da equação de Reynolds em regime permanente, ignorando-se a deformação elástica introduzida pela pressão, h é calculada levando-se em conta somente grandezas de caráter geométrico. Na Tab.(1) é apresentado o desempenho do MG sob diversos esquemas de relaxação para se atingir a mesma precisão, mostrando a evidente superioridade do MG. Nas Figuras (1) e (2) pode ser visto o resultado obtido para a pressão nestas condições iniciais.

Tabela 1: Tempo de CPU na lubrificação hidrodinâmica para cada método de solução.

Tempo de CPU (segundos)		
	Com MG	Sem MG
SOR	4	517
Gauss-Seidel	6	530
Gradiente Bi-Conjugado	16	664

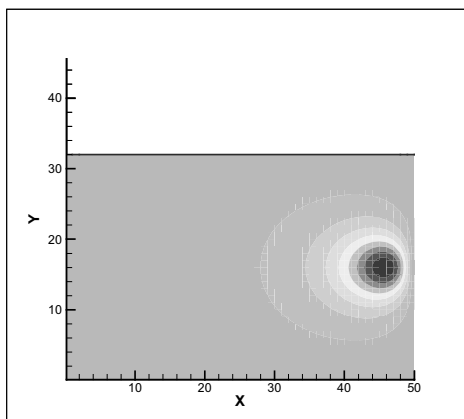


Figura 1: Curvas de nível da pressão

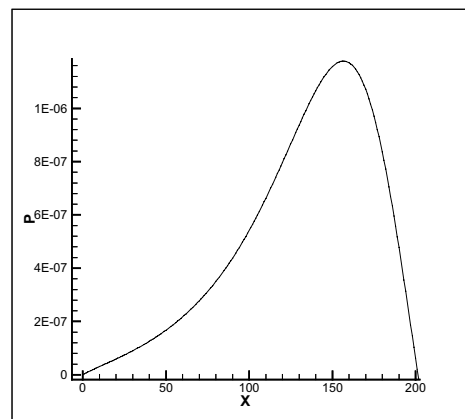


Figura 2: Pressão em $y=y_{médio}$

A seguir, a técnica MG foi aplicada a problemas característicos da LEH. O comportamento do código no decorrer das iterações, a caminho da convergência pode ser visto na Fig. (3), o que leva à conclusão de que com um número mínimo de 1000 de iterações obtêm-se bons resultados. Os parâmetros utilizados para esta análise podem ser vistos na Tab. (2).

Tabela 2: parâmetros utilizados no estudo de convergência do modelo

Velocidade adimensional $U = \frac{\eta_0 u}{E'R_x} = 0.1683 \cdot 10^{-11}$	Tamanho da malha $M \times N = 64 \times 128$ pontos	Contato aproximadamente esférico $k = \frac{a}{b} = 1.25$	carga adimensional $W = \frac{F}{E'R_x^2} = 0.1106 \cdot 10^{-6}$
---	---	--	--

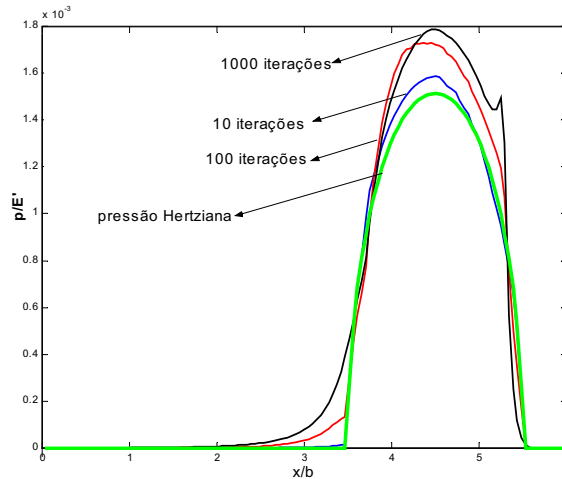


Figura (3): convergência do modelo de LEH

O parâmetro k , por estar relacionado à geometria do contato, indica se a região sob análise apresenta características elípticas, esféricas ou cilíndricas. Observe-se que para $k = 6.00$, a área de contato pode ser considerada aproximadamente cilíndrica e para $k = 1.25$ o contato pode ser visto como esférico e para $k = 2.5$ tem-se um contato elíptico propriamente dito.

A Fig. (4) mostra o campo de pressão gerado no contato elasto hidro dinâmico para diferentes geometrias de contato. As linhas pontilhadas referem-se às pressões Hertzianas de cada contato, isto é, a pressão do contato seco. A Fig. (5) mostra as deformações sofridas pela superfície de contato para os diferentes valores de k .

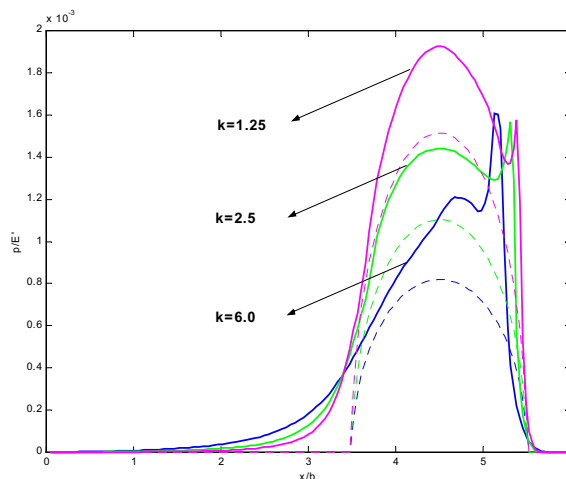


Figura (4): perfil da pressão em função da variação da geometria da superfície de contato (k)

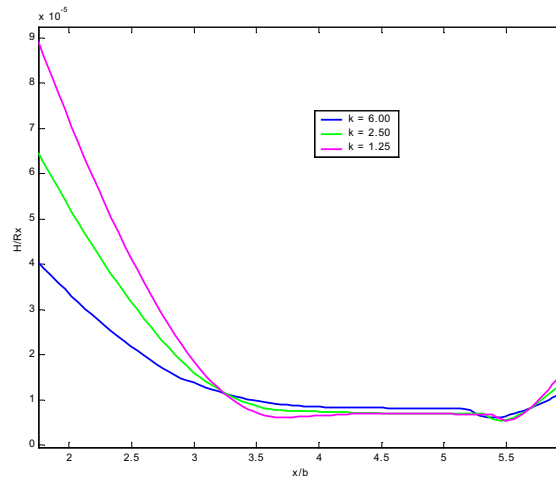


Figura (5): perfil da deformação elástica produzida em função da variação da geometria da superfície de contato (k)

A variação do parâmetro adimensional W indica a variação da carga aplicada sobre os corpos em contato o que conduz a uma maior pressão e por conseqüência, uma maior deformação das superfícies. As Figuras (6) e (7) mostram o comportamento do campo de pressão para a aplicação de diferentes cargas em contatos de geometria cilíndrica e esférica respectivamente. As deformações elásticas sofridas para cada tipo de contato podem ser visualizadas nas Figuras (8) e (9).

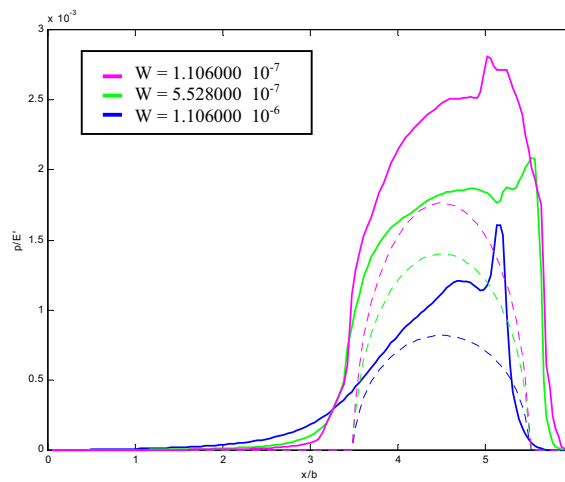


Figura (6): campos de pressão para diferentes valores de W em um contato cilíndrico

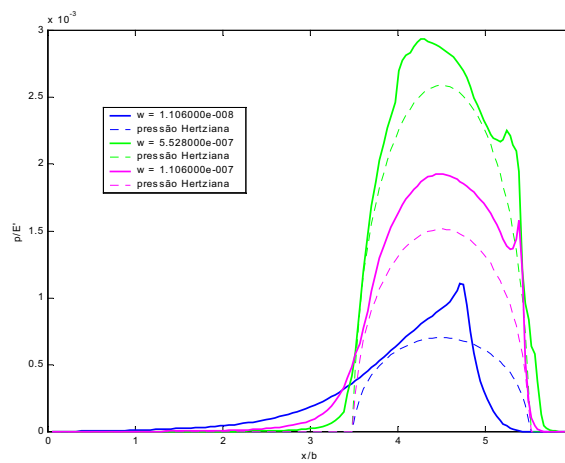


Figura (7): campos de pressão para diferentes valores de W em um contato esférico

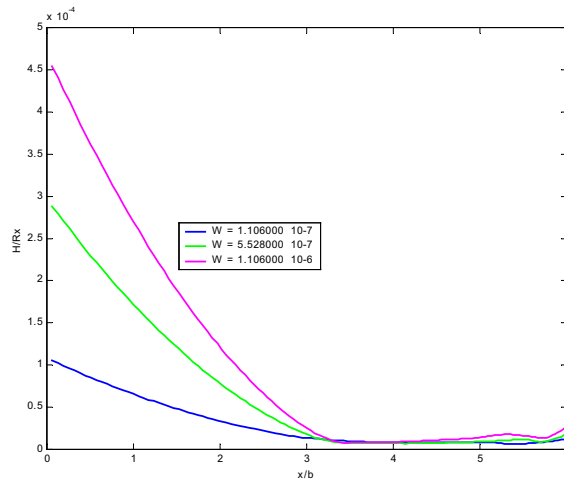


Figura (8): deformação elástica das superfícies para diferentes valores de W num contato cilíndrico.

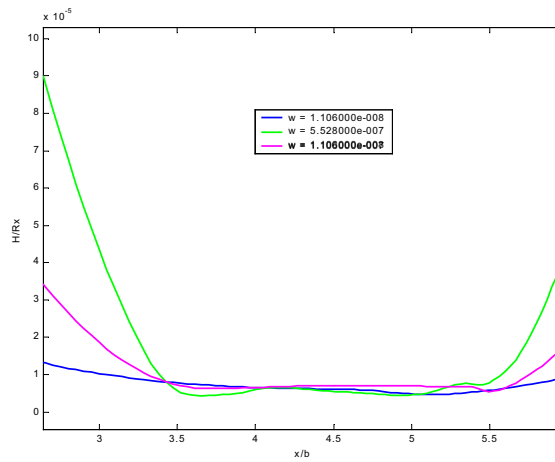


Figura (9): deformação elástica das superfícies para diferentes valores de W num contato esférico

A velocidade de rotação U que aparece no lado direito da equação de Reynolds foi variada para analisar o comportamento do modelo. A geometria do contato a que se referem as Figuras (10) e (11) corresponde a um contato aproximadamente esférico ($k \cong 1.25$), a carga foi mantida a 7×10^{-7} e as velocidades de rotação variadas conforme as legendas vistas nos gráficos.

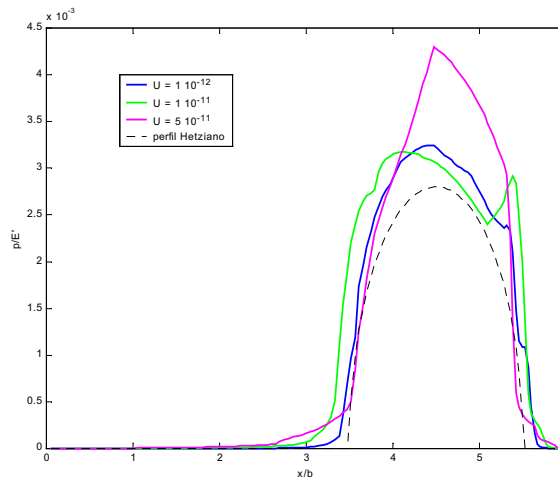


Figura (10): campos de pressão para diferentes valores de U em um contato esférico

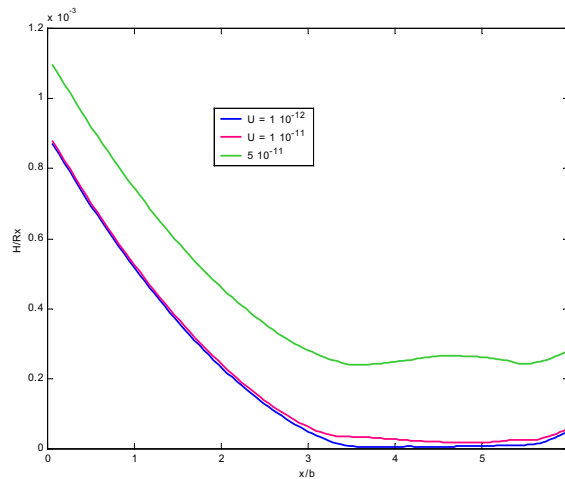


Figura (11): deformação elástica das superfícies para diferentes valores de U num contato esférico

5. Conclusão

Neste trabalho empregou-se a técnica de Multi Grelha na solução de problemas relacionados à lubrificação elasto hidro dinâmica. O método apresentou resultados compatíveis com os que se encontram na bibliografia e o emprego de multi níveis acelerou a convergência do problema. Deve-se ressaltar porém a ocorrência de altas instabilidades presentes na busca das soluções, a menos que o campo de pressão seja relaxado gradativamente (passo 7 da seção 3), isto é, $\alpha \cong 0.01$.

6. Referências

Briggs, W. L., 1987, "A Multigrid Tutorial", Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Dowson, D. & Higginson, G. R., 1959 "A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem", J. Mech. Eng. Sci., 1 (1), 7-5.

Dowson, D. & Higginson, G. R., 1966, "Elastohydrodynamic Lubrication, the Fundamentals of Roller and Gear Lubrication", Pergamon, Oxford.

Grubin, A N., 1949 "Fundamentals of the Hydrodynamic Theory of Lubrication of Heavily Loaded Cylindrical Surfaces", Central Scientific Institute for Technology and Mechanical Engineering, Moscow.

Hamrock, B. J. & Dowson, D., 1981, "Ball Bearing Lubrication – The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts", John Wiley & Sons, Inc. United States of America.

Hertz, H., 1881, "The Contact of Elastic Solids", J. Reine Angew, Math., 92, 156-171.

Jang, S. & Tichi, J., 1995, "Reological Models for Thin Film EHL Contacts", Journal of Tribology, Vol. 117.

Roelands, C. J. A., 1966, "Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils", Druk V. R. B., Groningen, Netherlands.

Smeeth, M. & Spikes, H. A., 1997, "Central and Minimum Elastohydrodynamic Film Thickness at High Contact Pressure", Journal of Tribology, Vol. 119/291.

Venner, C. H., 1994, "Higher- Order Multilevel Solvers for the EHL Line and Point Contact Problem", Journal of Tribology, Vol. 116/741.

Timoshenko, S & Goodier, J. N., 1951, "Theory of Elasticity", 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

Wagner C., 1998/1999, "Introduction to Algebraic Multi Grid", Universität Heidelberg, Germany.

MULTIGRID METHOD IN ELASTOHYDRODYNAMIC LUBRICATION

Silvia Carolina Lebrón

School of Mechanical Engineering
Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Av. João Naves de Ávila, 2160
Campus Santa Mônica - Bloco 1M
CEP 38400-902, Uberlândia, MG , Brazil
Phone: (034) 239 4148/4192/4150 Fax: (034) 239 4206
e-mail: slebron@mecanica.ufu.br,
web page: <http://www.mecanica.ufu.br/>

Carlos Roberto Ribeiro

School of Mechanical Engineering
Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Av. João Naves de Ávila, 2160
Campus Santa Mônica - Bloco 1M
CEP 38400-902, Uberlândia, MG , Brazil
Phone: (034) 239 4148/4192/4150 Fax: (034) 239 4206
e-mail: cribeiro@mecanica.ufu.br,
web page: <http://www.mecanica.ufu.br/>

***Abstract:** The subject of elastohydrodynamic lubrication is identified with situations in which elastic deformations plays a significant role in the hydrodynamic lubrication process. To analyze the elastohydrodynamic lubrication (LEH) of elliptical contacts it is necessary to solve simultaneously the Reynolds equation for pressure and the elasticity equation. The greatest shortcoming of this approach is the dependence between the viscosity and the pressure which is exponential, so that the coupled system of equations becomes highly nonlinear. The objective of this work is to analyze LEH in elliptical contacts by means of multi levels algorithms to solve them.*

***Keywords:** Multi-Grid, elasto hydrodynamic lubrication Computational Methods.*

FROM A POWER-LAW EQUATION FOR THE FRICTION FACTOR IN SMOOTH PIPES TO A CONTROVERSY ON THE OVERLAP LAYER

José Fiuza Branco

Dep. de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Instituto Politécnico de Viseu, Campus Politécnico, 3504-510 VISEU, Portugal
jfiuza@demgi.estv.ipv.pt

Carlos Pinho

CEFT-DEMEGI, Universidade do Porto, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 PORTO, Portugal
ctp@fe.up.pt

Rui de Almeida Figueiredo

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Coimbra, Pinhal de Marrocos, 3030-000 COIMBRA, Portugal
rui.figueiredo@mail.dem.uc.pt

Abstract. *The well-established logarithmic law for the overlap layer in turbulent pipe flow, based on the assumption of complete similarity, has been questioned in the past decade. Based on incomplete similarity, Barenblatt (1993) has proposed a power-law, where the proportionality factor and the exponent were determined from both analytic and experimental arguments, namely Nikuradse's data (Schlichting, 1979). Zagarola and Smits (1998) used results of the Princeton Superpipe facility to contradict this theory, but the debate is still going on.*

In the present paper the friction factor in smooth pipes, usually described by the Prandtl equation, is represented in the form of a power-law, where the proportionality factor and the exponent depend on the Reynolds number. This may be seen as an extrapolation of Blasius' equation to a wider Reynolds number range. Good agreement was achieved with the results of the Prandtl equation through the use of a very simple formula.

As an interesting result, it was found that, although obtained using a crude numerical approach, this power-law formula has the same kind of structure of the Barenblatt equation, derived from a purely theoretical conjecture, and that gave rise to the referred controversy.

Keywords: friction factor equation, turbulent pipe flow, power-law.

1. Introduction

Power-law equations representing skin friction coefficients and Nusselt numbers are commonly used as boundary conditions in the study of different aspects of heat transfer and dissipation phenomena arising in connection with internal and external flows (e.g. Bejan, 1998, Branco et al, 2000).

This work presents a numerical procedure used to obtain a power law skin friction formula with variable coefficients. The main objective is to get a better agreement with the results of the Prandtl-Colebrook equation than the attained using constant coefficients equations, such as the Blasius formula or the equations presented by Kays and Perkins (1985), and White (1979).

In the case of turbulent flow in smooth pipes the well-known Blasius equation,

$$f = 0.3164 \text{Re}^{-1/4} \quad (1)$$

relates the Darcy's friction factor, f , with the Reynolds number, Re , based on the bulk velocity and on the pipe diameter, D , in the range $4000 \leq \text{Re} \leq 10^5$. The present approach describes an adjustment of the form

$$f = \alpha(\text{Re}) \text{Re}^{\beta(\text{Re})} \quad (2)$$

to the well established Prandtl equation

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.8 \quad (3)$$

and, possibly, to the available experimental data. The Prandtl equation was derived theoretically from the universal logarithmic velocity profile, which is an asymptotic law for large Reynolds numbers; its coefficients were slightly adjusted using data from Nikuradse's experiments (Reynolds numbers up to 3.4×10^6). From its theoretical foundation, and according to Schlichting (1979), it can be extrapolated to arbitrarily large Reynolds numbers. The Blasius equation has a close relation with the $(1/7)^{\text{th}}$ power law velocity distribution, since one can be easily derived from the other. Using different exponents, equations similar to Eq. (1) can be easily found for a particular range of the Reynolds number (cf. Schlichting, 1979). Equation (2), otherwise, is intended to have the same range of validity as the Prandtl equation.

In spite of the fact that the form of the found $\alpha(\text{Re})$ and $\beta(\text{Re})$ functions is somewhat complex, the resulting power-law is quite simple. It was also noticed that the α and β functions compare well with similar functions obtained by Barenblatt (1993) (cf. also with Barenblatt and Prostokishin, 1993, and with Barenblatt et al, 1997); namely, α and β are both functions of $\ln \text{Re}$.

In the next sections the procedure used to derive an equation of the form of Eq. (2) will be presented, then the above mentioned dispute will be referred, the connections between them will be mentioned, and finally the results extended to turbulent flow in rough pipes. A comparison between some of the most widely used equations for calculation of the friction factor in turbulent smooth and rough flow will also be presented.

2. A power-law equation for the friction factor in turbulent smooth pipe flow

To find the $\alpha(\text{Re})$ and $\beta(\text{Re})$ functions allowing the better adjustment of Eq. (2) to the Prandtl equation, different power laws with constant coefficients were adjusted locally for a particular Reynolds number. These coefficients were calculated using a standard least-squares approximation with nine pairs of values (Re , f), corresponding to the selected Reynolds number and to eight nearby points. With a proper choice of these neighbor points, the difference between the original and the obtained value for f is negligible. The $\alpha(\text{Re})$ and $\beta(\text{Re})$ functions are represented in Fig. (1).

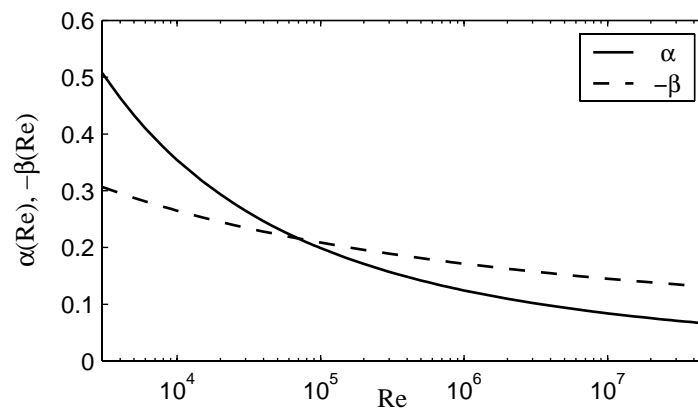


Figure 1. $\alpha(\text{Re})$ and $\beta(\text{Re})$ functions resulting from the least square approximation of a power-law ($f = \alpha(\text{Re})\text{Re}^{\beta(\text{Re})}$) to the Prandtl equation.

Using the hints indicated by Holman (1989), it was noted that the plot of $1/\beta$ against Re in a semi-log graphic shows a quasi-linear relationship, indicating a functional dependence of the form $(-\beta(\text{Re})) = (\beta_1 \ln \text{Re} + \beta_2)^{-1}$. This fact gave a clue to try an expression of the type

$$-\beta(\text{Re}) = \beta_1 (\ln \text{Re})^{-1} + \beta_2 = 2.572 (\ln \text{Re})^{-1} - 0.0146 \tag{4}$$

which leads to a slightly better adjustment, Fig. (2).

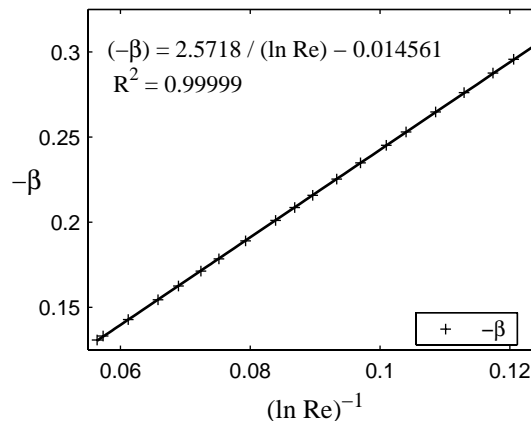


Figure 2. Functional relationship between the β function and Re .

A similar relationship between the α function and the Reynolds number may be explored using the graphical repre-

sentation of Fig. (3). Fig (3a) represents the plot of $\alpha(\text{Re})$ against $\ln \text{Re}$ in a log-log graphic and shows a quasi linear dependence. The corresponding power-law relationship, Fig (3b), may be found using least-squares approximation:

$$\alpha(\text{Re}) = 105.7 (\ln \text{Re})^{-2.568} \tag{5}$$

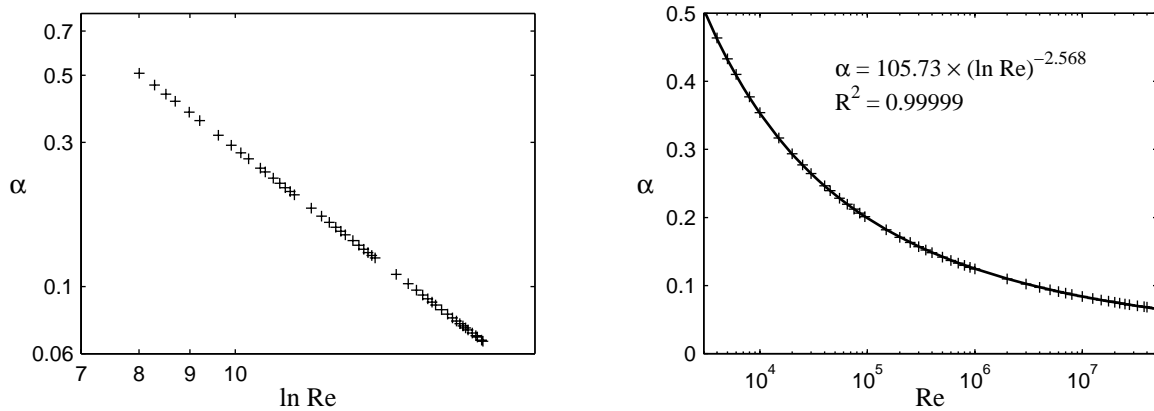


Figure 3a, b. Functional relationship between the α function and Re .

According to the results expressed by Eqs. (4) and (5), Darcy’s friction coefficient may be represented by the following power-law equation

$$f_{\text{Pow}} = 105.7 (\ln \text{Re})^{-2.568} \text{Re}^{0.0146 - \frac{2.572}{\ln(\text{Re})}} \tag{6}$$

which, with a slight adjustment, takes the following simpler form

$$f_{\text{Pow}} = \frac{8.11 \text{Re}^{0.0146}}{(\ln \text{Re})^{2.57}} \tag{7}$$

Despite the crude approach used above, the relative error made when using Eq. (7) instead of the Prandtl equation is rather small, as can be seen from the plot in Fig. (4).

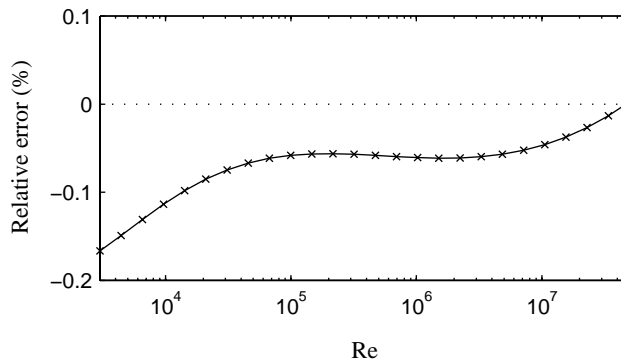


Figure 4. Relative error made in the calculation of f with Eq. (7); the Prandtl equation was used as a reference.

3. A brief compilation of equations for evaluation of friction in turbulent pipe flow

Besides the above referred equations, there are in the literature a number of formulas for the Darcy friction coefficient, f ; Table (1) presents a compilation of a few of these. One can find equations for smooth pipes and others correlating the whole region from smooth to completely rough flow. The later ones incorporate the well-known Kármán-Nikuradse equation for the rough zone, ϵ being the roughness height,

$$f = \frac{1}{(1.14 - 2.0 \log(\epsilon/D))^2} \tag{8}$$

and the ulterior interpolation scheme due to Colebrook, which combines Eq. (8) with a logarithmic equation for smooth pipes. When the chosen equation for smooth flow is Eq. (3), we have the Colebrook equation, valid for commercial pipes and depicted in the familiar Moody diagram:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \tag{9}$$

Table 1 – Equations for the friction factor in turbulent pipe flow

Case	Number	Equation	Validity range	Ref.
smooth	1	$f = \frac{0.184}{\text{Re}^{0.2}}$	Re: $3 \times 10^4 - 10^6$	Kays and Perkins, (1985)
"	2	$f = \frac{1.02}{(\log \text{Re})^{2.5}}$	–	White, (1979)
"	3	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8 \log \left(\frac{\text{Re}}{6.9} \right)$	Re: $5 \times 10^3 - 5 \times 10^7$	Colebrook, (1938)
"	4	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log \left(\frac{\text{Re}^{0.9}}{5.74} \right)$	Re: $5 \times 10^3 - 10^8$	Churchill (1973), Swamee and Jain, (1976)
"	5	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.884 \log (\text{Re} \sqrt{f}) - 0.331$	Re: $10^5 - 3.5 \times 10^7$	Zagarola and Smits, (1998)
"	6	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.869 \log (\text{Re} \sqrt{f}) - 0.241 - \frac{233}{(\text{Re} \sqrt{f})^{0.9}}$	–	Zagarola and Smits, (1998)
smooth – rough	7	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right)$	Re: $5 \times 10^3 - 10^8$ ε/D : $10^{-6} - 10^{-2}$	Churchill (1973), Swamee and Jain, (1976)
"	8	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left(\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right)$	Re: $4 \times 10^3 - 10^8$	Haaland, (1983)

Barenblatt (1993) developed another equation for the friction factor in turbulent smooth pipe flow, which is a corollary of the power-law proposed as a new scaling law for the overlap layer

$$f = \frac{8}{\Psi^{2/(1+\alpha_B)}}, \text{ where } \alpha_B = \frac{3}{2 \ln \text{Re}} \text{ and } \Psi = \frac{e^{3/2}(\sqrt{3} + 5\alpha_B)}{2^{\alpha_B} \alpha_B (1 + \alpha_B)(2 + \alpha_B)} \tag{10}$$

A rapid survey of the theory will be presented in the next section.

4. A controversy on the scaling laws in the overlap–layer in wall turbulent shear flow

The universal distribution law, established in the first decades of the 20th century by Von Kármán, Prandtl and Milikan from different starting points, has been used to describe the intermediate layer in turbulent pipe flow. As stressed by Schlichting (1979), this law has an asymptotic nature, and is expected to be valid for large Reynolds numbers. It has the well-known form

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \quad \text{and} \quad u^+ = \frac{u}{u^*} \tag{11}$$

where each symbol is defined as usual: y is the local coordinate measured from the pipe wall, u the local velocity, u^* the so-called friction velocity and ν the kinematic viscosity of the fluid; Eq. (11) is valid in the range $30 < y^+ < 0.1R^+$, where $R^+ = (D/2)u^*/\nu$. Schlichting (1979) recommends the following values for the constants: $1/\kappa = 2.5$ and $B = 5.5$. The first is expected to be independent of the characteristics of the wall surface (κ is the Von Kármán universal constant), and the second to depend only on its roughness. But, in spite of this believe there is a considerable scatter in the obtained values for these constants. Barenblatt et al (1996) found in the literature values for B ranging between 5.0 and 6.3 and for κ in the range 0.40 to 0.44, and Afzal and Yajnik (1973) report values for κ in the range 0.38 to 0.42.

Authors as Toonder and Nieuwstadt (1997), Afzal and Yajnik (1973) and Wosnik et al (2000) refer a dependence of the log-law coefficients on the Reynolds number, which explains the above mentioned discrepancy. These last authors

(Afzal and Yajnik, 1973 and Wosnik et al, 2000) defend that this dependence can be found considering higher order terms in the asymptotic expansion of the velocity distribution in the overlap region.

Other authors (Barenblatt, 1993, Barenblatt and Prostokishin, 1993, Barenblatt and Chorin, 1996) argue that the scatter of the values of the “universal constants” in the logarithmic profile show that it is not an appropriate description of the velocity profile, and defend a power-law, with coefficients depending on the Reynolds number,

$$\frac{u}{u^*} = C(\text{Re}) \left(\frac{yu^*}{\nu} \right)^{\alpha_B(\text{Re})} \quad (12)$$

as new scaling law for the overlap layer. Considering the form of the corrections proposed for the Kolgomorov-Obukhov 2/3 and 5/3 exponents, Barenblatt (1993) came to the conjecture that a similar dependence could apply to the exponent α_B in the previous equation, namely $\alpha_B \propto (\ln \text{Re})^{-1}$. Using data from the Nikuradse’s experiments, the following relationships were obtained with rather good agreement with the available results:

$$\frac{u}{u^*} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \text{Re} + \frac{5}{2} \right) \left(\frac{yu^*}{\nu} \right)^{3/(2 \ln \text{Re})} \quad \text{where } C(\text{Re}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \text{Re} + \frac{5}{2}, \text{ and } \alpha_B(\text{Re}) = \frac{3}{2 \ln \text{Re}} \quad (13)$$

The controversy between power-law defenders (Barenblatt et al, 1997, Barenblatt and Chorin, 1998), and the log-law defenders (Zagarola et al, 1997, Smits and Zagarola, 1998, Wosnik et al, 2000) grew when the new scaling law was compared with data from the Superpipe experiment. The disagreement between the law and the data reveals, for the second group, a deficiency of the law, and for the first, a deficiency of the data. But the discussions also involved authors as Toonder and Nieuwstadt (1997), Buschmann (2000), Buschmann and Gad-el-Hak (2000), and Marmanis (2000), and it is still going on. For example Buschmann (2000) sustains that Eq. (13) is not suitable for turbulent boundary layers. But Barenblatt et al (2000) maintain that, using a Reynolds number based on an appropriate length scale, it can also be used to give an accurate description of the intermediate region adjacent to the viscous sub-layer, in boundary layer flows. On the other hand George et al (1996) affirm that, although the velocity profile in the overlap zone of a boundary layer is described by a power-law, the corresponding pipe profile is described by a log-law.

Summarizing, the power-law scaling of the intermediate layer agrees with the data from Nikuradse, but not with data from the Princeton Superpipe facility. However, log-laws with constant coefficients (Zagarola and Smits, 1998) and coefficients depending on Re (Wosnik et al, 2000) were used to model the Superpipe results. But in the first of these studies, the coefficients of the log-law are different from the usually accepted on the basis of Nikuradse’s data and, in the second study, only the Superpipe experiment was considered. Therefore, it seems to be necessary a clarification about the reason of the discrepancies in the available experimental data, before a universal scaling law for the overlap layer can be definitely established for turbulent pipe flow.

5. A connection between the obtained equation for the friction factor and Barenblatt’s scaling law

It was seen above that the scaling law proposed by Barenblatt (1993) originates a corresponding equation for the friction factor, Eq. (10). It was derived considering that $f = 8(u^*/V)^2$, where the bulk velocity, V , may be estimated by integration of the velocity profile; in doing this, it was considered, as usual, that the scaling law is valid all over the flow field, ignoring the different velocity profiles close to the pipe wall and to the pipe axis; but, unlike the Prandtl equation, the constants of the derived equation were not subsequently adjusted. Equation (10) may be written in a different form, which stresses its power-law nature:

$$f = 32 \left(\frac{\alpha_B(1 + \alpha_B)(2 + \alpha_B)}{2(\sqrt{3} + 5\alpha_B)} \right)^{2/(1 + \alpha_B)} \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)^{2\alpha_B/(1 + \alpha_B)} \quad (14)$$

Since the preceding equation is only one of the possibilities of explicitly expressing Eq. (10) as a power-law, and in order to make a comparison between the above presented Eqs. (6–7) and Eq. (14), Fig. (5a) depicts the Reynolds number raised to the difference of the exponents of the equations against the ratio between its multiplicative factors. If the equations were equal, however written in different forms, the resulting plot would be a straight line with unitary slope. Figure (5b), on the other hand, allows the direct comparison between Eqs. (6–7) and Eq. (10). It should be stressed again that Barenblatt’s equation for the friction factor results directly from the proposed scaling-law, without any later adjustment. If such a correction was implemented, the friction factor equation would approach the Prandtl one, mainly for low Reynolds numbers, where the influence of the wall-layer cannot be ignored. Barenblatt’s equation, derived directly from his scaling proposal for the overlap layer, produces almost the same results as Eq. (7), the best fitting to the friction factor, namely matching the Prandtl equation, generally accepted as the most accurate. In conclusion, there are still some open questions about the scaling of wall-bounded flows, but the power-law nature of the scaling law cannot be excluded and, consequently, deserves serious consideration.

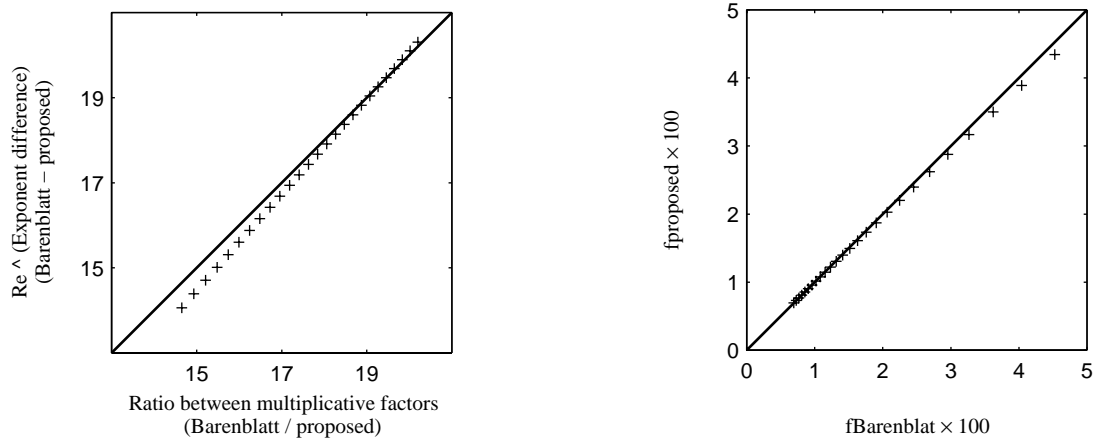


Figure 5a, b. Comparison between the proposed equation – Eq. (7) – and Barenblatt equation – Eq. (10).

6. Comparison between the obtained and the referred equations for flow friction and extension to rough flow

A brief comparison between the above-cited equations, including the developed power-law equation, for turbulent smooth flow, can be found in Fig. (6). Considering the already indicated reasons, the plot shows the relative differences between each equation and the Prandtl one, here considered as a reference point.

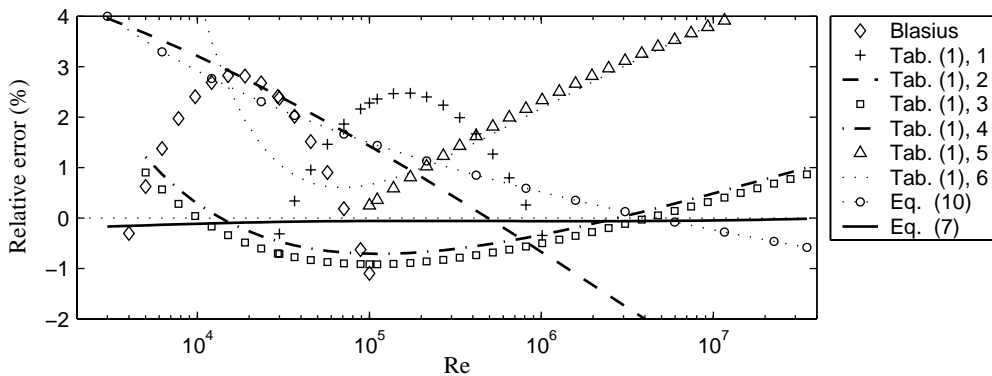


Figure 6. Relative error in the evaluation of f with different equations; the Prandtl equation was taken as reference.

Under these conditions, Fig. (6) shows clearly that the proposed equation produces the best explicit fit to the equation of Prandtl. The simpler equations due to Colebrook (1939) and to Swamee and Jain (1976) also assure an approximation within 1 percent in the range of $5 \times 10^3 \leq Re \leq 5 \times 10^7$. Another comparison can be made with the results of Zagarola and Smits (1998). The experimental results of this and other experiments performed at the premises of the Gas Dynamics Laboratory, (Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University) are freely available in its Internet page, at: “<http://www.princeton.edu/~gasdyn>”.

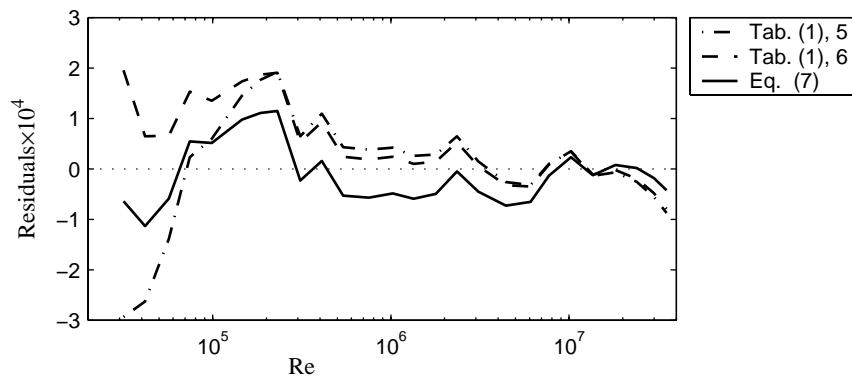


Figure 7. Residuals of Eq. (7), and equations 5 and 6 in Tab. (1), considering data from the Superpipe experiment.

As can be seen in Fig. (7), using different coefficients, (11.325, 0.041 and 2.83, respectively), Eq. (7) can also be successfully adjusted to this data. The referred Figure depicts the differences between the uncorrected experimental results, and the values predicted using both Zagarola and Smits (1998) equations and with Eq. (7).

The influence of the pipe roughness can also be incorporated in the developed equation, although at expenses of a greater complexity. The Colebrook (1939) interpolation scheme can be applied directly to obtain the equation,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + 10 \left(\frac{(\ln \text{Re})^{1.285}}{2\sqrt{8.11} \text{Re}^{0.0073}} \right) \right) \tag{15}$$

Yet explicit, as the equations of Churchill (1973), Swamee and Jain (1976) and Haaland (1983), its form is somewhat more complex. The Swamee and Jain equation, when compared with the Colebrook one, is believed to be accurate within $\pm 1\%$ in the range referred in Tab. (1); in the case of the Haaland equation, the error is less than $\pm 1.5\%$. In Fig. (8) the limiting values for the error associated with each of these equations are plotted against the Reynolds number for the range of relative roughnesses indicated in Tab. (1).

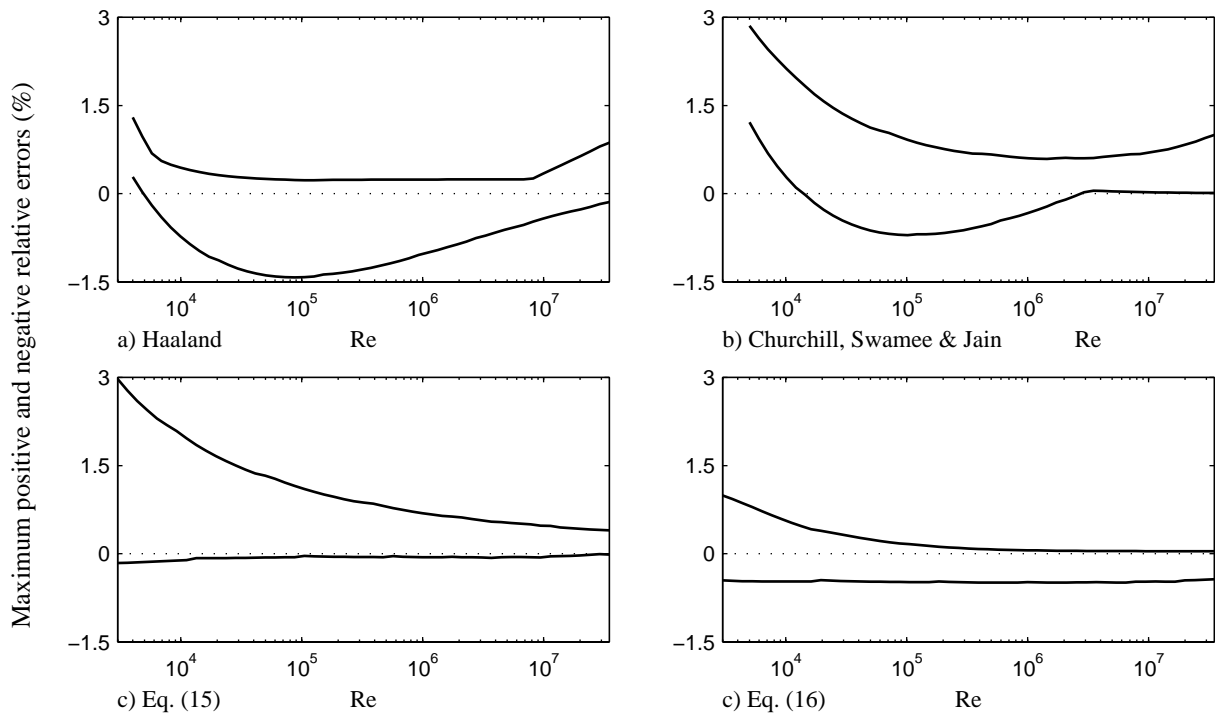


Figure 8. Limiting values for the error in Eqs. 7 and 8 in Tab. (1), and in Eqs. (15)–(16), when compared with Eq. (9).

Figure (8b) shows that, regardless of its limited range of validity, the error associated with Eq. 7 in Tab. (1) breaks the stated bounds and Fig. (8a) shows that the error associated with Eq. 8 in Tab. (1) respects the announced limits. Figure (8c) indicates that the error of Eq. (15) is the greatest for low Reynolds numbers; yet, a little adjustment can be made using, as suggested by Haaland (1983), a corrective exponent, n , close to 0.925. With this correction, Eq. (15) becomes

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.85 \log \left(\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{\frac{1}{0.925}} + 10 \left(\frac{(\log \text{Re})^{1.285}}{1.804 \text{Re}^{0.0073}} \right) \right) \tag{16}$$

with an associated error within $\pm 1\%$ in the range $0 \leq \epsilon/D \leq 0.05$, as can be seen in Fig. (8d).

7. Conclusion

A numerical procedure was used to develop an explicit power-law equation for the friction factor in smooth pipes. The resulting formula, although slightly more complex than other equations – e.g. Eq. (1), or Eqs. number 1 and 2 in Tab. (1) – available in the technical literature, presents a greater validity range and produces a lower error, when compared with the Prandtl equation.

Using this developed power-law formula and the Colebrook interpolation method, an equation valid for turbulent rough flow was also derived. Again this equation compares well with the results of the Colebrook equation.

Finally, it was found that, though obtained using a purely numerical scheme, the structure of the presented equation is very similar to that of the Barenblatt (1993) friction equation, derived from theoretical principles.

8. Acknowledgment

PRODEP II (Programa de Desenvolvimento Educativo para Portugal) supported the work of the first author.

9. References

- Afzal, N. and Yajnik, K., 1973, "Analysis of Turbulent Pipe And Channel Flows at Moderately Large Reynolds Number", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.64, pp. 23–31.
- Barenblatt, G.I. and Chorin, A.J., 1996, "Small Viscosity Asymptotics for the Inertial Range of Local Structure and for the Wall Region of Wall-Bounded Turbulent Shear Flow", *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, Vol.93, pp. 6749–6752.
- Barenblatt, G.I., 1993, "Scaling Laws for Fully Developed Turbulent Shear Flows. Part 1. Basic Hypotheses and Analysis", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.248, pp. 513–520.
- Barenblatt, G.I., and Prostokishin, V.M., 1993, "Scaling Laws for Fully Developed Turbulent Shear Flows. Part 2. Processing of Experimental Data", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.248, pp. 521–529.
- Barenblatt, G.I., Chorin, A.J. and Prostokishin, V.M., 1997, "Scaling Laws for Fully Developed Turbulent Flow in Pipes: Discussion of Experimental Data", *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, Vol.94, pp. 773–776.
- Barenblatt, G.I., Chorin, A.J. and Prostokishin, V.M., 2000, "Self-similar Intermediate Structures in Turbulent Boundary Layers at Large Reynolds Numbers", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.410, pp. 263–283.
- Bejan, A., 1998, "Entropy Generation Minimization", CRC Press, Boca Raton, pp. 81, 85, 106.
- Branco, J.F., Pinho, C.T. and Figueiredo, R.A., 2000, "Heat Conduction in the Hollow Sphere with a Power-Law Variation of the External Heat Transfer Coefficient", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol.27, No. 8, pp. 1067–1176.
- Buschmann, M., 2000, "Power Law or Logarithmic Law?—A data Analysis for Zero Pressure Gradient Turbulent Boundary Layers with Low Re_{δ_2} ", Tech. Report, Institute of Fluid Mechanics, Dresden University of Technology.
- Buschmann, M. and Gad-el-Hak, M., 2000, "Power Law or Log Law for the Turbulent Boundary Layer?", *Bulletin of the American Physical Society*, Vol.45, No. 9, p. 160.
- Churchill, S.W., 1973, "Empirical Expressions for the Shear Stress in Turbulent Flow in Commercial Pipe", *AIChE Journal*, Vol.19, No. 2, pp. 375–376.
- Colebrook, C. F., 1939, "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws", *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol.11, pp. 133–156.
- Haaland, S.E., 1983, "Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow", *Journal of Fluids Engineering*, Vol.105, pp. 89–90.
- Holman, J., 1989, "Experimental Methods for Engineers, 5th Ed.", McGraw-Hill, New York, pp. 82–83.
- Kays, W.M. and Perkins, H.C., 1985, "Forced Convection, Internal Flow in Ducts", in Rohsenow, W.M., Hartnett, J.P. and Ganic, E.N., Eds., "Handbook of Heat Transfer Fundamentals, 2nd Ed.", McGraw-Hill, New York, pp. 7.1–7.7.
- Marmanis, H., 2000, "Analogy between the Electromagnetic and Hydrodynamic Equations: Application to Turbulence", Ph.D. Thesis, Division of Applied Mathematics, Brown University.
- Schlichting, H., 1979, "Boundary Layer Theory, 7th Ed.", McGraw-Hill, New York, pp. 596–623.
- Smits, J.A. and Zagarola, M.V., 1998, "Response to: Scaling of the Intermediate Region in Wall-bounded Turbulence: the Power Law", *Physics of Fluids*, Vol.10, No. 4, pp. 1045–1046.
- Swamee, P.K. and Jain, A.K., 1976, "Explicit Equations for Pipe-flow Problems", *Journal of Hydraulics Engineering*, Vol 102, No. 5, pp. 657–664.
- Toonder, J.M.J. den and Nieuwstadt, F.T.M., 1997, "Reynolds Number Effects in a Turbulent Pipe Flow for Low to Moderate Re ", *Physics of Fluids*, Vol.9, No. 11, pp. 3398–3409.
- White, F.M., 1979, "Fluid Mechanics", McGraw-Hill, New York, Chapter 6.
- Wosnik, M., Castillo L. and George, W.K., 2000, "A Theory for Turbulent Pipe and Channel Flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.421, pp. 115–145.
- Zagarola, M.V. and Smits, A.J., 1998, "Mean-flow Scaling of Turbulent Pipe Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.373, pp. 33–79.
- Zagarola, M.V., Perry, A.E. and Smits, A.J., 1997 "Log Laws or Power Laws: the Scaling in the Overlap Layer", *Physics of Fluids*, Vol.9, No. 7, pp. 2094–2100.

Investigation on Vortex-Induced Vibration in Water: Further Analysis and a new Measurement Device for 2D Experiments

André L. C. Fajarra

University of São Paulo – Department of Naval and Oceanic Engineering
Av. Prof. Mello Moraes, 2231. , São Paulo, 05508-900, Brazil
afajarra@usp.br

Maurício R. Menezes

University of São Paulo – Department of Mechanical Engineering
mauricio.menezes@poli.usp.br

Celso P. Pesce

University of São Paulo – Department of Mechanical Engineering
cpesce@usp.br

Abstract. *The Vortex-Induced Vibration phenomenon in water has been studied under an experimental approach. Among other aspects, great attention has been paid to modal coupling, mainly between the first in-line and cross-flow vibration modes. In two different arrangements, experiments were carried out with cantilevered flexible circular cylinders in water. The dynamic behavior of those arrangements have been shown quite similar to those presented by elastically mounted rigid cylinders. Given the peculiarity of the cantilevered flexible cylinders (geometric symmetry and some structural asymmetry), it was possible to verify the importance of the simultaneous presence of stream wise and lateral vibrations, in a clear coupled sub-harmonic resonance behavior. In order to further investigate such a resonance, a new arrangement has been built, enabling simultaneous excitation of natural modes in orthogonal planes. It is a two-degrees-of-freedom device composed by two elastic supports, constructed with leaf springs whose respective rigidities can be set up accordingly. The ultimate goal is to implement a light damped experimental set up, enabled to investigate the hydro-mechanic modal coupling in two different planes of vibration, along with to understand sub-harmonic resonance that usually appear.*

Keywords. *Vortex-Induced Vibrations, experimental set up, modal coupling, sub-harmonic resonance.*

1. Introduction

In the present work, we are concerned with the vortex-induced vibrations for cylindrical cantilever configurations in fluid flow, focusing on the hydro-mechanic modal coupling in two different planes of vibration and the wake vortex dynamics. Despite its practical significance, this configuration appears to have received little attention in the literature to date. Some fundamental studies on rigid cantilevers have been performed, as those by Fox et al. (1993), through pressure measurements, and by Kitagawa et al (1997), when VIV was investigated for a special leaf-spring mounting and where a high reduced velocity response was observed.

Recently, experiments with a long flexible and structurally symmetric cantilever ($L/D=94.5$) have been conducted at University of São Paulo (Fajarra et al., 1998; Pesce and Fajarra, 2000). As expected, the flexible cantilever showed a vortex-induced dynamic behavior neatly similar to the standard case of an elastically mounted rigid cylinder.

Going further, in a second row of experiments, see Fajarra et al. (2001), a twin pair of structurally non-symmetric cantilevers was constructed of rubber. Those models were hydro-dynamically but not structurally axis-symmetric, as bending stiffness values were quite different in both principal flexural planes. The principal plane of larger (around 16 times) bending stiffness was aligned with the flow, such that the smaller one was placed crosswise, according to the expected plane of vortex-induced vibrations. Two different measurement techniques were applied to determine the amplitude responses: (a) indirectly by strain measurements and modal decomposition and (b) directly by optical techniques. The first one was applied at University of São Paulo (USP) and University of Michigan (UofM) Laboratories and the second one at the Fluid Dynamics Laboratory of the Cornell University. Experiments were performed in water channels with very small turbulence level and in both arrangements the vertical cantilever was clamped just above the water surface. Despite the distinct measurements techniques and different laboratory facilities, results compared quite well, not only in terms of amplitude response as a function of reduced velocity, but particularly in terms of frequency response ratio which exhibits an interesting double frequency, coupling in-flow with cross-flow vibrations. Besides the expected similarity with the preliminary rigid cylinder results, experiments at UofM also showed the existence of a stable secondary upper branch at higher reduced velocities. Such an upper branch starts at reduced velocity $V_r \approx 12$ and extends up to 20, showing a combined oscillation in the in-flow direction twice as fast as the transversal one.

All these subjects are, in essence, the motivation to work on a new experimental arrangement. This new arrangement should be simpler, however, in the sense that not a flexible but a rigid rod is meant to be elastically mounted to a two-degree-of-freedom support, with low structural damping. We emphasize that this is a progress report on an on going research project, being pursued at Escola Politécnica. Therefore the text is not conclusive. Instead, by

detailing and analyzing some previously obtained results, in section 2, we build the guidelines for the new experiment program.

Section 3 describes the new apparatus design and section 4 presents a series of structural identification results concerning the device response. Finally, section 5 describes the new experimental planning, to be conducted at IPT laboratory.

2. Previous Experiments with Flexible Cantilevers and Motivation

The above-mentioned similarity with elastically mounted cylinder, obtained during the first row of experiments, is reproduced in Fig. (1), comparing results with Khalak and Williamson's (1997). Both cases present practically the same very low values of mass-damping coefficients, 0.015~0.016, usual for marine applications, for instance. The modal response of the flexible cylinder was determined by strain measurements, at 14 different sections along the span, and then by modal representation, analytically collapsing onto one single curve.

Plotted on the W-R shedding mode diagram, Williamson and Roshko (1988), the loss of hydro-elastic synchronism is quite evident, as the response suddenly drops from an initial-branch regime (2P shedding mode) to a lower-branch one. Also noticeable in the flexible cantilever case is the small cloud of points appearing to the right of the 2P boundary, at very high amplitude values and just after the regular upper-branch peak is reached. Those points correspond to a coupled stream-cross wise vibration excited by a hydro-elastic drag-driven, sub-harmonic resonance.

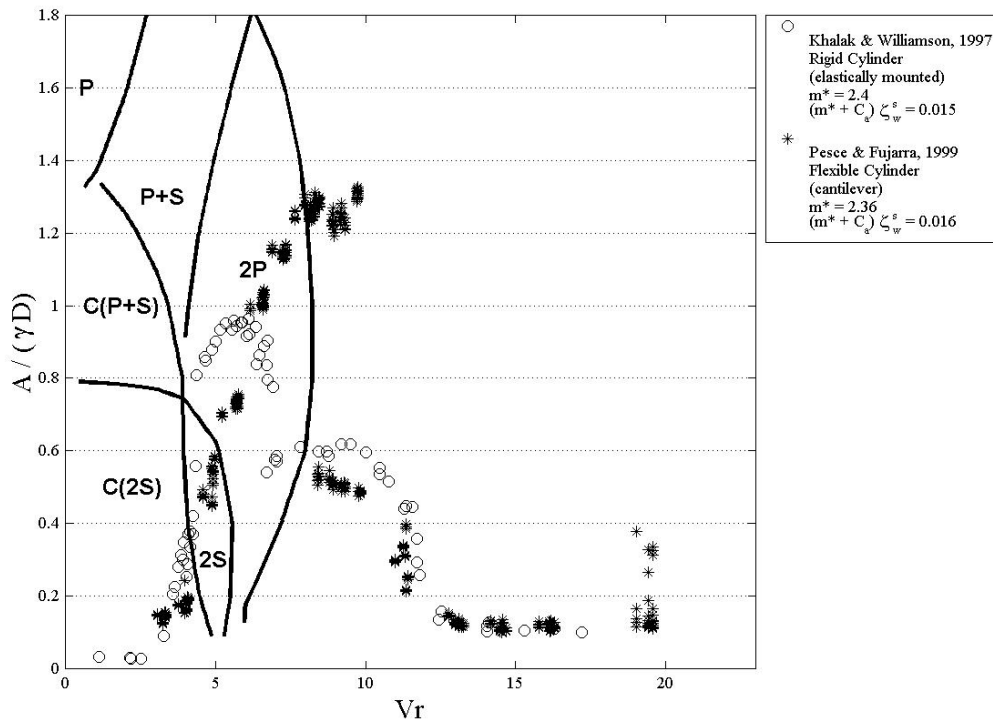


Figure 1. Elastically mounted rigid cylinder amplitude response versus reduced velocity (V_r) compared with the first bending mode response of a long and flexible cylinder. Results, from Khalak & Williamson (1997) and Pesce & Fuarra (2000), are plotted onto W-R shedding mode diagram.

In Fig. (1), we define reduced velocity as

$$V_r = \frac{U}{f_1 D} \quad (1)$$

Where, U is the flow velocity, f_1 is the first eigenvalue and D corresponds to external diameter of the cylinder.

The non-dimensional amplitude (\tilde{A}) is defined as,

$$\tilde{A} = \frac{A}{\gamma D} \quad (2)$$

A is the amplitude response and the modal factor parameter gamma, as defined in Griffin et al. (1975), takes the value $\gamma=1.0$ for the rigid cylinder and $\gamma=1.305$ for the first bending mode of a flexible cantilever.

In this first flexible cantilever case, the cylinder was structurally symmetric, so natural frequencies in the stream or cross-wise directions were almost coincident. We then expected the same sort of auto-sustained sub-harmonic

oscillation would turn to be more evident for a structurally non-symmetric cantilever, giving rise to a new model and to a second row of experiments.

Figure (2) shows results corresponding to the second row of experiments, carried out at the Marine Hydrodynamics Laboratory, UofM, by means of strain measurements on May 28th and June 01st, 1999; Fajarra et al (2001). The reduced velocity was calculated on the basis of the first lateral bending eigenmode and the tip amplitude was obtained after a spectral analysis. Measured natural frequencies are 1.62 Hz for the first lateral eigenmode and 9.52 Hz for the second one. As similarity analysis would indicate, the second eigenmode lock-in range would correspond to the interval $V_r^{(2)} = (4.0;12)$ or $V_r^{(1)} = (18;54)$, if given in terms of the first eigenmode reduced velocity range.

Results given in Fig. (2) show the overall trend for the first eigenmode. A total of 207 points were plotted and a maximum normalized amplitude of circa 1.0 was obtained, irrespective the clearance condition (near or far with respect to the bottom) and the channel velocity regime (increasing or decreasing). Nevertheless, in the range $V_r^{(1)} = (12;14)$, we clearly see some differences, concerning the clearance condition. The largest clearance (Far) leads to smaller amplitude values, possibly indicating that span wise correlation is lost before, because 2D-vortex pattern is weaker in this case. Wherever span wise correlation is stronger, amplitude response is seen to be quite independent on clearance.

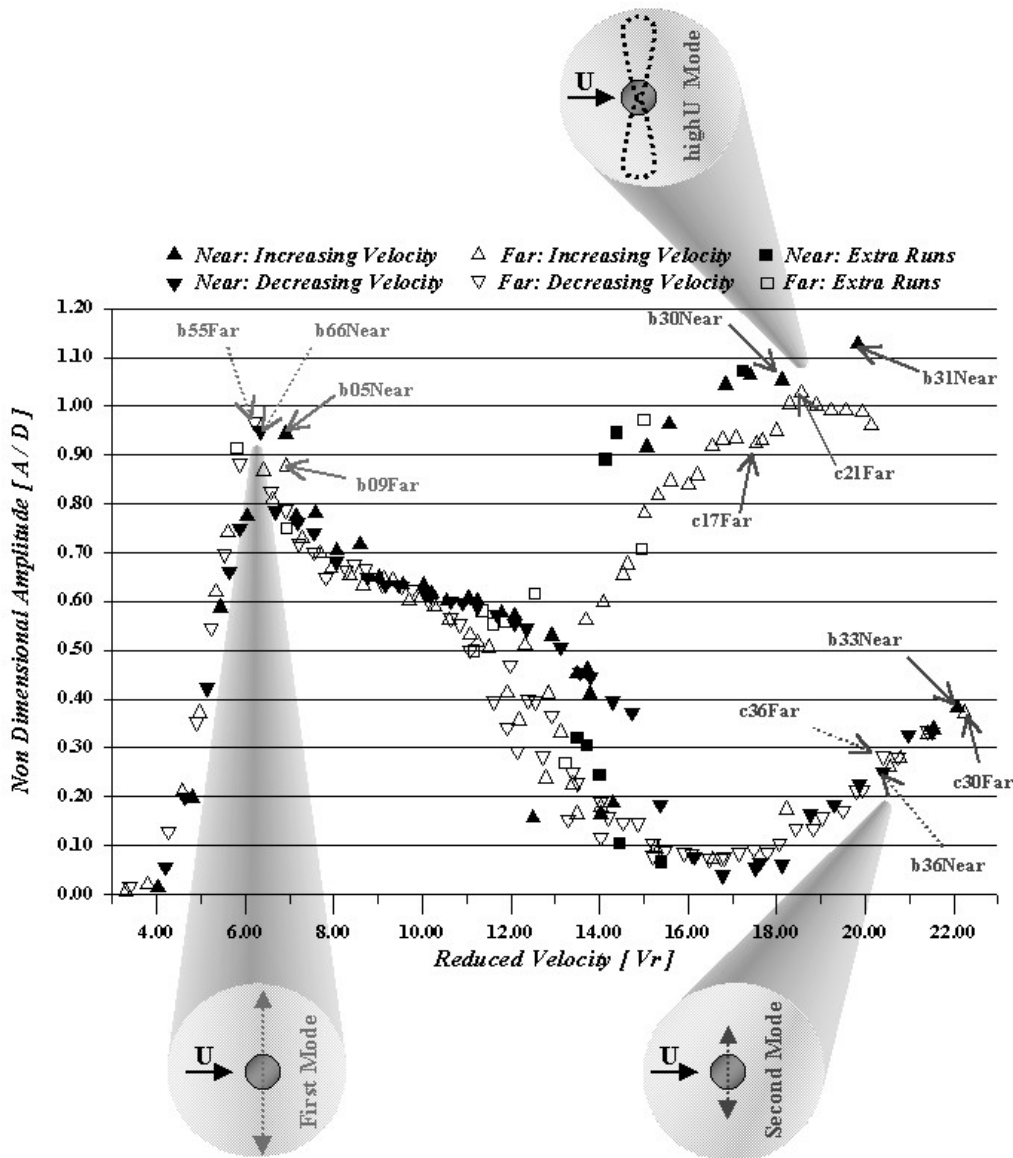


Figure 2. Tip Amplitude Response of the Flexible Cantilever from strain measurements at UofM. $m^* = 1.36; m^* \zeta = 0.11; (m^* + C_a) \zeta = 0.18$. Reduced velocity calculated on the basis of first lateral natural frequency.

As can be seen from Fig. (3), there is a bifurcation¹ in the dominant frequency path at $V_r^{(1)} \cong 12$, which ends at $V_r^{(1)} \cong 20$. In fact, one of the most intriguing results refers to a high-reduced velocity branch that showed up for $V_r^{(1)} \geq 12$, i.e., outside the first eigenmode lock-in range. Contrary to the whole main branch where mainly lateral oscillations were observed, the high-reduced velocity upper branch response has shown a composed vibration in both principal flexural planes, a sub-harmonic resonance, as anticipated and expected. Accordingly, the typical frequency of oscillation in the in-flow direction is twice as fast as the cross one.

The path followed by the cylinder tip resembles an 8-shaped Lissajou figure, being the cross-flow vibration amplitude around 4 times larger than the in-line one; see Fig. (2). In these experiments, the ratio values between frequencies are close to integers or rational numbers when drag-driven sub harmonic excitation is then likely to occur. We point out that, in those experiments, (in Hz):

$$\frac{f_{1w}^{stream}}{f_{1w}^{cross}} \cong \frac{6.61}{1.62} = 4.08 \cong 4, \quad \frac{f_{2w}^{cross}}{f_{1w}^{stream}} \cong \frac{9.52}{6.61} = 1.44 \cong \frac{3}{2} \quad \text{and} \quad \frac{f_{2w}^{cross}}{f_{1w}^{cross}} \cong \frac{9.52}{1.62} = 5.91 \cong 6.$$

A recent multiple-scale analysis, see Kim and Perkins (2000), on a four-degrees-of-freedom, phenomenological and non-linear oscillator model, coupling stream and cross wise vibrations with drag and lift oscillations, also led to 8-shaped figures for a suspended cable. Experiments with tethered spheres in wind tunnel have shown 8-shaped auto-sustained vibrations, according to Jauvtis et al. 2000.

In the cantilever case it is not yet clear if the large amplitude responses at high-reduced velocities are due to a drag driven structural sub harmonic resonance, due to the end-cell vortex effect, or either to both.

Once excited, this new response branch is stable, resisting quite well to gradual increases or decreases in the channel velocity. Though stable, it must be triggered by a perturbation applied to the structure, at the clamp, as an impulse in the in-flow direction. An upstream fluid dynamic perturbation also leads to the switch, from the main to the 8-shaped vibration branch. As it should be expected, there is a threshold perturbation value to be applied in order to make the response to switch. For the Far condition we also observed that the 8-shaped vibration branch ends at $V_r^{(1)} \approx 12$ and 20, with a small jump at the lower bifurcation point and with a very large jump at the higher one.

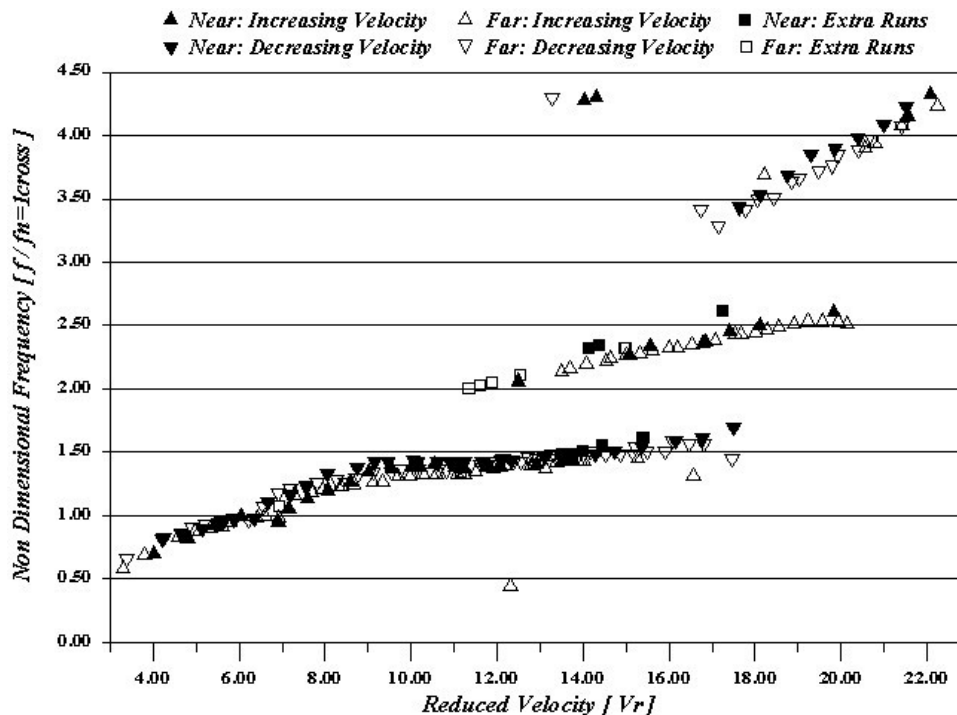


Figure 3. Dominant Response Frequencies of the Flexible Cantilever from strain measurements at UofM. $m^* = 1.36; m^* \zeta = 0.11; (m^* + C_a) \zeta = 0.18$. Reduced velocity calculated on the basis of first lateral natural frequency.

Some qualitative experiments have also shown that the 8-shaped vibration branch can be totally extinguished hydro-dynamically, destroying the synchronized flow pattern, by introducing a long and sharp-edged flat body (like a

¹ Not to be confused with another third dominant frequency branch, which starts at $V_r^{(1)} \cong 18$, at the same value where the amplitude response curve starts increasing again (compare Fig. (2) and (3)). This other branch corresponds to the excitation of the second lateral flexural mode.

steel rule, for example) circa 10 diameters up-stream the flexible cylinder. The oscillation then switches back from the 8-shaped to the main branch.

As already mentioned all these points are, in essence, the motivation to work on a new experimental arrangement. This new arrangement should be simpler, however, in the sense that not a flexible but a rigid rod could be elastically mounted in a low structural damped two-degree-of-freedom support, but without prevailing coupled sub-harmonic resonance to appear.

3. The new experimental apparatus

Some premises were considered in the new experimental set-up design:

- (i) Any interference caused by sensors on the V.I.V. phenomenon should be avoided. As IPT laboratory, at USP Campus, is not yet equipped with LDV or PIV instruments, a strain gage based apparatus, as those adopted in the first two rows of experiments, is an adequate choice.
- (ii) Mass-damping parameter ($m*\zeta$) has fundamental importance on the lock-in range, Govardhan & Williamson (1999). To guarantee a comparison base between all previous results, an arrangement was sought with low values of mass ratio (m^*) and damping ratio (ζ).
- (iii) The arrangement should be capable to provide control on the stiffness parameters and, therefore, on the frequencies corresponding to each oscillation plan, configurations varying from a quasi-symmetry $f_{ny}/f_{nx} \approx 1$ to a considerable structural asymmetry $f_{ny}/f_{nx} \approx 2,3,\dots$
- (iv) It is important the design fits towing tank dimensions (length 180m, width 6m and depth 4m) and velocity range ($U_{\min} = 0,15\text{m/s} \leq U \leq 2,50\text{m/s} = U_{\max}$), considering VIV excitation
- (v) The structural design has to be free of damages caused by, bending and torsion and buckling.

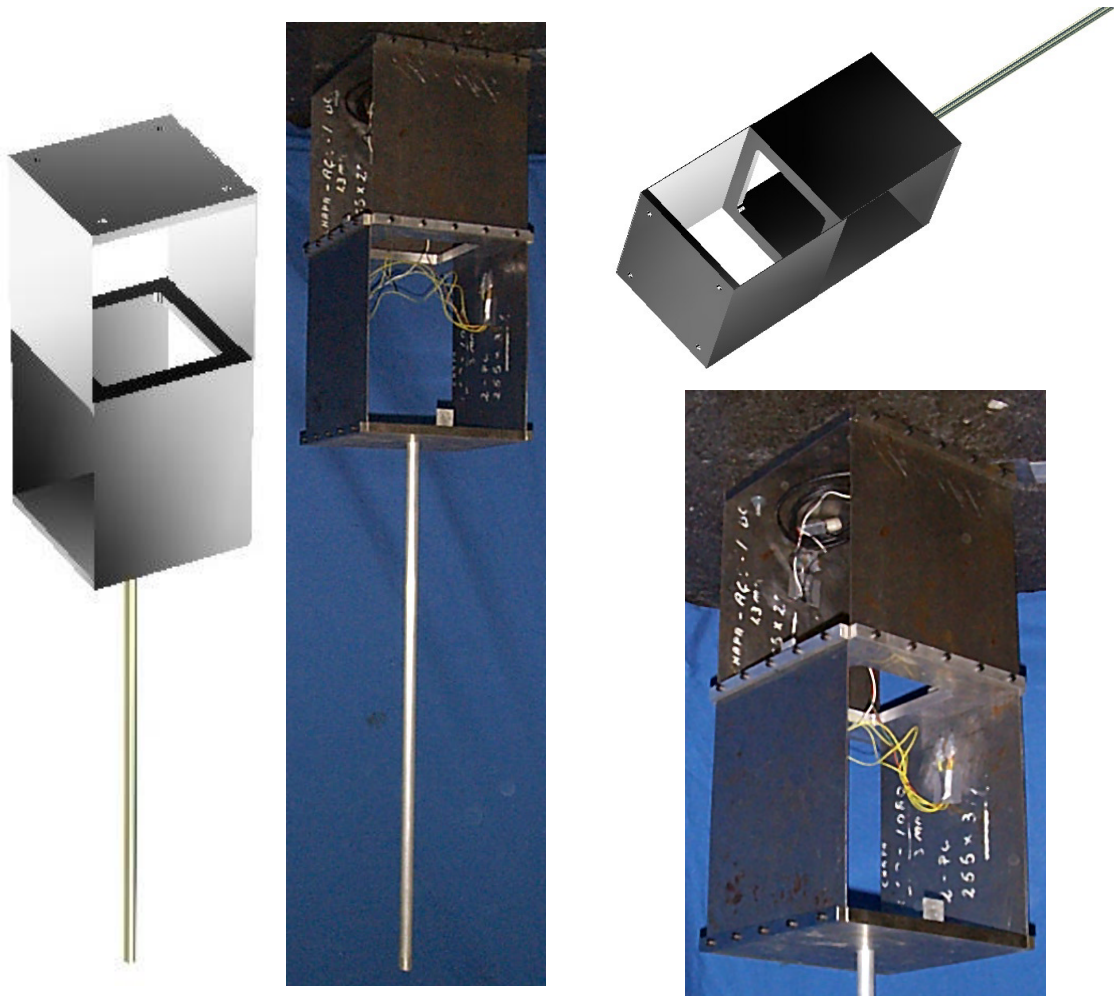


Figure 4. Two degrees-of-freedom, low structural damping, elastic support.

Table 1. Materials and respective properties used in the experimental arrangement.

Leaf springs	SAE 1080
Flexural Strength (MPa)	585
Flexural Modulus (GPa)	210
Density (kg/m ³)	7800
Upper and Lower Plates	SAE 1020
Density (kg/m ³)	7800
Medium Plate	Aluminum
Density (kg/m ³)	2700
Cylinder	Aluminum
Flexural Modulus (GPa)	70
Density (kg/m ³)	2700
Length	Variable

Table 2. . Experimental Arrangement Main Dimensions.

Upper Leaf Springs	
Quantity	02
Width (mm)	250
Height (mm)	250
Thickness (mm)	1.3
Lower Leaf Springs	
Quantity	02
Width (mm)	250
Height (mm)	275
Thickness (mm)	1.3
Plates	
Quantity	03
Width (mm)	250
Height (mm)	250
Thickness (mm)	15
Cylinder	
Quantity	01
External Diameter (mm)	38.10
Thickness (mm)	1.6

Fig. (4) shows some views of the new experimental arrangement (schematic and as built). It is a two-degrees-of-freedom device composed by two elastic supports, constructed with leaf springs whose respective rigidities can be set up; accordingly. The leaf springs are rigidly assembled to two rigid horizontal plates. The upper leaf springs will correspond to cross-flow vibrations, driven by lift forces, and the lower ones to drag-driven in-flow oscillations. Each leaf spring is instrumented with strain-gages, such that the elastic support is also a displacement sensor. It can be transformed into a force sensor, as well, by installing a pair of 2D accelerometers, fixed to each rigid horizontal plate. Tab. (1) presents material properties and Tab. (2) main dimensions.

The cylinder is rigid enough compared to the leaf springs. Nevertheless, a flexible cylinder can be clamped to this experimental device, in order to further investigating multi-modal Vortex-Induced Vibrations.

4. Preliminary experimental analysis on structural parameters, performed in air

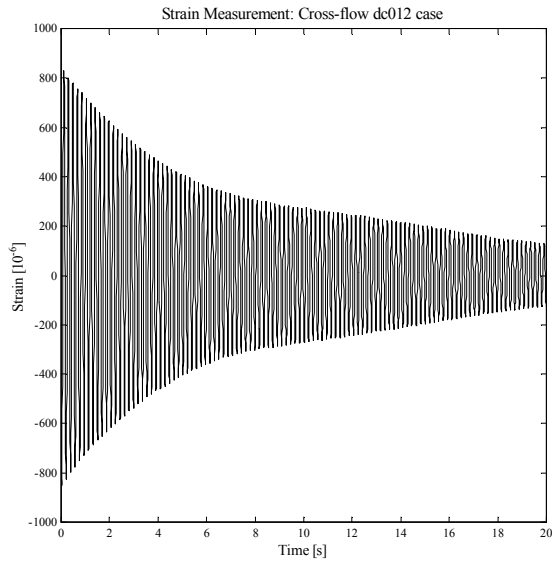
The device is not only an elastic support but also a force/displacement sensor. The complete experimental characterization of this device, as built, is mandatory and must be conducted before any experiment or analysis is run. Not only static calibration should be done: structural dynamic parameters must be measured, accordingly. A complete set of experiments has been planned in order to deal with this important task. Such a plan, to be conducted "in air" and "in water", comprises from simple static calibration procedures, where force vs. strain curves are plotted, simple decaying tests, from which some information on eigen-frequencies and damping can be obtained, to dynamic parameter identification experiments, using more sophisticated techniques, based on estimation theory. From these latter experiments mass, damping and rigidity matrices will be measured.

Up to this date only the tests in air have been performed. This section presents some experimental results extracted from this first round of experiments, presented in Tab. (3). Note that structural damping is extremely low.

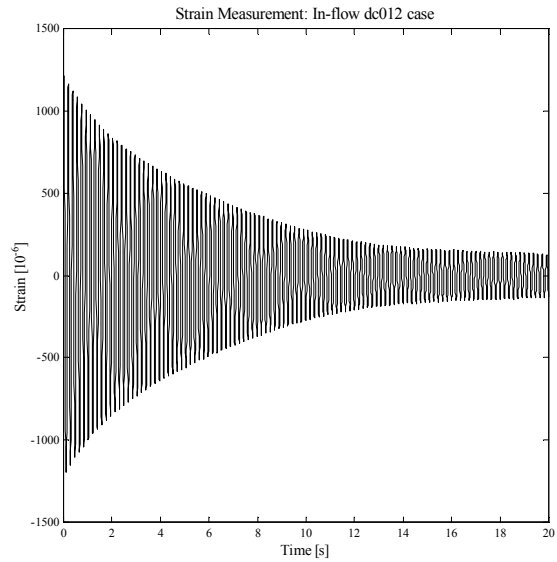
Table 3. Mean Results on eigen-frequencies and damping. Tests "in air". Cylinder length: 1.14m.

Upper Base: cross-flow	
1 st cross-flow eigenvalue in air (Hz)	5.40
1 st cross-flow eigenmode, structural damping coefficient in air (%)	0.269
Lower Base: in-flow	
1 st in-flow eigenvalue in air (Hz)	5.50
1 st in-flow eigenmode, structural damping coefficient in air (%)	0.285

Decaying time histories were sampled, according to the application of different excitations and always guaranteeing oscillation whose amplitudes are comparable with those expected for the V.I.V. phenomenon. An example is given in Fig. (5).



(a1)

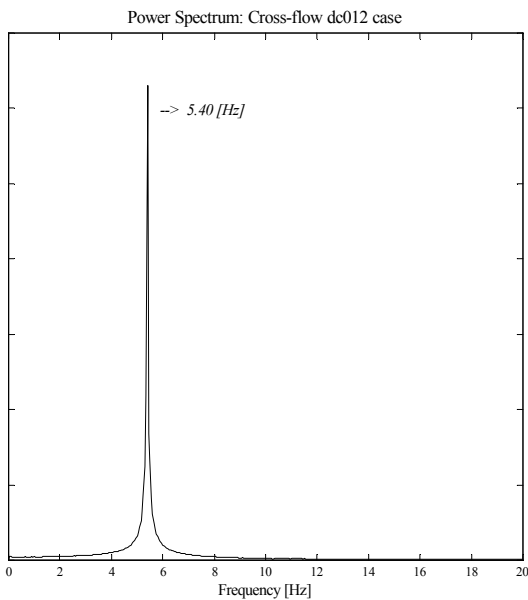


(b1)

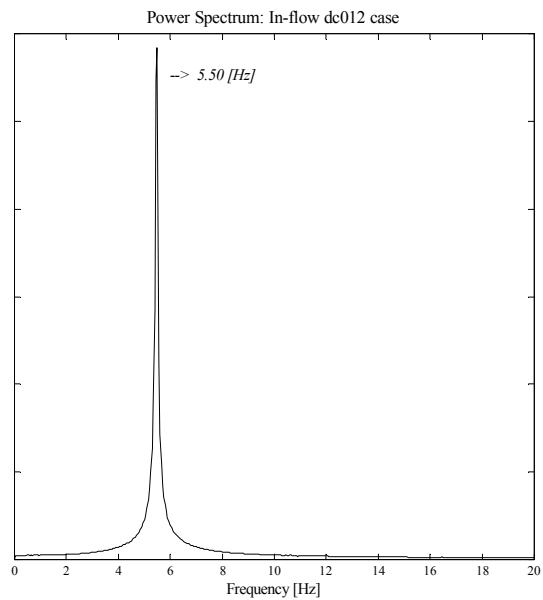
Figure 5. An example of a decaying test "in air". Strain signals: (a) refers to an excitation in the cross-flow ("lift") direction, whilst (b) refers to excitation imposed in the in-flow ("drag") direction.

Cross-talk between in-flow and cross-flow modes have been investigated, showing very small values, as well as induced torsion, which remains below 0.4 degrees. These are important features of the apparatus for this investigation, as we focus hydro-elastic coupling of hydrodynamic nature.

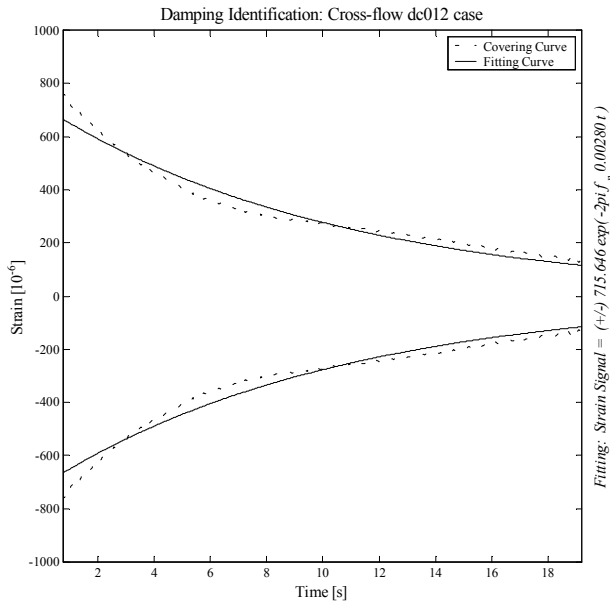
The first two natural frequencies were obtained from signals power spectra, after a low-pass filtering (cut frequency: 100 Hz). (see example in Fig. (6)). Damping ratios were obtained through a usual Hilbert Transform technique.



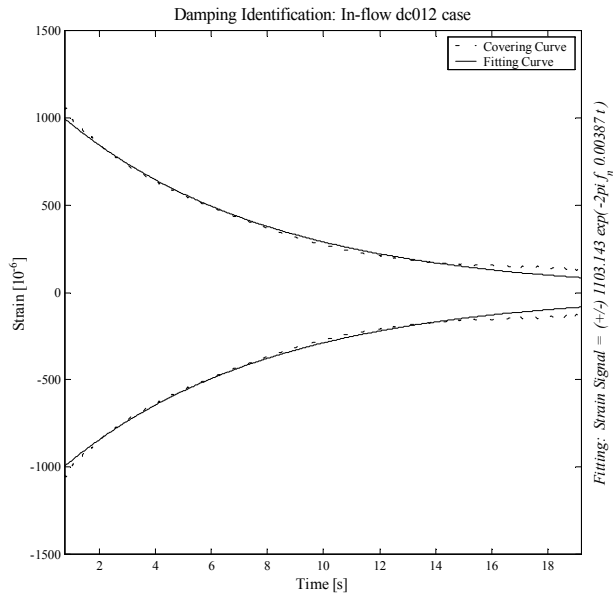
(a2)



(b2)



(a3)



(b3)

Figure 6. An example of a decaying test "in air". Strain power spectra and corresponding Hilbert Transforms ("covering curves"): (a) refers to an excitation in the cross-flow ("lift") direction, whilst (b) refers to excitation imposed in the inflow ("drag") direction.

Table 4. Experimental planning.

Sequence	EXPERIMENTS		Sequence	EXPERIMENTS	
1	Decaying Tests with non-null velocities ($U \neq 0$). Added Mass and Damping Coefficient measurements, in real wake.				
2		VIV's: just with cross-flow degree of freedom. Increasing Velocities.	3		VIV's: just with cross-flow degree of freedom. Decreasing Velocities.
4		VIV's: just with in-flow degree of freedom. Increasing Velocities.	5		VIV's: just with in-flow degree of freedom. Decreasing Velocities.
6		VIV's: Both degrees of freedom. Increasing Velocities. K_x and $K_y \Rightarrow f_{n_x} \cong f_{n_y}$	7		VIV's: Both degrees of freedom. Decreasing Velocities. K_x and $K_y \Rightarrow f_{n_x} \cong f_{n_y}$
8		VIV's: Both degrees of freedom. Increasing Velocities. K_x and $K_y \Rightarrow f_{n_x} \neq f_{n_y}$	9		VIV's: Both degrees of freedom. Decreasing Velocities. K_x and $K_y \Rightarrow f_{n_x} \neq f_{n_y}$

5. The new experimental planning

Tab. (4) presents the experiments planned to be conducted at the S. Paulo State Technological Research Institute (IPT). The towing tank is 180m long, 6m wide and 4m deep, velocities ranging from 0 to 4.0 m/s.

Row experiment number 1 is meant to measure actual added mass and damping coefficients, as affected by the wake.

Row experiments from number 2 to 5 are one-degree of freedom runs, meant to analyze fundamental aspects and to recover former results, thus giving confidence to the whole set of runs.

Row experiments from number 6 to 9 are two-degree of freedom runs, meant to going further into the research on sub-harmonic resonance between in-flow and cross-flow oscillations.

Details on the new experiments and results will be presented orally at the conference.

Fluid flow velocities will be imposed such to cover the whole lock-in range ($4 \leq V_r \leq 15$), considering the first cross-flow eigenmode.

6. Conclusions and perspectives

We emphasize, once again, that this is a progress report on an on-going research project, presently pursued at Escola Politécnica and IPT. The text is not conclusive, therefore. Nevertheless, by detailing analysis on some previously obtained results, we built the guidelines for a new experiment program and the design of a new experimental apparatus. This paper described such an apparatus, built to pursue VIV research on cylindrical cantilevers with low values of the mass-damping parameter. Such a device works as a two-degree-of-freedom elastic support, enabling forces and displacements to be measured accordingly. The ultimate goal is to study, experimentally, drag-driven coupled sub-harmonic resonance, which appears on most cases where the cylinder is free to oscillate, stream and cross wise to the main flow. In such cases, a large amplitude secondary branch of response has been observed, in a range of high-reduced velocities, outside the primary lock-in synchronization.

Though only some results have been presented, a full set of static and dynamic parameter identification procedures has been conducted to characterize the experimental apparatus before any VIV experiment is accomplished. Such results show that the apparatus comply with design premises, particularly those related to eigen-frequencies, low cross-talking qualities and low structural damping. A new VIV experiment planning has also been presented.

Acknowledgements

We are indebted to FAPESP, the State of São Paulo Research Foundation, for the financial support, through graduate/undergraduate scholarships (processes no. 98/00271-2 and no. 00/12263-6, first and second author respectively) within a Research Project Grant on VIV (process no. 94/03528-3). Third author acknowledges a CNPq Research Grant, no. 304062-85. We thank Escola Politécnica/USP, for the use of laboratory facilities and all the Dept. of Naval and Ocean Engineering technical staff for the experimental support, particularly to ME João Alcino A. Martins, Carlos A. G. F. de Souza and Marlei S. de Araujo. We also thank Professors Michael Bernitsas and Marc Perlin, from the Hydrodynamic Lab of the Naval Arch. and Marine Eng. Dept, at University of Michigan, where the second row of experiments were conducted during our stay in 1999, to Professor Charles Williamson, Fluid Dynamics Lab, Cornell University, for collaborating with our research and to Dr. Julio Meneghini, Escola Politécnica, Dept. of Mechanical Engineering, for enlightening discussions.

7. References

- Fox, T.A., West, G.S., 1993, "Fluid-Induced Loading of a Cantilevered Circular Cylinders in a Low-turbulence Uniform Flow. Part 2: Fluctuating Loads on a Cantilever of Aspect ratio 30", *Journal of Fluids and Structures*, Vol.7, pp. 15-28.
- Fujarra, A.L.C., 1997, "Experimental Studies with a Smooth and Long Flexible Circular Cylinder Subjected to Vortex Induced Vibrations in Water", MSc Dissertation, (in portuguese), Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of São Paulo, São Paulo, Brazil.
- Fujarra, A.L.C. & Pesce, C.P. "Some Remarks on Vortex-Induced Vibrations of Flexible Cylinders", *Workshop on Vortex Induced Vibrations of Offshore Structures, WVIVOS'2000*, S. Paulo, Aug 13-16, 2000. Book of Extended Abstracts, Escola Politécnica USP, 59-61.
- Fujarra, A.L.C., Pesce, C.P., Flemming, F. Williamson, C.H.K. "Vortex-Induced Vibrations of a Flexible Cantilever", *J of Fluids and Structures*. Vol. 15, No. 3/4, Apr 2001, pp. 651-658 (doi: 10.1006/jfls.2000.0368).
- Griffin, O. M., Skop, R. A. and Ramberg, S. E. 1975, "The Resonant Vortex-excited Vibrations of Structures and Cable Systems", In 7th Offshore Technology Conference - OTC Paper 2319, Houston, Texas, USA.
- Hover, F. S., Techet, A. H. and Triantafyllou, M. S., 1998, "Forces on Oscillating Uniform and Tapered Cylinders in Crossflow", *Journal of Fluid Mecanics*, Vol. 363, pp 97-114.
- Jauvtis, N., Govardhan, R. and Williamson, C. H. K., 2000, "Vortex-Induced Vibrations of a Sphere". Iutam Symposium on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations - BBVIV2, Marseilles, France, 13-16 June.
- Khalak, A. and Williamson, C.H.K., 1997, "Investigation of Relative Effects Mass and Damping in Vortex-induced Vibrations of a Circular Cylinder", *Journal of Wind Engineering and Ind. Aerodynamics*, 69-71, pp. 341-350.
- Khalak, A. and Williamson, C.H.K., 1999, "Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping", *Journal of Fluids and Structures*, Vol.13, pp. 813-851.
- Kim, W. J. and Perkins, N. C., 2000, "Coupled Cross-flow and In-line Vortex-Induced Vibrations of Cables Suspensions", *Proceedings of the 10th Int. Offshore and Polar Engineering Conference*, Seattle, USA, May 28 - June 2, Vol. III, 486-492.

- Kitagawa, T., Wakahara, T., Fujino Y. and Kimura, K., 1997, "An Experimental Study on Vortex-Induced Vibration of a Circular Cylinder Tower at a High Wind Speed", *Journal of Wind Engineering and Ind. Aerodynamics*, 69-71, pp. 731-744.
- Pesce, C.P. and Fajarra, A.L.C., 2000, "Vortex-induced vibrations and jumping phenomenon: An experimental investigation with a clamped flexible cylinder in water", *Int. Journal of Offshore and Polar Engineering*, Vol.10 (1), pp. 26-33.
- Pesce, C.P., Fajarra, A.L.C., Flemming, F. and Williamson, C.H.K., 2000, "Vortex-induced vibrations of a flexible cantilever", *Iutam Symposium on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations, BBVIV2, Marseilles, France*, pp. 13-16.
- Techet, A. H., Hover, F. S. and Triantafyllou, M. S., 1998, "Vortical Patterns Behind a Tapered Cylinder Oscillating Transversely to a Uniform Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 363, pp 79-96.
- Williamson, C.H.K and Roshko, A., 1988, "Vortex Formation in the Wake of an Oscillating Cylinder". *Journal of Fluid Structures*, Vol.2, pp. 355-381.

DISTRIBUIÇÃO DE VAZÃO NO NÚCLEO DO REATOR DE PESQUISAS IEA-R1

Walmir Maximo Torres

Pedro Ernesto Umbehaum

Benedito Dias Baptista Filho

José Carlos de Almeida

José Antônio Batista Souza

Davilson Gomes da Silva

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares – IPEN
Travessa R, 400 – Cidade Universitária
CEP. 05508-900 – São Paulo, SP, Brasil
e-mail: wmtorres@net.ipen.br

Resumo. Foi desenvolvido um modelo físico (DMPV-01) do elemento combustível (EC) com instrumentos para verificar a distribuição de vazão no núcleo do reator nuclear de pesquisas IEA-R1 do IPEN-CNEN/SP. O modelo DMPV-01 foi construído em alumínio e possui tomadas de pressão estática na região de entrada e no bocal de saída, e de pressão dinâmica no bocal de saída. Ele foi instalado na Bancada de Aferição de Vazão (BAV) do Laboratório de Termo-Hidráulica do IPEN-CNEN/SP onde foi obtida uma curva de calibração que relaciona a vazão com a queda de pressão. As medidas da pressão dinâmica e da pressão estática no bocal de saída permitem obter a velocidade de escoamento no centro do bocal, servindo como uma medida adicional para a confirmação da vazão. O DMPV-01 foi utilizado para medir a vazão em 4 posições do núcleo do reator IEA-R1. Os resultados mostraram que a distribuição de vazão no núcleo é bem uniforme. Contudo, as vazões medidas foram menores que as até então estimadas. Investigações complementares acusaram um desvio no sistema de medida de vazão do reator. Foram também realizadas medidas para verificar a influência que os irradiadores de amostras presentes no núcleo impõem à vazão dos EC's. Os resultados mostraram que alguns irradiadores desviam uma parcela considerável de vazão sendo conveniente seu redimensionamento.

Palavras chave: distribuição de vazão, reatores de pesquisa, análise de segurança de reatores

1. Introdução

A maioria dos reatores nucleares de pesquisa utiliza elementos combustíveis (EC's) de placas planas, tipo MTR (Materials Testing Reactors) em seu núcleo. O reator nuclear de pesquisas IEA-R1 (Fig. 1), em operação no IPEN-CNEN/SP desde 1957, utiliza EC's formados por 18 placas combustíveis fixas em duas placas suportes laterais que fecham o elemento, formando 17 canais de escoamento. Dentro desses canais escoam água desmineralizada do circuito primário que atua como moderador para a reação de fissão nuclear e também remove o calor gerado, transferindo-o para um circuito secundário. A operação segura do reator, que tem como potência térmica máxima 5 MW, depende da garantia que se tem da remoção desse calor. Isso é assegurado mantendo-se margens de segurança adequadas ao resfriamento do núcleo para qualquer situação operacional. Essas margens (DNBR, ONB, temperatura máxima no revestimento, temperatura limite para corrosão do revestimento, etc.) são verificadas no que se chama "análise termo-hidráulica" do núcleo. Para esse tipo de combustível essa análise é relativamente simples, e depende do conhecimento da vazão nos elementos combustíveis, uma vez que não há redistribuição de escoamento entre eles. A vazão entre elementos adjacentes também é importante nessas análises porque é responsável por uma parcela do resfriamento das placas combustíveis laterais. De um modo geral, a vazão nos elementos combustíveis e entre elementos são estimadas com base em relações de áreas de escoamento e de quedas de pressão, medidas ou estimadas com base em correlações da literatura, nas várias regiões de passagem do núcleo, como por ex.: EC's, canais entre EC's, irradiadores de amostras, furos secundários da placa matriz, etc. Essas estimativas são, por vezes, pouco precisas devido às incertezas envolvidas nas correlações utilizadas nos cálculos e na complexidade geométrica. Portanto, a medida da vazão e sua distribuição no núcleo são importantes para uma análise termo-hidráulica com menor grau de incerteza, e consequentemente com maior segurança. O objetivo principal deste trabalho é apresentar as etapas do desenvolvimento e a utilização do modelo físico de um EC com instrumentos, denominado DMPV-01, que permite medir a vazão nos EC's em diversas posições do núcleo do reator IEA-R1. A influência de alguns elementos de irradiação presentes no núcleo na vazão dos demais EC's também foi verificada usando o modelo. Na seção 2 são apresentados alguns dados construtivos e desenhos do DMPV-01, além de informações sobre a sua calibração numa bancada experimental. A seção 3 apresenta as medidas de vazão efetuadas no núcleo do reator IEA-R1 usando o DMPV-01, assim como as condições experimentais em que foram realizadas, além da análise dos resultados obtidos. As principais conclusões do trabalho são apresentadas na seção 4.

2. Desenvolvimento e Calibração do Modelo DMPV-01

O DMPV-01, construído por Lima et al (2000), é um modelo em escala 1:1 do EC. Foi construído totalmente em Al, ou seja, sem combustível nuclear. É idêntico aos demais EC's utilizados no núcleo do IEA-R1. Foram feitas pequenas modificações no projeto original de fabricação de combustíveis para introduzir algumas peças adicionais, necessárias para a fixação dos tubos com as tomadas de pressão estática e dinâmica.

As tomadas de pressão foram feitas com tubos de aço inoxidável de diâmetro $\phi=2,5\text{mm}$ e espessura de parede $e=0,25\text{ mm}$. Esse diâmetro possibilita que o tubo seja conduzido internamente aos canais entre placas, cuja largura média é de 2,89 mm. Devido a esse diâmetro reduzido, esses tubos interferem muito pouco no escoamento. A Fig. (2) mostra detalhes dos tubos com as tomadas de pressão e sua instalação no DMPV-01. As tomadas de pressão estática possuem 2 furos de $\phi=1\text{mm}$ diametralmente opostos. O tubo onde se encontra a tomada de pressão estática P1 tem forma de U para permitir seu posicionamento na região média entre a placa lateral e o pino de sustentação do elemento, com sua extremidade voltada para cima, interferindo o mínimo possível na velocidade de escoamento na região de entrada do modelo. O pino de sustentação teve seu projeto original modificado para permitir remoção e para possibilitar a montagem e desmontagem dos tubos.



Figura 1 - Núcleo do Reator IEA-R1.

Os experimentos para levantamento da curva de calibração do DMPV-01 (Torres, 2001) foram realizados na BAV. As medidas de vazão foram feitas usando uma placa de orifício calibrada (D38), mostrada na Fig. 3. A calibração dessa placa foi feita usando a técnica de reservatório aferido e cronômetro. A queda de pressão na placa de orifício foi medida por transmissor de pressão diferencial calibrado. A Fig. (3) ilustra a BAV adaptada para realizar a calibração da placa de orifício, enquanto que a Fig. (4) mostra a curva ajustada aos dados experimentais e a equação de calibração obtida.

Após a obtenção da curva de calibração da placa D38, a BAV foi modificada para a realização da calibração do DMPV-01. A Fig. (5) mostra, esquematicamente, a montagem da Seção de Testes para Ensaios de Perda de Carga no Núcleo (STEPCN com o DMPV-01), além dos transmissores de pressão diferencial. Nos testes de calibração do

DMPV-01 a vazão no circuito foi proporcionada pela bomba do circuito. A Fig. (6) mostra o esquema de ligação elétrica dos transmissores de pressão diferencial TPD1, TPD2 e TPD3.

A Fig. (7) mostra a curva de calibração obtida a partir destes resultados experimentais. A Fig. (8) apresenta uma comparação entre a velocidade de escoamento no centro do bocal calculada a partir da diferença de pressões dinâmica e estática (tubo de Pitot) e a velocidade média calculada com base na vazão fornecida pela placa de orifício D38. Pode-se observar a boa concordância entre os resultados (~4,5% na faixa de vazão de interesse), habilitando a medida feita com o tubo de Pitot como uma medida redundante de vazão para o DMPV-01 quando este for usado no núcleo do reator IEA-R1 para medir a distribuição de vazão.

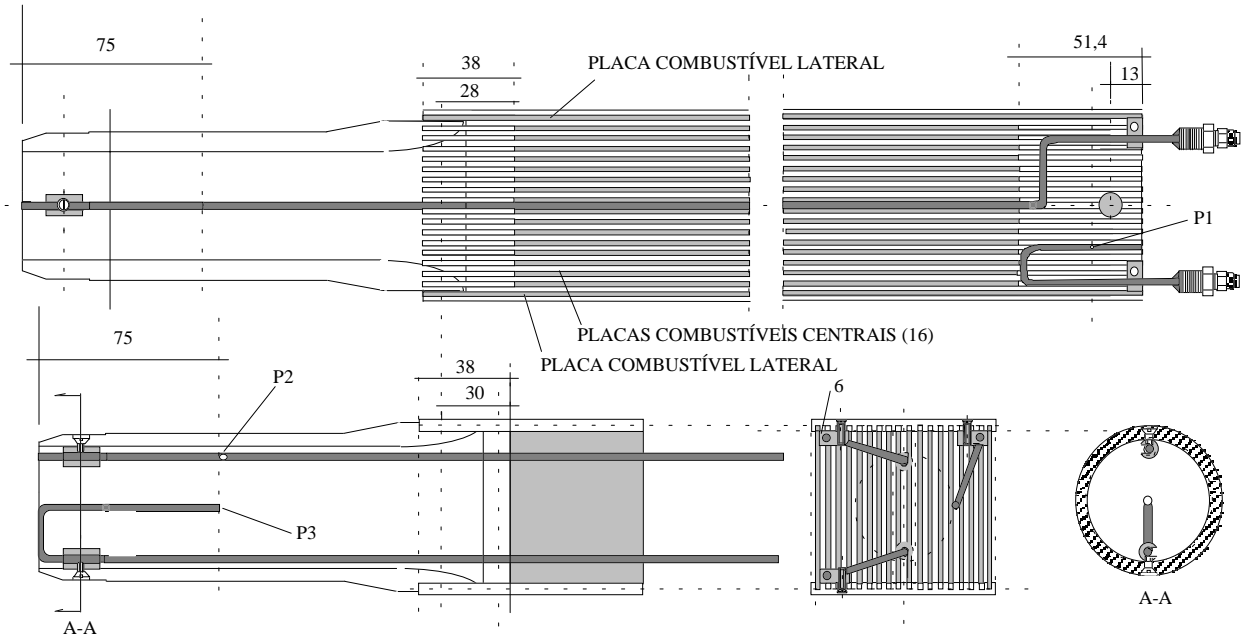


Figura 2 – Desenho simplificado do DMPV-01 com as tomadas de pressão P1, P2 e P3.

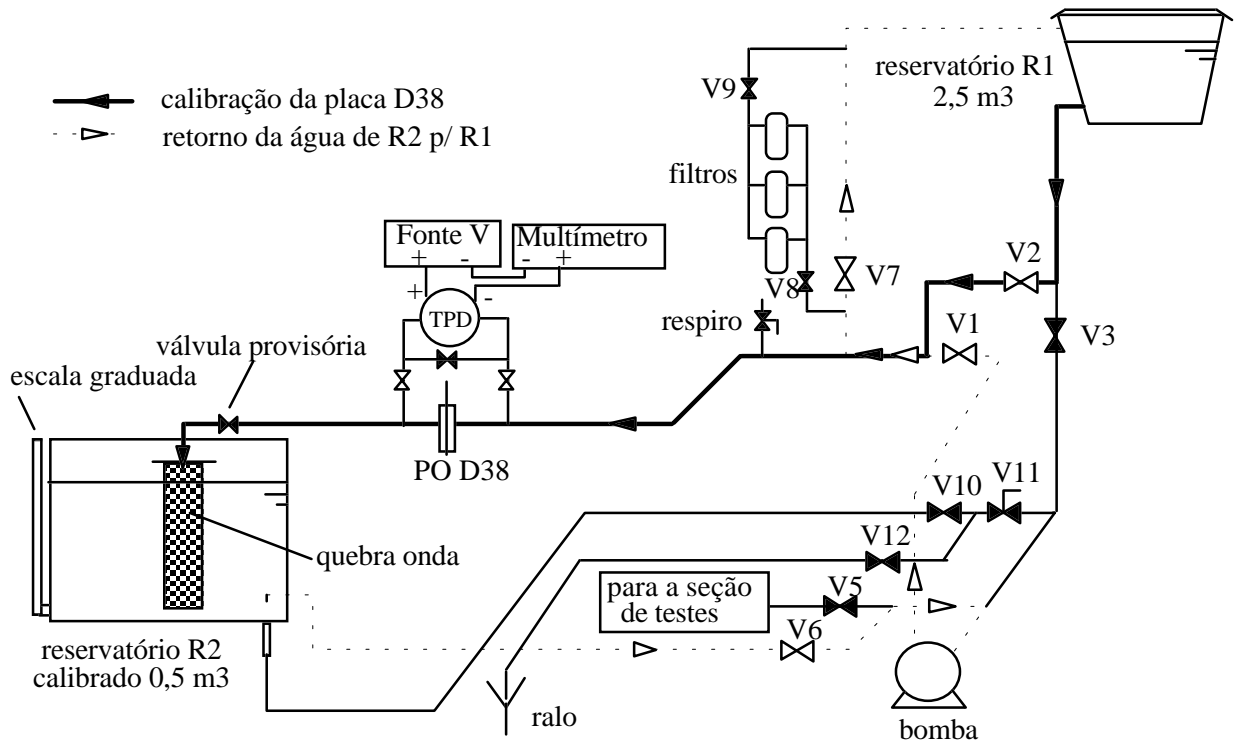


Figura 3 – BAV adaptada para a calibração da placa de orifício D38.

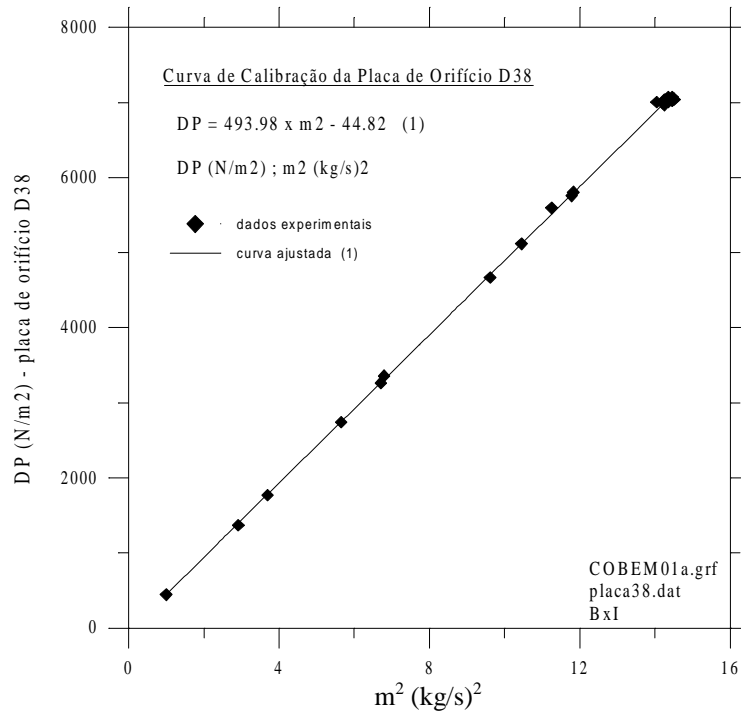


Figura 4 – Curva de calibração da placa de orifício D38.

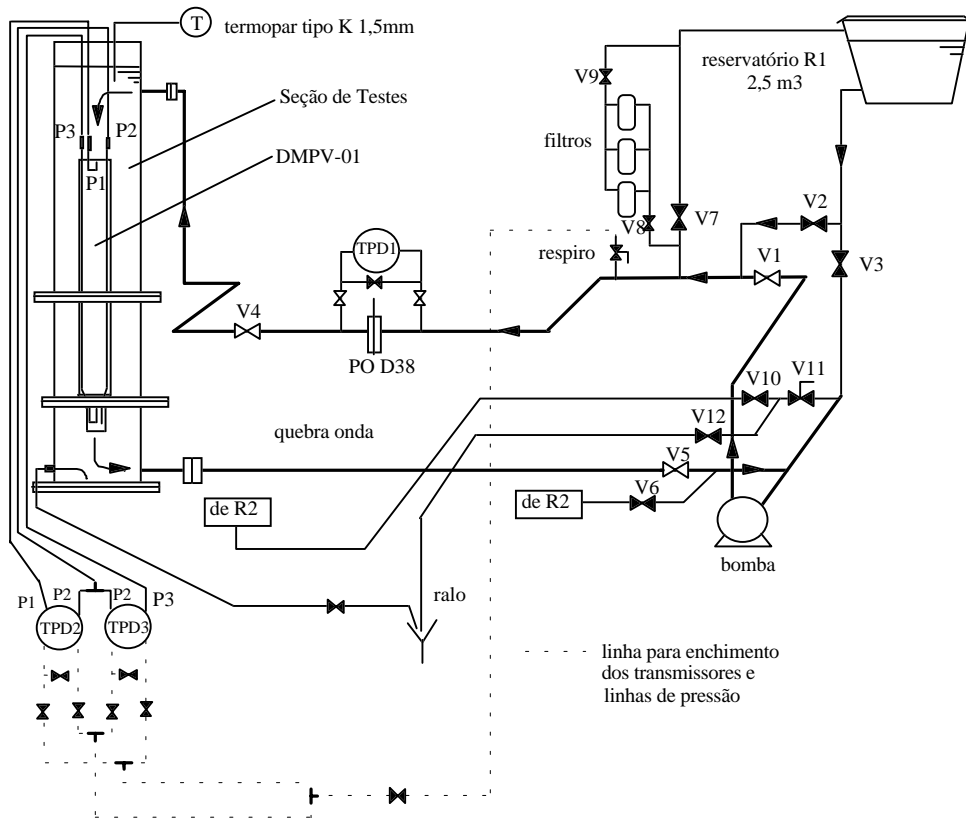


Figura 5 – BAV adaptada para experimentos com DMPV-01.

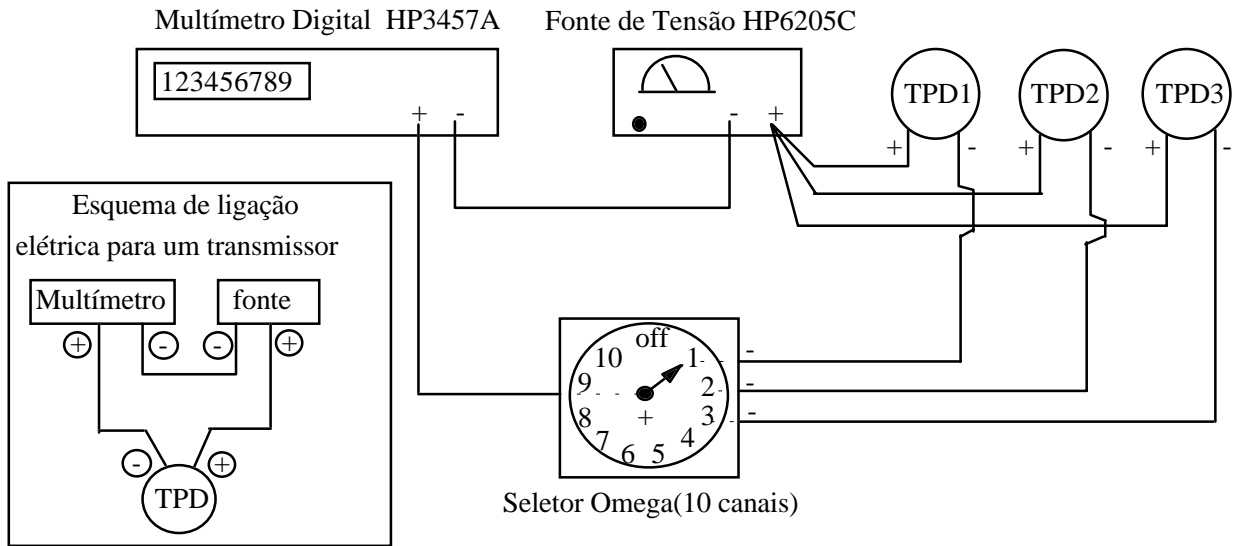


Figura 6 – Esquema de ligação elétrica dos transmissores de pressão diferencial.

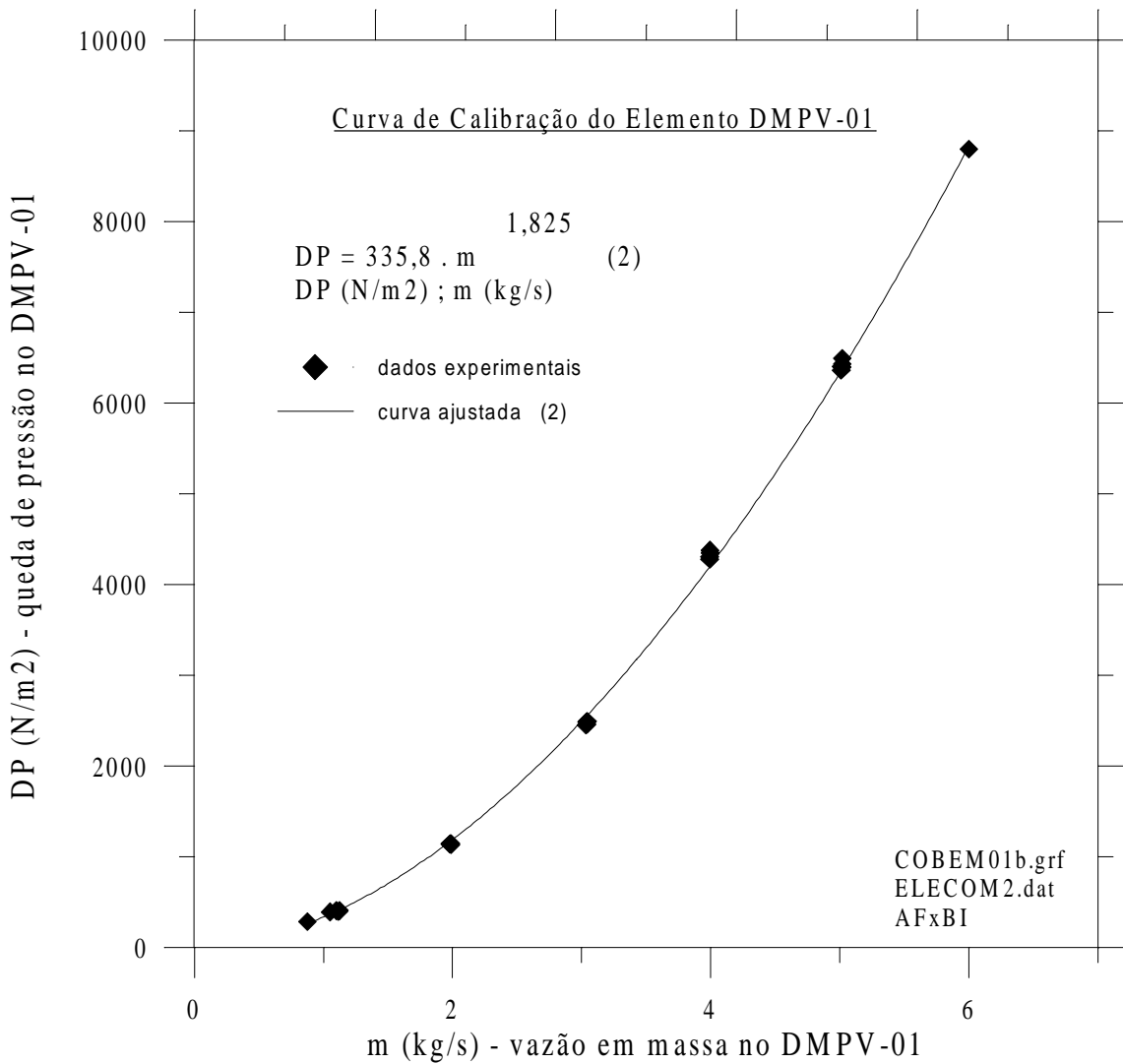


Figura 7 – Curva de calibração do DMPV-01 - DP (N/m²) x mⁿ (kg/s).

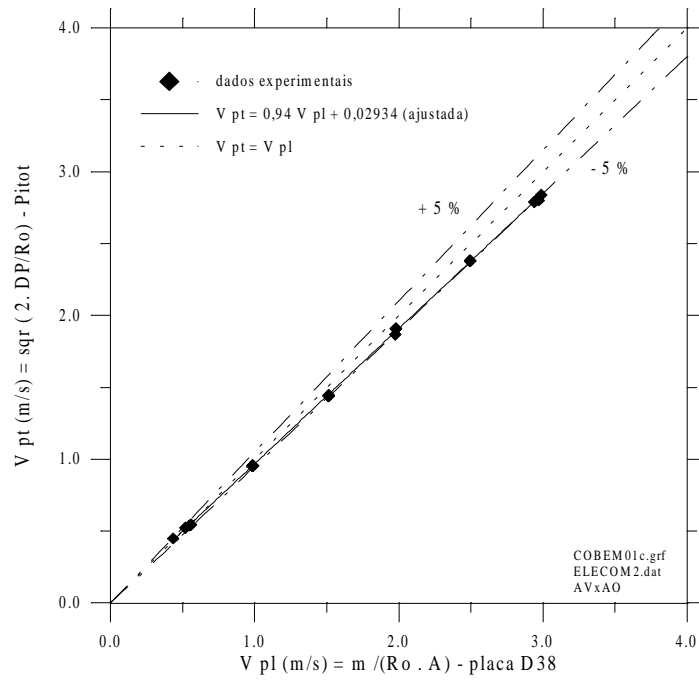


Figura 8 – Velocidade média no bocal do elemento medida pelo Pitot (V_{pt}) versus velocidade no bocal calculada usando a vazão medida pela placa D38 (V_{pl}).

3. Medida de Distribuição de Vazão no Núcleo do IEA-R1 e Análise dos Resultados

A Fig. (9) mostra os diversos componentes do núcleo do reator IEA-R1 (foto da Fig. 1), enquanto que a Fig. (10) apresenta a configuração 210a de operação do núcleo do reator, onde os elementos substituídos pelo DMPV-01 (EC153, EC169, EC170 e EC152), aparecem em destaque. A Fig. (11) ilustra o posicionamento do DMPV-01 no núcleo e as linhas de pressão, encaminhadas até a superfície da piscina, onde são ligadas a transmissores de pressão diferencial.

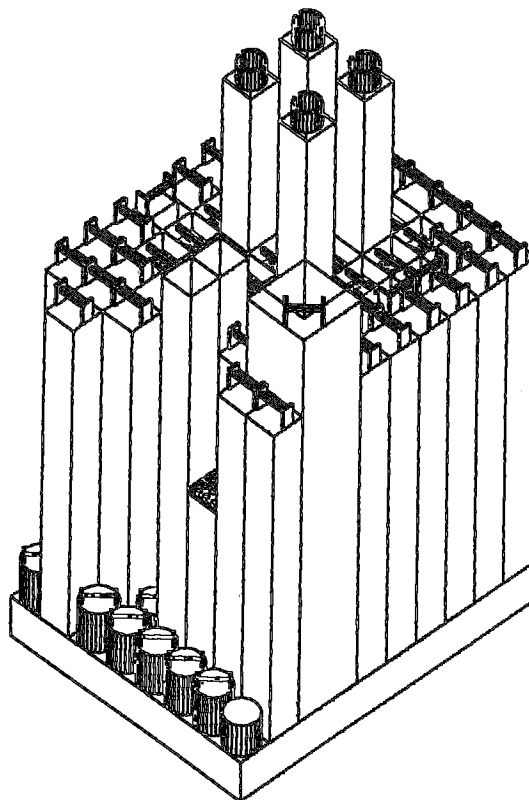


Figura 9 – Desenho em perspectiva do núcleo do reator IEA-R1 com seus vários componentes.

ΔP	T.D	T.D	T.D	T.D	T.D	T.D	T.S
T.S	T.S	T.S	T.S	T.S	T.S	T.S	LIN
R	T.S	R	EIRA	R	R	R	R
EIS	EIS	R	EIRA	R	GI	R	CF
EIS	EIS	EC 153	EC 168	EC 156	EC 160	EC 150	R
R	EIGRA I	EC 158	ECT 166	EC 169	ECT 180	EC 171	EIF
R	R	EC 164	EC 161	EIBE	EC 162	EC 163	R
R	EIGRA II	EC 159	ECT 179	EC 170	ECT 167	EC 154	R
S2	R	EC 152	EC 155	EC 157	EC 165	EC 151	S3
R	R	R	R	R	R	R	R

LEGENDA

ΔP = Medida de queda Pressão no núcleo
T.D. = tampão duplo ou plugue duplo
T.S. = tampão simples ou plugue simples
LIN = canal linear de medida de potência
R = refletor de grafite
EIRA = elemento de irrad. resfriado a água
CF = câmara de fissão
EIS = elemento de irradiação de Silício
EIGRA = elemento de irradiação de grafite
S2 e S3 = detectores de neutrons
EC = elemento combustível
ECT = elemento combustível de controle
EIBE = elemento de irradiação em Berílio
GI = guia de irradiação
EIF = elemento de irradiação de fios

Figura 10 – Configuração 210a de operação do núcleo do reator IEA-R1; DMPV-01 nas posições 153, 169, 170 e 152

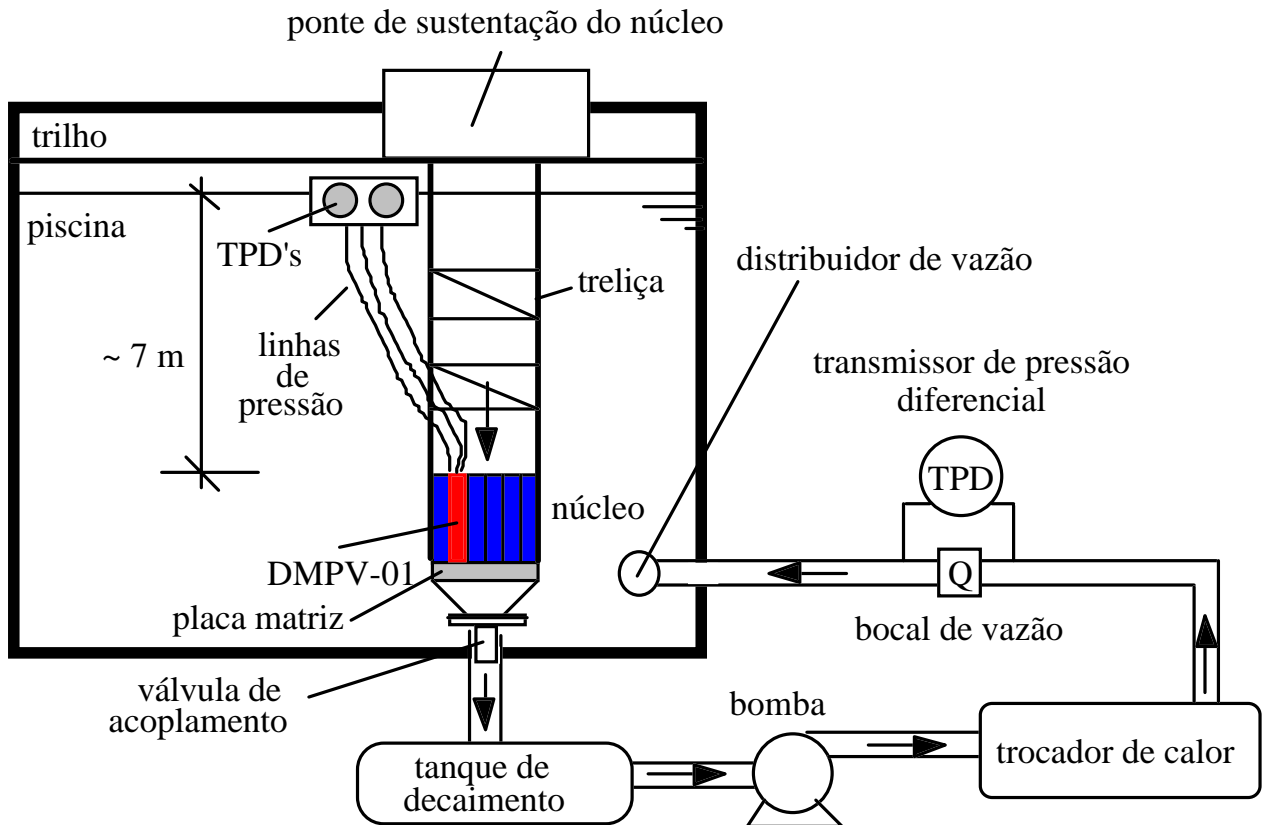


Figura 11 – Desenho simplificado do circuito primário do Reator IEA-R1 mostrando o núcleo e o DMPV-01.

O circuito primário do reator IEA-R1 é constituído basicamente pela piscina, núcleo, tubulações, bombas, tanque de decaimento, trocadores de calor e distribuidor. Para exemplificar o seu funcionamento, a Fig.11 apresenta apenas um dos circuitos. A bomba circula água da piscina através do núcleo, retirando o calor gerado pela reação nuclear. Após isso, a água aquecida passa pelo tanque de decaimento para diminuir a atividade radioativa do N16 e é enviada para um trocador de calor que transfere a energia para o circuito secundário, retornando em seguida para a piscina.

No início da operação do circuito primário, antes de ligar a bomba, é acionado da Sala de Controle, o acoplamento pneumático da válvula ao cone de redução da placa matriz. A bomba é ligada e é feito o ajuste da vazão em 188,4 kg/s (681,3 m³/h ; 3000gpm), usando o sistema constituído por um bocal de vazão e transmissor de pressão diferencial. O acionamento manual é suspenso, e o acoplamento da válvula é mantido por efeito hidrodinâmico provocado pela queda de pressão no núcleo. Em caso de um acidente de perda ou diminuição acentuada de vazão o reator é desligado automaticamente e, a queda de pressão no núcleo diminui e a válvula desacopla automaticamente, permitindo que a água da piscina atinja o núcleo pela sua parte inferior e que este seja resfriado por convecção natural.

A configuração do núcleo do reator e as condições experimentais em que foram realizados são descritas abaixo para cada um dos testes. A vazão no circuito primário foi mantida em 188,4 kg/s (681,3 m³/h ; 3000gpm) em todos os testes:

Teste 1: O EC n^o. 153 da configuração 210a foi substituído pelo DMPV-01. Nestas condições, a queda de pressão média no DMPV-01 foi igual a 4531 N/m² (462,5 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,161 kg/s na curva de calibração do DMPV-01.

Teste 2: O EC n^o. 169, entre os elementos de controle (ECT) 166 e 180, da configuração 210a foi substituído pelo DMPV-01. A queda de pressão média foi de 4634 N/m² (473,0 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,213 kg/s na curva de calibração do DMPV-01. Comparando-se os resultados dos Testes 1 e 2, podemos observar uma diferença de apenas 1,25%.

Teste 3: O EC n^o 170, entre os ECT's 179 e 167, da configuração 210a foi substituído pelo DMPV-01. A queda de pressão média foi de 4780 N/m² (488,0 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,285 kg/s na curva de calibração do DMPV-01. Comparando-se os resultados dos Testes 1, 2 e 3 podemos observar uma variação de 3% entre os valores máximo e mínimo, indicando que a distribuição de vazão no núcleo é bem uniforme.

Teste 4: Foram mantidas as mesmas condições geométricas e de vazão do Teste 3, apenas o acionamento pneumático da válvula de acoplamento foi mantido, adicionalmente ao acoplamento hidrodinâmico. A queda de pressão média foi de 4888 N/m² (499,0 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,334 kg/s na curva de calibração. Observa-se um aumento na vazão de aproximadamente 1,14% com relação à vazão medida no Teste 3. Isso indica que o acoplamento da válvula pela diferença de pressão no núcleo, não é perfeito.

Teste 5: O DMPV-01 continuou ocupando a posição de EC n^o. 170 (entre os ECT's 179 e 167) da configuração 210a. Contudo, foram feitas as seguintes modificações no núcleo para verificar a influência dos elementos de irradiação presentes: a) substituição do EIS por 4 refletores de grafite; b) substituição do GI por um refletor de grafite; e c) substituição dos 2 EIRAS por 2 tampões simples. A vazão no circuito primário foi fixada em 188,4 kg/s, e a queda de pressão média no DMPV-01 foi de 5172 N/m² (528,0 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,474 kg/s. Os resultados do Teste 5 são comparados com os resultados do Teste 3 e observa-se um aumento na vazão da ordem de 4,4%. Supondo que não haja mudança na distribuição de vazão, pode-se concluir que a vazão que passa através dos irradiadores substituídos corresponde à vazão de um EC (4,4% x 20 = 88%), o que é considerado um valor muito elevado devido à baixa geração de calor nesses irradiadores..

Teste 6: No Teste 6 foram mantidas as condições geométricas do teste anterior, porém os 2 furos do EIBE foram preenchidos com os respectivos tubos onde são colocadas as amostras para irradiação. A queda de pressão média foi de 5293 N/m² (540,3 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,531 kg/s na curva de calibração. Comparando os valores de vazão do Teste 6 com os resultados do Teste 5, pode-se observar um aumento de 1,27%, decorrente da presença dos tubos nos furos do EIBE.

Teste 7: No Teste 7 foram mantidas as condições geométricas, inclusive com a presença dos 2 tubos nos furos do EIBE, e a vazão de 188,4 kg/s, apenas foi feito o acionamento pneumático da válvula de acoplamento e conjunto com o efeito hidrodinâmico. A queda de pressão média foi de 5319 N/m² (543,0 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,544 kg/s. Desta vez, o acoplamento pneumático manual provocou um aumento desprezível na vazão (~0,3%) em relação à vazão medida no Teste 6, diferente do observado no Teste 4.

Teste 8: No Teste 8 o DMPV-01 foi colocado na posição do EC n^o. 152 do núcleo. Os 2 tubos de amostras foram mantidos no EIBE. A queda de pressão média foi de 5294 N/m² (540,4 mmH₂O) que corresponde a uma vazão de 4,532 kg/s. Comparando-se esse resultado com aquele obtido no Teste 6, observa-se que são praticamente iguais e novamente indicam a uniformidade na distribuição de vazão no núcleo.

Teste 9: No Teste 9 o DMPV-01 continuou ocupando a posição do EC n^o. 152, os 2 tubos de amostras foram mantidos no EIBE, porém houve o retorno do EIS à sua posição do início dos testes. Os demais irradiadores foram mantidos fora do núcleo. A queda de pressão média foi de 4771 N/m² (487,0 mmH₂O), que corresponde a uma vazão de 4,281 kg/s. Comparando-se esse resultado o do Teste 8 conclui-se que a presença do EIS é responsável por uma redução na vazão da ordem de 5,9%, um valor muito elevado. Diante disso, recomendou-se que o projeto deste irradiador fosse revisto para reduzir esse desvio de vazão.

Teste 10: No Teste 10 o DMPV-01 continuou ocupando a posição do EC n^o. 152, os 2 tubos de amostras foram mantidos no EIBE, o EIS ocupou sua posição do início dos testes. O refletor de grafite que ocupava a posição do GI foi retirado, deixando o furo principal na placa matriz livre para a passagem do fluido. A queda de pressão média foi de 4359 N/m² (445,0 mmH₂O), que corresponde a uma vazão de 4,074 kg/s. Comparando-se esse resultado com o do Teste

9, podemos concluir que um furo principal na placa matriz livre é responsável por uma redução na vazão da ordem de 5,1%, aproximadamente equivalente ao efeito do EIS.

A Tab. (1) reproduz os resultados das medidas de vazão pelo DMPV-01 usando a curva de calibração e o tubo de Pitot, corrigindo a velocidade conforme equação da Fig. (8).

Tabela 1. Resultados experimentais médios de medida de vazão nos Testes 1-10 pelo DMPV-01

TESTE	DP ₁₂ =P1-P2 DP ₁₂ (N/m ²)	DP ₁₂ =P1-P2 DP ₁₂ (mmH ₂ O)	m (kg/s)	DP ₃₂ =P3-P2 DP ₃₂ (N/m ²)	DP ₃₂ =P3-P2 DP ₃₂ (mmH ₂ O)	m (kg/s) - Pitot corrigida
1	4531	462,5	4,161	1932	197,2	4,156
2	4634	473,0	4,213	1989	203,0	4,218
3	4780	488,0	4,285	2016	205,8	4,247
4	4888	499,0	4,334	não medido	não medido	não medido
5	5172	528,0	4,474	2175	222,0	4,414
6	5293	540,3	4,531	2287	233,5	4,528
7	5319	543,0	4,544	2302	235,0	4,543
8	5294	540,4	4,532	2220	226,6	4,460
9	4771	487,0	4,281	1964	200,5	4,191
10	4359	445,0	4,074	1789	182,6	3,997

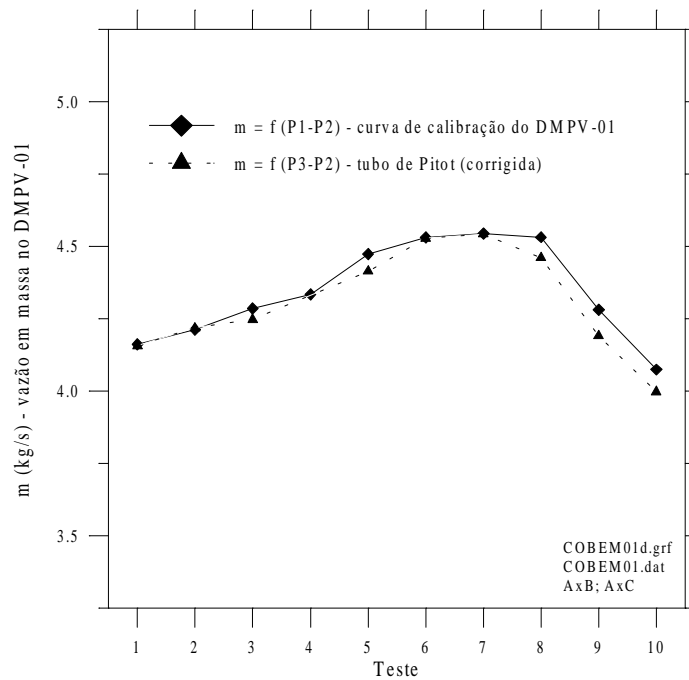


Figura 12. Resultados das medidas com DMPV-01

Os resultados obtidos nos Testes 1, 2, 3 e 9, mostram que a distribuição de vazão entre os EC's do núcleo do reator IEA-R1 é bem uniforme, em torno do valor de 4,25 kg/s/EC (configuração 210a). Contudo, os valores de vazão nos EC's estimados anteriormente para essa configuração do núcleo com todos os irradiadores eram 28% superiores, ou seja, 5,45 kg/s/EC. Essa diferença entre valores estimados e medidos indicaram a possibilidade de ocorrência de desvios de vazão do núcleo superiores aos desejados ou ainda a existência de problemas nas medidas de vazão do circuito primário. Investigações posteriores, realizadas com uma câmara subaquática, mostraram a existência de desvio de vazão na região de acoplamento da válvula e o cone de redução, contudo não foi possível quantificar esse desvio. A análise do filme gravado mostrou um pequeno desalinhamento entre a válvula de acoplamento e o cone de redução, corrigido posteriormente. Estudos sobre o funcionamento do sistema de medida de vazão do circuito primário acusaram um desvio de aproximadamente 13% na medida da vazão total. Os resultados também mostraram a influência dos irradiadores presentes na configuração 210a. Observou-se que o elemento de irradiação de Silício (EIS) é responsável pelo desvio de 5,9% da vazão do núcleo e deve ter o seu projeto reavaliado.

4. Conclusões

O modelo físico com instrumentos DMPV-01 foi desenvolvido para medir a vazão através dos elementos combustíveis do núcleo do reator IEA-R1. Foram realizados experimentos em laboratório para obter uma curva de calibração relacionando a queda de pressão com a vazão. A medida da velocidade de escoamento por intermédio das tomadas de pressão dinâmica e estática do bocal (tubo de Pitot) do DMPV-01 apresentou boa concordância (~4,5%) com a velocidade calculada usando a vazão obtida pela curva de calibração, podendo portanto ser usada, após correção, como uma medida redundante da vazão através dos elementos combustíveis do IEA-R1. Os resultados dos testes mostraram que a distribuição de vazão no núcleo é uniforme, porém os valores medidos estão aquém daqueles anteriormente estimados, indicando a ocorrência de desvios excessivos de vazão do núcleo. Os resultados também foram importantes para mostrar a influência dos irradiadores na vazão pelos EC's, fornecendo informações para a reavaliação e ou projeto de novos irradiadores a serem utilizados no núcleo do reator IEA-R1.

A principal conclusão porém é que, as equipes responsáveis por reatores de pesquisa, que não operam o núcleo com uma configuração permanente, precisam de dispositivos que permitam realizar medidas de vazão nas posições de EC's, além de verificar a influência de dispositivos de irradiação normalmente instalados, para se contar com análises termo-hidráulicas confiáveis.

5. Agradecimentos

Agradecemos à equipe da Divisão de Desenvolvimento de Elementos Combustíveis (MCP) do Departamento do Ciclo Combustível (MC), atual Centro do Combustível Nuclear do IPEN, em especial aos colegas J. Antônio, Davilson e Olair, e demais integrantes que de alguma forma contribuíram para a cuidadosa fabricação do modelo DMPV-01. Agradecemos também às equipes de Operação do Reator IEA-R1 e de Proteção Radiológica pela colaboração durante a realização dos testes.

6. Referências

- Lima, R.M., Oliveira, F.S., 2000 "Relatório Descritivo de Fabricação do Elemento DMPV-01", Documento Interno IPEN - Data Book do Elemento DMPV-01 No. RDF-DMPV-01/01 – R:00
 Torres, W., 2001 "Desenvolvimento do Elemento DMPV-01 para Medida de Vazão no Núcleo do Reator IEA-R1", Documento Interno IPEN – Relatório Técnico No. PSE.CENT.IEAR1.001.00 – RELT.003.00

FLOW DISTRIBUTION IN THE CORE OF IEA-R1 NUCLEAR RESEARCH REACTOR

Walmir Maximo Torres

Pedro Ernesto Umbehaum

Benedito Dias Baptista Filho

José Carlos de Almeida

José Antônio Batista Souza

Davilson Gomes da Silva

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares – IPEN
 Travessa R, 400 – Cidade Universitária
 CEP. 05508-900 – São Paulo, SP, Brasil
 e-mail: wmtorres@net.ipen.br

Abstract. *A dummy fuel element (DMPV-01) was developed to measure the core flow distribution at IEA-R1 nuclear research reactor. This dummy element was made of aluminum with static pressure taps at inlet and outlet region, and with a dynamic pressure tap at the outlet nozzle. The total pressure drop and mass flow through the dummy element were related using a hydraulic experimental loop. The dynamic and static pressures were used to calculate the water velocity at the outlet region. This indirect velocity measurement was used as a redundant flow measurement. DMPV-01 element was used to measure the flow mass in four core positions. The results shown that the flow distribution is quite uniform, although the measured flow values were far below previous estimated values. Tests were carried out to find the influence of irradiation devices in the flow measurements. Results indicates that the flow bypassed through irradiation devices is significant. Some of these devices should be redesigned. This experiment showed that a dummy fuel element with flow measurement instruments is very important to seek bypass flow effects and to provide data to an accurate thermal-hydraulic analysis*

Keywords. flow distribution, research reactors, thermal-hydraulic analysis

NUMERICAL CALCULATION OF STRAIGHT /DIFFUSER / STRAIGHT TUBE TURBULENT FLOW

Edimilson Junqueira Braga

Reinaldo Rosseti

Edson Luiz Zapparoli

Marcelo J. S. deLemos

Departamento de energia – IEME, Instituto Tecnológico de Aeronáutica ITA, 12228-900, São José dos Campos, SP
zapparoli@mec.ita.cta.br

Abstract. The experimental results for turbulent flow in a 54-diameters entrance straight tube, 5.8-diameters diffuser of 10.7-degree aperture angle and 13-diameters exit straight tube were compared with the finite volume and finite element numerical results. The results for the axial velocity were analyzed in the following three positions: established flow in the first straight tube, flow near the diffuser exit and flow in the neighborhood of the second straight tube exit. Finite volume and finite element computer programs were employed using the standard k- ϵ turbulent model to evaluate the eddy viscosity contribution to momentum transport. Both first and third cross sections numerical results showed good agreement with experimental data. However, larger differences were found in the results for the cross sections near the diffuser exit, due to the poor standard k- ϵ turbulent model performance in adverse pressure gradient flow.

Keywords: Inner flow, Turbulence model, Adverse pressure gradient

1. Introduction

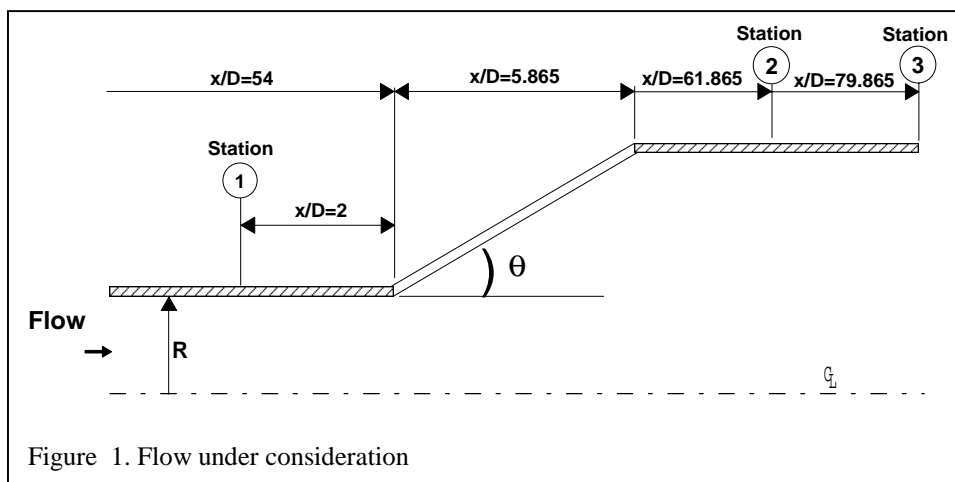
Flow passages with contractions and enlargements are commonly found in a number of engineering equipment. Turbulent non-isothermal coaxial jets within ducts with varying cross section can be encountered in industrial piping, jet-pumps, combustors and air conditioning ducts, for example. Accurate determination of flow mixing in such devices contributes to efficiency increase, optimal design parameters and, ultimately, reduction of cost-benefit relationship.

Experimental work published on turbulent coaxial jets deals, in its majority, with sudden expansion flow into a stagnant surrounding (Buresti et al, 1998) or within a confining duct (Park & Chen, 1989). Measurements in two-phase systems (Albagli & Levy, 1991, Fan et al, 1996a) and computational studies applying Large Eddy Simulation to coaxial jets are also found in the literature (Knut & Moin, 1996). In all of the above, recirculating flow due to abrupt expansion precludes the use of the mathematical treatment below, which in contrast, is based on a marching-forward technique (Patankar, 1988).

Yule & Damou, 1992, presented results for confined coaxial turbulent jets with velocity ratio U_1/U_2 up to 30, being U_1 the central jet velocity. Both streams flowed into a convergent-divergent channel. Report was limited to mean axial velocity and axial turbulent intensity. Yet, their overall duct length was of a relative short size ($x/D = 4$).

The compilation work of Spencer et al, 1995, seems to be the only available experimental data bank for turbulent flow within contractions and diffusers. Therein, experimental data from 11 institutions around the world, taken for flow of air and water in contraction and diffuser, were compared with each other and with computational results using commercial CFD codes. The authors conclude, “numerical simulation of turbulent flow through simple pipe components cannot be achieved with the commercial programs available”.

As a consequence, the use of numerical tools for quick analysis of simple engineering flows, instead of using memory demanding CFD codes, has motivated many research efforts recently. If no back flow is in order, marching-forward techniques, implemented along with isotropic turbulence models, provide an economical means for engineering



analysis with PC-based workstations.

Following this path, the work of Matsumoto & de Lemos, 1990, presented results for the developing time-averaged and turbulent fields in a coaxial jet along a circular duct of constant area. Later, de Lemos & Milan, 1997, extended their calculations to flow in long ducts through varying cross sections. de Lemos & Braga, 1998 further considered coaxial jets with higher and lower annular velocity in diverging and converging ducts. Similar results for ducts with plane walls have also been documented (de Lemos and Braga, 1999a). Experimentally observed turbulence damping in contractions and corresponding enhancement in diffusers, reported in detail by Spencer et al, 1995, was correctly simulated in de Lemos and Braga, 2000. In that paper, direct comparisons with experimental data have shown that for contractions up to 21° and for diffusers up to 5°, the model and numerical scheme employed reproduced the basic features of the flow. Beyond those values, as expected, deterioration of the prediction quality was observed since parabolic equations were considered.

2. Mathematical model and numerical methods

2.1. Mean flow equations

The equations of continuity and axial momentum for a two-dimensional, source-free, low speed, planar/axi-symmetric turbulent mixing layer can be written as,

$$\frac{\partial (y^\eta \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (y^\eta \rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{y^\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(y^\eta \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\eta \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\eta \mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{y^\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(y^\eta \mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\eta \mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - 2\eta \mu_{\text{eff}} \frac{v}{y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\eta \mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3)$$

In Eq. (1), Eq. (2) and Eq. (3), u , v are the velocity components in the axial and transverse direction, respectively, ρ the fluid density, P the static pressure, and μ_{eff} the coefficient of turbulent exchange given as $\mu_{\text{eff}} = \mu_t + \mu$. Also, μ and μ_t are the molecular and turbulent viscosity, respectively. As usual, Eq. (1), Eq. (2) and Eq. (3), are written in a compact notation embracing planar ($\eta=0$) and axi-symmetric ($\eta=1$) cases.

2.2. Turbulence model

The statistical turbulence model k - ϵ (Jones & Launder, 1972) has been extensively used in the literature for its characteristics of robustness and numerical stability. The diffusion-like character of turbulent transport is mostly responsible for improved stability of the model. Recent extensions of its applicability to a wide variety of flows include the so-called RNG and Non-Linear approaches. Basically, the model embodies the early idea of Prandtl/Kolmogorov that, in a turbulent flow, the apparent viscosity μ_t can be considered as proportional to the product of a characteristic velocity scale V' and a characteristic length scale L' . In the k - ϵ model, the characteristic velocity scale is given by $V'=k^{1/2}$, and the characteristic length scale is written as $L'=k^{3/2}/\epsilon$. Both scales imply for the turbulent viscosity $\mu_t = \rho c_\mu k^2/\epsilon$, where c_μ is a constant. Here, only the case involving flow regions of high local Reynolds numbers, or say, regions with Kolmogorov and macroscopic scales adequately separated, is considered (Launder & Spalding, 1974). With this, transport equations for k and ϵ can be written as,

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\eta \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial y} \right] + S_k \\ \rho u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\eta \Gamma_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + S_\epsilon \end{aligned} \quad (4)$$

In Eq. (4) Γ_k and Γ_ϵ are given by $\Gamma_k = \mu + \mu_t/\sigma_k$; $\Gamma_\epsilon = \mu + \mu_t/\sigma_\epsilon$ where the σ 's are the turbulent Prandtl/Schmidt numbers for k and ϵ , respectively. The last terms in Eq. (4) are known as "source" terms and are given by $S_k = \rho (P_k - \epsilon)$ and $S_\epsilon = \rho \frac{\epsilon}{k} (c_1 P_k - c_2 \epsilon)$. The constants take their usual values, namely $c_1=1.47$, $c_2=1.92$ and $c_\mu=0.09$. Further, the production term reads $P_k = \mu_t/\rho (\partial U/\partial y)^2$.

2.3. Boundary conditions

The numerical approach here adopted is the well-known parabolic solver technique of Patankar & Spalding, 1972, and Patankar, 1980. The inlet values for k and ϵ were assumed as $k_{in} = 10^{-3} U_m^2$ and $\epsilon_{in} = k_{in}^{3/2} / Ky'$ where U_m is the overall mean velocity, K is the von Kármán constant ($K=0.4$) and y' is the distance to the wall. Also, for the centerline ($y=0$), the symmetry condition was implemented for all dependent variables as $\partial\phi/\partial y|_{y=0} = 0$ where $\phi=U, k$ and ϵ .

2.4. Wall treatment

Wall proximity is handled by the usual Wall Function approach (Launder & Spalding, 1972, Launder & Spalding, 1974), giving for the wall shear stress,

$$\tau_w = (U_N \rho c_{\mu}^{1/4} k_N^{1/2}) / \left[\frac{1}{K} \ln \left[E y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu} \right] \right] \quad (5)$$

where E is a constant. In Eq. (5) the subscript "N" identifies the grid point closest to the wall. In that region, the use of the Wall Function associated with the assumption of "local equilibrium" for turbulence ($P_k=\epsilon$) gives $k_N = \tau_w / (\rho c_{\mu})^{1/2}$; $\epsilon_N = k_N^{3/2} / K y_N$. Rewriting Eq. (5) in the form $\tau_w = \lambda \mu (\partial U / \partial y)$ gives further,

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{for laminar flow} \\ \frac{K y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu}}{\ln \left[E y_N \frac{\rho (c_{\mu}^{1/2} k_N)^{1/2}}{\mu} \right]} & \text{for turbulent flow} \end{cases} \quad (6)$$

2.5. Boundary layer model and finite volume method

2.5.1. Boundary layer mathematical model

The finite volume method used is concerned with the numerical solution of flows of the boundary layer type. In this case, convective strengths are considered only in the main flow direction, also know as the axial direction. Therefore, the equations of x-momentum and transport equations for k and ϵ for a two-dimensional flow can be written as:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^n \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (7)$$

$$\rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^n \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial y} \right] + S_k \quad (8)$$

$$\rho u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^n \Gamma_{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + S_{\epsilon}$$

2.5.2. Discretization of transport equations

The discretization of the equations is obtained through the Control Volume method (Patankar & Spalding, 1970, Patankar & Spalding, 1972). In this approach, the continuum domain is divided into non-overlapping, finite regions known as control volumes. To each control volume a computational node P is associated, having neighbor points at upwind position, at north and at south. The physical balance principle expressed by the general transport equation is then rewritten for the control volume, identifying the macroscopic rates of transport and generation/destruction within the volume.

2.6. Pressure gradient

Determination of the unknown pressure gradient is handled exactly as explained in Patankar, 1988. That approach consists basically in finding the "zero" of a function $f(dP/dx)$ defined as:

$$f(dp/dx) = (A_{calc} - A_{duct}) / \Psi_{Et} \tag{9}$$

where the left hand side represents the discrepancy, at the downstream position, between the calculated and real duct areas. Solution of Eq. (9) can be achieved with an iterative Newton-Raphson method of the form:

$$f^* + f^* [(dp/dx) - (dp/dx)^*] = 0 \tag{10}$$

where "starred" values are estimated quantities later improved in subsequent iterations. Typically, 3 to 4 iterations are necessary in solving Eq. (10) at each axial station. It is worth noting that applicability of the model above is limited to parabolic flow analyses, so that recirculating motion induced by boundary layer separation in fast diverging ducts or "vena contracta" regions after duct constrictions are not considered here. With these restrictions applied, the axial momentum equation can be solved with well-known marching-forward numerical techniques for computation of parabolic and partially parabolic flows.

2.7. Finite Elements

It was used a finite element algorithm commercial code which solves the Navier-Stokes equations using a segregated or sequential solution method. The velocity-pressure formulation uses an equal-order approximation for velocity and pressure, and solves for each variable field in an iterative manner similar to finite volume methods (Schnipke and Rice, 1986). The program uses a monotone streamline upwind technique to discretize the advection terms. The program element library consists of two-dimensional and quadrilateral elements that may be applied to two-dimensional or cylindrical coordinates system. The program models turbulent flow with the standard two-equations k-ε model with universal wall law applied to the mesh point nearest to domain solid boundaries. For the present work the program solves the elliptic mathematical model equations. The work using the finite elements method is reported in Rosseti, 2000.

3. Results and Discussion

The following results were compared with measurements of Spencer *et al*, 1995, who reported data for air and water in contracting and expanding ducts. In that work, a compilation of the combined effort by 11 European institutions in measuring and simulating turbulent flow past conical diffusers and enlargements was reported. A schematic of the test rigs used is reproduced in Fig. (1) containing also some dimensions used to simulate the experiments reported in Spencer *et al*, 1995. Measurements were reported for air and water in addition to calculation obtained with commercial CFD (Computational Fluid Dynamics) codes.

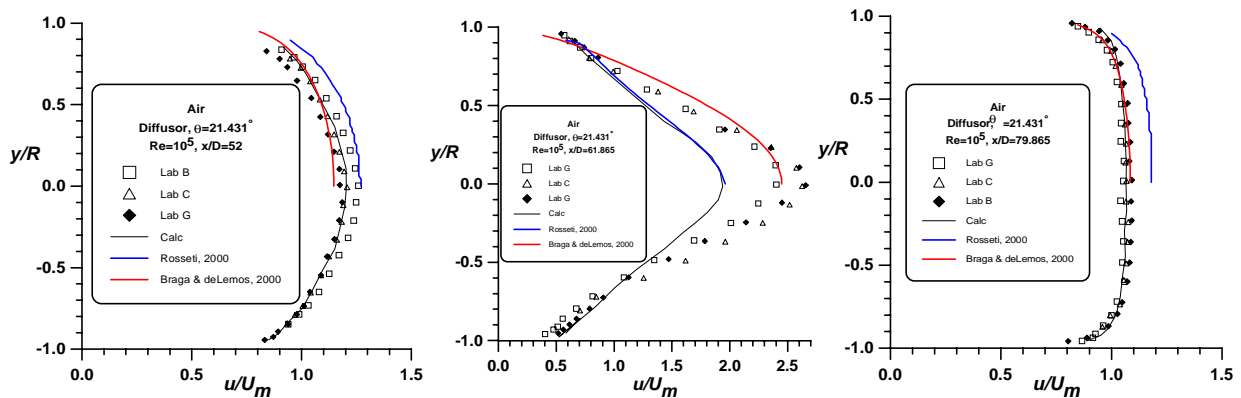


Fig. 2. Non-dimensional velocity profiles at stations 1, 2 and 3 respectively of air flow in a diffuser.

Figure (2) shows results for the non-dimensional velocity at the stations 1, 2 and 3 of Fig. (1), respectively, along the pictured diverging duct. To emphasize the spread on the results reported in Spencer *et al*, 1995, the experiments therein were combined into three groups, namely **Lab-B**, **Lab-C** and **Lab-G**. Numerical runs were also recast into the group **Calc**, related to the use of the k-ε model with elliptic solver. These so-called groups of results, either experimental or numerical, expresses the proximity of different data sources when compared against each other.

The existence of different groups of results, however, is a clear indication that even for simple engineering flows, measuring and calculations can differ quite a bit if are from different laboratories or from different CFD codes, using different techniques and equipment.

The FVM (curves in red) show slightly better results than FEM (curves in blue). It is clearly seen in the velocity profile at the station 2. The two curves using an elliptic solver are practically the same and seem not to show mass conservation between the station 1 and 2. The FVM velocity profile at the station 1 is close to

experimental data, except in the central region of the pipe due the overestimation of the turbulent viscosity, μ_t , typical of the standard form of the k- ϵ model.

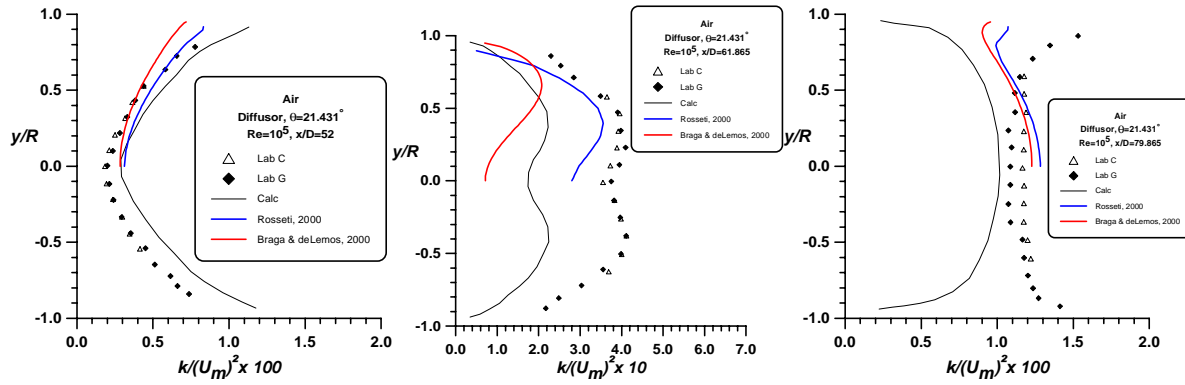


Fig. 3. Profiles for k/U_m^* at stations 1, 2 and 3 respectively of air in a diffuser.

Corresponding turbulence kinetic energy is presented in Fig. (3). In this case, the FEM with an elliptic solver show slightly better results than the parabolic FVM. However, the same behavior for all curves indicate that both programs indeed reproduce the basic features of the flow, namely the increasing in the turbulent kinetic energy along expansions.

Also, close to the wall, the use of the wall-function approach after an expansion portion of the duct may not be an appropriated boundary condition.

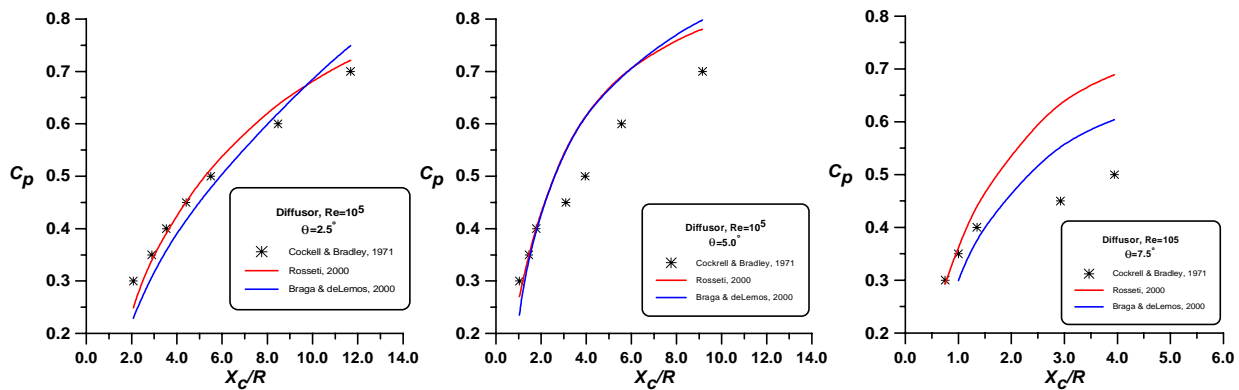


Fig. 4. Pressure recovery coefficient through conical diffuser.

Results for the pressure recovery coefficient in diffusers, C_p , defined as,

$$C_p = \frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2} \rho u_1^2} \tag{11}$$

are presented in Fig. (4) for three values of angle θ . Indexes 1 and 2 in Eq. (11) refer to positions at entrance and exit of the diffuser, respectively (see Fig. (1)). Results are compared with experiments of Cockrell & Bradley, 1971.

The length of conical section of the diffuser is varied for the same angle θ . Pressure recovers as the length of the diffuser increases and flow is decelerated. Further increasing x_c , the velocity close to the walls is reduced, leading eventually to boundary layer separation. Then, the parabolic approach presented is no longer valid. Accordingly, it can be noticed in the Figs. a departure from experimental values for lower x_c as the diffuser angle increases. These results show that the tested CFD codes are more appropriate to calculation of diffuser with small angles θ .

5. Acknowledgments

The authors are thankful to CNPq, Brazil, for their financial support during the course of this research.

6. References

Albagli, D., Levy, Y., 1991, Experimental study on confined two-phase jets, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, v. 5. n. 3, pp. 387-393.
 de Lemos, M.J.S., Braga, E.J., 1999a, Numerical analysis of coaxial turbulent jets in diffusers and contractions, *COBEM99 - 13th Braz. Cong. Mech Eng.*, Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil, Nov. 22-26.
 Buresti, G., Petagna, P., Talamelli, A., 1998, Experimental investigation on the turbulent near-field of coaxial jets, *Experimental Thermal and Fluid Science*, v 17, n. 1-2, pp. 18-26.

- Cockrell, D.J., Bradley, C.L., 1971, The response of diffusers to flow conditions at their inlet, Paper # 5, *Symp. On Internal Flows*, University of Salford, pp. A32-A41.
- de Lemos, M.J.S., Braga, E.J., 2000, Simulation of turbulent flow in contracting and expanding ducts with a linear k- ϵ model, Paper FEDSM2000-11083, accepted for pres. at *2000 ASME Fluids Engineering Summer Conference*, Boston, Massachusetts, USA, June 11-15. de Lemos, M.J.S.
- de Lemos, M.J.S., Braga, E.J., 1998, Numerical investigation of turbulent duct flow through gradual enlargements and contractions, ASME-FED-vol.245, ISBN: 0-7918-1950-7, *Proc. of FEDSM-Fluid Eng. Div. Summer Meeting*, Washington, D.C., USA, June 21-25.
- de Lemos, M.J.S., Milan, A., 1997, Mixing of confined coaxial turbulent jets in ducts of varying cross section, *CD-ROM of COBEM97 – 12th Braz. Cong. Mech Eng.*, Bauru, São Paulo, Brazil, December 8-12.
- Fan, J.; Zhao, H., Cen, K., 1996a, Two-phase velocity measurements in particle-laden coaxial jets, *Chemical Engineering Journal*, v. 63, n. 1, p. 11-17.
- Jones, W.P., Launder, B.E., 1972, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat & Mass Transfer*, vol. 15, pp. 301-314.
- Knut, A, Moin, P., 1996, Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 315, p. 387-411.
- Launder, B.E., Spalding, D.B. 1972, *Lectures in mathematical models of turbulence*, Academic Press, New York.
- Launder, B.E., Spalding, D.B., 1974, The numerical computation of turbulent flows, *Comp. Math. App. Mech. Eng.*, vol. 3, pp. 269-289.
- Matsumoto, E., de Lemos, M.J.S., 1990, Development of an axi-symmetric mixing layer in a duct of constant cross section, *Proc. of 3rd Braz. Therm. Sci. Meet.*, vol. I, pp. 381-385, Itapema, Brazil, December 10-12.
- Park, C.J.; Chen, L.D., 1989, Experimental investigation of confined turbulent jets. part i. single-phase data, *AIAA Journal*, v. 27, n. 11, pp. 1506-1510.
- Patankar, S.V., 1980, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Mc-Graw Hill.
- Patankar, S.V., 1988, Parabolic systems, Chapter 2 of *Handbook of numerical heat transfer*, Rohsenow ed., John Wiley & Sons, New York.
- Patankar, S.V., Spalding, D.B., 1970, *Heat and mass transfer in boundary layers*, 2nd ed., London, International text Book, London.
- Patankar, S.V., Spalding, D.B., 1972, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat & Mass Transf.*, vol. 15, pp. 1787-1806.
- Rosseti, R., 2000, *Análise Numérica do Escoamento Turbulento, Incompressível em Difusores Radiais*, Msc Thesis, ITA, CTA
- Schnipke, R. J., Rice J. G., 1986, A streamline upwind finite element method for laminar and turbulent flow, Department of mechanical and Aerospace Engineering, University of virginia, Report nº UVA/643092/MAE86/342.
- Spencer, E.A., Heitor, M.V., Castro, I.P., 1995, Intercomparison of measurements and computations of flow through a contraction and a diffuser, *Flow Measurement and Instrumentation*, v. 6, n. 1, p. 3-14.
- Yule, A.J., Damou, M., 1992, Axisymmetrical turbulent jet flows in a duct of varying area, *Experim. Thermal and Fluid Science*, v. 5, n. 4, p. 499-505.

ESCOAMENTO DE FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS ATRAVÉS DE TUBOS COM ESTENOSE

Mônica F. Naccache

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica–Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brasil
naccache@mec.puc-rio.br

Paulo R. Souza Mendes

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica–Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brasil
pmendes@mec.puc-rio.br

Erick F. Q. A. Coelho

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica–Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brasil
erick@mec.puc-rio.br

Resumo. *Faz-se uma simulação numérica utilizando o método de volumes finitos, para estudar o escoamento de um fluido com tensão limite de escoamento, através de um tubo na vizinhança de uma restrição. Esta situação é representativa da que ocorre no escoamento de sangue através de artérias com estenose. Estenose é uma restrição ou estreitamento de um duto ou passagem. Um vaso estenótico geralmente causa uma estagnação do fluxo sanguíneo e portanto a formação de trombos, os quais podem ser bastante prejudiciais à saúde humana. Escolheu-se a reologia do fluido de modo a se aproximar daquela do sangue de hematócrito igual a 54%. Estudaram-se números de Reynolds e números de escoamento característicos de diferentes artérias. Para fins de comparação, obtiveram-se também resultados para fluidos Newtonianos. Dentre outros resultados, observou-se que a reologia não Newtoniana causa mudanças significativas no padrão de escoamento na vizinhança da estenose. Como as condições para a formação de trombos estão diretamente relacionadas com o padrão de escoamento, estudos do escoamento de sangue através de artérias com estenose que supõem uma reologia Newtoniana podem levar a conclusões errôneas.*

Palavras-chave: *Materiais viscoplásticos, estenose, escoamento de sangue*

1. Introdução

A relação entre as forças geradas no escoamento do sangue pelas veias e artérias e a formação e a fisiologia de ateroscleroses vem sendo estudada há mais de cinquenta anos. Observou-se que as forças normais e tangenciais têm um importante papel na geração e na fisiologia de ateroscleroses, pois estas ocorrem preferencialmente em regiões de grande curvatura ou de bifurcações, onde ocorrem mudanças bruscas nos padrões de escoamento. Estudos mostram que a tensão cisalhante é o fator primário mais importante no que se refere à aterosclerose, sendo que tanto as regiões de alta como as de baixa tensão de cisalhamento na parede podem ser consideradas perigosas. Mais recentemente, têm-se realizado estudos do escoamento em vasos após a placa ter-se desenvolvido até o ponto em que o vaso é significativamente estreitado (chamado tecnicamente de estenose). As tensões de cisalhamento na parede em tais regiões estenóticas podem ser altamente elevadas ou reduzidas e os escoamentos a montante e a jusante podem ser altamente perturbados.

Estudos tanto para vasos normais como para vasos com estenose têm sido realizados em artérias idealizadas bem como em bifurcações e ramificações arteriais idealizadas, além da atenção dada para casos clínicos específicos importantes, tais como o arco da aorta, a artéria carótida e as artérias coronárias. A maioria das análises supõe ser o sangue um fluido Newtoniano, seguindo a indicação de que esta é uma aproximação válida para o comportamento reológico do sangue em vasos sanguíneos grandes. Poucos estudos têm considerado o sangue como um fluido não Newtoniano, o que é uma das motivações do presente trabalho. A fim de tornar o problema mais tratável, a maioria das análises têm suposto estenoses axissimétricas. Quase todas essas análises supõem que a placa é rígida, e que altera o lumen do vaso, de modo que o fluido escoar através de uma contração seguida de uma expansão.

Trabalhos de relevância têm voltado a atenção para o problema do escoamento do sangue em artérias com estenose. Estes trabalhos analisam o escoamento permanente e o escoamento pulsátil através da reprodução experimental do fenômeno, bem como por meio de simulações numéricas do problema.

Diversos trabalhos experimentais analisam o fenômeno em laboratório (Engvall et al., 1991; Gijssen et al., 1996; Gijssen et al., 1997; He e Ku, 1996; Heinrich et al., 1996; Lim et al., 1998; Siouffi et al., 1998; Sung et al., 1990). Os resultados mostram que estenoses ocorrem em diferentes locais da árvore arterial. Os modelos utilizados são todos rígidos e transparentes, e todos os trabalhos experimentais pesquisados utilizaram fluidos Newtonianos como fluido de trabalho.

Apesar desses trabalhos experimentais não observarem o fato de que os padrões de escoamento em geometrias complexas são distintos caso o fluido seja Newtoniano ou não Newtoniano, alguns poucos trabalhos numéricos, analisando tanto escoamentos permanentes quanto pulsáteis, apresentam essa preocupação.

Para o estudo de padrões de escoamento de fluidos não Newtonianos associados com uma estenose arterial, Luo e

Kuang (1992) introduziram como equação constitutiva em suas simulações numéricas um modelo modificado da equação de Casson para sistemas dispersos. Usando essa equação, os autores estudaram parâmetros de escoamento do sangue como perfis de velocidade, vazão, gradiente de pressão e tensão de cisalhamento na parede em tubos retos e tubos estenóticos. Os resultados mostraram que, comparados com o escoamento de fluidos Newtonianos à mesma vazão, os fluidos não Newtonianos normalmente apresentam maior gradiente de pressão, maior tensão de cisalhamento na parede e diferentes perfis de velocidade, especialmente em tubos que possuem uma estenose. Além do mais, o escoamento de fluidos não Newtonianos em tubos estenóticos parece ser mais estável do que o escoamento de fluidos Newtonianos nas mesmas condições.

Em uma aplicação ao sistema cardiovascular, Srivastava e Saxena (1994) investigaram os efeitos da viscosidade das camadas periféricas nas características fisiológicas do escoamento do sangue através de uma artéria com uma estenose suave. O sangue foi representado por um modelo de dois fluidos, consistindo de uma região central de suspensão de todas as hemácias, representada por um fluido de Casson, e uma camada periférica de plasma, representada por um fluido Newtoniano. Os resultados da simulação mostraram que a resistência ao escoamento e a tensão de cisalhamento na parede decrescem com o decréscimo da viscosidade das camadas periféricas.

Dando prosseguimento aos seus estudos, Srivastava (1996) investigou os efeitos da concentração de hemácias e da camada periférica nas características do escoamento do sangue através de uma estenose suave, para tanto modelando o sangue como uma suspensão de partículas semelhante à do trabalho anteriormente citado. Mostrou que as grandezas características do escoamento aumentam significativamente com a concentração das células, e que a camada periférica causa grande diminuição das grandezas características deste escoamento.

Em um trabalho numérico, Rosenfeld e Einav (1995) estudaram os efeitos da restrição de um canal em um escoamento pulsátil para um escoamento transiente e incompressível de um fluido Newtoniano. Eles verificaram que a jusante da restrição (mesmo para pequenas constrições) surgem vórtices, que são criados em cada ciclo da pulsação, e que se propagam no escoamento até que desaparecem com a aceleração do fluido que chega. A intensidade e o número total de vórtices gerados em cada ciclo aumenta com a gravidade da constrição. Estas simulações podem ser usadas para conceber métodos não invasivos de detecção da gravidade de estenoses em vasos sanguíneos, avaliar o potencial de danos em elementos do sangue e a formação de trombos causada pelos vórtices.

Zendehbudi e Moayeri (1999) apresentaram soluções numéricas para um escoamento pulsátil fisiológico, bem como para um escoamento pulsátil simples equivalente à mesma vazão, e discutiram as diferenças no comportamento dos escoamentos. Eles afirmam que a hipótese de uma parede rígida não deve afetar seriamente os resultados, já que o desenvolvimento de aterosclerose em artérias causa uma considerável redução nas propriedades elásticas da parede. Afirmam também que o sangue se comporta como um fluido Newtoniano nas grandes artérias, especialmente a moderadas taxas de cisalhamento, e que, entretanto, as baixas taxas de cisalhamento requeridas para que o sangue comporte-se como um fluido não Newtoniano existem em regiões de separação do escoamento e durante a fase diastólica no escoamento fisiológico. Isso posto, suas análises restringem-se ao escoamento laminar de um fluido Newtoniano através de uma estenose rígida e axissimétrica. A comparação dos seus resultados mostra que em alguns momentos no tempo o comportamento dos dois escoamentos é semelhante.

Em outro importante artigo, o problema do escoamento pulsátil do sangue através de uma estenose foi resolvido por meio de elementos finitos por Tu et al. (1992), utilizando as equações de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos incompressíveis em um tubo circular rígido apresentando uma constrição parcial. Foram obtidos resultados para escoamentos permanentes e escoamentos fisiológicos pulsáteis. As simulações numéricas analisaram, para um fluido Newtoniano, o efeito da variação do grau da estenose, do comprimento da estenose, do número de Reynolds e do número de Womersley. Seu modelo foi capaz de prever as características hemodinâmicas mais interessantes para os fisiologistas, que são a formação de vórtices nas regiões de separação do escoamento, a queda de pressão ao longo da estenose e a distribuição da tensão de cisalhamento na parede.

Tu e Deville (1996) incorporam no método numérico utilizado anteriormente, além do modelo incompressível de fluido Newtoniano generalizado, os modelos de Power-law, Bingham e Herschel-Bulkley. A geometria utilizada para simular a estenose corresponde a um tubo circular rígido apresentando uma constrição parcial. Os cálculos mostram claramente que os efeitos do comportamento não Newtoniano dos fluidos afetam profundamente os padrões de escoamento em comparação com o caso Newtoniano de referência.

Vários artigos de simulações numéricas demonstram claramente a diferença nos padrões de escoamento para os diferentes tipos de fluidos. Porém, existem lacunas a serem preenchidas no que tange à utilização de modelos não Newtonianos que representem reologicamente o comportamento mecânico do sangue. Portanto, visando a gerar algumas destas informações, o presente trabalho tem por objetivo investigar numericamente, através do método de volumes finitos, o escoamento permanente de um fluido não Newtoniano, com características reológicas próximas às do sangue, através de um tubo que possui uma estenose.

2. Modelagem Matemática

A geometria analisada é mostrada na Figura 1. A geometria representa idealmente uma artéria que possui uma estenose. O escoamento é axissimétrico, isotérmico e em regime permanente. Foram analisados um fluido Newtoniano e um não Newtoniano. Neste último caso, para modelar o comportamento mecânico do material utilizou-se a equação constitutiva de Fluido Newtoniano Generalizado (FNG) (Bird *et al.*, 1987), dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ é o tensor taxa de deformação, definido como $\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$, e \mathbf{v} é o vetor velocidade. η é a função viscosidade,

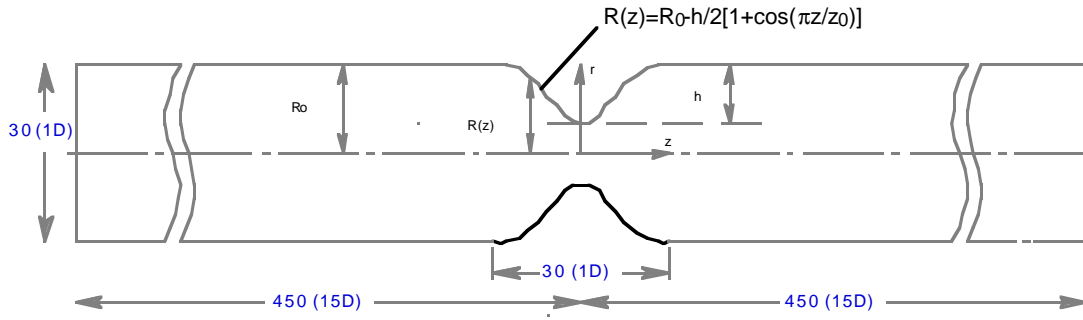


Figura 1: Geometria do problema analisado.

dada pela equação de Herschel-Bulkley:

$$\eta = \begin{cases} \tau_0/\dot{\gamma} + K\dot{\gamma}^{n-1} & \text{se } \tau > \tau_0, \\ \infty & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2)$$

onde τ_0 é a tensão limite de escoamento, $\tau \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr } \boldsymbol{\tau}^2}$ é o módulo de $\boldsymbol{\tau}$, $\dot{\gamma} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr } \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2}$ é o módulo de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, K é o índice de consistência e n é o expoente power-law. Os parâmetros contidos na função viscosidade (τ_0 , K e n) são determinados através do ajuste dos dados experimentais da curva de escoamento ($\tau \times \dot{\gamma}$) por meio do método dos mínimos quadrados. Nota-se que o fluido Newtoniano pode ser considerado um caso particular, onde os parâmetros n e τ_0 valem 1 e 0, respectivamente, e $\mu = K$.

O fenômeno físico é governado pelas equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, em conjunto com a equação constitutiva de fluido Newtoniano generalizado e as condições de contorno apropriadas. A fim de obter as equações na forma adimensional, bem como parâmetros adimensionais representativos, a escolha de grandezas características é extremamente importante. A taxa de deformação característica, $\dot{\gamma}_c$, é definida como sendo aquela na parede, na região de escoamento desenvolvido, antes da estenose, sendo dada por (Soares *et al.*, 1998):

$$\dot{\gamma}_c = \left(\frac{\tau_{RD} - \tau_0}{K} \right)^{1/n} = \frac{\bar{u}}{\bar{u}'R} = \frac{\bar{u}}{R} \frac{n+1}{2n} \left[\frac{1}{2}(1-r'_0) - \frac{n}{2n+1}(r'_0)(1-r'_0)^2 - \frac{n}{3n+1}(1-r'_0)^3 \right]^{-1} \quad (3)$$

onde τ_{RD} é a tensão de cisalhamento na parede na mesma região de escoamento desenvolvido antes da estenose, a qual pode ser facilmente relacionada com a queda de pressão através de um balanço de forças:

$$\tau_{RD} \equiv -[\tau_{rx}(R)] = -\frac{dp}{dx} \frac{R}{2} = \frac{\Delta p}{L} \frac{R}{2}, \quad (4)$$

onde p é a pressão, x é a coordenada axial, R é o raio do tubo e L é um comprimento do tubo na região desenvolvida, em cujos extremos se calcula a diferença de pressão Δp . A viscosidade característica é dada por $\eta_c \equiv \eta(\dot{\gamma}_c)$.

As equações adimensionais de conservação de massa e momentum são dadas por:

$$\text{div } \mathbf{v}' = 0 \quad (5)$$

$$\text{grad } \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = -\text{grad } p' + \frac{\bar{u}'}{Re} \text{div}(\eta' \text{grad } \mathbf{v}') \quad (6)$$

Nestas equações, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/R\dot{\gamma}_c$, $x' = x/R$, $r' = r/R$, $p' = p/\rho(R\dot{\gamma}_c)^2$ e $\eta' = \eta/\eta_c$. A taxa de deformação e tensão adimensionais valem respectivamente $\dot{\gamma}' = \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c$, $\tau' = \tau/\tau_R$. O número de Reynolds é definido como:

$$Re \equiv \frac{2\rho\bar{u}R}{\eta_c} = \frac{2\rho(\bar{u}')^{n-1}(\bar{u}')^{2-n}R^n}{K + \tau_0\left(\frac{\bar{u}'}{\bar{u}}\right)^n} \quad (7)$$

As condições de contorno utilizadas são as de não deslizamento na parede, simetria na linha de centro, perfil de velocidade uniforme na entrada do tubo e difusão nula na saída:

$$\frac{\partial u'}{\partial r'}(0, x') = 0, v'(0, x') = 0, u'(1, x') = 0, v'(1, x') = 0, \quad (8)$$

$$u'(r', 0) = \bar{u}', v'(r', 0) = 0, \frac{\partial u'}{\partial x'}(r', L') = 0, \frac{\partial v'}{\partial x'}(r', L') = 0, \quad (9)$$

onde $L' \equiv L/R$ é o comprimento adimensional do tubo.

2.1 Modelo de bi-viscosidade

É difícil lidar numericamente com a função viscosidade apresentada na forma descrita pela eq. (2). A abordagem usual em esquemas numéricos para escoamentos de plásticos de Bingham é substituir o modelo de Herschel-Bulkley por uma outra função viscosidade, conhecida como modelo de bi-viscosidade (Beverly e Tanner, 1992). Esta idéia pode ser facilmente estendida para materiais de Herschel-Bulkley, resultando na seguinte representação aproximada da função viscosidade, na forma adimensional:

$$\eta' = \begin{cases} r'_0/\dot{\gamma}' + (1 - r'_0)\dot{\gamma}'^{n-1} & \text{se } \dot{\gamma}' > \dot{\gamma}'_{pequeno} \\ \eta'_{grande} & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (10)$$

Para o caso de materiais de Bingham, Beverly e Tanner (1992) recomendam $\eta'_{grande} = 1000$. Emprega-se esse valor aqui também. Assim, $\dot{\gamma}'_{pequeno} = r'_0/(1000 - (1 - r'_0)\dot{\gamma}'^{n-1}_{pequeno}) \approx r'_0/1000$.

3. Solução numérica

As equações de conservação descritas acima foram discretizadas utilizando o método de volumes finitos descrito por Patankar (1980), usando um esquema de diferenças centrais. Os resultados numéricos foram obtidos utilizando o programa FLUENT (Fluent Inc.).

A fim de validar a solução numérica, alguns testes foram realizados. O valor obtido para o produto entre o fator de atrito e o número de Reynolds, $fRe^* = -(2(dp/dx)D^2)/(\eta_c u_m)$ para o fluido Newtoniano foram comparados com o valor disponível na literatura, $fRe^* = 64$. Para uma malha com 242×82 pontos nodais (241×81 volumes de controle) nas direções axial e radial, os erros obtidos foram inferiores a 2% em todos os casos. Os valores de fRe para um material viscoplastico foram comparados com os valores obtidos com uma malha mais fina na direção axial (384×82) e a diferença foi inferior a 3%. Assim, utilizou-se a malha 242×82 .

4. Resultados e discussão

O efeito do número de Reynolds e do número de escoamento desenvolvido anterior à estenose ($Y_a = \tau_0/\tau_{RD}$), no padrão de escoamento e no número de escoamento depois da estenose ($Y = \tau_0/\tau_R$, onde τ_R é a tensão de cisalhamento local na parede) são mostrados nas Figuras abaixo e depois discutidos.

No presente trabalho, utilizaram-se os seguintes valores para os parâmetros da curva representativa da estenose (Fig. 1): $R_0 = 15$ mm, $h = 7.5$ mm e $x_0 = 15$ mm, o que representa uma redução de 75% em área, que é considerado um caso crítico pela literatura clínica.

Para fazer comparações com o escoamento do sangue em artérias reais, é importante determinar quais os números de Reynolds característicos desses escoamentos, bem como os parâmetros reológicos do sangue. A fim de simular casos de interesse real, foram simulados casos para uma faixa de números de Reynolds indo de 0.1 a 500. Em um estudo do escoamento de um fluido de Casson através de artérias com estenose, Srivastava (1994) observou que os números de Reynolds e o número de escoamento (Y) podem variar, respectivamente de 0.161 e 2.7×10^{-3} (nas arteríolas) a 1000 e 4×10^{-3} (nas coronárias). Note-se que a magnitude do número de escoamento do sangue nessas artérias é muito pequena, sendo até desprezível. Como esse adimensional representa a competição entre a suposta tensão necessária para que o sangue comece a escoar e as tensões reais envolvidas no escoamento, pode-se concluir que, no escoamento do sangue em artérias saudáveis, o fato do sangue possuir uma tensão limite de escoamento em muito pouco o diferencia de um fluido que não possui nenhuma tensão limite de escoamento. De modo que, para essa configuração geométrica e levando em consideração apenas esse parâmetro, é indiferente modelar o sangue como um fluido que possui ou não uma tensão limite de escoamento. Porém, nada se pode inferir dessa discussão quanto ao comportamento mecânico do sangue ao escoar em uma geometria mais complexa do que a idealizada por um duto de seção reta circular. Sabe-se, por exemplo, que no escoamento em artérias com uma estenose, ocorrem recirculações no escoamento, e, conseqüentemente, regiões onde as tensões envolvidas são bastante baixas. Nessas regiões, a existência de uma tensão limite de escoamento no sangue pode ser decisiva na formação de trombos no escoamento. Portanto, na missão de obter resultados numéricos ou experimentais que possam vir a fornecer informações quanto a dispositivos nos quais serão realizados escoamentos em geometrias complexas, nada deve ser desconsiderado no que tange à reologia do sangue.

Os parâmetros do material foram definidos de acordo com dados de Picart et al. (1998), que recentemente examinaram as propriedades de escoamento do sangue humano usando um viscosímetro de cilindros concêntricos de parede rugosa, a fim de eliminar os consideráveis efeitos de deslizamento encontrados em paredes lisas. Eles apresentam uma excelente

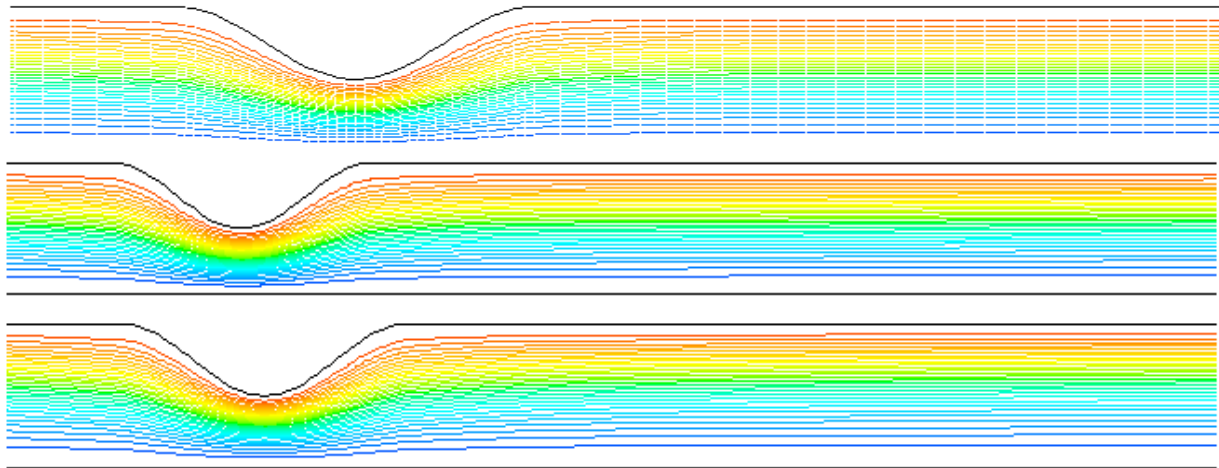


Figura 2: Linhas de corrente, $Re=0.1$, Newtoniano, $Y_a = 0.5$ e $Y_a = 0.8$.

revisão da tensão limite de escoamento do sangue, e apontam as dificuldades em se obter tal grandeza. Ajustaram-se os dados experimentais do sangue de hematócrito 54% de Picart et al. (1998) por meio do modelo de Herschel-Bulkley, obtendo-se excelente concordância com os valores dos parâmetros reológicos iguais a $\tau_0=2.55$ Pa, $K=59.5$ Pa.s^{1/(n-1)} e $n =0.539$, que foram os valores utilizados nas simulações.

Nas Figs. 2 a 6 são mostradas as linhas de corrente para números de Reynolds iguais a 0.1, 10, 100 e 500, e para o fluido Newtoniano e dois casos não Newtonianos, com diferentes números de escoamento na região desenvolvida ($Y_a =0.5$ e 0.8). Nota-se que os padrões de escoamento diferem para os três fluidos analisados. Observa-se que com o aumento do número de Reynolds, começam a aparecer vórtices na região posterior a estenose. A intensidade dos vórtices cresce com o número de Reynolds e cai com o número de escoamento. Para baixos valores do número de Reynolds, o escoamento é bem comportado, não ocorrendo recirculação. O ponto de recolamento ($x'_r = x_r/R$) para os casos que apresentam recirculação, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Ponto de recolamento

Re	$x'_r(Y_a = 0)$	$x'_r(Y_a = 0.5)$	$x'_r(Y_a = 0.8)$
100	5.14	2.53	1.9
300	13.13	6.32	4.59
500	20.73	9.93	7.17

É importante notar que na região da recirculação, que ocorre após a estenose, as tensões cisalhantes próximas à parede atingem valores mais baixos. Logo, o número de escoamento local ($Y = \tau_0/\tau_R$) nestas regiões é elevado, sendo bem maiores que os do número de escoamento desenvolvido. Portanto, nestas regiões o efeito da tensão limite de escoamento não deve ser desprezado e a hipótese de considerar o sangue como um fluido Newtoniano pode não ser satisfatória.

5. Conclusões

Pode-se perceber dos resultados numéricos acima explorados que os padrões de escoamento são diferentes caso o escoamento se dê com um fluido Newtoniano ou um fluido não Newtoniano. Observou-se que nestes casos o sangue deve ser tratado como um material viscoplástico. Particularmente para o caso de estenoses causadas por ateroscleroses, porém considerando a validade dos argumentos para estenoses que ocorrem por simples estrangulamento das artérias, é importante citar que o significado fisiológico das zonas de recirculação é que o escoamento se torna estagnado nestas áreas, e que as placas de gordura tendem a se acumular, agravando mais a estenose. Também, a combinação de altas e baixas tensões de cisalhamento nestas regiões pode ser a causa da destruição das hemácias, com liberação da hemoglobina tóxica na corrente sanguínea, e da formação de trombos, responsáveis por grande parte dos ataques do coração.

O estudo de artérias normais, suas junções, bifurcações, curvaturas, etc, revela onde é maior a probabilidade do surgimento de placas ateroscleróticas. Uma vez formadas, duas conseqüências importantes devem ser observadas. A primeira é que o lumen dos vasos afetados é alterado, geralmente no sentido do estreitamento do vaso, o que compromete o escoamento através dos mesmos, reduzindo assim o fornecimento de sangue para o resto da rede arterial. E a segunda é que a alteração do escoamento nesses vasos afetados muda o carregamento (as tensões de cisalhamento e as pressões)

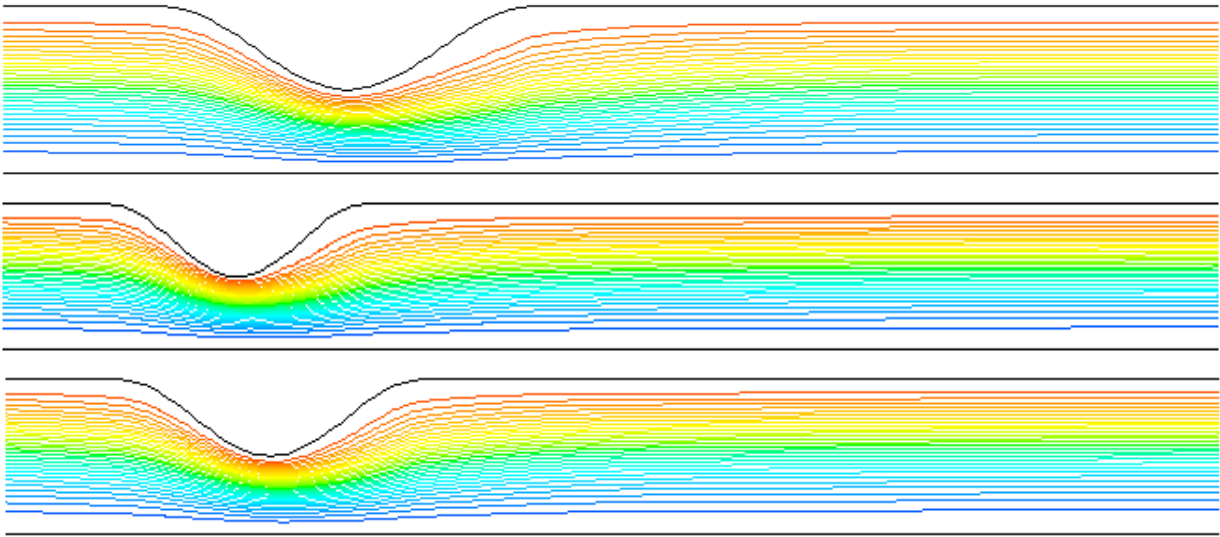


Figura 3: Linhas de corrente, $Re=10$, Newtoniano, $Y_a = 0.5$ e $Y_a = 0.8$.

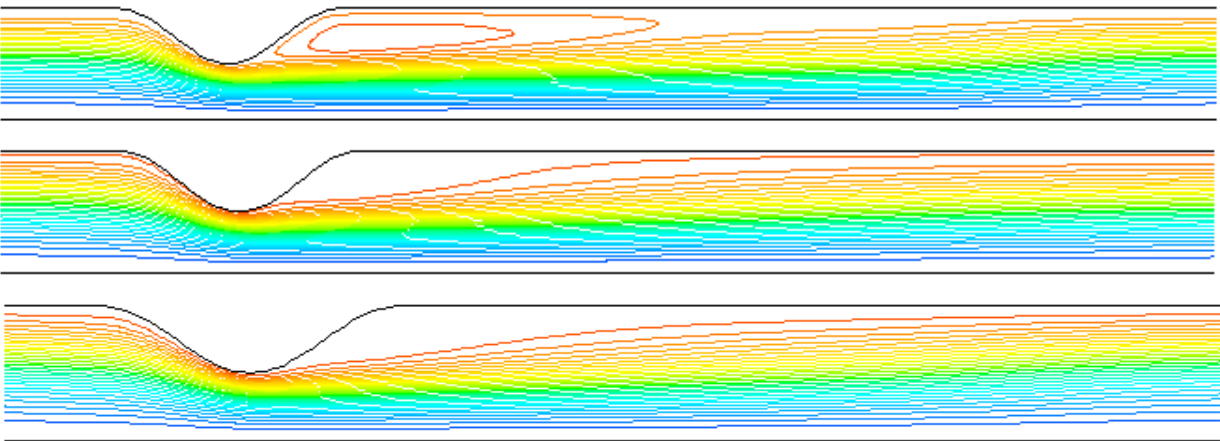


Figura 4: Linhas de corrente, $Re=100$, Newtoniano, $Y_a = 0.5$ e $Y_a = 0.8$.

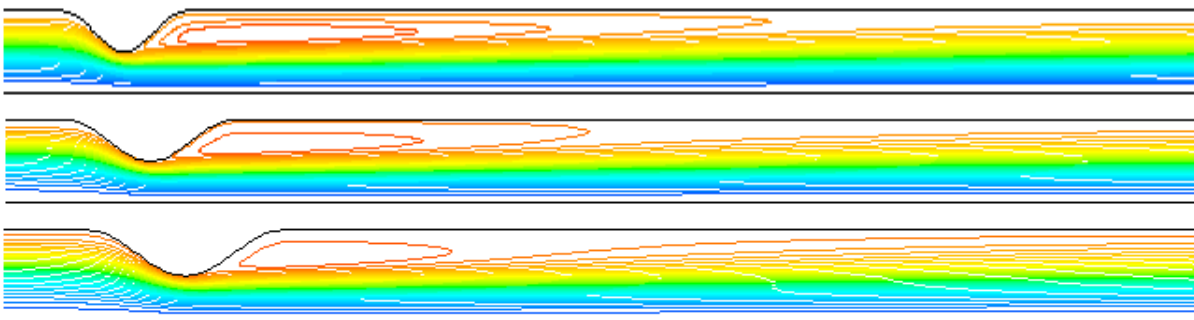


Figura 5: Linhas de corrente, $Re=300$, Newtoniano, $Y_a = 0.5$ e $Y_a = 0.8$.

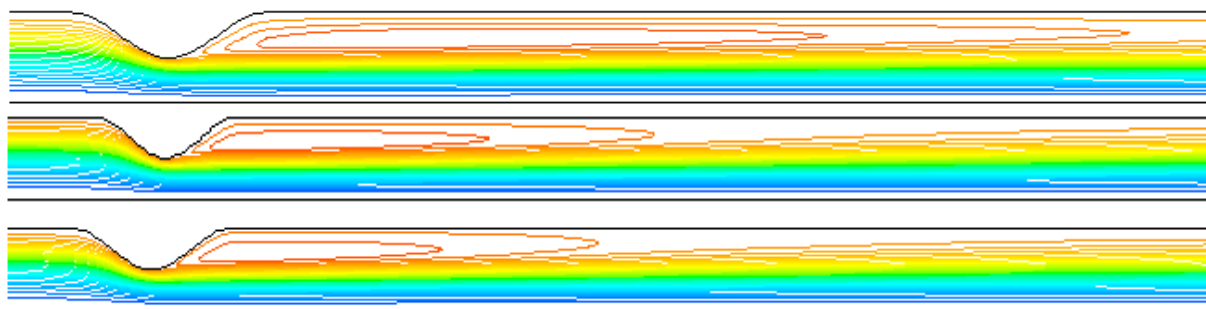


Figura 6: Linhas de corrente, $Re=500$, Newtoniano, $Y_a = 0.5$ e $Y_a = 0.8$.

do fluido na parede arterial, e como resultado afeta tanto a progressão da lesão quanto a sua tendência à fratura e posterior ruptura.

Observou-se que os números de escoamento característicos das artérias são suficientemente pequenos para, em um julgamento superficial, considerar irrelevantes os efeitos da tensão limite de escoamento do sangue no padrão de escoamento. Entretanto, dos resultados apresentados no presente artigo depreende-se que, na região de recirculação a jusante da estenose (justamente onde há o risco de formação de trombos), o nível de tensão pode ser muito mais baixo que nas outras regiões do escoamento. Ou seja, nesta região, a tensão limite de escoamento é comparável às tensões no fluido, e por isso o padrão de escoamento resultante é muito distinto do observado em escoamentos de fluidos Newtonianos. Portanto, qualquer conclusão a respeito de formação de trombos que se baseie em estudos que utilizaram fluidos Newtonianos deve ser examinada com muito cuidado antes de ser aceita.

6. Agradecimentos

O presente projeto de pesquisa é parcialmente financiado pelo CNPq, FAPERJ e MCT.

7. Referências

- Beverly C R, R I Tanner 1992, Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 42, 85–115.
- Engvall, J., Ask, P., Loyd, D., Wranne, B., 1991, Coarctation of the aorta — a theoretical and experimental analysis of the effects of a centrally located arterial stenosis, *Medical & Biological Engineering & Computing*, v. 29, n. 3.
- Gijssen, F. J. H., Palmen, D. E. M., van der Beek, M. H. E., van der Vosse, F. N., van der Dongen, M. E. H., Janssen, J. D., 1996, Analysis of the axial flow field in stenosed carotid artery bifurcation models — LDA experiments, *Journal of Biomechanics*, vol. 29, n. 11, Pergamon Press Ltd.
- Gijssen, F. J. H., Goijaerts, A., van der Vosse, F. N., Janssen, J. D., 1997, A new method to determine wall shear stress distribution, *Journal of Rheology*, vol. 41, n. 5, The Society of Rheology Inc.
- He, X., Ku, D. N., 1996, Pulsatile flow in the human left coronary artery bifurcation: average conditions, *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 118, pg. 74-82.
- Heinrich, R. S., Fontaine, A. A., Grimes, R. Y., Sidhaye, A., Yang, S., Moore, K. E., Levine, R. A., Yoganathan, A. P., 1996, Experimental analysis of fluid mechanical energy losses in aortic valve stenosis: importance of pressure recovery, *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 24, n. 6, Blackwell Science Inc.
- Lim, W. L., Chew, Y. T., Chew, T. C., Low, H. T., 1998, Steady flow dynamics of prosthetic aortic heart valves: a comparative evaluation with PIV techniques, *Journal of Biomechanics*, vol. 31, n. 5, Elsevier Science Ltd.
- Luo, X. Y., Kuang, Z. B., 1992, Non-Newtonian flow patterns associated with an arterial stenosis, *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 114, n. 4, Transactions of the ASME.
- Picart, C., Piau, J. M., Galliard, H., 1998, Human blood shear yield stress and its hematocrit dependence, *Journal of Rheology*, 42(1), The Society of Rheology, Inc.
- Rosenfeld, M., Einav, S., 1995, The effect of constriction size on the pulsatile flow in a channel, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 117.
- Siouffi, M., Deplano, V., Pelissier, R., 1998, Experimental analysis of unsteady flows through a stenosis, *Journal of Biomechanics*, vol. 31, n. 1, Elsevier Science Ltd.
- Soares, M., Naccache, M. F., Souza Mendes, P. R., 1999, Heat transfer to viscoplastic materials flowing laminarily in the entrance region of tubes, *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 20, p. 60-67, Elsevier Science Inc.
- Srivastava, V. P., 1994, Two-layered model of Casson fluid flow through stenotic blood vessels: applications to the cardiovascular system, *Journal of Biomechanics*, vol. 27, n. 7, Pergamon Press Ltd.
- Srivastava, V. P., 1996, Two-phase model of blood flow through stenosed tubes in the presence of a peripheral layer: applications, *Journal of Biomechanics*, vol. 29, n. 10, Pergamon Press Ltd.
- Sung, H., Philpot, E. F., Nanda, N. C., Yoganathan, A. P., 1990, Axial flow velocity patterns in a pulmonary artery model with varying degrees of valvular pulmonic stenosis. Pulsatile in vitro studies, *Journal of Biomechanics*, vol. 23, n. 6, Elsevier Science Ltd.

- Tu, C., Deville, M., Dheur, L., van der Schuren, L., 1992, Finite element simulation of pulsatile flow through arterial stenosis, *Journal of Biomechanics*, vol. 25, n. 10, Elsevier Science Ltd.
- Tu, C., Deville, M., 1996, Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenoses, *Journal of Biomechanics*, vol. 29, n. 7, Pergamon Press Ltd.
- Zendehbudi, G. R., Moayeri, M. S., 1999, Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries, *Journal of Biomechanics*, vol. 32, n. 9, Elsevier Science Ltd.

YIELD STRESS FLUID FLOW THROUGH TUBES WITH STENOSIS

Mônica F. Naccache

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica-Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brasil
naccache@mec.puc-rio.br

Paulo R. Souza Mendes

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica-Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brasil
pmendes@mec.puc-rio.br

Erick F. Q. A. Coelho

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica-Rio de Janeiro, RJ 22453-900, Brasil
erick@mec.puc-rio.br

Abstract. In this work we perform finite-volume computation to study the flow of an yield-stress liquid through a tube in the neighborhood of an axisymmetric constriction. This problem is similar to that one that occurs in blood flow through arteries with stenosis. Stenosis is a constriction or narrowing of a duct or passage. A stenotic vessel generally causes blood flow stagnation and hence formation of thrombus, which may be rather harmful to the human physiology. The rheology of the liquid was chosen to be close to the one of blood with 55% hematocrit. Reynolds and Yield number values characteristic to different arteries have been studied. Results for a Newtonian liquid were also obtained, for comparison purposes. Among other findings, it has been observed that the non-Newtonian rheology causes a significant change in the flow pattern in the neighborhood of the stenosis. Because the conditions for thrombus formation are directly related to the flow pattern, studies of the flow through stenotic vessels that assume a Newtonian rheology may lead to erroneous conclusions.

Keywords: Viscoplastic materials, yield stress, blood flow, stenosis.

SLOT COATING OF VISCOELASTIC LIQUIDS

Oldrich Joel Romero

Department of Mechanical Engineering
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente, 225
Gávea, Rio de Janeiro, RJ, 22453-900
oldrich@mec.puc-rio.br

Márcio da Silveira Carvalho

Department of Mechanical Engineering
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente, 225
Gávea, Rio de Janeiro, RJ, 22453-900
msc@mec.puc-rio.br

Slot coating is largely used in the manufacturing process of different products. The thickness of the coated layer is set by the prescribed flow rate fed into the die and it is independent of the process variables. An important operating limit for slot coating is the minimum thickness that can be coated at a given substrate speed, generally referred to as the low-flow limit. The mechanism that defines this limit is the balance between viscous, capillary and inertial forces in the flow. Although, most of the liquids used in the coating industry are non Newtonian, the previous analyses were limited to Newtonian liquids. In this work, the low-flow limit in slot coating of non Newtonian liquids is examined both by theory and experiments. The theoretical approach consisted of solving the two-dimensional momentum and continuity equation coupled with an algebraic non Newtonian model that relates stress to the rate-of-strain and relative-rate-of-rotation. The experimental investigation was done by flow visualization and determination of the operating conditions at which the flow becomes unstable. Different polymeric solutions of water, PEG and PEO were used in order to evaluate the effect of the viscoelastic behavior of the coating liquid in the limits of the process

Keywords: slot coating, low flow limit, viscoelastic liquids, finite element method

1. Introduction

Slot coating is largely used in the manufacturing process of many different products such as adhesive and magnetic tapes, paper, imaging films, and many others. Figure 1 shows a two-dimensional cross section of a slot coating bead. The coating liquid is pumped through the feed slot and bridges between the coating die and the substrate, forming the coating bead. The coating bead is surrounded by two gas-liquid interfaces. It is clear that physics sets the operating parameters at which this two-dimensional free surface flow exists. In order to sustain the coating bead at higher speeds, vacuum is usually applied on the back of the upstream meniscus (Beguin, 1954).

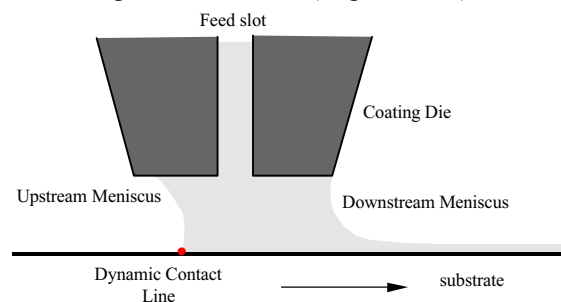


Figure 1: Cross section of the coating bead of a slot coater.

This method belongs to a class of coating methods known as *pre-metered coating*: The thickness of the coated liquid layer is set by the prescribed flow rate fed into the coating die and it is independent of the process variables, making this class of method ideal for high precision coating. However, the liquid flow in the application region (coating bead), and therefore the quality of the coated film, is strongly affected by operating parameters such as line speed, liquid properties and the geometry of the die. The region of acceptable coating quality in the space of operating parameters of a coating process is usually referred to as *coating window*. It is very important to determine coating windows for the different coating methods in order to predict whether a given method can be used to coat a product at a prescribed production rate. An important operating limit for slot coating is the minimum film thickness that can be coated at a given substrate speed, generally referred to as the low-flow limit. The basic mechanism that defines this limit is the balance between viscous, capillary and inertial forces in the downstream meniscus. Higgins & Scriven (1980) extended the work of Ruschak (1976) and analyzed the operating parameters at which capillary and viscous forces could be balanced over a two-dimensional cross section of the coating bead of a slot coater. Their viscocapillary model was able to predict well the critical conditions at which the low flow limit occurs at low capillary number and

Reynolds number. The theoretical model of low flow limit was recently extended by Carvalho and Kheshgi (2000) to high capillary number and finite inertial forces. In order to capture these effects, they could not use lubrication approximation and had to solve the complete Navier-Stokes equation with free surface. The results showed that inertia can stabilize the coating bead and delay the onset of the low flow limit.

Although most of the liquids used in the coating industry are non Newtonian, the previous analyses were limited to Newtonian liquids. The rheological properties of the liquid change the force balance near the free surfaces and consequently the operating parameters at which the two-dimensional steady flow becomes unstable.

In this work, the low-flow limit in slot coating of non Newtonian liquids is examined both by theory and experiments. The theoretical approach consisted of solving the two-dimensional momentum and continuity equation with free surface coupled with an algebraic non Newtonian model that relates stress to the rate-of-strain and relative-rate-of-rotation (Thompson et al. ,1999). This class of models is perhaps the simplest and computationally most economical attempt at capturing the different behavior of polymer molecules in extension-dominated and shear-dominated flow zones. The system of differential equations was solved by the Galerkin / finite element method. At each operating condition (liquid properties, coating gap and web speed), first-order, pseudo-arc-length continuation was used to construct a solution path as the flow rate fed into the die was diminished or the web speed raised. The low flow limit corresponded to the parameters at which a turning point on the solution path occurred. The experimental procedure followed a path similar to the theoretical calculations. A coating bead was established at each condition. Then, the flow rate into the die was slowly decreased until the coated layer broke into stripes of coated and uncoated web. At each condition, the position of the downstream and upstream free surface was visualized in order to verify the instability mechanism. Different polymeric solutions of water, PEG and PEO were used in order to evaluate the effect of the viscoelastic behavior of the coating liquid in the limits of the process.

2. Theoretical Formulation

The location of the upstream and downstream free surface is unknown a priori and it is part of the solution of the problem. The Navier-Stokes system for viscous free surface flows is described in detail by Kistler and Scriven (1983). This section describes the governing equations, the non Newtonian constitutive model used and lays out the boundary conditions.

2.1. Governing Equations and Boundary Conditions

Figure 2 shows the domain used in this analysis. The velocity and pressure fields are governed by the momentum and continuity equations, which in dimensionless form are

$$\text{Re } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

For a Newtonian liquid, the total stress is $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$. The constitutive model used here to describe the rheological behavior of the liquid is discussed in the following section. The Reynolds number $\text{Re} = \tau V H_0 / m$ measures the ratio of inertia to viscous forces. V is the web velocity, H_0 is the gap, i.e. the distance between the coating die and the substrate.

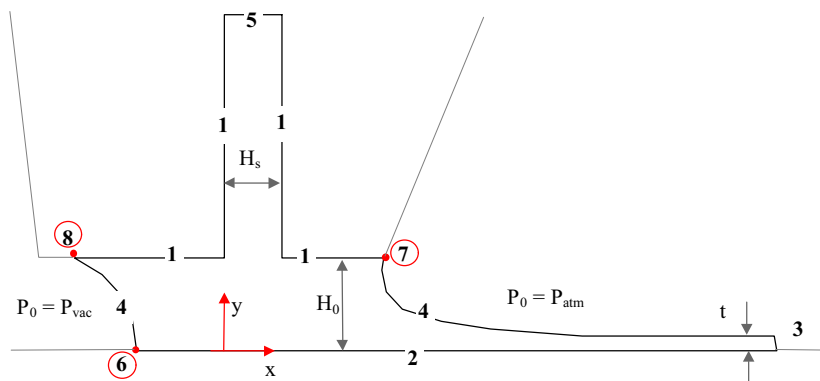


Figure 2: Flow domain with boundary conditions.

The no-slip and no-penetration conditions applies at the die walls and at the substrate:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \text{at the die walls (1)} \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = V \mathbf{i}, \quad \text{at the substrate (2)} \tag{3}$$

V is the web speed. At the outflow plane (3), the directional derivative of velocity is set to zero:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

At the free surfaces (4), the traction in the liquid balances the capillary pressure and there is no mass flow across the gas-liquid interface:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{Ca} \frac{dt}{ds} - \mathbf{n} P_0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

\mathbf{t} is the unit vector tangent to the interface and P_0 is the pressure of the air. At the downstream free surface, the air pressure is usually atmospheric, i.e. $P_0 = P_{ATM}$. At the upstream gas-liquid interface, vacuum is usually applied in order to stabilize the coating bead, i.e. $P_0 = P_{VAC}$. The Capillary number $Ca = \mu V / \sigma$ measures the ratio between viscous and capillary forces (σ is the liquid surface tension).

At the inflow plane (5), i.e. at the die feeding slot, the flow is assumed to be fully developed:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} = -\frac{6Q}{H_s} \left[\left(\frac{x}{H_s} \right) - \left(\frac{x}{H_s} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Q is the flow rate fed into the coating die. It defines the thickness t of the liquid layer deposited onto the substrate: $t = Q / V$.

At the dynamic contact line (6), the Navier slip condition was used instead of the no-slip condition and a dynamic contact angle $\alpha_d = 110^\circ$ was imposed:

$$\frac{1}{b} \mathbf{t}_w \cdot (\mathbf{v} - V \mathbf{i}) = \mathbf{t}_w \cdot (\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{T}); \quad \mathbf{n}_w \cdot \mathbf{n}_{fs} = \cos(\alpha_d) \quad (7)$$

b is the slip coefficient, \mathbf{t}_w and \mathbf{n}_w are the unit tangent and normal vector to the wall, and \mathbf{n}_{fs} is the unit vector normal to the free surface.

The static contact line attached to the downstream free surface (7) is pinned at the sharp edge of the die, i.e. the position \mathbf{x}_{sd} of the downstream static contact line is fixed:

$$\mathbf{x}_{sd} = \mathbf{X}_{edge}. \quad (8)$$

The upstream static contact line (8) is free to move along the die face, i.e. the y-coordinate of the upstream static contact line is fixed. In this case, the static contact angle α_s of the free surface with the die face has to be specified:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}_{su} = H_0; \quad \mathbf{n}_w - \mathbf{n}_{fs} = \cos(\alpha_s). \quad (10)$$

2.2. Constitutive Model

The constitutive relation proposed by Thompson et al. (1999) is used here. The stress tensor \mathbf{T} is a function of both the rate-of-deformation tensor \mathbf{D} and the relative-rate-of-rotation tensor $\overline{\mathbf{W}}$. The latter is defined as

$$\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{\Omega},$$

where $\mathbf{W} \equiv [\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T] / 2$ is the vorticity tensor, and $\mathbf{\Omega}$ is a tensor related with the rate of rotation of the rate of strain $\mathbf{D} \equiv [\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T] / 2$ following the liquid particle motion. Based on the rate-of-deformation and relative-rate-of-rotation tensors, Astarita (1979) defined the flow classification index R to measure the degree to which the fluid particle avoids stretching. It is defined as

$$R \equiv \frac{\text{tr}(\overline{\mathbf{W}}^2)}{\text{tr}(\mathbf{D}^2)}.$$

The index takes the value of 0 in pure extension and 1 in shear flows. Moreover, as the motion approaches a rigid body motion, i.e. as $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{0}$, it approaches infinity.

As shown by Thompson et al. (1999), the simplified constitutive equation of this type that still has the capability of fitting independently rheological data for shear material functions and for extensional viscosity is

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + a_1\mathbf{D} + a_2\overline{\mathbf{W}}^2 + a_4(\mathbf{D}\cdot\overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{D}). \quad (11)$$

The coefficients a_i depend on the material functions of the liquid:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2h_s^R h_e^{(1-R)} \\ a_2 &= -2f(R)[\gamma_1 + 2\gamma_2] \\ a_4 &= f(R)\gamma_1 \end{aligned}$$

h_s is the shear viscosity, h_e is the extensional viscosity, and γ_1 and γ_2 are the first and second normal stress coefficient.

2.3. Solution Method

The differential equations (1) are posed in an unknown domain; the position of the liquid free surface is part of the solution. A simple way of solving this type of problem is to use a Picard iteration, i.e. solve the flow and the domain position separately. This procedure is not very efficient and in most cases the iteration does not converge. To compute a free boundary problem, like this one, in a more efficient way, the set of differential equations posed in the unknown physical domain has to be transformed to an equivalent set defined in a known reference domain, usually called computational domain. This transformation is made by a mapping $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ that connects the two domains, as sketched in Fig.3. The mapping used here is the one presented by de Santos (1991). He showed that a functional of weighted smoothness can be used successfully to construct the sorts of maps involved here. The inverse of the mapping that minimizes the functional is governed by a pair of elliptic differential equations identical with those encountered in diffusion transport with variable diffusion coefficients. The coordinates x and h of the reference domain satisfy

$$\nabla \cdot (D_x \nabla x) = 0; \quad \nabla \cdot (D_h \nabla h) = 0. \quad (12)$$

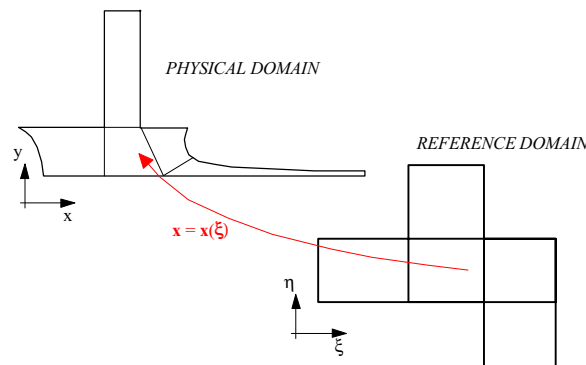


Figure 3: Mapping from the reference domain to the physical domain.

Boundary conditions are needed in order to solve the second-order partial differential equations (12). Along solid walls and synthetic inlet and outlet plates, the boundary is located by imposing a relation between the coordinates x and y from the equation that describes the shape of the boundary and stretching functions are used to distribute the points along the boundaries. The free boundaries (gas-liquid interfaces) are located by imposing the kinematic condition (eq.5-b). The discrete versions of the mapping equations are generally referred to as mesh generation equations.

The differential equations that govern the problem, (1-12), were solved all together with the finite element / Galerkin's method. The velocity, pressure and node position are represented in terms of basis functions:

$$\begin{aligned} u &= \sum U_j \mathbf{e}_j; & v &= \sum V_j \mathbf{e}_j; & p &= \sum P_j \mathbf{y}_j; \\ x &= \sum X_j \mathbf{e}_j; & y &= \sum Y_j \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Because the stress tensor depends on the second derivative of the velocity field (through the definition of the index R), an additional variable \mathbf{L} is introduced to represent the velocity gradient with a continuous interpolation. It is also represented in terms of basis functions:

$$L_{xx} = \sum L_{xxj} z_j; \quad L_{xy} = \sum L_{xyj} z_j; \quad L_{yy} = \sum L_{yyj} z_j.$$

Biquadratic basis functions were used for the velocity and nodes coordinates, bilinear basis functions were used for the interpolated velocity gradient, and linear discontinuous functions for the pressure. The corresponding weighted residuals of the Galerkin's method are:

$$\begin{aligned}
 R_{mx}^i &= \int_{\bar{\Omega}} \left\{ r f_i \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial f_i}{\partial y} T_{xy} \right\} \| \mathbf{J} \| d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) \varepsilon_i \frac{d\Gamma}{d\bar{\Gamma}} d\bar{\Gamma} \\
 R_{my}^i &= \int_{\bar{\Omega}} \left\{ r f_i \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x} T_{xy} + \frac{\partial f_i}{\partial y} T_{yy} \right\} \| \mathbf{J} \| d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) \varepsilon_i \frac{d\Gamma}{d\bar{\Gamma}} d\bar{\Gamma} \\
 R_{mx}^i &= \int_{\bar{\Omega}} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}_i \| \mathbf{J} \| d\bar{\Omega} \\
 R_L^i &= \int_{\bar{\Omega}} \{ \mathbf{L} - \nabla \mathbf{u} \}_{z_i} \| \mathbf{J} \| d\bar{\Omega} \\
 R_X^i &= \int_{\bar{\Omega}} - \{ D_x \nabla_x \cdot \nabla f_i \} \| \mathbf{J} \| d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} D_x (\mathbf{n} \cdot \nabla_x) \varepsilon_i \frac{d\Gamma}{d\bar{\Gamma}} d\bar{\Gamma} \\
 R_Y^i &= \int_{\bar{\Omega}} - \{ D_h \nabla_h \cdot \nabla f_i \} \| \mathbf{J} \| d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Gamma}} D_h (\mathbf{n} \cdot \nabla_h) \varepsilon_i \frac{d\Gamma}{d\bar{\Gamma}} d\bar{\Gamma}
 \end{aligned}$$

Once all the variables are represented in terms of the basis functions, the system of partial differential equations reduces to simultaneous algebraic equations for the coefficients of the basis functions of all the fields. This set of equations is non-linear and sparse. It was solved by Newton's method:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{(k+1)} &= \mathbf{u}_{(k)} + \delta \mathbf{u} \\
 \mathbf{J}(\delta \mathbf{u}) &= -\mathbf{R}
 \end{aligned}$$

\mathbf{u} is the vector of the unknowns coefficients of the basis functions for the velocity, pressure and nodal positions. \mathbf{R} is the vector of weighted residuals, and \mathbf{J} is the Jacobian matrix of sensitivities of the residuals to the unknowns. The linear system of equations at each Newton iteration was solved using a frontal solver.

3. Results

The dimensionless parameters that govern the flow in a slot coating bead are:

- Gap to film thickness ratio: $G \equiv \frac{H_0}{t}$
- Reynolds Number: $Re \equiv \frac{rVH_0}{\mu}$
- Capillary Number: $Ca \equiv \frac{\mu V}{\sigma}$
- Vacuum Pressure: $V_{ac} = \frac{P_{vac} H_0}{\sigma}$
- Dimensionless Slot Height: $S = \frac{H_s}{H_0}$
- Deborah Number: $De = \frac{1V}{H_0}$, for the case of non Newtonian liquids.

Because the predictions presented here are in the parameter range at which inertial effects are negligible, the Reynolds number was set to zero.

3.1. Newtonian Liquid

The complete two dimensional solution of the flow in a slot coating bead for Newtonian liquid and the determination of the critical conditions at the onset of the low flow limit was presented by Carvalho and Keshghi (2000). The kinematic characteristics of this flow are discussed here and serve as base for comparison to the non Newtonian cases.

Figure 4 illustrates the streamlines, deformation rate and flow classification index R at $Ca = 0.33$ and $H_0/t = 5$, i.e. the final film thickness is one-fifth of the gap between the substrate and the die. The flow under the two die lands is almost rectilinear and because of the high gap to thickness ratio, there is a big recirculation underneath the upstream die lip. This flow presents regions of low deformation rate (second invariant of the deformation tensor), in the feeding slot and in the coated layer, and regions of extremely high deformation rate, near the dynamic contact line and under the downstream meniscus. As mentioned before, the force balance near the downstream free surface determines the onset of the low flow limit. The type of deformation experienced by the liquid in this region can be determined by the flow classification index R , as shown in Fig.4-c. This figure illustrates the field of R together with the first principal direction (eigenvector) of the deformation rate tensor multiplied by the first eigenvalue. As expected, in the coated

liquid layer, where the flow approaches a plug flow, the deformation vanishes. Under the downstream die land, $R \approx 1$ and the principal direction is in a 45 degree angle with respect to the flow direction, indicating a shear dominated flow. At the center of the recirculation, $R \rightarrow \infty$ indicating a solid body motion, as expected. The flow close to the free surface is dominated by extension. The eigenvector of the deformation rate tensor is aligned with the flow and $R \rightarrow 0$.

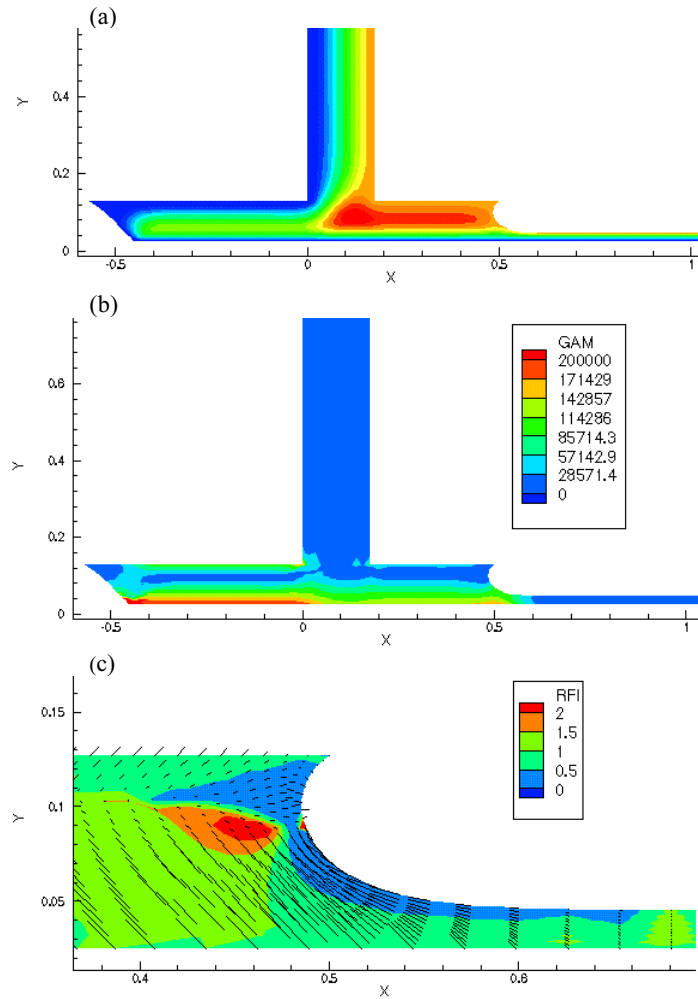


Figure 4: Flow of Newtonian liquid at $Ca = 0.3$ and $H_0 / t = 5$. (a) streamlines; (b) deformation rate and (c) flow classification index and principal vector of the deformation rate tensor.

From this flow state, the flow rate and therefore the coated film thickness was decreased until a turning point was found on the solution path. The critical condition occurred at $H_0 / t = 5.3$.

3.2. Non Newtonian Cases

In the analysis presented here, the first and second normal coefficients were set to zero and the shear viscosity was constant. Only the extensional thickening behavior of the liquid was taken into account. Its dependence on the deformation rate was described by the following equation

$$h_e = h_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n_e - 1}{2}}$$

In the preliminary tests presented here, $\lambda = 5 \times 10^{-4} (De = 25)$ and $n_e = 1.1$. The downstream free surface configuration at $Ca = 0.33$ and $H_0 / t = 5$ is shown in Fig.5, which also presents the meniscus position for Newtonian fluid at the same set of parameters. The configuration obtained with the non Newtonian model is more curved due to the higher actual viscosity near the free surface, where the flow is mainly extensional. The turning point on the solution path for the non Newtonian case at this Capillary number occurred at $H_0 / t = 5.1$, lower than the critical value of $H_0 / t = 5.3$ obtained with Newtonian liquid. The minimum film thickness with viscoelastic liquid is larger than the one obtained with Newtonian model. This trend agrees with the experiments described in the following section.

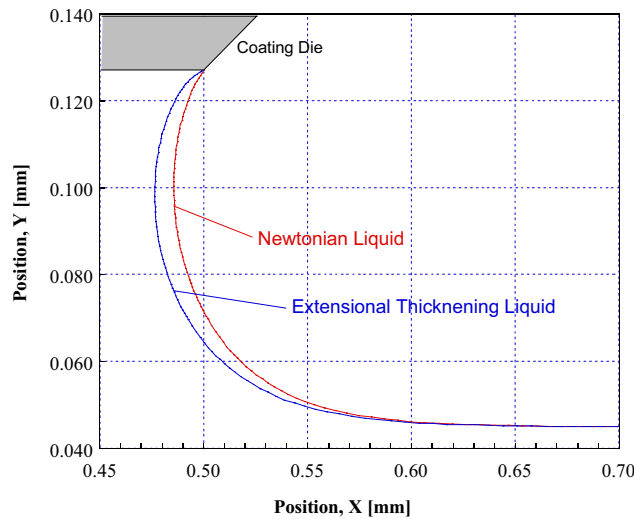


Figure 5: Downstream free surface shape at $Ca = 0.3$.

4. Experimental Analysis

In order to confirm the trend predicted by the theoretical model and to observe how the two dimensional stable coating bead breaks into stripes of coated and uncoated liquid, the low flow limit was measured at different operating conditions. The flow inside the bead and therefore the position of the dynamic and static contact line was visualized from underneath the bead through a glass backup roll.

4.1. Experimental Setup and Procedure

The experimental set-up is sketched in Figure 6-a. The coating liquid was fed to the coating die using a positive displacement pump. The flow rate was controlled by the pump speed and measured with a corioulis flow meter. The liquid was coated onto a glass backup roll. A scraper blade was used to remove the liquid. The gap between the coating die and the substrate was fixed during the experiments at $H_0 = 4$ mils (101.6 μm). A camera with a mirror arrangement was installed in order to visualize the flow inside the coating bead through the glass roll, as shown in Fig.6-b.

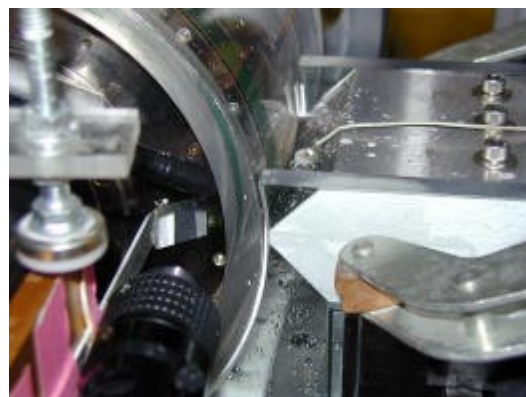
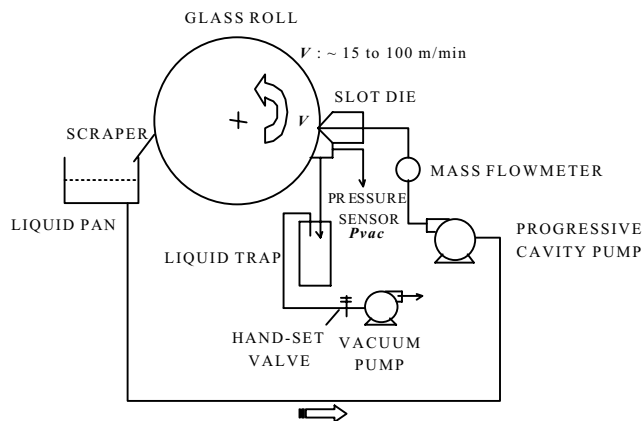


Figure 6: Sketch of experimental setup: (a) Liquid circuit and (b) detail of the flow visualization configuration.

The coating liquid used were solutions of PEG and PEO in water. The rheological properties were changed by the molecular weight and concentration of the polymers. These polymeric solutions are transparent and present a mechanical behavior similar to Boger fluids, as described by Dontula et al. (1998). The compositions of the different solutions used in the experiments are presented in Table 1.

The rheological properties of the solutions were characterized both in shear and extensional flows. The shear viscosity was measured in a cone-and-plate configuration (UDS2000, Paar Physica) and is shown in Fig.7. The viscosity does not vary significantly with shear rate in the range of the measurements. The level of the shear viscosity of the liquids can be controlled by the concentration of PEG. The addition of small quantities of PEO does not affect the shear viscosity. The apparent extensional viscosity was measured using an opposed nozzle device (RFX,

Rheometrics Inc.) and is shown in Fig.8. The addition of small amount of PEO increases the apparent extensional viscosity making the liquid more viscoelastic.

Table 1: Composition of the solutions used as the coating liquids.

Solution	PEG (wt %)	PEO – MW=4Mg/mol (wt %)
1	20	0.0
2	20	0.001
3	20	0.005
4	20	0.01
5	25	0.0
6	25	0.001
7	25	0.005
8	25	0.01

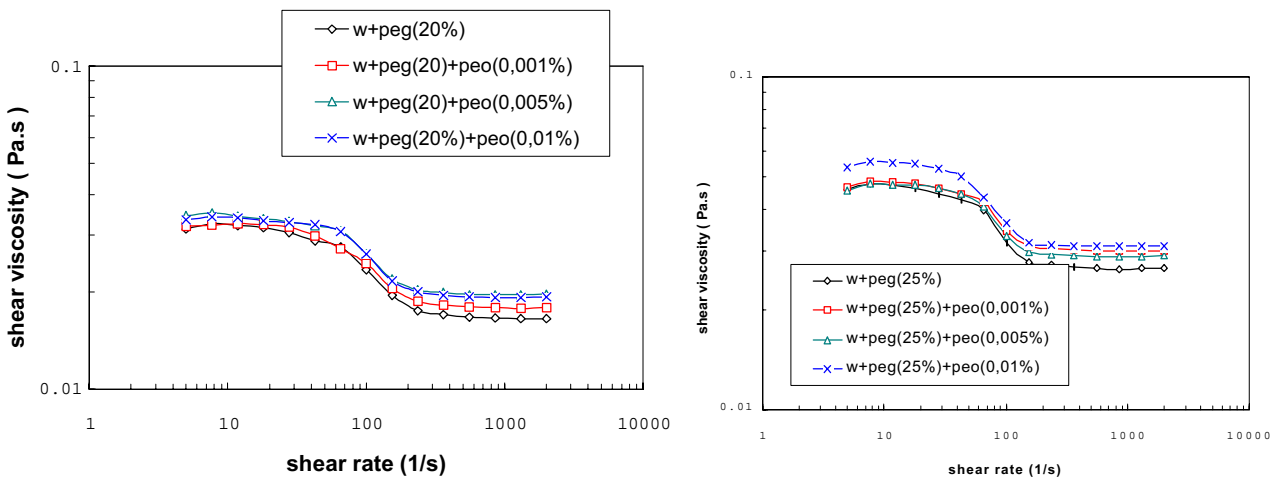


Figure 7: Shear viscosity of the different polymeric solutions used. Measurements with a cone and plate configuration.

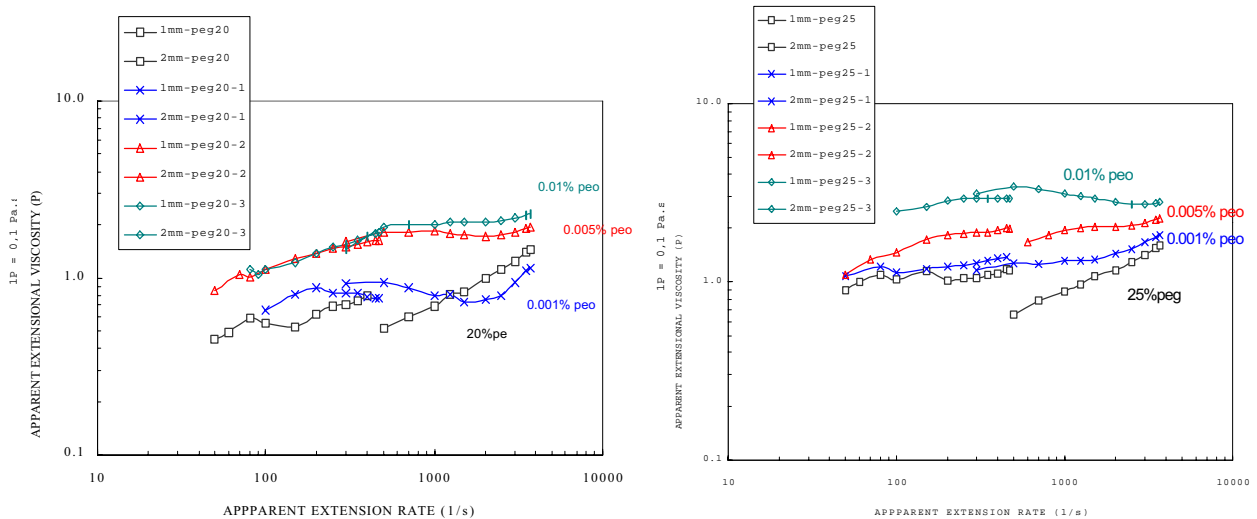


Figure 8: Apparent extensional viscosity of different solutions used in the experiments. Measurements in a opposed nozzle device (RFX, Rheometrics Inc.).

The critical gap-to-film thickness ratio at different line speeds was obtained using the following procedure: The pump speed was set such that the thickness of the coated film was large, typically $H_0/t \approx 2$. A vacuum pressure was applied at the upstream free surface in order to establish the bead. At constant web speed and vacuum, the rotation of the pump was decreased in small steps, until a uniform and continuous coating could not be formed. Typically one or

two small stripes of uncoated substrate would appear. This point was considered to be the onset of the low-flow limit. The minimum film thickness was calculated from the flow rate and web speed. If the flow rate was diminished even more, alternating stripes of coated and uncoated substrate would form across the entire width of the web, a coating defect known as rivulet.

4.2. Results

Flow visualization showed that at the onset of the low flow limit, the downstream meniscus recedes in the direction of the feed slot and a dry stripe is formed in the backup roll. Figure 9 shows a sequence of photos of the coating bead as the flow rate falls. The Capillary number was $Ca = 0.08$. At small gap to thickness ratio, both free surfaces are away from the feed slot and the flow is two dimensional. As the flow rate decreases and consequently the gap to thickness ratio rises, the downstream free surface starts to recede and finally a dry stripe is formed. This breakup mechanisms agrees with the flow state close to the turning point that marks the onset of the low flow limit in the theoretical predictions.

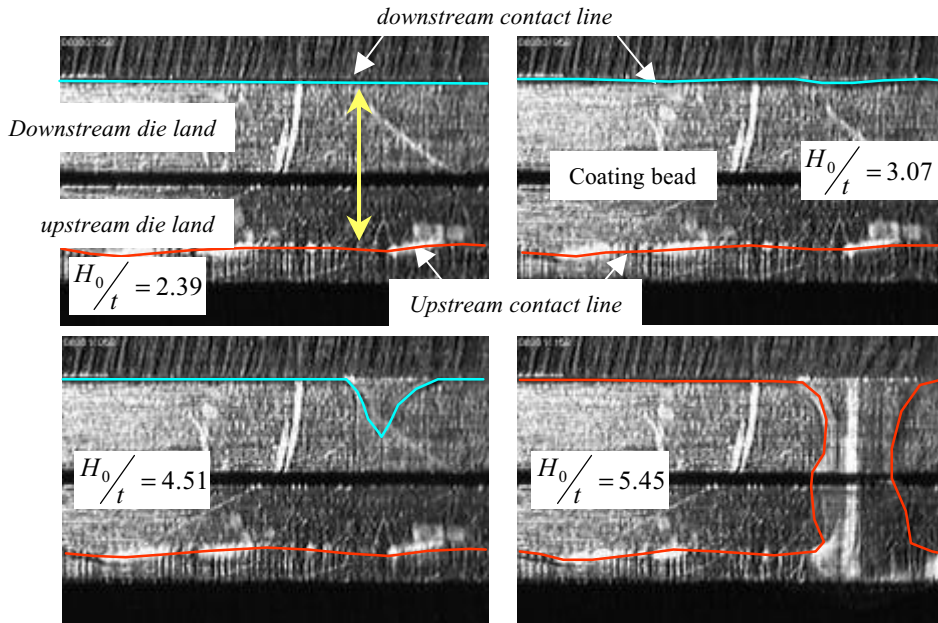


Figure 9: Position of downstream and upstream contact line as the flow rate falls.

The conditions at the onset of the low flow limit measured experimentally are summarized in Fig.10, which shows the critical gap-to-thickness ratio at different Capillary numbers obtained with four different coating solutions. The results of the Newtonian solution (water and PEG) follow the same trend as the theoretical models. In the range explored in this work, the minimum film thickness possible increases with line speed. At a given Capillary number, as the concentration of PEO rises and consequently the viscoelasticity of the liquid, the minimum thickness increases. The coating window of the process is smaller when liquids with high extensional viscosity are used. This can be explained by the fact that the actual viscosity near the downstream free surface is larger than the shear viscosity of the liquid due to the extensional character of the fluid deformation in that region.

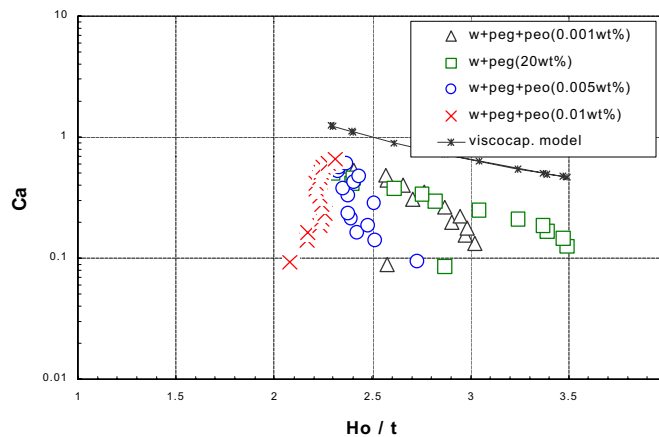


Figure 10: Measurements of critical gap-to-thickness ratio as a function of Capillary number.

5. Final Remarks

Slot coating is one of the preferred methods for high precision coating. An important limitation of this method occurs when thin films are coated at relatively high speeds. This *low-flow* limit is caused by the receding action of the downstream free surface as the flow rate is reduced at a fixed line speed. The operating parameters at which the coating bead breaks had been determined by previous researchers. However, most analyses results were limited to Newtonian liquids.

In this work, the existence of a two-dimensional coating bead that leads to a continuous deposited liquid layer was studied by solving the complete Navier-Stokes equations with free surfaces coupled with an algebraic viscoelastic constitutive equation. The theoretical predictions were validated and completed by experimental measurements and flow visualization.

The results show that the viscoelasticity of the liquid, characterized by its high extensional viscosity, diminishes the size of the operating window of the process. The algebraic constitutive model used was able to capture this effect of the liquid rheology on the stability of the flow.

6. Acknowledgements

This work was funded by CNPq (Grant# 300242/98-0 and 467662/00-2) and by the Industrial Partnership for Research in Interfacial and Materials Engineering of the University of Minnesota.

7. References

- Beguín, A. E., 1954, "Method of Coating Strip Material". U.S. Pat. 2,681,294.
- Carvalho, M. S. and Keshghi, H., 2000, "Low Flow Limit in Slot Coating: Theory and Experiments", *AICHE Journal*, vol. 46(10), pp.1907-1917.
- Dontula, P., Macosko, C.W. and Scriven, L.E., 1998, "Model elastic liquids with water-solvent polymers", *AICHE Journal*, vol.44(6), pp.1247-1255.
- Gates, I. D., 1996, "Stability Analysis of Slot Coating Flows". Presented at *AICHE 1996 Spring National Meeting*. New Orleans.
- Higgins, B. G. and Scriven, L. E., 1980, "Capillary pressure and viscous pressure drop set bounds on coating bead operability". *Chem. Eng. Sci.* vol.35, pp.673-682.
- Kistler, S. F. and Scriven, L. E., 1983, "Coating Flows", in J. R. A. Pearson and S. M. Richardson (eds), *Computational Analysis of Polymer Processing*, Applied Science Publishers, London, p.243.
- Landau, L. and Levich, B., 1942, "Dragging of a liquid by a moving plate". *Acta Physicochimica*, **17**, pp.42-54.
- Ruschak, K. J., 1976, "Limiting flow in a pre-metered coating device". *Chem. Eng. Sci.* **31**, pp.1057-1060.
- de Santos, J. M., 1990, "Two-phase cocurrent downflow through constricted passages". PhD Thesis. University of Minnesota.
- Sartor, L., 1990, "Slot coating: Fluid mechanics and die design". PhD Thesis. University of Minnesota.
- Thompson, R.L., Souza Mendes, P.R. and Naccache, M.F., 1999, "A new constitutive equation and its performance in contraction flows". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol.86, pp.375-388.

VALIDATION OF AN HYBRID NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN A PARALLEL CHANNEL FLOW

Mauro Costa de Oliveira

Petrobras CENPES Cidade Universitária Q. 7 Ilha do Fundão Rio de Janeiro RJ Brasil 21949-900
mauro@cenpes.petrobras.com.br

José Eduardo Rengel Hernández

Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Oriente, Apartado 4327, Puerto La Cruz, Anzoátegui, Venezuela
rengel@peno.coppe.ufrj.br

Sergio Hamilton Sphaier

Universidade Federal do Rio de Janeiro, EP-COPPE/UFRJ, CP50508, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
sphaier@peno.coppe.ufrj.br

Abstract: This work deals with an hybrid numerical method to solve the two dimensional equations for incompressible viscous flows in primitive variables (velocity and pressure). The Navier-Stokes equations are splitted in three equations in order to attain a sequential scheme through the projection method. The procedure is based on the generalized integral transform technique (GITT) combined with the finite element (FEM) or finite volume methods (FVM). The GITT is applied to reduce one spatial dimension in the partial differential equation that governs the fluid flow. The remaining system of differential equations is solved with the FEM or FVM. The paper compares the results obtained with the different spatial discretization approaches (FEM, FVM) together with explicit and semi-implicit time integration methods. The objective is to validate the hybrid analytical-numerical scheme proposed in order to achieve a robust and fast method. The method is applied for a two-dimensional parallel channel flow, that is a frequently analyzed case in the literature. Traction free outflow boundary condition is also used. The pressure and velocity fields are obtained for different channel lengths and Reynolds number, showing a good agreement with reported data. These results encourage us to proceed the studies to treat three-dimensional problems with the present method.

Key Words: Incompressible Flow, Projection Method, Integral Transform, Finite Elements, Finite Volumes

1. Introduction

The large amount of time spent to simulate transient flows with purely numerical methods in ordinary computers is not compatible with the requirements of engineering analysis. Bearing this in mind, one has to think in different approaches in order to make the computational fluid dynamics more feasible. This paper uses an hybrid methodology to deal with two dimensional incompressible viscous flows. The basic idea is to bring into the problem an analytical component, in order to facilitate the resolution, without losing too much generality. The analytical part is brought through the use of the generalized integral transform technique, described in detail in (Cotta,1993). Here, this approach is used to reduce one spatial dimension of the equations resulting from the application of the projection method (Chorin, 1968) to the Navier-Stokes equations. The remaining transformed equations are then solved by conventional numerical methods, such as finite volumes and finite elements. The integral transform enables the use of global approximations of the fluid variables in a domain with adequate boundary conditions and physical properties, as for instance, if the diffusion part is dominant, other approaches, such as the spectral methods, work with periodic assumptions of the fluid flow over a certain dimension. Each formulation may be used depending on the flow characteristics, in our case the problem is well defined and favourable for the GITT technique.

This scheme is employed to solve a laminar, incompressible, viscous two-dimensional flow between two parallel plates. This case has been used because it is simple, but fully extensible to a three-dimensional case and other geometries. The longitudinal velocity along the center line of the channel is obtained for different Reynolds numbers and agrees with benchmark results obtained by Pérez Guerrero (Pérez Guerrero, 1995), who used the GITT with the stream function formulation. A substantial reduction of computational time has been attained when compared with purely numerical methods.

2. Governing Equations

The continuum differential equations that govern the problem are the Navier-Stokes equations in their conventional formulation for incompressible flow and the Mass Conservation equation.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

The simulation of flows using primitive coordinates involves the simultaneous integration of the continuity and the momentum equations, which for incompressible fluid flows raises a particular difficulty due to the fact that there is not an explicit equation for the pressure. For this kind of problem the projection method, ((Chorin, 1968), (Gresho, 1990)), and several variants, as the fractional-step method (Perot, 1993), velocity correction method due to Kovacs and Kawahara (1991) and the high-order split method (Karniadakis, 1991), have been used successfully for problems formulated in primitive coordinate. In this context the above equations are split in the following way:

Step 1: Solve \vec{u} (intermediary velocity field) for $0 < t \leq \Delta T$ in the following equation(Burgers):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \quad (3)$$

Step 2: Solve(Poisson's equation):

$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{\Delta T} \nabla \cdot \vec{u} \quad (4)$$

Step 3: Finally compute:

$$\vec{u} = \vec{u} - \frac{\Delta T}{\rho} \nabla p \quad (5)$$

3. Hybrid Numerical-Analytical Scheme

From the sequential procedure described in the last section, one can apply the generalized integral transform technique (GITT) to the equations of steps 1 and 2. After that the set of transformed differential equations is solved numerically.

3.1 Integral Transform of Burgers' Equation

The Burgers' equation obtained in the step 1 of the projection method will be transformed in order to eliminate the y variable and its derivatives. The resulting partial differential equations will have the new variables \bar{u} and \bar{v} dependent only of the x coordinates, besides the time. The integral transform technique requires the selection of an auxiliary problem, usually bringing part of the nature of the original equation. In this context, the longitudinal velocity diffusion problem is chosen:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

Applying the technique of separation of variables to this problem, the proposed solution is written as:

$$u(x, y, t) = X(x, t)Y(y)$$

Replacing in 6, one has:

$$\frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2} Y(y) + X(x, t) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0 \quad (7)$$

Dividing by XY and simplifying one gets the following Sturm-Liouville problem with its boundary conditions, where L is the channel separation:

$$\ddot{Y}(y) + \mu^2 Y(y) = 0 \quad Y(0) = 0 \text{ and } Y(L) = 0 \tag{8}$$

The solution of the problem, and the correspondent eigenvalue are:

$$Y_i(y) = \sin(\mu_i y) \text{ with } \mu_i = \frac{i\pi}{L} \tag{9}$$

The norm of the solution can be written as:

$$N_i = \int_0^L \sin^2\left(\frac{i\pi}{L}y\right) dy = \frac{L}{2} \tag{10}$$

Thus the normalized eigenfunctions are stated as:

$$\tilde{Y}_i(y) = \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{L}y\right)}{\sqrt{\frac{L}{2}}} \tag{11}$$

The next step consists in the determination of the transform-inverse pair, obtained after the approximation of the velocity function $u(x, y, t)$ by a summation of the eigenfunctions multiplied by the transformed velocities. This expression is called inverse.

$$\tilde{u}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}_i(x, t) \tilde{Y}_i(y) \tag{12}$$

$$\tilde{v}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{v}_i(x, t) \tilde{Y}_i(y) \tag{13}$$

Multiplying 12 and 13 by $\tilde{Y}_i(y)$, integrating from 0 to L and using the orthogonality property, the transformed equation can be written as:

$$\tilde{u}_j(x, t) = \int_0^L \tilde{Y}_i(y) \tilde{u}(x, y, t) dy \tag{14}$$

$$\tilde{v}_j(x, t) = \int_0^L \tilde{Y}_i(y) \tilde{v}(x, y, t) dy \tag{15}$$

Now it's possible to operate the transformation of the Burgers' equation, using the orthogonality property and the inverse expression. Multiplying each term of the Burgers' equation by $\tilde{Y}_i(y)$, integrating the product and replacing $u(x, y, t)$ by its inverse formula 12, one ends up with:

$$\int_0^L \tilde{Y}_i \frac{\partial(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_j \tilde{Y}_j)}{\partial t} dy + \int_0^L \tilde{Y}_i \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_j \tilde{Y}_j \frac{\partial(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \tilde{Y}_k)}{\partial x} dy + \int_0^L \tilde{Y}_i \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{v}_j \tilde{Y}_j \frac{\partial(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \tilde{Y}_k)}{\partial y} dy = \nu \left(\int_0^L \tilde{Y}_i \frac{\partial^2(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_j \tilde{Y}_j)}{\partial x^2} dy + \int_0^L \tilde{Y}_i \frac{\partial^2(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_j \tilde{Y}_j)}{\partial y^2} dy \right)$$

Using the orthogonality property and the differential equation representing the Sturm-Liouville problem, one obtains the final form of the transformed Burgers differential equation in one variable:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,j,k} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{i,j,k} \tilde{v}_j \tilde{u}_k = \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x^2} - \mu_i^2 \tilde{u}_i \right) \tag{16}$$

Where:

$$\int_0^L \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{Y}_k dy = A_{i,j,k} \tag{17}$$

$$\int_0^L \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial y} dy = B_{i,j,k} \tag{18}$$

The boundary conditions should also be transformed, in accordance with the previously described procedure. The coefficients $A_{i,j,k}$ and $B_{i,j,k}$ are determined analytically through the symbolic computation program MAPLE, once the eigenfunctions are known.

3.2 Integral Transform of Poisson's Equation

In this section one deals with the transformation of the equation of Poisson, the 2nd step in the projection method scheme. The approach followed here is analogous to the one described in the previous section. The only differences are that due to the boundary conditions the eigenfunctions will be different and the eigenvalue 0 will be included.

The auxiliary problem selected is again a diffusion problem, this time applied to the pressure.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{19}$$

With the following boundary conditions:

$$\frac{dp}{dy}(0) = 0 \text{ and } \frac{dp}{dy}(L) = 0 \tag{20}$$

Applying again the technique of the separation of variables to equation 19, and solving the resultant Sturm-Liouville problem, one attains the following eigenfunction:

$$Y_{p_i}(y) = A \cos\left(\frac{i\pi}{L} y\right) \tag{21}$$

The norm of this expression is written as:

$$N_i = \int_0^L \cos^2\left(\frac{i\pi}{L} y\right) dy = \frac{L}{2} \quad \text{if } i > 0 \tag{22}$$

$$N_i = \int_0^L \cos^2\left(\frac{i\pi}{L} y\right) dy = L \quad \text{if } i = 0 \tag{23}$$

The inverse-transform pair is determined as in the previous section resulting in the equations shown below, where \tilde{Y}_p is the normalized eigenfunction:

$$p(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{p}_i(x, t) \tilde{Y}_{p_i}(y) \tag{24}$$

$$\bar{p}_j(x, t) = \int_0^L \tilde{Y}_{p_i}(y) p(x, y, t) dy \tag{25}$$

The transformation is carried out with the integration of 4, with each term multiplied by $\tilde{Y}_{p_i}(y)$, and with the pressure and velocity replaced by their inverse expressions. The orthogonality property of both inverses is also used to simplify the equation.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_i}{\partial x^2} - \mu_i \bar{p}_i = \frac{\rho}{\Delta t} \sum_{j=1}^{\infty} (C_{i,j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + D_{i,j} \bar{v}_j) \quad (26)$$

Where:

$$\int_0^L \tilde{Y}_{p_i} \tilde{Y}_j dy = C_{i,j} \quad (27)$$

$$\int_0^L \tilde{Y}_{p_i} \frac{d\tilde{Y}_j}{dy} dy = D_{i,j} \quad (28)$$

3.3 Integral Transform of the Projection of the Velocity

The step 3 of the projection method, is transformed in the same way as the two first steps. In this case there is no need to solve a Sturm-Liouville problem once the transform-inverse pairs of the unknown variables of the problem have already been determined. Applying again the same formalism of the integral transform, one gets the following equations:

$$\bar{u}_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} (E_{i,j} \frac{\partial \bar{p}_j(x, t)}{\partial x}) \quad (29)$$

$$\bar{v}_j(x, t) = \bar{v}_j(x, t) - \frac{\Delta t}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} (F_{i,j} \bar{p}_j(x, t)) \quad (30)$$

With the respective coefficients, again calculated analytically:

$$E_{i,j} = \int_0^L \tilde{Y}_i \tilde{Y}_{p_j} dy \quad (31)$$

$$F_{i,j} = \int_0^L \tilde{Y}_i \frac{d\tilde{Y}_{p_j}}{dy} dy \quad (32)$$

3.4 Spatial and Temporal Discretization

At this point the set of transformed differential equations in the variables x and t can now be solved numerically by traditional techniques, such as Galerkin finite elements or Finite Volumes. In this work both methods will be used to check the reliability of the proposed combination of the projection method and GITT.

Regarding Finite Elements, the equations will be transformed to the weak form by integrating over the domain 0 to L_x and multiplying it by the linear test function $\phi(x)$. The velocity and pressure are interpolated with the same function $\phi(x)$, characterizing a Galerkin FEM. Therefore, one gets a differential algebraic equation for the case of the Burgers equation and algebraic equations for the other 2 steps of the projection method. Two time discretization methods are used: the Euler method (with correction of diffusion) and the semi-implicit method (the Adams-Bashforth scheme for convection and the Adams-Moulton scheme for the diffusive term). The linear systems are solved by the conjugate gradient method.

To apply the finite volume method, a structured co-located grid, (all the variables are evaluated at the center of the finite volumes), is used to describe the physical space, introducing geometric simplicity and becoming much simpler to implement the algorithm. All of the above equations are integrated in each finite volume, using the explicit Adam-Bashforth scheme to the convective terms and the Crank-Nicholson scheme to the diffusive ones. To interpolate the variables and their derivatives, in the faces of control volumes, are employed a fourth order central scheme (Tafti, 1995) and a second order central scheme, respectively. The resulting tridiagonal systems of difference equations have been solved by the Thomas algorithm.

4. Results

A two dimensional channel flow will be investigated. The results displayed below are the x component of the velocity in the center of the channel, in the coordinates indicated in each table. Two different Reynolds numbers have been studied (40 and 300). The following symbols have been used:

Δx Size of the one dimensional finite element

Δt Time step

NoE Number of eigenvalues

AB-AM Adams Bashforth and Adams Moulton time integration

Euler Euler with balancing tensor diffusivity time integration

FEM Finite element method

FVM Finite volume method

4.1. Influence of the Grid Size

The next two tables show the effect of the grid size in the calculations, for both spatial integration schemes. For a fixed number of eigenvalues and fixed Δt the influence of the element size is negligible in the range studied. This is a very interesting characteristic of the hybrid method, once one can enlarge the elements, thus reducing the size of the matrices and simultaneously achieving good results.

Table 1: Velocity in the center of the channel $Re = 300 - \Delta t = 0.005 - 23$ Eigenvalues - FVM

Δx	$x = 0.833333$	$x = 7.50$
0.1515	1.067	1.409
0.111	1.066	1.407
0.088	1.066	1.407
0.072	1.066	1.407
0.062	1.066	1.406
0.054	1.066	1.406

Table 2: Vel. in the center of the channel $Re = 300 -$ Time Integration: AB - AM $\Delta t = 0.005 - 5$ Eigenvalues - FEM

Position	$\Delta x = 0.2$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0,035$	$\Delta x = 0.02$
$x = 0.20833$	1.094	1.092	1.092	1.092	1.092
$x = 0.8333$	1.074	1.073	1.073	1.073	1.073
$x = 3.333$	1.220	1.220	1.220	1.220	1.220
$x = 7.5$	1.346	1.346	1.346	1.346	1.346

4.2. Influence of the Time Step

Now the influence of the time step is assessed, keeping fixed the size of the element (Δx) and the number of eigenvalues. Again the influence is not very large for the range investigated.

Table 3: Vel. in the center of the channel - $Re = 300 -$ Time Integration: Euler - $\Delta x = 0.1 - 5$ Eigenvalues - FEM

Position	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$
$x = 0.20833$	diverged	1.092	1.0928	1.093	1.0935
$x = 0.8333$	diverged	1.073	1.073	1.073	1.0735
$x = 3.333$	diverged	1.219	1.2195	1.2195	1.2195
$x = 7.5$	diverged	1.346	1.346	1.346	1.346

Table 4: Vel. in the center of the channel - $Re = 300$ - $\Delta x = 0.1m$ - AB - AM - 5 Eigenvalues - FEM

Position	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$
$x = 0.20833$	div.	1.091	1.092	1.092
$x = 0.8333$	div.	1.073	1.073	1.073
$x = 3.333$	div.	1.220	1.220	1.220
$x = 7.5$	div.	1.346	1.346	1.346

Table 5: Vel. in the center of the channel - $Re = 300$ - FVM

Δt	$x = 0.833333$	$x = 7.50$
0.018	1.066	1.407
0.010	1.066	1.406
0.005	1.066	1.406
0.003	1.066	1.406
0.001	1.066	1.406
0.001	1.066	1.405

4.3. Influence of the Methods of Time Integration

The next comparison is between the two methods of time integration for the FEM approach. After the steady state is reached both methods give the same result for fixed Δt and Δx .

Table 6: Vel. in the center of the channel - $Re = 300$ - $\Delta x = 0.1$ - $\Delta t = 0.005$ - 5 Eigenvalues - FEM

Position	Euler	AB - AM
$x = 0.20833$	1.093	1.092
$x = 0.8333$	1.073	1.073
$x = 3.333$	1.220	1.220
$x = 7.5$	1.346	1.346

4.4. Influence of the Number of Eigenvalues

The inverse expressions will have to be truncated, once an infinite number of eigenvalues cannot be used. Therefore the selection of the truncation is studied in this item. The number of eigenvalues is the most important parameter to reach the benchmark values and the results produced by the purely numerical methods. The tables below present the influence, for both hybrid FEM and FVM, of the number of eigenvalues incorporated into the solution. Firstly one can verify that the required number of eigenvalues is beyond 40. See table below:

Table 7: Vel. in the center of the channel - $Re = 300$ - $\Delta x = 0.1$ - Euler - $\Delta t = 0.005$ - FEM

Position	NoE5	NoE10	NoE15	NoE20	NoE25	NoE30	NoE35	NoE40
$x = 0.20833$	1.093	1.045	0.998	1.002	1.006	1.006	1.006	1.006
$x = 0.8333$	1.073	1.056	1.064	1.066	1.066	1.068	1.069	1.069
$x = 3.333$	1.220	1.246	1.260	1.265	1.269	1.270	1.272	1.273
$x = 7.5$	1.346	1.377	1.395	1.401	1.407	1.409	1.412	1.413

The next two tables show the convergence to the benchmark results for Re number equals 40 and Re number equals 300.

Table 8: Vel. in the center of the Channel - Re = 40 - FVM

NoE	x = 0.2	x = 0.6	x = 1.0	x = 1.4	x = 1.8
39	1.019	1.163	1.315	1.407	1.452
47	1.020	1.164	1.317	1.410	1.455
55	1.020	1.164	1.318	1.412	1.457
63	1.021	1.165	1.320	1.413	1.459
71	1.021	1.165	1.320	1.414	1.460
79	1.021	1.166	1.321	1.415	1.461
87	1.021	1.166	1.322	1.416	1.462
95	1.021	1.166	1.322	1.417	1.463
103	1.021	1.166	1.322	1.417	1.463
111	1.021	1.166	1.322	1.417	1.463

Table 9: Velocity in the center of the Channel - Re = 300 - FVM

N	x = 0.208333	x = 0.833333	x = 3.333333	x = 7.50
39	1.004	1.068	2.274	1.415
47	1.005	1.069	1.275	1.418
55	1.006	1.069	1.276	1.420
63	1.006	1.070	1.277	1.421
71	1.007	1.070	1.278	1.422
79	1.007	1.070	1.278	1.423
87	1.007	1.070	1.278	1.423
95	1.007	1.070	1.279	1.424
103	1.007	1.070	1.279	1.424
111	1.007	1.070	1.279	1.425
119	1.007	1.070	1.280	1.425
127	1.007	1.070	1.280	1.425

The following two tables show results for higher values of Δt and Δx . If those two values increase, a reduction on the computational time is obtained. Even with this change the hybrid method still converges and the results are close to the benchmark values.

Table 10: Vel. in the center of the Channel - Re = 40 - $\Delta x = 0.02$ - $\Delta t = 0.05$ FEM

N	x = 0.2	x = 0.6	x = 1.0	x = 1.4	x = 1.8
39	1.025	1.165	1.312	1.401	1.445
47	1.025	1.166	1.314	1.403	1.447
55	1.025	1.166	1.315	1.405	1.449
63	1.025	1.166	1.315	1.406	1.450
71	1.024	1.165	1.315	1.406	1.451
79	1.023	1.162	1.315	1.407	1.451
87	1.019	1.157	1.314	1.407	1.452
95	1.012	1.152	1.313	1.407	1.453
103	1.001	1.146	1.312	1.408	1.466
111	0.988	1.141	1.312	1.408	1.466

Table 11: Vel. in the center of the Channel - $Re = 300 - \Delta x = 0.02 - \Delta t = 0.05 - FEM$

N	x = 0.20833	x = 0.8333	x = 3.333	x = 7.5
39	1.008	1.071	1.272	1.412
47	1.008	1.071	1.274	1.414
55	1.008	1.072	1.2745	1.415
63	1.008	1.072	1.275	1.416
71	1.008	1.072	1.276	1.417
79	1.008	1.072	1.276	1.418
87	1.008	1.0725	1.277	1.418
95	1.007	1.073	1.277	1.418
103	1.007	1.073	1.277	1.419
111	1.007	1.073	1.277	1.419

4.5. Comparison with Other Results

The next table show a comparison of the hybrid method with purely FEM analysis. The conclusion is that the GITT FEM with the same element size can almost reach the benchmark values, whereas the numerical method can only achieve good results with a finer mesh.

Table 12: Vel. in the center of the channel - $Re = 300 - \Delta t = 0.005$

Position	FEM	FEM	FEM	GITTFEM 95	GITTFEM 65
	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.2$	$\Delta x = 0.2$	$\Delta x = 0.1$
$x = 0.20833$	1.007	1.005	0.998	1.007	1.007
$x = 0.8333$	1.072	1.057	1.047	1.076	1.071
$x = 3.333$	1.279	1.243	1.208	1.280	1.277
$x = 7.5$	1.426	1.370	1.320	1.420	1.418

The last table illustrates a general comparison with other authors and with numerical methods.

Table 13: Velocity in the center of the channel - $Re = 300 - dt = 0.005$

Position	McDonald	PG 17	FEM	GITTFEM 95	GITTFVM 127
			$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.2$	
$x = 0.20833$	1.008	1.007	1.007	1.007	1.007
$x = 0.8333$	1.075	1.071	1.072	1.076	1.070
$x = 3.333$	1.283	1.280	1.279	1.280	1.280
$x = 7.5$	1.425	1.425	1.426	1.420	1.425

Observation: PG17 Pérez Guerrero results (Pérez Guerrero, 1995) with 17 eigenvalues and McDonald, see (McDonald, 1972)

The figures below show the solutions for the transformed velocity field. From these graphs one can formulate an optimization procedure, that consists in ignore, for the higher eigenvalues, the part of the solution that is very close to 0. Hence only the part that is different from 0 at the beginning of the channel length is used. This enables a reduction in the computational time.

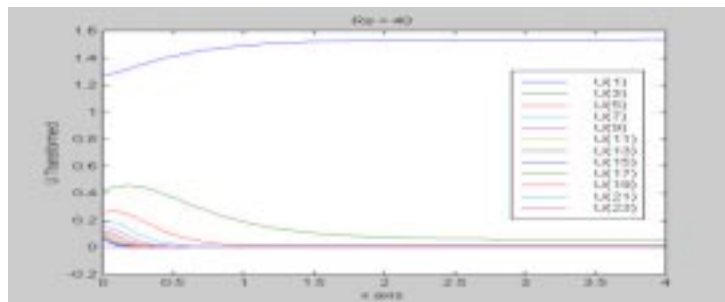


Figure 1: Transformed Solution \bar{u}_i Re 40

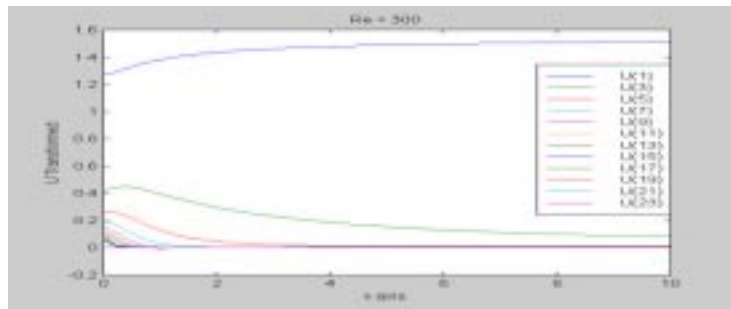


Figure 2: Transformed Solution \bar{u}_i for Re 300

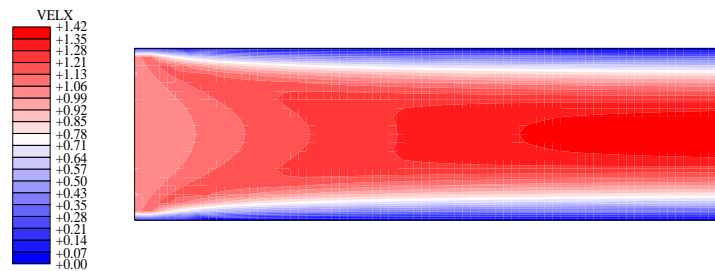


Figure 3: x Component of Velocity - Scalar Field - 65 eigenvalues - Re 300

5. Conclusions

The main conclusion is that the hybrid method results agree very well with benchmark results found in the literature.

When considering the upper limits of time step and element size, the hybrid method, with an adequate number of eigenvalues, produces better results than the exclusively numerical methods for the same values. The introduction of the analytical part of the solution, via the diffusion term, is responsible for this improvement.

The computational time spent to obtain benchmark results is substantially smaller than the time spent with conventional numerical methods.

The use of the projection method with the generalized integral transform technique enabled a simplification in the eigenfunctions, and therefore in the whole problem, compared with the stream function approach for the channel problem. Besides a transient problem could also be considered and the pressure calculated.

The procedure described here can be extended to three dimensional flows over cylinders, that is a case of much interest, due to the problem of vortex induced vibrations.

References

- Gresho P. M. and Sani R. L., 1998, Incompressible Flow and the Finite Element Method, Wiley, Chichester.
- Cotta R. M., Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, CRC, Boca Raton, USA.
- Gresho P. M., 1990, On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 1: Theory, International Journal for Numerical Methods in Fluids, V.11, Pages 587 – 620
- Chorin, A. J., 1968, Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, Mathematics of Computation, v.23, Pages 745 – 762
- Tafti, D., 1995, Alternate Formulations for the Pressure Equation Laplacian on Collocated Grid for Solving the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations, Journal of Computational Physics, Vol. 116, pp. 143-153

- Karniadakis, G. E. and Israeli, M. and Orzag, S. A., 1991, High-Order Splitting Method for Incompressible Navier-Stokes Equations, Journal of Computational Physics, Vol. 97, pp. 414 – 443
- Perot, J. B., 1993, An Analysis of the Fractional Step Method, Journal of Computational Physics, Vol. 108, pp. 51 – 58
- Jesús S. Pérez Guerrero, 1995, Transformação Integral das Equações de Navier-Stokes para Escoamento Laminar em Canais de Geometria Bidimensional Arbitrária, D.Sc. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ - Brasil
- Kovacs A. and Kawahara M., 1991, A finite element scheme based on the velocity correction method for the solution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, V.13, pp. 403 – 423
- J.W.McDonald, V.E.Denny e A.F. Mills, 1972, Numerical Solutions of the Navier-Stokes equations in inlet regions, Journal of Applied mechanics, vol.39, pp.873-878

A SKIN FRICTION EQUATION FOR TURBULENT FLOW OF CARREAU-YASUDA FLUIDS.

Luiz Claudio Fialho

Daniel O de A Cruz

Mechanical Engineering Department, Universidade Federal do Pará – UFPA
Campus Universitário do Guamá, 66075-900, Belém, Pará, Brasil

E-mail: doac@ufpa.br

*Abstract*In this work the turbulent flow of the non-Newtonian Carreau-Yasuda fluid will be studied. A skin friction equation for the turbulent flow of Carreau-Yasuda fluid will be derived assuming a logarithmic behavior of the turbulent mean velocity for the near wall flow out of the viscous sub layer . An alternative near wall characteristic length which takes into account the effects of the relaxation time will be introduced. The characteristic length will be obtained through the analysis of viscous region near the wall. The results will be compared with experimental data of a Tylose solution showing good agreement.

Keywords: Turbulence; non-Newtonian fluids; Skin friction equation.

1.Introduction

The turbulent flow of non-Newtonian fluids appears in many situations in mechanical and chemical engineering. Despite this importance, many questions related to the nature of such type flows remains unanswered. One important and not well understood phenomenon is the turbulent drag reduction, which was discovered by Toms [11] in the late forties. The occurrence of the drag reduction is related to certain viscoelastic and shear thinning properties of some non-Newtonian fluids, and according to Hinch (1977), Tabor et al.(1989) and other workers, it is connected to the strong strain imposed elongation to the molecules and its effects on the viscosity. In some important works with diluter polymer flows Virk et al. (1970) developed empirically, a velocity law of the wall model, and proposed a limit for the drag reduction.

The experimental work of Pinho and Withelaw (1990) and Escudier et al. (1992) of turbulent flow of shear-thinning aqueous polymeric solutions with viscosity power law indices between 0.39 and 0.9 also showed the validity of Virk's asymptote for these variable viscosity fluids. Although, many works have been done on the non-Newtonian fluids turbulent flow analysis, some important parameters are not yet well defined. In a recent work, Cruz et. al. (2000) defined a Kolmogorov dissipation length valid for the turbulent flow of power law fluids. More recently, Cruz and Fialho. (2001) developed a Kolmogorov dissipation length and a skin friction equation, both valid for the turbulent flow of Carreau fluids. A extension of the former work will be shown here for the Carreau –Yassuda fluids.

For the general case of the turbulent flow of non-Newtonian fluids some near wall parameters, like the characteristic velocity and the characteristic length are also still not established. In his work, Virk adopted the classical friction velocity as the appropriate characteristic velocity for the near wall region, considering that the viscous sub-layer of the non-Newtonian fluids is similar to the viscous sub-layer of the Newtonian fluids. This assumption is very controversial, and is probably not valid for all types of non-Newtonian fluids.

The objective of this work is to obtain a skin friction equation for the turbulent flow of non-Newtonian Carreau-Yasuda fluids. In this equation a new near wall characteristic length is defined, using a implicit equation derived from the viscous sub layer analysis utilizing the Carreau-Yasuda rheological model. The results are compared with the experimental data of turbulent pipe flows of very low molecular weight polymer solutions of variable viscosity, showing good agreement.

2.The Skin Friction Equation

The Carreau-Yasuda rheological model defined by the following equations,

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1)$$

with

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (2)$$

is a generalization of the Newtonian model, and describe with more accuracy the variation of viscosity μ with strain rate $\dot{\gamma}$ than the power law rheological model. The fundamental difference between these two formulations is that the Carreau-Yasuda equation involves five parameters ($\mu_o, \mu_\infty, \lambda, n, a$) to describe the fluid rheology, instead of the two parameters formulation (k, n) of the power law relation.

To formulate a skin friction equation for turbulent flow of Carreau Yasuda non-Newtonian fluid it is necessary first to analyze the near wall region to obtain the characteristic length scale of the phenomenon. In the viscous sub layer the mean momentum equation can be written in a following form:

$$u_\tau^2 = v_o \left[\frac{\mu_\infty}{\mu_o} + \left[1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_o} \right] \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right] \dot{\gamma} \tag{3}$$

where $u_\delta = \sqrt{\hat{\delta}_w / \bar{n}}$ is the friction velocity. Considering that in the viscous sub layer the velocity profile is nearly linear the following approximation for the velocity gradient will be used:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} \cong \frac{u_\delta}{L_c} \tag{4}$$

Inserting (4) into (3) we have:

$$u_\tau^2 = v_o \left[\frac{\mu_\infty}{\mu_o} + \left[1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_o} \right] \left[1 + \left(\lambda \frac{u_\delta}{L_c} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right] \frac{u_\delta}{L_c} \tag{5}$$

For the case of pipe flow the equation (5) can be rewritten in a non-dimensional form as follows:

$$\frac{f}{2} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{D}{L_c} \sqrt{\frac{f}{2}} \left[\frac{\mu_o}{\mu_\infty} + \left[1 - \frac{\mu_o}{\mu_\infty} \right] \left[1 + \left(\lambda \frac{1}{\text{Re}} \frac{U^2}{v_o} \frac{D}{L_c} \sqrt{\frac{f}{2}} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right] \tag{6}$$

Where Re is the Reynolds number, f is the Fanning friction factor, D is the pipe diameter, and Lc represents the near wall characteristic length scale of the flow.

To obtain the Fanning friction factor from equation (6) it is necessary first to achieve the characteristic length scale of the flow. The semitheoretical equation derived by Dodge and Metzner (1959) for the Fanning friction of power law fluids can be used to estimate the value of D/Lc as follows:

$$\frac{D}{L_c} = b \cdot 10^c \tag{7}$$

with

$$b = (3n + 1) (4n)^{-1} \cdot 8^{\frac{n-1}{n}} \cdot 2^{\frac{n-2}{2n}} \tag{8}$$

and

$$c = \frac{1}{4} n^{-0.25} \left[f^{-1/2} + 0.4n^{-1.2} \right] \tag{9}$$

The above equations ((7) to (9)) were obtained assuming that the turbulent mean velocity in the turbulent flow region, out of the viscous sub layer, has a logarithmic behavior similar to the Newtonian fluid case. The influence of the non Newtonian behavior should be considered through the introduction of a proper characteristic length obtained by the viscous sub layer analysis.

The set composed by equations (6) to (9) can now be solved for the Fanning friction factor.

3.Results and Discussion

In figures 1 to 6 the results of the present formulation are compared with the Prandtl-von Kármán equation for newtonian fluids and experimental data of Pereira and Pinho (1999) for aqueous solutions of Tylose with concentrations varying of 0.1% to 0.6% by weight. These low molecular weight polymer solutions exhibits drag reduction.

In figures 1 to 6 f_d is the Darcy friction and, Re_w is the Reynolds number calculated using the wall value of the viscosity, obtained from the measured pressure gradients (Pereira and Pinho (1999)).

In figures 1 and 2 due to its low concentration, the influence of the Tylose into the skin friction factor is very small and no significant difference between the present work and the Prandtl-von Kármán equation exists. As the Tylose concentration increases (figs 3 and 4) the solution begins to exhibit some drag reduction behavior and the Prandtl-von Kármán equation starts to over predict the skin friction factor. The same is not true for the present formulation which still adequately describes the experimental data

In figure 5 the experimental data exhibits a clear drag reduction and the Newtonian formulation can not be used anymore to calculate the friction factor. The present formulation however, describes accurately the experiments, disregarding scatter of the data.

Figure 6 show the experimental values of the skin friction factor for the highest value of the Tylose concentration. In this particular case the flow has not achieve the fully turbulent situation, and the laminar-transitional regime is still determining the flow. Although any analysis in this situation should be made with care, it should be noted that the formulation proposed here presents a clear drag reduction, and it is much closer of the experimental data than the Prandtl-von Kármán equation for high values of the Re_w .

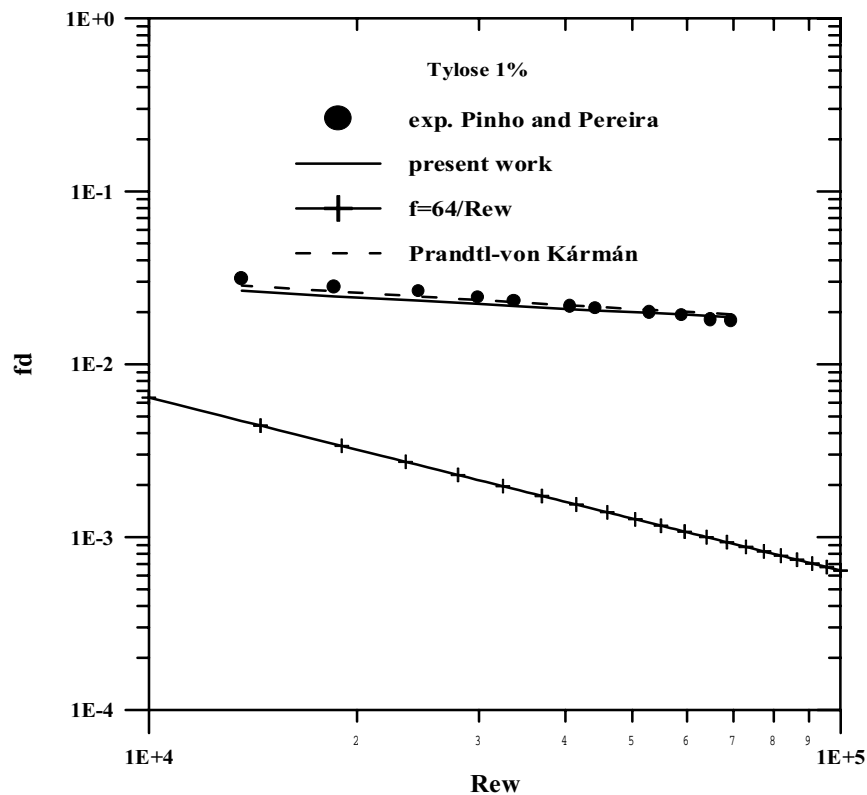


Figure 1-Comparison of the present formulation with experimental data of Tylose (1%) , Prandtl-von Kármán equation and with the laminar skin friction relation.

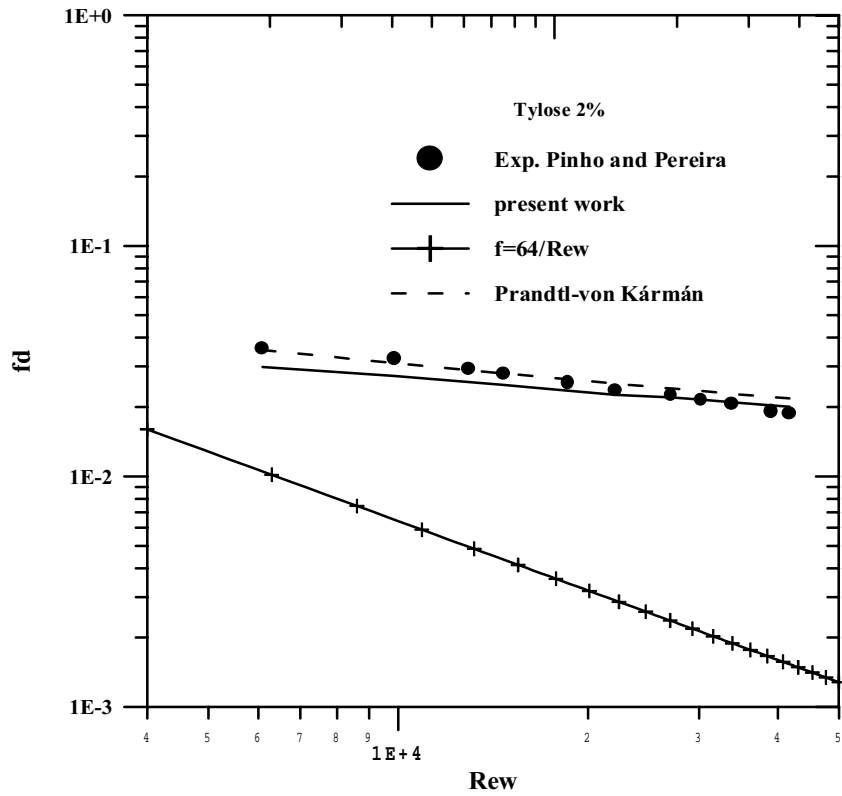


Figure 2-Comparison of the present formulation with experimental data of Tylose (2%) , Prandtl-von Kármán equation and with the laminar skin friction relation.

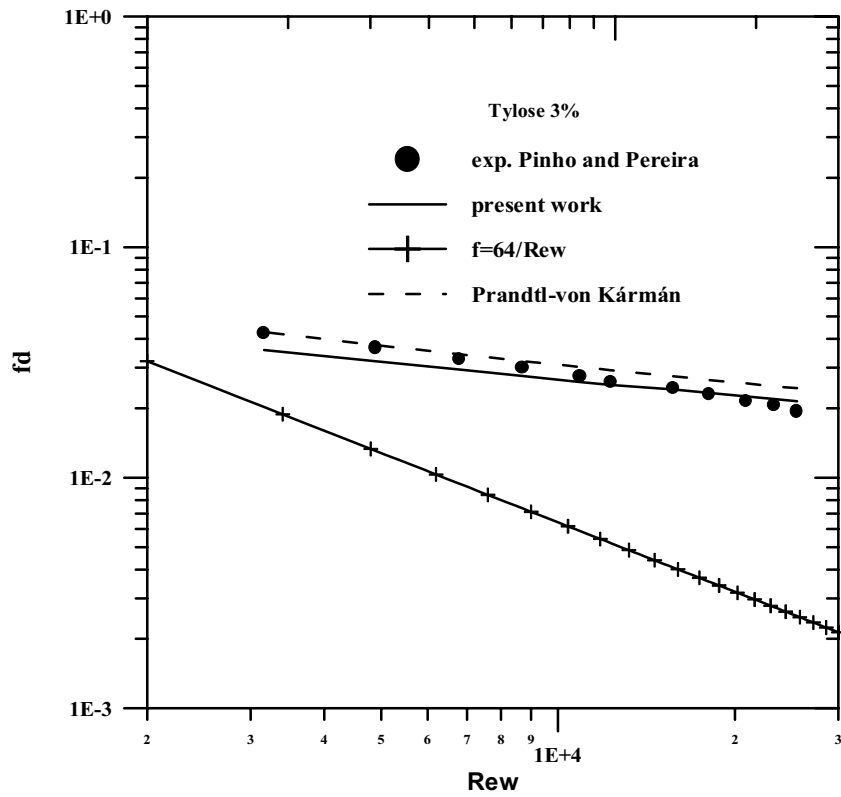


Figure 3-Comparison of the present formulation with experimental data of Tylose (3%) , Prandtl-von Kármán equation and with the laminar skin friction relation.

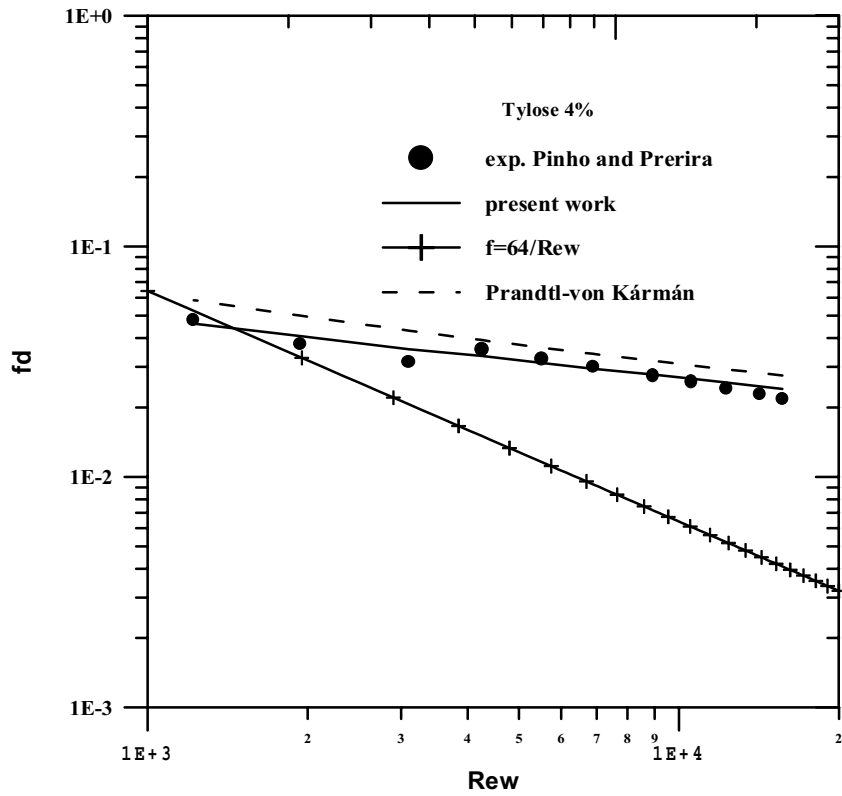


Figure 4-Comparison of the present formulation with experimental data of Tylose (4%) , Prandtl-von Kármán equation and with the laminar skin friction relation.

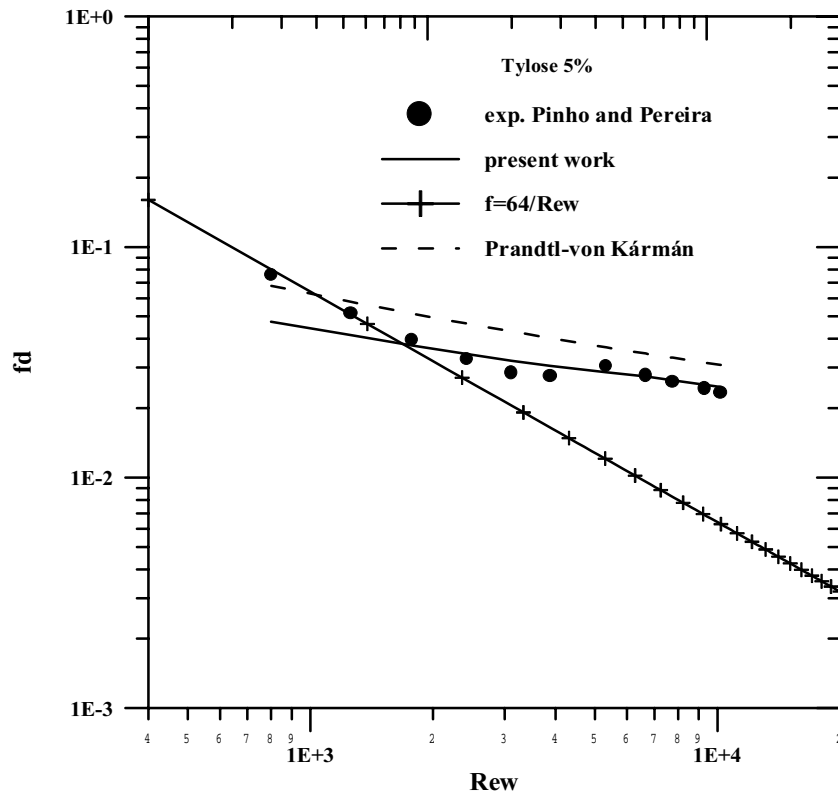


Figure 5-Comparison of the present formulation with experimental data of Tylose (5%) , Prandtl-von Kármán equation and with the laminar skin friction relation.

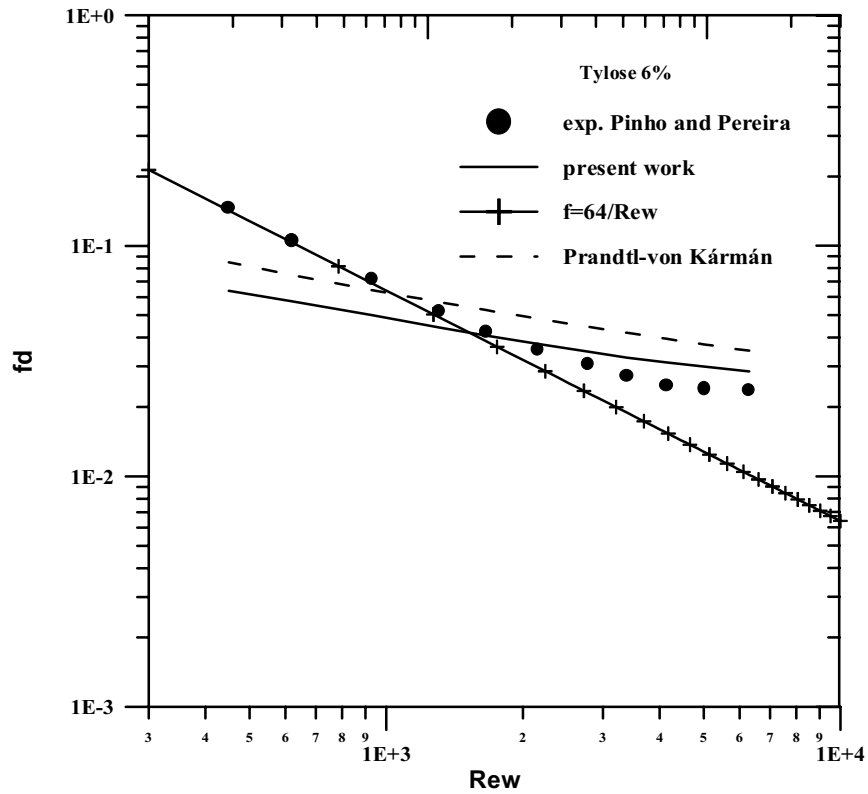


Figure 6-Comparison of the present formulation with experimental data of Tylose (6%) , Prandtl-von Kármán equation and with the laminar skin friction relation.

The figures 1 to 6 show that the present formulation reproduces adequately the experimental data giving satisfactory results, taking into account the experimental uncertainty. This fact indicates that, although in the case of turbulent flows the velocity gradient is very high in the near wall region, the influence of the relaxation time (small for all concentrations) can not be discarded.

One of main differences between the present analysis and the power law approach is that the characteristic length scale used is different in each formulation. This fact suggests that the near wall turbulent non-Newtonian flow can be analyzed in the same way as the Newtonian case. Since the logarithmic velocity profile can be obtained using dimensional arguments alone, and that in the analysis, the viscous effects are present only through the wall shear stress (Landau and Lifshitz (1987)) it indicates that even for the turbulent flow of non Newtonian fluid the velocity profile in the turbulent region outside the viscous sub layer has a logarithmic behavior. This conclusion is confirmed by the works of Virk and Dodge and Metzner among others. Therefore the influence of the non-Newtonian behavior is restricted to the constants that appears in the analysis, as the von Kármán constant κ , and to the characteristics length and velocity of the near wall flow.

The assumption the characteristics parameters of the near wall flow of non-Newtonian fluids are the same of the Newtonian case is very popular. In this work, however a different approach was adopted showing good results, and indicating that at least some other alternatives should be tried. The choice of the adequate near wall parameters is very important for the near wall modeling of the non-Newtonian turbulent flow. Not only if the logarithmic law approach is used with some K- ϵ or other turbulence model to avoid the viscous sub layer, but also if the low Reynolds number formulation is adopted.

The use of a “correction factor” into equation (7) similar the one that was introduced in the work of Cruz and Fialho (2001) for Carreau fluids, in order to adjust the Dodge and Metzner power law relation to the Carreau-Yasuda fluids flow, proved to be not necessary in the present formulation. However it should be noted that the expression which define the characteristic length, equation (7), does not take into account the parameter “a” of the rheological model. If it had been considered into the analysis, probably the correlation between analytical and experimental results would be even better.

The good results obtained here for the Tylose solutions turbulent flow using a pure viscous formulation, perhaps indicates that the viscoelastic effects are, in this case (concentrate weakly solutions of low molecular weight),

not very strong and that the present formulation can be used to calculate the friction factor, although more comparisons with others experimental data should be made to confirm this conclusion.

4. Conclusion

In this work, a skin friction equation for Carreau-Yasuda fluids was deduced. The equation was derived using a alternative formulation for the near wall characteristic length, instead of the classical Newtonian characteristic length given by ν/u_τ . A comparison with experimental data of six concentrations of low molecular weight Tylose solutions was made, and the proposed formulation proved to be consistent reproducing the drag reduction behavior adequately. This fact suggests, that the near wall turbulent flow analysis of non-Newtonian should be made in a similar way as the one used to describe the turbulent flow of Newtonian fluids. This also indicates that the logarithmic behavior of the turbulent mean velocity in the near wall region out of the viscous sub layer, is a consequence of the convective character of the turbulent transport and is probably not affected by the non Newtonian nature of the viscous stress. The influence of the Non Newtonian character of the viscous stress on the turbulent mean velocity, should be considered through the constants that emerges form the analysis, and the characteristic length of the near wall flow which is obtained from the viscous sub layer analysis.

5. Acknowledgements

The authors are in debt with professors A. S. Pereira and F.T Pinho who kindly provided the experimental data.

6. References

- Cruz, D. O. A. , Maneschy C. E. , Macêdo E. N. and Quaresma J.N.N.; “ A Turbulence Model For computing the flow of. Power law Fluids within Circular tubes” Hybrid Methods in Engineering In Press (2000)
- Cruz, D. O. A. , Fialho, L. C. ; “ A skin friction equation for turbulent flow of Carreau fluids” 2^a ETT In Press (2001)
- Dodge, D. W. and Metzner, A. B.; 1959 “Turbulent Flow of Non-Newtonian Fluids”, *AIChE Journal*, v. 5, pp. 189-204,
- Hinch E. J. ; “ Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows” *Phys. Fluids*,20 (1977) S22
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.; 1987 “Course of Theoretical Physics – V. 6: Fluid Mechanics”, Pergamon Press, 2nd Edition, .
- Pereira A. S. and Pinho F.T.; “ Turbulent Pipe flow characteristics of low molecular weigth polymers” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 55 (1994) 321-344
- Pereira A. S. and Pinho F.T.; “ Bulk characteristics of some variable viscosity polymer solutions in turbulent pipe flow” 15^o COBEM (1999)
- Pinho F.T. and Whitelaw J. H. ; “ Flow of Non- Newtonian Fluid in Pipe” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 34 (1990) 129
- Escudier M. P. , Jones D. M. and Gouldson I. ; “Fully developed flow of shear thinning” *Proceedings of the 6th International Symposium on applied laser techniques to fluid mechanics, Lisbon 1992* paper1.3.
- Tabor M., Durning C. J. and O’Shaughnessy ; “The microscope origin of drag reduction” *Internal report of university of Columbia, Depts. Of Appl. Phys. Appl Chem. And Chem. Eng., New York, NY 10027, 1989*
- Toms B.A.; “Some observations on the flow of linear polymer solution through straight tubes at large Reynolds number” “ *Proceedings of 1st conference on rheology, Vol2 North Holland Amsterdam, 1948* p135.
- Virk P. S. , Mickley H.S. and Smith K. A.; “ The ultimate Asymptote and the mean flow structure in Toms phenomena, *J. App. Mech.*, 37 (1970) 488.

Convecção Forçada Turbulenta entre Placas Corrugadas Utilizando Simulação de Grandes Escalas

Rogério Fernandes Brito

Departamento de Engenharia Mecânica. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. EFEI. 37500-176. Itajubá. MG. Brasil.
rogbrito@iem.efei.br

João Batista Dias

Departamento de Engenharia Mecânica. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. EFEI. 37500-176. Itajubá. MG. Brasil.
jbdias@iem.efei.br

Aristeu Silveira Neto

Departamento de Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Uberlândia. UFU. 38400-206 – Uberlândia. MG. Brasil.
aristeus@mecanica.ufu.br

Genésio José Menon

Departamento de Engenharia Mecânica. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. EFEI. 37500-176. Itajubá. MG. Brasil.
genesio@iem.efei.br

Resumo. Realiza-se um estudo numérico da transferência de calor por convecção forçada turbulenta através de placas corrugadas. As equações de Navier-Stokes são usadas na análise considerando escoamento bidimensional, turbulento e no regime não permanente. As equações de conservação foram discretizadas pelo método de elementos finitos (MEF), utilizando um esquema de Galerkin. A formulação das equações de conservação foram realizadas para o escoamento turbulento e a implementação do modelo de turbulência foi feita por simulação de grandes escalas (SGE) com função estrutura de velocidade de ordem 2. As distribuições da função corrente e da temperatura são obtidas em função dos diversos parâmetros geométricos e térmicos. Os resultados obtidos podem ser aplicados no projeto de trocadores de calor como um estudo inicial, sendo que, pelo fato do código ser bidimensional, caracteriza-se uma limitação para o caso de uma situação real.

Palavras-chave: Convecção Forçada, Simulação de Grandes Escalas, Elementos Finitos, Turbulência, Trocadores de Calor.

1. Introdução

O estudo teórico de escoamentos turbulentos em dutos e canais é de grande interesse em diversas áreas da engenharia, pois a maioria dos escoamentos encontrados em aplicações industrial ou ambiental é turbulenta, onde se tem número de Reynolds muito alto. A necessidade de se analisar o processo de transferência de calor de trocadores de calor compacto de placas corrugadas, envolvendo a geometria do presente trabalho, representa a grande motivação para este estudo numérico.

A modelagem de escoamentos turbulentos ainda é atualmente um desafio, visto que as simulações numéricas diretas (SND) são limitadas, pois a grande faixa entre as pequenas e grandes escalas não pode ser simulada explicitamente, mesmo usando computadores poderosos. Portanto, a SND não pode ser aplicada como uma ferramenta padrão de engenharia. A SGE tem sido usada, juntamente com os modelos de turbulência apropriados, para prever o campo de escoamentos. Observa-se na literatura, que poucos artigos em MEF, utilizando SGE, são encontrados. Com o objetivo de estudar os escoamentos turbulentos sem a necessidade de máquinas poderosas, a implementação da SGE em MEF é uma alternativa fácil de implementar, conduzindo-se a bons resultados.

Lesieur e Métails (1996) reportaram um estudo sobre a SGE descrevendo vários modelos sub-malha como o modelo de Smagorinsky, de viscosidade turbulenta espectral de Kraichnan, modelo de função estrutura, modelo de função estrutura seletivo, modelo de função estrutura filtrado, os modelos mistos e de similaridade de escala e os modelos dinâmicos. Várias aplicações da SGE para escoamentos turbulentos compressíveis e incompressíveis foram apresentadas, com ênfase na geração dos vórtices ao longo do escoamento.

Lee e Bienkiewicz (1997) apresentaram um estudo teórico do escoamento turbulento sobre um obstáculo quadrado montado sobre a placa inferior de um canal. Utilizou-se o método de elementos finitos juntamente com a SGE com modelagem sub-malha de Smagorinsky. O escoamento foi considerado bidimensional para número de Reynolds $Re = 40000$. Os esquemas Adams-Bashforth e de Crank-Nicholson foram utilizados para a integração no tempo e o esquema "upwind" para os termos de advecção. Considerou-se escoamento turbulento completamente desenvolvido na seção de entrada e impôs-se a condição de não escorregamento nas superfícies das paredes. Os resultados simulados foram comparados com estudos numéricos e experimentais de outros pesquisadores.

Pirani et all (2000) estudaram o escoamento bidimensional, turbulento e incompressível em grades de placas planas através da aplicação do método dos volumes finitos, do algoritmo SOLA e da SGE com modelagem sub-malha de Smagorinsky. O esquema convectivo QUICK e o princípio da malha deslocada foram utilizados. Para o teste do código computacional, obteve-se o ponto de recolamento para escoamento turbulento em degrau com número de Reynolds igual a $1,32 \times 10^5$ e comparou-se com a literatura. Foi também obtido o campo de vorticidade, possibilitando observar a formação dos turbilhões ao longo do canal.

Suksangpanomrung, Djilali e Moinat (2000) fizeram um estudo da SGE para alto número de Reynolds ($Re = 50000$). O escoamento tridimensional sobre uma placa retangular íngreme foi utilizado na simulação, utilizando-se três modelos sub-malha: função estrutura, função estrutura seletiva e Smagorinsky. As performances destes modelos foram examinadas fazendo-se comparações do escoamento médio, de estatísticas da turbulência e da dinâmica do escoamento com as observações experimentais.

O presente trabalho estuda a simulação de escoamentos turbulentos utilizando o método de elementos finitos (MEF) e a simulação de grandes escalas (SGE) com modelagem sub-malha de função estrutura de ordem 2. A geometria escolhida foi de placas corrugadas paralelas. Os resultados foram apresentados para valores de Reynolds $Re = 80000$, 40000 e 20000 com número de Prandtl $Pr = 0,7$, considerando escoamento uniforme na entrada com velocidade U_m . A Figura (1) apresenta a geometria estudada no presente trabalho. Os parâmetros geométricos utilizados foram: $L/H = 8$, $B/H = 1$, $L'/H = 1$ e $NB = 8$, sendo NB o número de blocos utilizados para formar a geometria do presente trabalho. As condições de contorno são: temperatura alta $T = 1$ na fronteira aberta S_1 e temperatura baixa $T = 0$ nas superfícies S_3 e S_4 . Na fronteira aberta S_2 de saída de fluido, colocou-se gradiente nulo para todas as variáveis nas direções paralelas às superfícies S_3 e S_4 . A Figura (2) apresenta a malha parcial de elementos finitos estruturada, utilizada no presente trabalho, correspondente aos blocos B1, B2 e B3 da Fig. (1). A malha completa utilizada neste trabalho contém 3718 nós e 7056 elementos triangulares lineares.

2. Formulação do Problema

O problema a ser estudado é da transferência de calor por convecção forçada entre placas corrugadas paralelas, conforme mostra a Fig. (1).

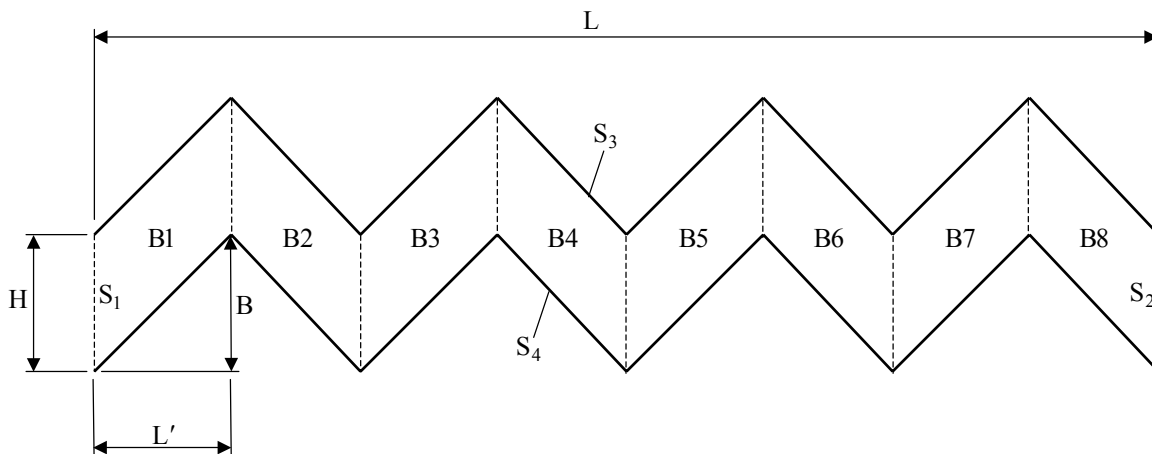


Figura 1. Geometria utilizada no presente trabalho.

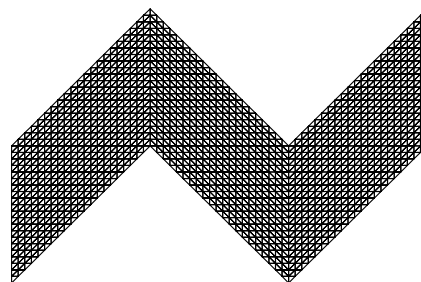


Figura 2. Malha estruturada parcial utilizada na obtenção dos resultados no presente trabalho.

As equações de conservação são desenvolvidas utilizando-se a SGE com modelagem sub-malha e função estrutura de velocidades de ordem 2. Na SGE com modelagem sub-malha, as equações de conservação são modificadas através de um processo de decomposição das variáveis associadas ao escoamento. As variáveis do escoamento F são decompostas na soma de uma parcela dita de grandes escalas \bar{f} e outra dita sub-malha f' , ou seja, $F = \bar{f} + f'$. A parte filtrada \bar{f} é obtida utilizando-se um filtro G a qual pode ser definido de diversas formas. Uma vez realizado o processo de decomposição das variáveis, aparecem termos de transporte convectivo que não podem ser calculados diretamente, sendo necessário decompô-los usando a expressão $F = \bar{f} + f'$. Isto dá origem ao tensor de Reynolds sub-malha e ao fluxo turbulento de energia térmica (Silveira-Neto, 1998). No presente trabalho, estes termos são modelados usando a *modelagem sub-malha Função Estrutura de Velocidade de Ordem 2* (ver item 3). Após isto, obtém-se as equações de conservação de (1) a (4) para escoamento turbulento.

As equações de conservação filtradas que descrevem o escoamento em estudo consideram as seguintes hipóteses: regime não permanente, escoamento bidimensional e turbulento, escoamento incompressível, a função dissipação viscosa foi desprezada na equação da energia, as propriedades do fluido são constantes, sem geração interna de calor, os efeitos de compressibilidade são desprezados.

Mediante as considerações feitas, as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_{ef} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_{ef} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{ef} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

sendo: u e v as componentes de velocidades nas direções x e y , t o tempo, p a pressão, ρ a massa específica do fluido, ν_{ef} a viscosidade efetiva do fluido, T a temperatura e α_{ef} a difusividade térmica efetiva do fluido. Onde, $\nu_{ef} = \nu + \nu_t$, sendo ν a viscosidade cinemática do fluido e $\nu_t(\bar{x}, \Delta, t)$ a viscosidade turbulenta; $\alpha_{ef} = \alpha + \alpha_t$, sendo α a difusividade térmica do fluido e $\alpha_t(\bar{x}, \Delta, t)$ a difusividade térmica turbulenta. No item 3 será mostrado que a viscosidade turbulenta $\nu_t(\bar{x}, \Delta, t)$ varia no espaço e no tempo, sendo ainda dependente do tamanho da malha computacional.

Introduz-se as seguintes definições de vorticidade ω e função corrente ψ :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Introduzindo as definições de (5) nas Eq. (1), (2), (3) e (4), tem-se:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega = 0, \quad (6)$$

$$\alpha_{ef} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\nu_{ef} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial t}. \quad (8)$$

As definições dos números de Reynolds Re e Prandtl Pr , são:

$$Re = \frac{U_m H}{\nu} \text{ e } Pr = \frac{\nu}{\alpha} . \quad (9)$$

O cálculo do número de Nusselt médio na placa superior Nu_m é dado por:

$$Nu_m = \frac{1}{L} \int_0^L Nu \, dl , \quad (10)$$

sendo: Nu o número de Nusselt local na placa superior dado por $Nu = [(T_w - T_{in}) / (T_w - T_m)] (\partial T / \partial n)|_w$, onde $T_w = 0$ a temperatura na parede, $T_{in} = 1$ a temperatura na entrada, T_m a temperatura média dada por $T_m = \left(\int_0^H T \cdot u \, dy \right) / \left(\int_0^H u \, dy \right)$, sendo esta na seção vertical de cada bloco com $x = NB \cdot L'$ (onde o número de blocos NB varia de 1 a 8) e $(\partial T / \partial n)|_w$ o gradiente de temperatura na parede superior dado por $(\partial T / \partial n)|_w = \sqrt{(\partial T / \partial x)^2 + (\partial T / \partial y)^2}$.

As condições iniciais e de contorno são definidas abaixo:

a) O escoamento se encontra, inicialmente em todo domínio computacional Ω , com:

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \omega(x, y, 0) = \psi(x, y, 0) = T(x, y, 0) = 0 , \quad (11)$$

b) Para a placa inferior, superfície S_4 , tem-se:

$$u = v = \psi = 0 \text{ e } T = 0 , \quad (12a)$$

c) Para a placa superior, superfície S_3 , tem-se:

$$u = v = 0 , \psi = U_m H \text{ e } T = 0 , \quad (12b)$$

d) Para fronteira aberta em S_1 de entrada de fluido, é imposto um perfil de velocidades uniforme, com uma condição de temperatura alta $T = 1$. Portanto:

$$u(0, y, t) = U_m , v(0, y, t) = \omega(0, y, t) = 0 \text{ e } T(0, y, t) = T_{in} = 1 . \quad (12c)$$

e) Para a fronteira aberta em S_2 de saída de fluido, tem-se condição de escoamento desenvolvido, dada por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n'} = \frac{\partial T}{\partial n'} = \frac{\partial \omega}{\partial n'} = 0 , \quad (12d)$$

sendo $\partial \phi / \partial n'$ a derivada sobre a fronteira aberta S_2 , na direção paralela às superfícies S_3 e S_4 .

3. Implementação do Modelo de Turbulência

Existem vários modelos de turbulência, mas a maioria deles traz resultados médios. A Simulação de Grandes Escalas com o modelo sub-malha função estrutura de velocidades de ordem 2, é um modelo que traz resultados não médios que carregam todas as instabilidades físicas e com frequências tanto maiores quanto mais refinadas forem as malhas. No caso do método de elementos finitos com o elemento linear, a função estrutura de velocidades de ordem 2 é suficiente para a precisão dos resultados obtidos.

A Simulação de Grandes Escalas se baseia no conceito da viscosidade turbulenta $\nu_t(\bar{x}, \Delta, t)$, a qual é uma propriedade do escoamento, varia no espaço e no tempo. No método de elementos finitos, a viscosidade cinemática ν é uma propriedade do fluido imposta no elemento e não no ponto nodal. A viscosidade turbulenta ν_t , que é uma propriedade do escoamento, deve ser somada à viscosidade cinemática e por isso deve ser calculada para cada elemento. A obtenção da difusividade térmica turbulenta $\alpha_t(\bar{x}, \Delta, t)$ é feita dividindo-se $\nu_t(\bar{x}, \Delta, t)$ por 0,7, isto é, $\alpha_t(\bar{x}, \Delta, t) = \nu_t(\bar{x}, \Delta, t) / 0,7$.

No presente trabalho a viscosidade turbulenta para o elemento é calculada no centróide do elemento levando em conta as velocidades nos centróides dos elementos vizinhos. Por se tratar de uma simulação numérica bidimensional, faz-se uma adaptação no cálculo da função estrutura de velocidades F_2 , utilizado no cálculo da viscosidade turbulenta ν_t . No modelo 3D, as velocidades dos elementos vizinhos são calculadas dentro de uma esfera de um raio R pré-calculado. Já no modelo 2D, essas mesmas velocidades são calculadas dentro de um círculo de raio R. A Figura (3) mostra quais elementos são incluídos nos cálculos para a obtenção da viscosidade turbulenta ν_t no elemento 9. Cada elemento vizinho tem o centróide posicionado numa distância menor ou igual ao valor do raio R de uma circunferência que envolve esses elementos vizinhos do elemento em questão. O valor deste raio R é dado por $R = \delta(a + b + c)/3$, onde a, b e c são as distâncias do centróide até os vértices do elemento e δ é um fator, cujo valor adotado é 1,9.

A viscosidade turbulenta ν_t é calculada da seguinte forma:

$$\nu_t(\bar{x}, \Delta, t) = 0,104 C_k^{-3/2} \Delta \sqrt{\bar{F}_2(\bar{x}, \Delta, t)}, \tag{13}$$

sendo C_k a constante de Kolmogorov cujo valor é: $C_k = 1,4$. A variável Δ é a média geométrica das distâncias d_i entre os elementos vizinhos e o ponto onde se está calculando ν_t , conforme pode ser visto na Fig. (3), sendo dada por:

$$\Delta = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N d_i}, \tag{14}$$

e $\bar{F}_2(\bar{x}, \Delta, t)$ é a função estrutura de velocidades de ordem 2.

Tomando-se em conta a lei de Kolmogorov, a qual estabelece que a função estrutura de velocidades de ordem 2 é proporcional a $(\epsilon r)^{2/3}$, sendo r a distância entre dois pontos, a função estrutura pode ser calculada como:

$$\bar{F}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \left[u_i(\bar{x} + d_i \bar{e}_i, t) - u(\bar{x}, t) \right]^2 + \left[v_i(\bar{x} + d_i \bar{e}_i, t) - v(\bar{x}, t) \right]^2 \right\} \left(\frac{\Delta}{d_i} \right)^{2/3}, \tag{15}$$

sendo: $u_i(\bar{x} + d_i \bar{e}_i, t)$ e $v_i(\bar{x} + d_i \bar{e}_i, t)$ as velocidades no ponto “i” do centróide do elemento vizinho localizado a uma distância d_i do ponto de cálculo, $u(\bar{x}, t)$ e $v(\bar{x}, t)$ as velocidades neste ponto do elemento, N o número de pontos vizinhos, t o tempo e \bar{e}_i o vetor na direção d_i .

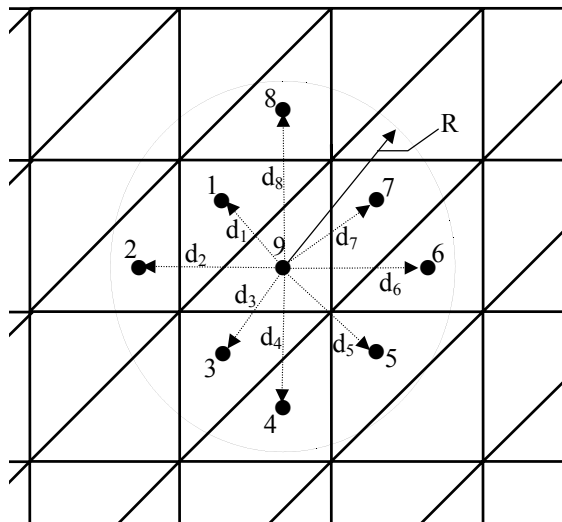


Figura 3. Exemplo de pontos para o cálculo de ν_t .

4. Método de Solução

As Equações (6), (7) e (8) são resolvidas através do método de elementos finitos, utilizando o elemento triangular com uma função de interpolação linear. A discretização é feita por elementos finitos e as equações são resolvidas pelo método de Galerkin. O problema é resolvido, seguindo-se os passos: (1^o) resolve-se a Eq. (6) para o cálculo da função corrente ψ ; (2^o) determina-se a vorticidade ω na parede de uma forma matricial, conforme mostrado em Silveira-Neto et al (2000); (3^o) aplicam-se as condições de contorno para a vorticidade; (4^o) calcula-se a vorticidade no interior pela Eq. (8); (5^o) calcula-se a temperatura resolvendo a Eq. (7); (6^o) calcula-se os números de Nusselt local Nu e médio Nu_m na placa superior para cada bloco; (7^o) incrementa-se o tempo de Δt e a iteração de uma unidade e volta-se ao (1^o) passo e os cálculos são refeitos até se atingir o critério de parada, que é o número máximo de iterações.

5. Testes Numéricos Realizados

Para efeito de validação do código computacional desenvolvido no presente trabalho, foi estudado o caso do escoamento num degrau. A Figura (4) apresenta a geometria usada nos testes computacionais. A Figura (5) apresenta a malha de elementos finitos não estruturada utilizada, com 2244 nós e 4070 elementos triangulares lineares. Neste teste foram considerados os seguintes parâmetros: número de Reynolds $Re = 1,23 \times 10^5$, baseado na velocidade média do perfil do escoamento na entrada e na altura de saída H e número de Prandtl $Pr = 0,7$. Utilizou-se um perfil de velocidades turbulento e desenvolvido na região de entrada do canal com degrau.

Calculou-se o ponto de recolamento e comparou-se com o caso estudado experimentalmente por Kim (1978). A Tabela 1 apresenta uma comparação do valor experimental de Kim (1978), com o trabalho numérico de Pirani et al (2000) e do presente trabalho. Os valores dos desvios encontrados em relação ao trabalho de Kim (1978) foram de 12,8% do presente trabalho e 22,8% do trabalho numérico de Pirani et al (2000).

Foram utilizadas duas formas para o cálculo do ponto de recolamento x_{PR} . A Figura (6a) mostra o gráfico da quantidade de velocidades positivas U^+ [%] versus a posição x [m] da placa inferior. Para confeccionar este gráfico, verificou-se a quantidade de vezes em que os valores da componente de velocidade u ao longo da parede inferior ficaram positivos. O ponto da curva correspondente a 50% com maior valor de x , foi admitido como o ponto de recolamento x_{PR} . A Figura (6b), apresenta o gráfico da média aritmética dos valores das componentes de velocidades, na direção x , \bar{U} [m/s] (nos elementos mais próximos da parede inferior a partir de $x = 5$) versus a posição x [m] da placa inferior. O ponto da curva correspondente ao maior valor de x com velocidade média $\bar{U} = 0$ foi tomado como o ponto de recolamento x_{PR} . Da Figura (6a), o valor do ponto de recolamento x_{PR} obtido ocorreu em torno de $x \cong 10,9$ e para a Fig. (6b), esse valor ocorreu em torno de $x \cong 11,1$. Assim, adotou-se $x \cong 11,1$ o valor do ponto de recolamento do gráfico da Fig. (6b), sendo este o valor mais próximo do caso estudado experimentalmente por Kim (1978). A Tabela 1 apresenta o valor obtido na Fig. (6b) do presente trabalho e tomado como comparação com o caso experimental de Kim (1978), sendo seu valor de $x_{PR} \cong 11,1 - 5 \cong 6,1$.

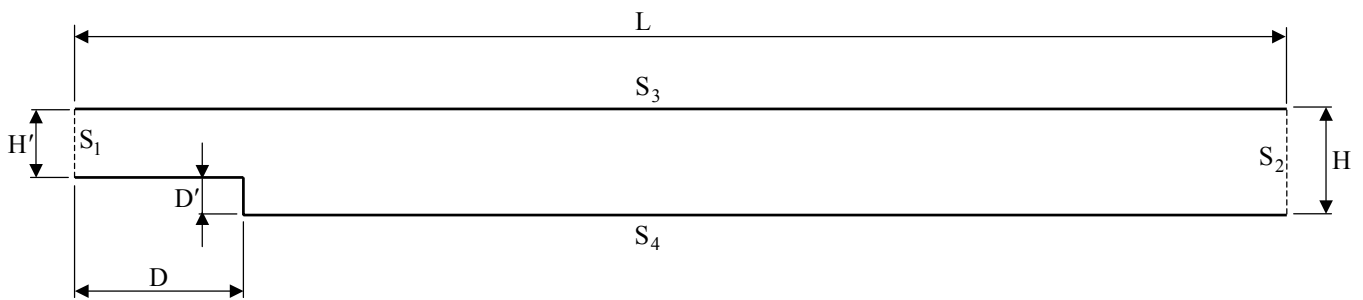


Figura 4. Geometria utilizada nos testes realizados.

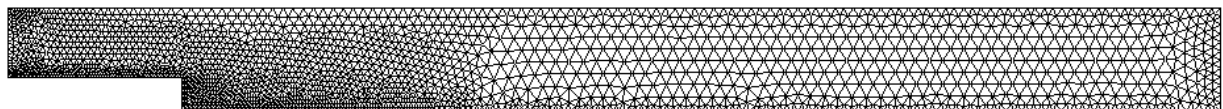


Figura 5. Malha não estruturada utilizada nos testes realizados.

6. Resultados

Nos resultados do presente trabalho foram considerados os seguintes parâmetros: $L/H = 8$; $B/H = 1$; $L'/H = 1$; $NB = 8$; $Re = 20000, 40000, 80000$ e $Pr = 0,7$. A Figura (7) mostra as distribuições de função corrente ψ para o tempo dimensional t variando de $t = 5$ a 100 [s].

Nas Figuras (7) e (8) podem ser vistos as distribuições de função corrente ψ para os tempos iguais a 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 e 100 [s], com incremento da isolinha $\Delta\psi = 0,6$.

Tabela 1. Ponto de recolamento.

Experimental Kim (1978)	SGE - Pirani et all (2000)	SGE - Presente Trabalho
$7,0 \pm 1,0$	5,4	6,1

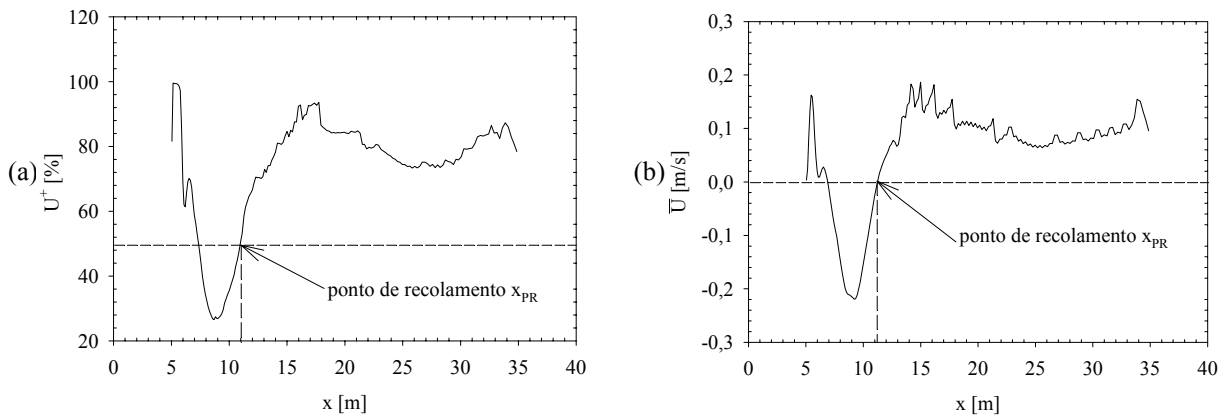


Figura 6. Ponto de recolamento no canal com degrau, com $t = 600$ [s]; Iteração = 60000 e Passo de tempo = 0,01.

Da Figura (7a), observa-se a formação de pequenas regiões de fluido recirculando próximas à placa superior nos blocos ímpares, com exceção do primeiro bloco, e também próximas da placa inferior nos blocos pares.

A Figura (7b) mostra que com o aumento do tempo, essas regiões de recirculações de fluido aumentam e tendem a se deslocar na direção do escoamento.

Da Figura (7c), novamente surgem regiões do fluido que irão se deslocar e formar, conforme mostra a Fig. (7d), um novo turbilhão. Assim o processo se repete, conforme pode ser visto nas Fig. (7e) e (8f-j), com exceção dos dois primeiros blocos, devido a essa grande variação temporal do escoamento próximo às placas superior e inferior, obtém-se uma troca de calor que irá variar ao longo do tempo. Observa-se também na região de saída das placas corrugadas que se forma, no último bloco, um turbilhão que caminha no sentido do escoamento até à saída da geometria.

A Tabela 2 apresenta os resultados das médias no tempo dos números de Nusselt médios Nu_m em cada bloco até o tempo $t = 200$ [s], números de Reynolds $Re = 80000, 40000$ e 20000 e número de Prandtl $Pr = 0,7$. Para o intervalo de tempo mostrado na coluna tempo da Tabela 2, o valor do tempo inicial adotado foi em decorrência de uma estabilização da temperatura média em todo o domínio computacional Ω . A Tabela 2 apresenta, neste intervalo de tempo, as médias aritméticas dos valores de Nu_m em cada bloco. Para os blocos 1 e 2, o valor de Nu_m foi tomado para $t = 200$ [s], visto que o escoamento nestes blocos tem um comportamento semelhante ao escoamento laminar, conforme pode ser visto nas Fig. (7) e (8) para todos os tempos.

Ainda da Tabela 2, observa-se que com a diminuição do Re , aumentaram-se as médias dos números de Nu_m para todos os blocos, com exceção do bloco 5. Isto ocorre devido ao escoamento ter menor intensidade de turbulência nas regiões próximas às placas superior e inferior, favorecendo assim a troca de calor. É bom lembrar que para o caso com $Re = 20000$, o tempo $t = 200$ [s] utilizado não foi suficiente para se obter uma estabilização da temperatura média em todo o domínio computacional Ω . Nos blocos com o símbolo asterisco (*), o Nu_m adotado em cada bloco foi para o tempo $t = 200$ [s]. Mesmo com a oscilação do Nu_m em todos os blocos, o Nu_m cresce ligeiramente em toda a extensão das placas corrugadas e para todos os valores de Re , fazendo com que as trocas de calor aumentem ligeiramente.

7. Conclusões

O estudo de escoamentos turbulentos com SGE e modelos sub-malha ainda é pouco utilizado. São poucos os trabalhos encontrados na literatura utilizando os métodos de diferenças finitas e volumes finitos, e nenhum foi encontrado utilizando o MEF com malha não estruturada. O objetivo do presente trabalho é mostrar que é possível modelar

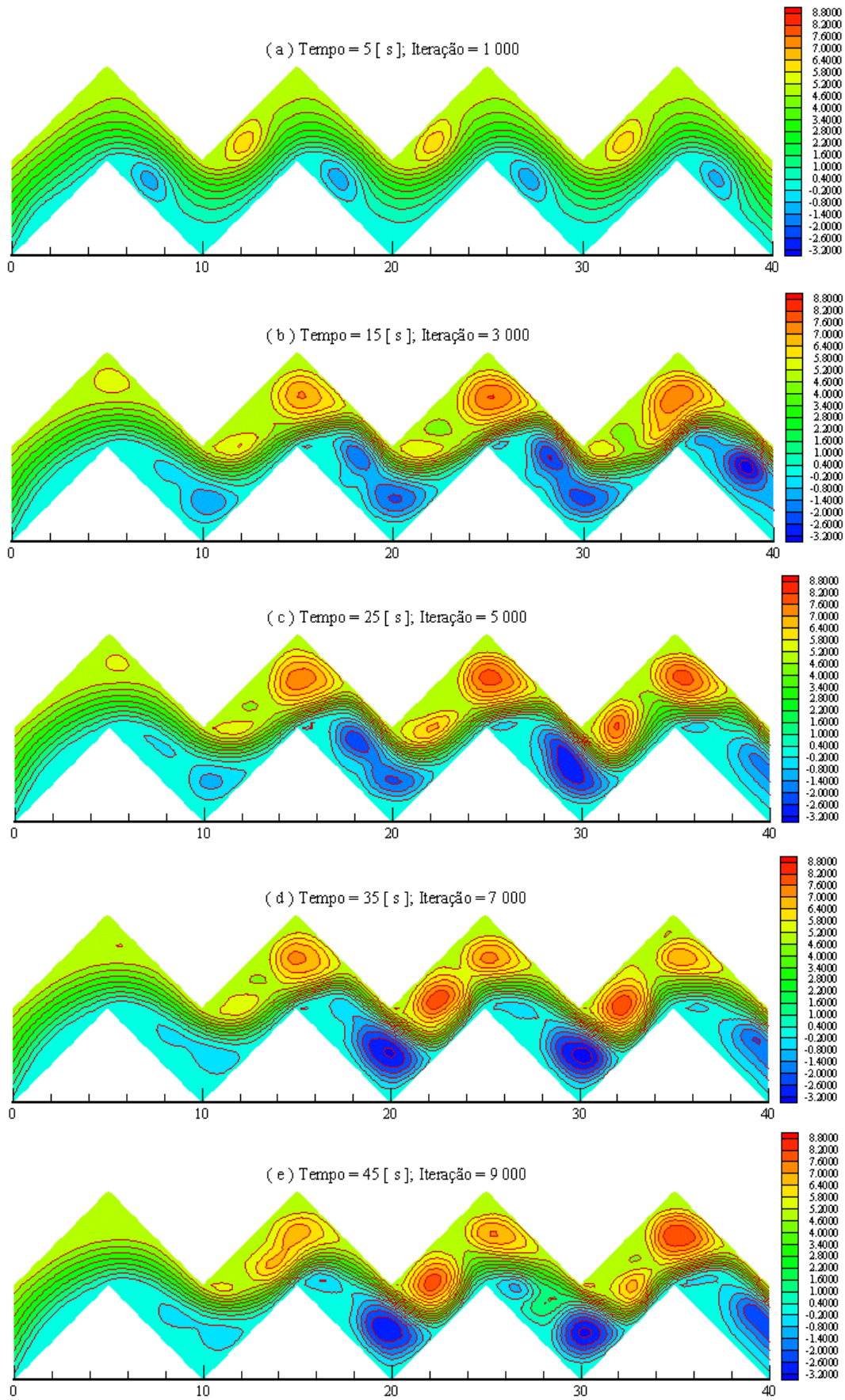


Figura 7. Distribuição de função corrente ψ para os tempos: (a) $t = 5$; (b) $t = 15$; (c) $t = 25$; (d) $t = 35$ e (e) $t = 45$ para $Re = 80000$; $Pr = 0,7$ e incremento da isolinha $\Delta\psi = 0,6$.

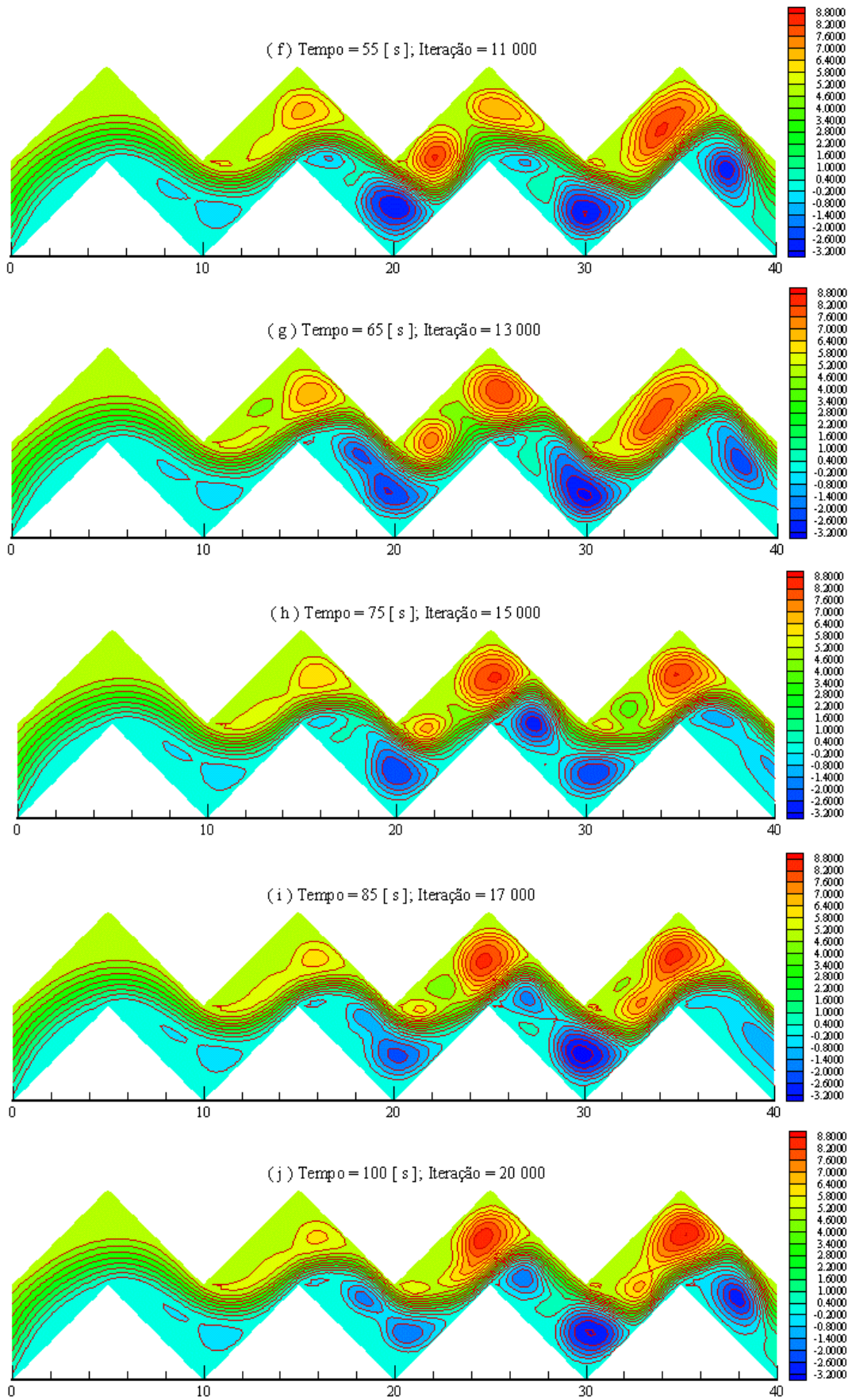


Figura 8. Distribuição de função corrente ψ para os tempos: (a) $t = 55$; (b) $t = 65$; (c) $t = 75$; (d) $t = 85$ e (e) $t = 100$ para $Re = 80000$; $Pr = 0,7$ e incremento da isolinha $\Delta\psi = 0,6$.

escoamentos turbulentos dentro do MEF, que utiliza malha não estruturada e, quase sempre, não uniforme. O cálculo da viscosidade turbulenta no elemento é feito de maneira a utilizar um grande número de elementos vizinhos e a minimizar os efeitos da não uniformidade da malha. Os resultados estão qualitativamente de acordo com o esperado, porém não foram encontrados trabalhos com geometria semelhante para comparação de resultados.

Tabela 2. Resultados das médias no tempo dos Nu_m para a placa superior para vários Re e $Pr = 0,7$.

Tempo [s]	Re	Bloco 1*	Bloco 2*	Bloco 3	Bloco 4	Bloco 5	Bloco 6	Bloco 7	Bloco 8
$50 \leq t \leq 200$	80 000	1,966	3,053	1,207	3,962	1,984	5,489	2,089	5,291
$100 \leq t \leq 200$	40 000	2,048	3,091	1,364	4,176	1,858	5,564	2,182	5,557
$150 \leq t \leq 200$	20 000	2,197	3,158	1,450	4,397	2,171	5,920	2,343	6,507

8. Referências

- Kim, J. J., 1978, "Investigation of Separation and Reattachment of Turbulent Shear Layer: Flow Over a Backward Facing Step". Ph.D. Thesis, Stanford University.
- Lee, S. e Bienkiewicz, B., 1997, "Large-Eddy Simulation of Wind Effects on Bluff Bodies Using the Finite Element Method", J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.67&68, pp. 601-609.
- Lesieur, M. e Métails, O., 1996, "New Trends in Large-Eddy Simulatio of Turbulence", Annual Review Fluid Mech., Vol.28, pp. 45-82.
- Pirani, M. J., Manzanares, N., Silveira-Neto, A. e Almeida, M. S. V., 2000, "Escoamento Turbulento em Grades de Placas Planas Utilizando o Método dos Volumes Finitos e Simulação de Grandes Escalas", Anais do IV Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, SIMMEC, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, pp. 70-77.
- Silveira-Neto, A., 1998, "Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos", I Escola de Primavera, Transição e Turbulência, apostila de mini curso, ABCM, COPPE/UFRJ, IME/RJ, Rio de Janeiro, Brasil, pp.159-190.
- Silveira-Neto, A., Brito, R. F., Dias, J. B. e Menon, G. J., 2000, "Aplicação da Simulação de Grandes Escalas no Método de Elementos Finitos para Modelar Escoamentos Turbulentos", Anais da II Escola Brasileira de Primavera, Transição e Turbulência, ETT 2000, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, pp. 515-526.
- Suksangpanomrung, A., Djilali, N. e Moinat, P., 2000, "Large-Eddy Simulation of Separated Flow Over a Bluff Rectangular Plate", International J. of Heat and Fluid Flow, Vol.21, pp. 655-663.

Large-Eddy Simulation with Turbulent Forced Convection Between Corrugated Plates

Rogério Fernandes Brito

Department of Mechanical Engineering. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. EFEI. 37500-176. Itajubá. MG. Brazil.
rogbrito@iem.efei.br

João Batista Dias

Department of Mechanical Engineering. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. EFEI. 37500-176. Itajubá. MG. Brazil.
jbdias@iem.efei.br

Aristeu Silveira Neto

Department of Mechanical Engineering. Universidade Federal de Uberlândia. UFU. 38400-206 – Uberlândia. MG. Brazil.
aristeus@mecanica.ufu.br

Genésio José Menon

Department of Mechanical Engineering. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. EFEI. 37500-176. Itajubá. MG. Brazil.
genesio@iem.efei.br

Abstract. In this work, a numerical study of heat transfer by turbulent forced convection is carried out through corrugated plates. In this study, the Navier-Stokes equations are used considering two-dimensional and turbulent flow for unsteady state. The finite element method with a Galerkin scheme is utilized for solving the conservation equations. The formulation of conservation equations were carried out for turbulent flow and the implementation of turbulent model was made by Large-Eddy Simulation (LES) with second-order velocity structure function. The distribution of the stream function and of the temperature are determined as function of the thermal and geometrical parameters. The results of this work can be applied to the design of heat exchangers as a starting study and due to the fact that the code is two-dimensional, representing the limitation for a real application.

Keywords. Forced Convection, Large-Eddy Simulation, Finite Element, Turbulence, Heat Exchangers.

MAPEAMENTO DE PROCESSOS DE MICROFILTRAÇÃO TANGENCIAL POR REDES NEURAS ARTIFICIAIS

Ivan Nunes da Silva

Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Elétrica, CP 473, CEP 17033-360, Bauru-SP
e-mail: ivan@bauru.unesp.br

Paulo Cezar Razuk

Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Mecânica CP 473, CEP 17033-360, Bauru-SP
e-mail: razuk@bauru.unesp.br

Resumo: O processo de microfiltração tangencial difere-se da filtração convencional por apresentar o fluxo da alimentação tangenciando a superfície de filtração. Os modelos matemáticos convencionais que procuram representar esse processo possuem limitações em relação ao adequado comportamento do sistema ou ainda pela dificuldade existente na obtenção de alguns parâmetros necessários. Neste artigo, um sistema baseado em redes neurais artificiais e técnicas de otimização é desenvolvido para contornar os problemas normalmente encontrados nos modelos matemáticos convencionais. Mais especificamente, o sistema desenvolvido utiliza redes neurais do tipo perceptron que simula o comportamento do sistema de microfiltração tangencial de forma robusta mesmo diante de imprecisões ou incertezas nas medidas das grandezas do sistema. Resultados de simulações são apresentados para justificar a validade da abordagem proposta.

Palavras chave: processos de filtração, microfiltração tangencial, redes neurais artificiais, sistemas inteligentes, identificação de sistemas.

1. Introdução

A microfiltração tangencial (MFT) difere-se da microfiltração convencional pela característica de possuir a alimentação do filtrado tangenciando a superfície de filtração. Esta característica construtiva permite que o fluxo da alimentação consiga remover as partículas incrustadas sobre a mesma fazendo com que o processo tenha uma maior eficiência. Devido a essas características, a MFT tem sido utilizada para resolver diversos problemas industriais: na clarificação de líquidos (Wu et al, 1990), esterilização de soluções a baixa temperatura (Dornier et al, 1993) e remoção de macromoléculas de soluções (Roseiro et al, 1993). Outra característica intrínseca da MFT é a possibilidade de se realizar uma filtração contínua e de recuperar tanto a fase sólida como a líquida, tornando-a assim ainda mais atrativa para aplicações industriais.

Um sistema de microfiltração é classificado como um processo de filtração por pressão e colocado entre a ultrafiltração e a filtração convencional (Ruiz, 1994).

Na filtração convencional a pressão conduz o fluido perpendicularmente ao meio filtrante. Alguns sólidos permanecem no meio filtrante ou passam para o filtrado. Quando os poros se entopem, de tanto reterem sólidos, o meio filtrante deve ser renovado.

Na filtração de fluxo tangencial ou filtração inercial, a pressão conduz só parte da alimentação para o meio filtrante. A alimentação remanescente tangencia a superfície do meio filtrante, continuamente. Através da MFT, partículas da ordem de 0,06 a 2 μm de diâmetro podem ser separadas.

Normalmente, os filtros empregados na MFT apresentam poros com diâmetro inferior ao diâmetro dos sólidos em suspensão no fluido. Desta forma, as partículas em suspensão são retidas na superfície da membrana e posteriormente arrastadas pelo movimento do fluido a ser filtrado. Em geral, a pressão é mantida constante através do meio filtrante, eliminando-se a necessidade de se aumentar a pressão para manter a vazão constante.

Os modelos convencionais utilizados no contexto da estimação de parâmetros da MFT possuem determinadas limitações. A utilização de modelos lineares não apresentam uma boa representação para o processo já que no cerne deste encontra-se um comportamento não-linear. Por outro lado, modelos não-lineares mais complexos necessitam de uma grande quantidade de experimentos afim de que seus parâmetros fixos sejam corretamente determinados.

Muitas vezes a realização de vários experimentos torna-se inviável em função dos custos operacionais encontrados para implementar tal finalidade. Outra desvantagem destes modelos é a dificuldade de incorporar aos mesmos as incertezas e os ruídos presentes nas medições das grandezas do sistema, tais como a velocidade tangencial, pressão, vazão, etc. Como decorrência deste fato, a robustez do modelo representando o comportamento do sistema pode ser afetada sensivelmente, tornando-o instável.

A habilidade de Redes Neurais Artificiais (RNA) em mapear comportamentos de sistemas não-lineares, sem a necessidade de conhecer eventuais modelos matemáticos que os descrevem, tem se tornado uma ferramenta atrativa que pode ser aplicada eficientemente em processos de microfiltração tangencial. Baseado nestas características, este artigo propõe uma aplicação de redes neurais artificiais na estimação e identificação de parâmetros associados aos processos de MFT. A abordagem desenvolvida consegue mapear adequadamente o comportamento do processo de MFT, contornando então as desvantagens inerentes encontradas nos modelos matemáticos convencionais.

A organização deste artigo está como segue. A Seção 2 aborda a modelagem matemática normalmente envolvida no processo de microfiltração tangencial. A Seção 3 descreve o mapeamento do processo de microfiltração tangencial através de redes neurais artificiais. Os materiais e métodos utilizados na obtenção das grandezas que regem o processo de MFT são apresentados na Seção 4. Resultados de simulações e avaliações dos mesmos são fornecidos na Seção 5. Finalmente, as conclusões e os pontos-chaves deste artigo são apresentados na Seção 6.

2. Modelagem matemática para microfiltração tangencial

Geralmente, o projeto de filtros é feito com base em ensaios de escala reduzida (Ruiz, 1994). A partir destes ensaios experimentais, pode-se dispor de um modelo matemático envolvendo os parâmetros associados ao processo. As equações assim desenvolvidas, a partir da situação otimizada, servem para o cálculo de filtros com áreas muitas vezes maiores do que a do filtro utilizado no teste.

Neste artigo, o modelo matemático escolhido para a comparação com a abordagem proposta é o modelo convencional de escoamento, através de meios porosos, num fluxo laminar. A dedução detalhada das equações do modelo empregado neste estudo pode ser encontrada em Ruiz (1994).

A equação básica para o escoamento através da membrana é a equação de Darcy, usada para o cálculo de perda de carga por atrito, em tubos, num fluxo laminar, adaptada a meios porosos, isto é:

$$\frac{f'}{F_f} = \frac{2 \cdot g \cdot D_p \cdot \Delta p}{L \cdot V_m^2 \cdot F_f} \quad (1)$$

onde: f' é o fator de atrito, F_f é o coeficiente de correção do fator de atrito, g é a aceleração da gravidade (m/s^2), D_p é o diâmetro médio da partícula (m), Δp é a diferença de pressão entre as paredes da membrana, L é o comprimento do tubo ou espessura da camada (m), e V_m é a velocidade média do fluido filtrado (m/s).

Levando-se em conta o coeficiente de correção do número de Reynolds (F_{rey}), a equação utilizada para descrever a diferença de pressão Δp entre as paredes da membrana é a equação de Poiseuille, ou seja:

$$\Delta p = \frac{32 V_m^2 \cdot F_f \cdot L \cdot \mu}{g \cdot D_p \cdot F_{rey}} \quad (2)$$

em que μ especifica a viscosidade do fluido (kg/m.s).

O fluxo (J) ou velocidade média (V_m) do filtrado, levando-se também em consideração a permeabilidade do meio poroso (K), é dada pela seguinte equação:

$$V_m = \frac{K \cdot \Delta p}{L \cdot \mu} \quad (3)$$

O cálculo da porosidade da membrana (x) e da permeabilidade do meio poroso (K) podem ser obtidas a partir das seguintes equações:

$$x = 1 - \frac{V \cdot \gamma \cdot w}{\rho \cdot L \cdot A} \quad (4)$$

$$K = \frac{1}{a \cdot \rho \cdot (1 - x)} \quad (5)$$

onde: V é o volume de filtrado, A é a área filtrante, ρ é a densidade dos sólidos da camada, w é a quantidade relativa de sólidos em suspensão, a é a resistência específica da torta, e γ é a densidade do produto filtrado.

A determinação da constante de filtração (C_v') e do volume equivalente de filtrado (V_e) pode ser feita através da equação especificada por:

$$\frac{t}{V} = \frac{C_v' \cdot \gamma}{A^2 \cdot \Delta p} V + \frac{2 \cdot C_v' \cdot \gamma}{A^2 \cdot \Delta p} V_e \quad (6)$$

onde t é o tempo de filtração.

A especificação da espessura da camada seca (L) da membrana é executada em função da aplicação da seguinte equação:

$$L = w \frac{V}{A} \quad (7)$$

A equação geral da filtração (8) é então utilizada para o cálculo da resistência específica da camada (a) e a espessura equivalente (L_e) da mesma, ou seja:

$$\frac{t}{\frac{V}{A}} = \frac{\mu.a.L_e}{\Delta p} + \frac{\mu.a.w}{2.\Delta p} \frac{V}{A} \quad (8)$$

A partir dos resultados obtidos no laboratório, a equação que prevê qual a conduta de uma instalação industrial associado a um processo de filtração tangencial é dada por:

$$t = \frac{\mu.a.L_e}{\Delta p} \left[\frac{V}{A} \right] + \frac{\mu.a.w}{2.\Delta p} \left[\frac{V}{A} \right]^2 \quad (9)$$

Finalmente, a equação (10) torna possível o cálculo da resistência da membrana (R_m) e da resistência da camada (R_c), a partir de gráficos do fluxo do filtrado em função da pressão, para diversos fluidos, ou seja:

$$J = \frac{\Delta p}{\mu(R_m + R_c)} \quad (10)$$

A equação (11) permite, então, confirmar a interferência, no fluxo filtrado, da velocidade tangencial (V_{tg}) de alimentação, isto é:

$$J^2 = \frac{8.K.\Delta p(\rho - c)V_{tg}}{\mu.a.D.\rho.c} \quad (11)$$

Portanto, como pode-se observar nas equações anteriores, verifica-se que a dificuldade encontrada na modelagem matemática do comportamento da microfiltração tangencial consiste em relacionar as principais grandezas e condições que estão associadas ao processo. Entretanto, o relacionamento, a partir de dados experimentais, entre todas as variáveis que fazem parte do processo torna-se uma tarefa árdua e difícil, pois este mapeamento entre as variáveis não é realizado de forma direta. Uma outra desvantagem encontrada nestes modelos matemáticos reside na dificuldade em inserir os ruídos e incertezas que estão associados às próprias medições experimentais. A desconsideração destes ruídos pode afetar sensivelmente a capacidade de estimação do modelo matemático desenvolvido.

3. Modelagem neural para microfiltração tangencial

Como mencionado nas Seções 1 e 2, a representação através de um modelo matemático para o processo de microfiltração tangencial esbarram nas próprias limitações oferecidas pelos modelos matemáticos. Aproximações por modelos matemáticos lineares não fornecem uma aproximação adequada já que o erro na predição assume valores que impedem uma estimação do processo com uma boa margem de segurança. Por outro lado, a utilização de modelos matemáticos mais complexos, como o apresentado na Seção 2, fornece uma modelagem que apresenta bons resultados, assemelhando-se em muito com os resultados reais do fenômeno em questão. Entretanto, entre as limitações de tal modelagem está no grande número de experimentos necessários para a determinação dos parâmetros constantes do modelo e a sua conseqüente validação.

Neste trabalho, uma rede neural artificial é projetada com o objetivo de contornar as eventuais limitações e desvantagens relacionadas com os modelos matemáticos. A arquitetura escolhida para estimar o comportamento do processo de MFT é uma rede perceptron constituída de uma camada escondida (Fig. 1) composta por 20 neurônios com função de ativação do tipo tangente sigmóide.

As variáveis de entrada da rede é o tempo de filtração (t), a pressão transmembrana (P_{tm}), densidade do material a ser filtrado (ρ) e a concentração inicial do fluido a ser filtrado (C). A variável de saída que será estimada pela rede é o fluxo do filtrado ou taxa de filtração (J). O algoritmo de aprendizado utilizado no treinamento da rede foi o método de Levenberg-Marquardt (Hagan et al, 1994). Uma descrição detalhada dos fundamentos e conceitos associados às redes neurais artificiais pode ser encontrado em Haykin (1994).

Dado que os modelos matemáticos para a MFT possuem limitações quanto aos seus resultados, o conjunto de treinamento da rede foi composto apenas por dados experimentais na tentativa de que a metodologia proposta não possuísse as mesmas limitações dos modelos em questão.

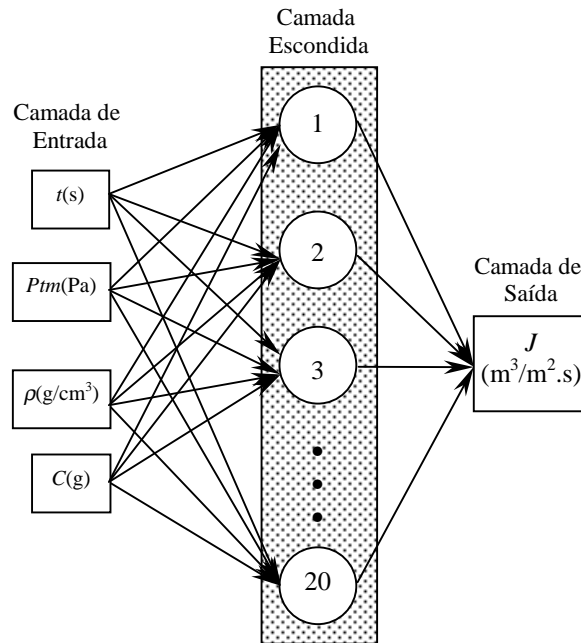


Figura 1. Representação esquemática da rede neural utilizada no processo de MFT.

Assim, como a rede foi treinada a partir de dados experimentais, todos os ruídos e incertezas incorporadas no processo, as quais são provenientes de erros nas medições e da imprecisão dos instrumentos utilizados, tem sido também levadas em consideração. Partindo deste princípio, o algoritmo de treinamento utilizado teve a inclusão da técnica de regularização Bayesiana (Foresee et all, 1997) para que a rede (após o seu treinamento) ficasse imune aos erros incorporados em suas variáveis de entrada, permitindo assim que a estimação e generalização dos dados de saída fosse adequada ao propósito do trabalho

4. Materiais e métodos

O modelo utilizado para a MFT necessita de um sistema que opere sob pressão. O conjunto consta de um módulo de filtração, de um tanque de alimentação, além de tubulações e da instrumentação necessária (Fig. 2). O elemento filtrante utilizado foi o capilar (membrana Accurel). As membranas capilares são adequadas para líquidos de baixa viscosidade (Ruiz, 1994).

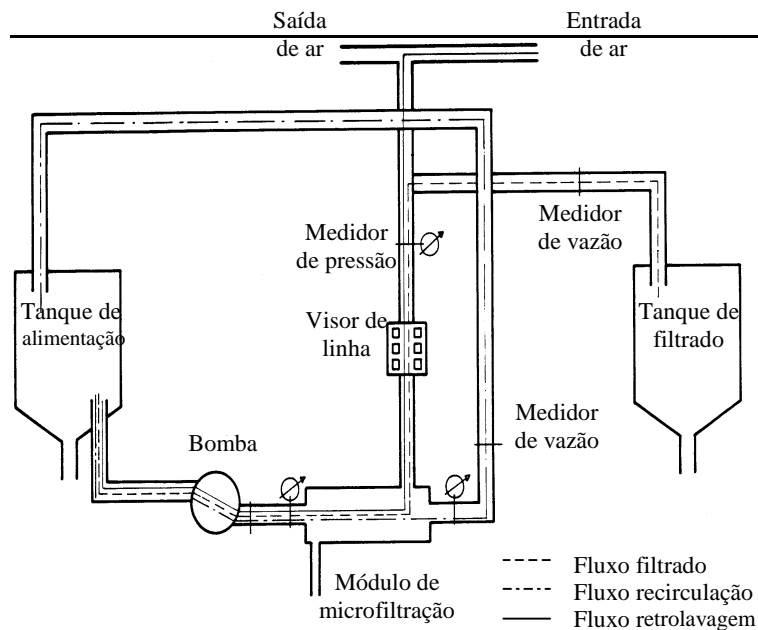


Figura 2. O processo de microfiltração tangencial.

A bomba utilizada no processo tem uma curva característica que deve satisfazer as exigências de vazão do produto, a qual é determinada pela taxa de filtração e pela altura manométrica, e ser compatível com a pressão transmembrana e sua resistência mecânica. A potência exigida dependerá, também, de eventuais equipamentos colocados na linha de recalque da bomba, após o módulo de microfiltração. A Fig. (2) ilustra a representação esquemática do processo de microfiltração tangencial empregado.

Foram feitos sete ensaios em laboratório com diferentes amostras de solução aquosa. O objetivo era constituir o conjunto de treinamento da rede descrita na Seção 3. As características de cada amostra podem ser verificadas na Tab. (1).

Tabela 1. Principais características das amostras utilizadas na filtração.

Amostra	Tipo de Impureza	Massa da Impureza (g)	Volume filtrado (l)	Pressão ($\times 10^5$ Pa)
1 ⁽¹⁾	Nenhuma	--	20	1,4
2 ⁽¹⁾	Nenhuma	--	20	1,2
3 ⁽¹⁾	Nenhuma	--	20	1,75
4 ⁽¹⁾	Amido	4	29	1,5
5 ⁽¹⁾	Amido	8	29	1,5
6 ⁽¹⁾	Carvão	8	29	1,5
7 ⁽²⁾	Nenhuma	--	20	1,5

⁽¹⁾ água proveniente do campus de Botucatu

⁽²⁾ água de rio decantada

Desta forma, uma família de redes neurais foram criadas com diferentes números de neurônios nas suas camadas ocultas. As funções de ativação empregadas em cada rede também variavam entre as topologias testadas. Todas as redes foram treinadas com apenas parte do conjunto de treinamento, sendo que a outra parte do conjunto foi reservado para a validação da melhor topologia. Após o treinamento, a rede que apresentou os melhores resultados foi então treinada com o conjunto de treinamento completo.

Os mesmos dados experimentais foram aplicados ao modelo matemático descrito na Seção 2, com o objetivo de que suas constantes pudessem ser especificadas.

Em seguida, foram feitas várias estimações tanto com a rede neural desenvolvida como para o modelo matemático apresentado. Os resultados obtidos por ambas metodologias foram comparados para verificar a eficiência de cada um dos métodos. A predição do erro de estimação foi determinada em função do coeficiente de divergência λ fornecido de acordo com a seguinte equação:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\sum (\hat{J}_i - J_i)^2}}{2 \cdot \bar{J}} \cdot 100 \quad (12)$$

onde:

J_i é o i -ésimo valor experimental.

\hat{J}_i é o i -ésimo valor calculado pelo modelo adotado.

\bar{J} é o valor médio dos resultados experimentais.

Através deste coeficiente é possível expressar o desvio padrão do erro produzido pelo modelo em relação à porcentagem do valor médio experimental.

5. Resultados e discussão

Como descrito na Seção 4, foram feitos sete ensaios em laboratório conforme as amostras descritas na Tab. (1). As curvas referentes às medições destes ensaios podem ser verificadas na Fig. (3).

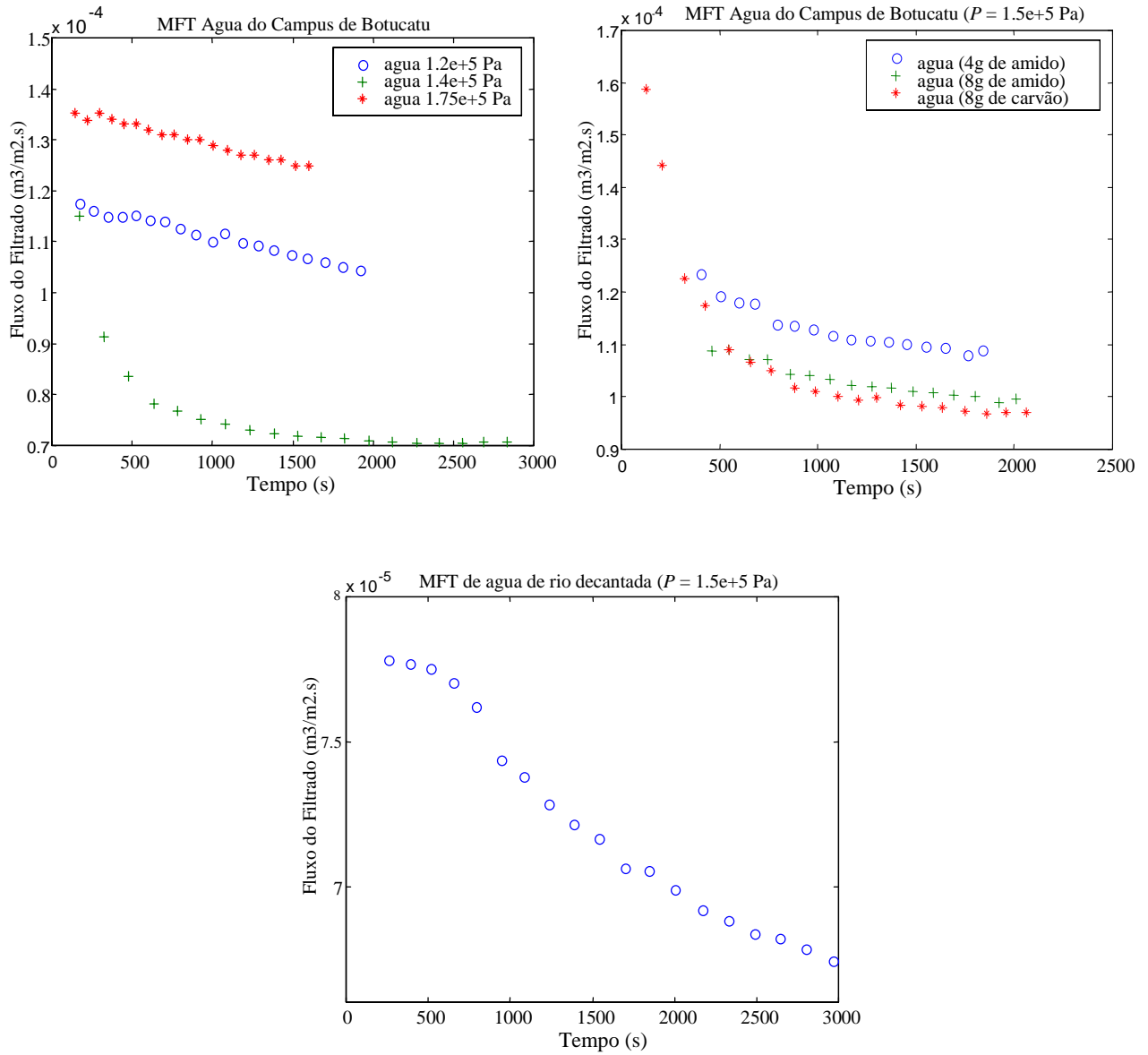


Figura 3. Gráficos dos ensaios experimentais.

A partir dos dados experimentais, diversas redes do tipo perceptron puderam ser treinadas a fim de que a melhor arquitetura pudesse ser escolhida. Na Tab. (2) são mostrados os resultados obtidos por esta metodologia, bem como coloca-se em destaque a arquitetura que melhor se adaptou ao conjunto de treinamento.

Tabela 2. Características de treinamento das arquiteturas empregadas.

Arquitetura	Neurônios na Camada Oculta	λ	Épocas de treinamento ⁽³⁾
1	10	3.16	100
2	15	3.74	100
3	20	2.89	100
4	25	3.00	100

⁽³⁾épocas de treinamento para uma performance de 10^{-3}

Como observado na Tab. (2), a terceira arquitetura apresentou a melhor performance e, portanto, foi novamente treinada para se adaptar ao conjunto de treinamento constituído por todos os dados experimentais. A adaptação da rede em relação aos pontos experimentais pode ser verificada através da Fig. (4).

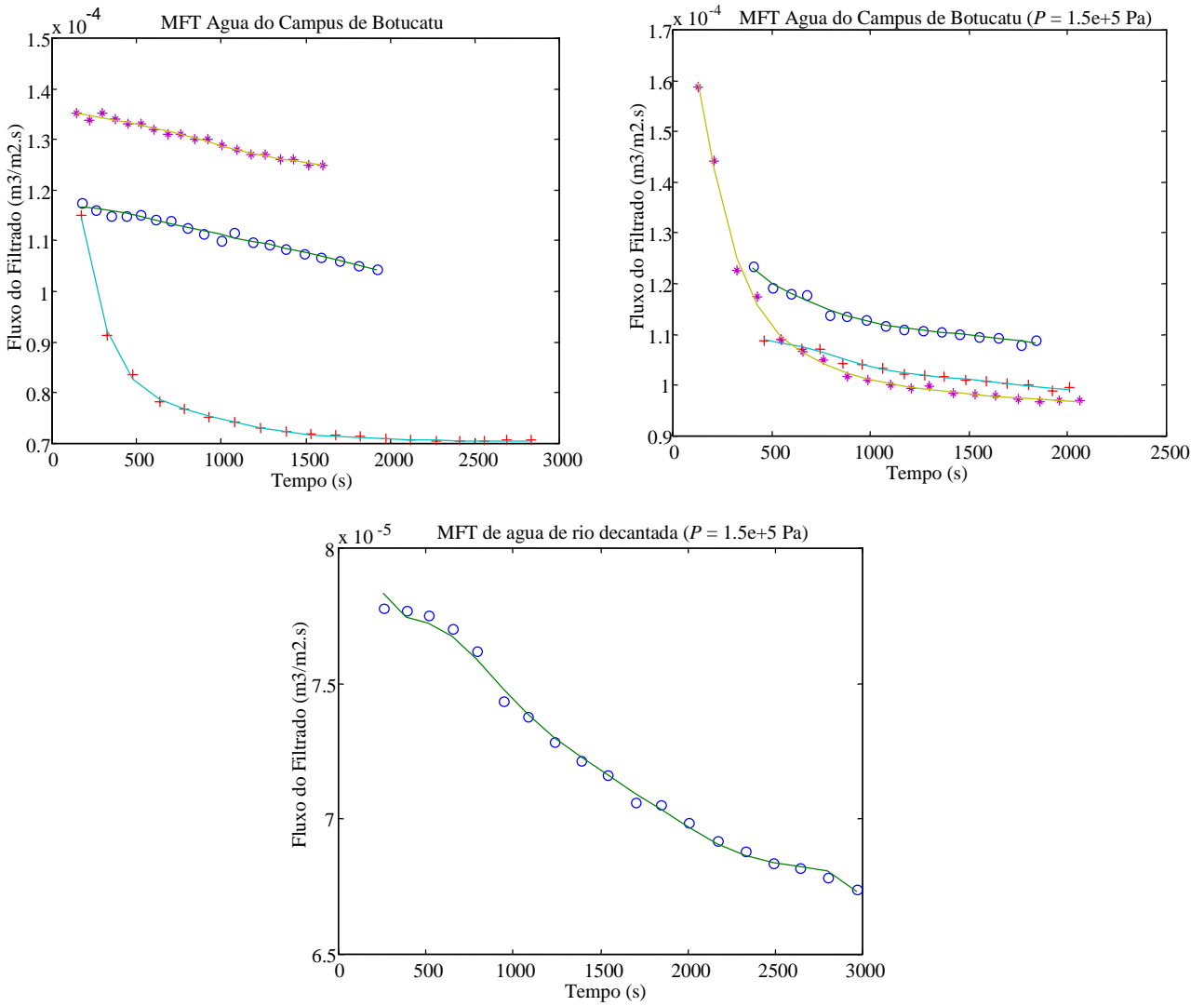
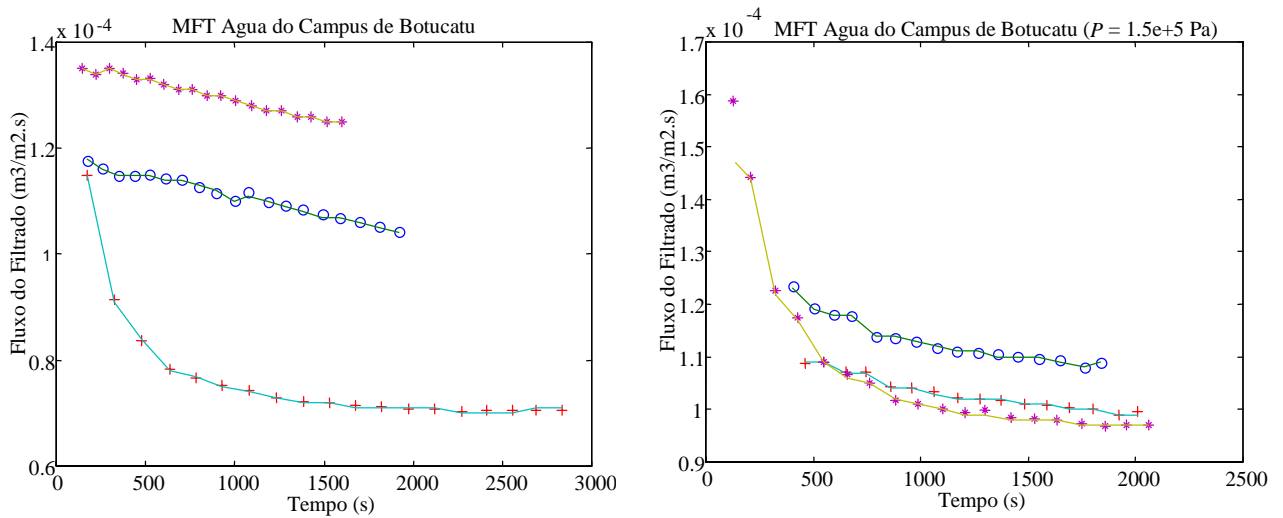


Figura 4. Gráficos da adaptação da rede desenvolvida em relação aos dados experimentais de laboratório.

É possível, através dos gráficos da Fig. (4), verificar-se a capacidade de adaptação e generalização da rede aos dados experimentais mesmo diante dos ruídos encontrados nos dados do conjunto de treinamento. O coeficiente de divergência λ ficou em 2,25% com 200 épocas de treinamento.

Na Fig. (5), tem-se os gráficos fornecidos pelo modelo matemático quando aplicado aos dados experimentais.



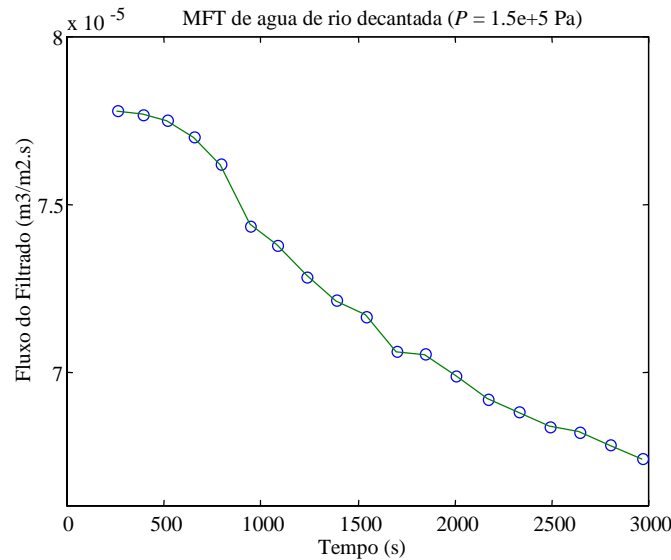


Figura 5. Gráficos do modelo matemático em relação aos dados experimentais de laboratório.

Observando-se os gráficos da Fig. (5) é possível verificar que o modelo matemático fornece uma boa aproximação para a estimação do processo de microfiltração tangencial, porém não tão robusta quanto a rede desenvolvida, já que seus resultados sofrem interferências dos ruídos associados às suas variáveis de entrada.

Na Tab. (3) é comparado os resultados fornecidos pela rede e pelo modelo matemático.

Tabela 3. Comparação da metodologia proposta com o modelo matemático.

Amostra	λ -- Rede	λ -- Mod. Mat.
1	0,8016	0,6841
2	0,8684	0,9426
3	0,5867	0,0945
4	1,0403	0,4818
5	0,6754	0,4833
6	1,5321	5,4864
7	0,6652	0,0898
$\lambda_{médio}$	0,8814	1,1803

Como observado na Tab. (3), verifica-se que tanto os resultados obtidos pela rede como aqueles fornecidos pelo modelo matemático possuem um baixo coeficiente de divergência λ , sendo que o $\lambda_{médio}$ da rede é ligeiramente menor que a do modelo matemático. Portanto, pode-se constatar que ambas as metodologias podem ser satisfatoriamente utilizadas para mapear o processo de microfiltração tangencial. A simplicidade e eficiência da abordagem neural desenvolvida indica que a metodologia proposta pode ser utilizada como uma alternativa eficiente para a estimação de grandezas relacionadas ao processo de microfiltração tangencial. A principal desvantagem referente à abordagem utilizando redes neurais está associada com o elevado esforço computacional requerido para a fase de treinamento da mesma.

6. Conclusões

Neste artigo, uma abordagem utilizando redes neurais artificiais foi desenvolvida com o objetivo de estimar o comportamento do processo de microfiltração tangencial, observando-se que os modelos matemáticos convencionais possuem determinadas limitações que podem inviabilizar a sua utilização.

A abordagem por redes neurais artificiais mostrou-se eficiente para a estimação da vazão do processo de microfiltração tangencial, tendo-se como variáveis de entrada o tempo, a pressão transmembrana, a concentração inicial do fluido e a densidade do material a ser filtrado. Em função desta abordagem, o processo em si torna-se mais rápido e robusto devido ao tipo simples e eficiente que as redes oferecem para o processamento dos dados experimentais.

Em suma, a utilização de redes neurais artificiais no processo de estimação da microfiltração tangencial além de ser uma nova metodologia para este propósito, apresenta resultados que condizem satisfatoriamente com os aqueles advindos de ensaios experimentais.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo auxílio financeiro (Processo No. 98/08480-0) e ao CNPq pela concessão de bolsa de pesquisa.

8. Referências

- Wu, M.L., Zall, R.R. and Tzeng, W.C., 1990, "Microfiltration and Ultrafiltration Comparison for Apple Juice Clarification", *Journal of Food Science*, Vol. 55, pp. 1162-1163.
- Dornier, M., Gerbaudo, Y. and Bennasar, M., 1993, "Clarification et Stabilisation du Vin de Palme Par Filtration Tangentielle Sur Membranes Minérales: Études des Conditions Opératoires", *Industries Agricoles et Alimentaires*, Vol. 110, pp. 25-34.
- Roseiro, J. C., Conceição, A. C. and Amaral-Collaco, M. T., 1993, "Membrane Concentration of Fungal Cellulases", *Bioresource Technology*, Vol. 43, pp. 155-160.
- Ruiz, L. S. R., 1994, "Modelo Matemático que Fundamenta a Microfiltração Tangencial da Água", Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências Agrônomicas, Botucatu – SP.
- Hagan, M. T. and Menhaj, M., 1994, "Training Feedforward Networks With the Marquardt Algorithm", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 5, pp. 989-993.
- Haykin, S., 1994, "Neural Networks – A Comprehensive Foundation", McMillan Inc., Englewood Cliffs – NJ, USA.
- Foresee, F. D. and Hagan, M. T., 1997, "Gauss-Newton Approximation to Bayesian Regularization", *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks*, San Francisco, USA, pp. 1930-1935.

MAPPING OF CROSSFLOW FILTRATION PROCESSES BY ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Ivan Nunes da Silva

State University of São Paulo, Department of Electrical Engineering, CP 473, CEP 17033-360, Bauru-SP, Brazil.
e-mail: ivan@bauru.unesp.br

Paulo Cezar Razuk

State University of São Paulo, Department of Mechanical Engineering, CP 473, CEP 17033-360, Bauru-SP, Brazil.
e-mail: razuk@bauru.unesp.br

Abstract: *The crossflow filtration process differs of the conventional filtration by presenting the circulation flow tangentially to the filtration surface. The conventional mathematical models used to represent the process have some limitations in relation to the identification and generalization of the system behavior. In this paper, a system based on artificial neural networks is developed to overcome the problems usually found in the conventional mathematical models. More specifically, the developed system uses an artificial neural network that simulates the behavior of the crossflow filtration process in a robust way. Imprecisions and uncertainties associated with the measurements made on the system are automatically incorporated in the neural approach. Simulation results are presented to justify the validity of the proposed approach.*

Keywords: *filtration processes, crossflow filtration, artificial neural networks, intelligent systems, systems identification.*

UMA METODOLOGIA DE ANÁLISE ESTOCÁSTICA DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS

Taygoara Felamingo de Oliveira

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
taygoara@unb.br

Francisco Ricardo da Cunha

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
frcunha@unb.br

Aldo João de Sousa

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
aldo@unb.br

Roberto Francisco Bobenrieth Miserda

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
rmiserda@unb.br

Resumo. O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia de tratamento estocástico de sinais turbulentos oriundos de experimentos ou simulações numéricas. Deseja-se caracterizar o escoamento quanto a sua ergodicidade e avaliar-se os erros inseridos nas análises quando o processo é considerado estatisticamente permanente e ergódico. Para isso, uma análise de séries temporais baseada em momentos estatísticos de conjuntos de diversas realizações de um mesmo experimento é levada a cabo. Os dados usados na análise foram coletados por anemometria de fio quente num escoamento ao redor de um cubo cujo número de Reynolds baseado na aresta do cubo é $2,4 \times 10^4$. Análises de autocorrelação e espectrais são realizadas e uma avaliação do erro cometido ao assumir-se a ergodicidade é feita. Esta análise fornece suporte quantitativo para a determinação do tempo e da frequência usados na aquisição de sinais turbulentos. Mostra-se que a hipótese da ergodicidade para o escoamento em questão é válida de forma que experimentos subsequentes baseados apenas em análise de séries temporais podem ser realizados sem a incorrência de erros estatísticos relevantes.

Palavras chave: 1) Análise Estocástica; 2) Turbulência; 3) Ergodicidade; 4) Anemometria; .

1. Introdução

A grande maioria dos escoamentos de interesse prático são turbulentos e, portanto, possuem elevado nível de randomicidade. Desta forma, a sua correta caracterização depende de uma análise estatística apurada que, além de informações médias, forneça parâmetros de dispersão adequados, além das incertezas estatísticas relacionadas ao processo.

Atualmente, não apenas as técnicas experimentais (Möller, 2000) dependem deste tipo de abordagem, mas também os métodos numéricos mais recentes (Bobenrieth, 1996; Silvestrini, 2000). Estudos semelhantes têm sido desenvolvidos em outras áreas como monitoração de processos de soldagem (Carvalho et al, 2001). Hipóteses de caráter estatístico muitas vezes são necessárias na formulação dos modelos matemáticos usados em simulações numéricas de escoamentos turbulentos (Batchelor, 1953). Além disso, simulações de grandes escalas e diretas fornecem séries históricas tão complexas quanto as obtidas em laboratório, de maneira que análises estatísticas detalhadas fazem-se igualmente necessárias para o devido tratamento dos dados gerados nessas simulações.

Informações básicas como intensidade de turbulência, energia cinética de turbulência, velocidade média e tempo de correlação são, freqüentemente, obtidas apenas da análise tradicional de séries temporais. No entanto, uma abordagem estocástica mais profunda, baseada em médias e momentos estatísticos tomados sobre diversas realizações de um mesmo processo, pode fornecer dados mais confiáveis além de níveis de incerteza mais adequados.

Inserido neste contexto, este trabalho visa a aplicação de um tratamento estocástico em sinais de velocidade adquiridos na esteira turbulenta gerada pelo escoamento ao redor de um cubo montado sobre uma superfície plana. Também deseja-se avaliar a frequência e o tempo de aquisição usados, quanto a sua adequação para capturar uma série temporal que forneça uma estatística representativa do escoamento.

2. Discussão teórica

2.1 Processo randômico estacionário e ergódico

Quando um fenômeno físico é considerado em termos de um processo randômico suas propriedades podem ser determinadas, para qualquer instante, tomando-se o valor médio, para cada tempo, sobre um conjunto de várias realizações do mesmo processo (Bentad,1986). Desta forma, definindo-se um processo estocástico $u(t, \alpha)$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$ onde N é número de realizações do processo, a média estatística deste processo pode ser definida como:

$$\langle u(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N u(t, \alpha) \tag{1}$$

Se definirmos a flutuação do processo como sendo $u'(t) = u(t) - \langle u(t) \rangle$, pode-se definir a função autocorrelação para a variável $u'(t)$ como:

$$C(u'(t), u'(t + \tau)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N u'(t, \alpha) u'(t + \tau, \alpha) = \langle u'(t) u'(t + \tau) \rangle \tag{2}$$

No caso de $\langle u(t) \rangle$ e $C(u'(t), u'(t + \tau))$ não variarem com o tempo, ou seja $\langle u(t) \rangle = \langle u \rangle$ e $C(u'(t), u'(t + \tau)) = C(\tau)$, diz-se que o processo é estatisticamente permanente ou estacionário. Para processos estacionários e ergódicos pode-se avaliar as propriedades médias por meio de uma integral no tempo a qual chamamos de *média temporal*, definida na Eq.(3). O tempo de integração, neste caso, deve ser várias ordens de grandeza maior do que o tempo de correlação do processo.

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \tag{3}$$

Em um processo ergódico, as análises baseadas em médias temporais ou estatísticas são equivalentes, de forma que, para esses casos, apenas uma série temporal suficientemente longa bastaria para a devida caracterização estocástica do processo. O erro associado à hipótese da ergodicidade pode ser estimado avaliando-se a variância entre a média estatística e a média temporal, conforme segue abaixo:

$$\sigma^2(T) = \langle (\bar{u} - \langle u \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{T^2} \int \int_{\Omega} \langle u(t) u(t') \rangle dt dt' \tag{4}$$

Usando o coeficiente de correlação entre $u(t)$ e $u(t')$ e fazendo a transformação $t = t' + \tau$, obtém-se:

$$\sigma^2(T) = \frac{\langle u^2 \rangle}{T^2} \int \int_{\Omega'} C(\tau) d\tau dt \tag{5}$$

É possível demonstrar, a partir da equação (5) que :

$$\sigma^2(T) = \frac{\langle u^2 \rangle}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) C(\tau) d\tau \tag{6}$$

Desta forma, admitindo-se um decaimento exponencial da função autocorrelação, em sinal com tempo de aquisição T , é possível estimar o erro cometido por assumir-se a hipótese da ergodicidade para o processo

da seguinte forma:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\langle u \rangle}, \quad \langle u'^2 \rangle = \langle (u - \bar{u})^2 \rangle, \quad C(\tau) \sim e^{-\tau/\Theta} \quad (7)$$

portanto, usando-se a Eq.(6) demonstra-se que:

$$\epsilon^2 \sim \frac{2 \langle u'^2 \rangle \Theta}{T \langle u \rangle^2} \quad (8)$$

onde Θ é da ordem do tempo de correlação do processo.

2.2 Função característica

A função característica de uma variável randômica é definida como sendo a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade dessa variável (Batchelor, 1953). Desta forma, para a variável u' , tem-se que:

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isu'} f(u') du' \quad (9)$$

onde $f(u')$ é a função densidade de probabilidade de u' .

A Eq.(10) também pode ser entendida como sendo a espectância de $e^{isu'}$ de forma que:

$$\phi(s) = \langle e^{isu'} \rangle \quad (10)$$

Desenvolvendo em séries de McLaurin o termo $e^{isu'}$, obtemos:

$$\phi(s) = \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{(su')^j}{j!} i^j \right\rangle = \sum_{j=0}^n \langle (su')^j \rangle \frac{i^j}{j!} \quad (11)$$

A Eq.(11) fornece meios para se obter a função característica calculada a partir dos momentos estatísticos ordinários. Para um escoamento turbulento, onde $\langle u' \rangle = 0$, a função característica expandida até o termo de quarta ordem é dada por:

$$\phi(s) = 1 - s^2 \frac{\sigma^2}{2!} - is^3 \frac{\sigma^3}{3!} \varphi + s^4 \frac{\sigma^4}{4!} \kappa + O(s^5 \sigma^5) \quad (12)$$

onde $\sigma = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$.

As variáveis φ e κ são, respectivamente, o fator de assimetria e o fator de curvatura (ou achatamento) que são definidos por:

$$\varphi = \frac{\langle u'^3 \rangle}{\sigma^3} \quad \kappa = \frac{\langle u'^4 \rangle}{\sigma^4} \quad (13)$$

Por outro lado, o mesmo desenvolvimento aplicado à uma variável randômica com distribuição normal resulta em:

$$\phi_G(s) = 1 - s^2 \frac{\sigma^2}{2} + s^4 \frac{\sigma^4}{2!} \frac{1}{4} + O(s^5 \sigma^5) \quad (14)$$

Para que a função característica do fenômeno físico analisado corresponda a de uma variável randômica com distribuição normal é necessário que $\varphi = 0$ e $\kappa = 3$.

2.3 Análise de escala

Outra questão importante na definição das condições de aquisição do sinal é a determinação da banda de frequência a ser usada. No escopo deste trabalho, é possível a realização de uma análise de escalas de turbulência (Landau,1984) que fornece as ordens de grandeza das frequências existentes no fenômeno.

Da escala integral tem-se que a menor frequência existente no escoamento é da ordem de:

$$\omega_{min} \sim \frac{1}{\Theta} \sim \frac{\Delta u}{l} \tag{15}$$

Por outro lado, da micro escala de Kolmogorov, tem-se que:

$$\omega_{max} \sim \frac{1}{\lambda_o} \sim \left(\frac{\Delta u}{l}\right) Re_l^{3/4} \tag{16}$$

No caso de sinais discretos, deve-se ter em mente que, segundo o teorema de Nyquist (Ifeachor and Jarvis, 1993), a maior frequência que pode ser extraída de um sinal discreto é igual à metade da frequência de aquisição $f_{\alpha q}$ logo, para capturar-se todas as frequências do escoamento $f_{\alpha q}$ deve ser igual a $2\omega_{max}$.

2.4 Função autocorrelação normalizada

O grau de correlação entre duas variáveis u_i e u_j pode ser medido por meio de um coeficiente de correlação linear dado por $\rho_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$. Se aplicarmos essa definição para a variável discreta $u'(t)$ nos instantes t e $t + \tau$ e ainda normalizarmos o resultado pela variância do processo, obtemos:

$$C^*(\tau, k) = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=1}^T \frac{u'(t)u'(t + \tau)}{\overline{u'^2}} \quad \tau = 0, 1, \dots, T - 1 \tag{17}$$

Obviamente, para $\tau = 0$ a função autocorrelação normalizada é igual a 1.

2.5 Densidade espectral

A densidade espectral $S(\omega)$ do sinal é definida como:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |A(\omega)|^2 \tag{18}$$

onde $A(\omega)$ é a transformada de Fourier de $u'(t)$ definida como:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)e^{-i\omega t} dt \tag{19}$$

Um resultado importante, que relaciona o espectro de potência e a função autocorrelação, é o teorema de Wiener-Khintchine (Bentad,1986), dado por:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{20}$$

É importante ressaltar que, uma consequência direta do teorema de Parseval, é que a integral da densidade espectral avaliada sobre o eixo das frequências resulta na energia total contida no sinal do sinal, portanto:

$$\overline{u'^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega \tag{21}$$

3 Aparato experimental e metodologia

Os dados experimentais analisados neste trabalho foram obtidos de um escoamento turbulento em túnel de vento através de anemometria de fio quente. O túnel usado nos experimentos tem seção transversal de (150,0 x 135,0)mm. Sobre sua superfície, na seção média do túnel foi montado um cubo de acrílico com aresta de 50mm como mostra o esquema utilizado na Fig(1). A espessura da camada limite na posição do corpo é de aproximadamente 3mm. O sistema de coordenadas usados neste trabalho está representado na Fig.(1).

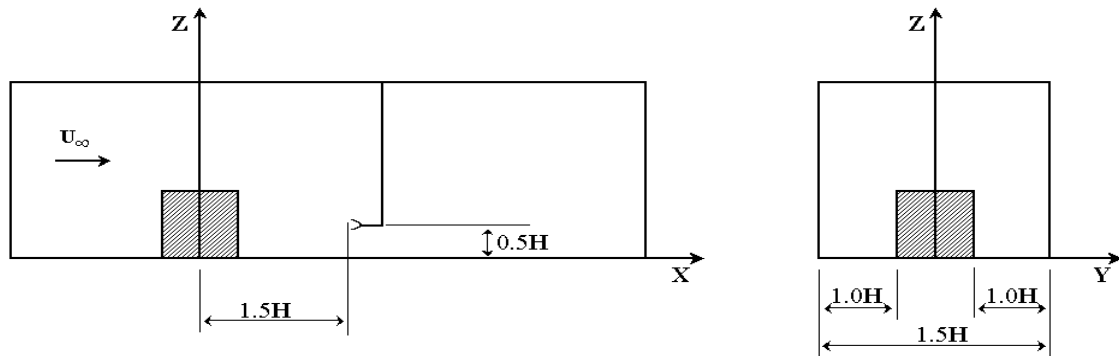


Figura 1. Dimensões da seção de testes e sistema de coordenadas utilizado.

O equipamento usado na aquisição dos sinais turbulentos é um anemômetro de fio quente do tipo temperatura constante (TSI-300) dotado de uma sonda de tungstênio com $5\mu m$ de diâmetro e $3mm$ de comprimento. A calibração da sonda foi feita por meio de um tubo de Pitot sendo a diferença de pressão total e estática medida por meio de um dispositivo eletrônico (validyne) com resolução de um milímetro de coluna de água.

Os experimentos foram realizados imediatamente após a calibração do sistema de aquisição de dados. Após o posicionamento da sonda no escoamento, as aquisições para cada realização foram feitas sem nenhuma alteração dos parâmetros experimentais. Todas as corridas referentes a cada posição da sonda foram realizadas sem que o túnel fosse desligado.

Os dados foram tratados através de médias e momentos estatísticos como descrito nos tópicos anteriores. Para ilustrar o procedimento de cálculo das velocidades médias, por exemplo, a Fig.(2) mostra sinais de velocidade de cinco realizações do mesmo experimento e a média, em cada tempo, desses sinais.

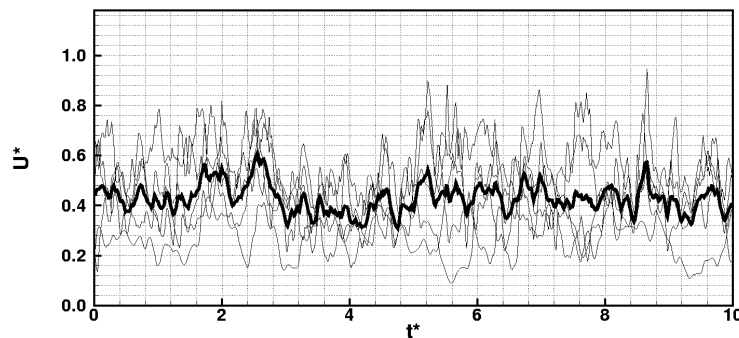


Figura 2. Sinais de velocidade de diversas realizações de um mesmo experimento e velocidade média.

4 Resultados

O número de Reynolds, baseado no comprimento da aresta do cubo, usado em todos os experimentos foi de $2,4 \times 10^4$ e a sonda foi sempre posicionada num eixo perpendicular ao plano xy que passa pelo ponto $(1,5H; 0; 0)$. Nas medições preliminares, a sonda foi posicionada em $z = 1,35H$ (aproximadamente metade da altura da seção de ensaio) e testes com o túnel em vazio foram realizados. Nas medições realizadas na

esteira turbulenta a altura da sonda sempre foi $z = 0,5H$. Os erros associados aos valores de velocidade média e intensidade de turbulência são estimados pela média dos erros em cada instante. Essa estimativa gera um intervalo de confiança de 99,9%.

4.1 Testes preliminares

Antes da execução dos experimentos foram realizados testes preliminares com o intuito de se determinar a intensidade de turbulência do escoamento não perturbado. Para estes testes, o túnel foi ensaiado em vazio (sem o cubo), sendo as condições de aquisição dos sinais $f_{aq} = 4kHz$ e $T = 4s$ aplicadas em um conjunto de 50 realizações. Inferiu-se que a velocidade média do escoamento na posição da sonda é de $\langle U_\infty \rangle = (8,45 \pm 0,07)m/s$ e a intensidade de turbulência de $\overline{IT} = (0,7 \pm 0,2)\%$.

4.2 Medições na esteira turbulenta

Para as medições na esteira turbulenta foi usada uma frequência e um tempo de aquisição de $f_{aq} = 10kHz$ e $T = 6s$, respectivamente, para um conjunto de 50 realizações. Os resultados apresentados nessa seção foram todos adimensionalizados por $\langle U_\infty \rangle$, que é a média estatística da velocidade do escoamento não perturbado, e por H , que é o comprimento da aresta do cubo.

4.2.1 Análise de curto tempo

Uma análise de curto tempo visa estimar as características do escoamento através de um conjunto suficientemente grande de séries temporais curtas. Para que tal análise gere resultados representativos, o fenômeno deve ser estatisticamente estacionário.

A Fig.(3a) mostra a velocidade média, dada pela espectância da velocidade em cada instante, e a intensidade de turbulência do escoamento para uma janela de tempo varias vezes maior do que o tempo de correlação. Esse resultado foi obtido através do procedimento ilustrado na Fig.(2), no entanto com um conjunto de 50 realizações.

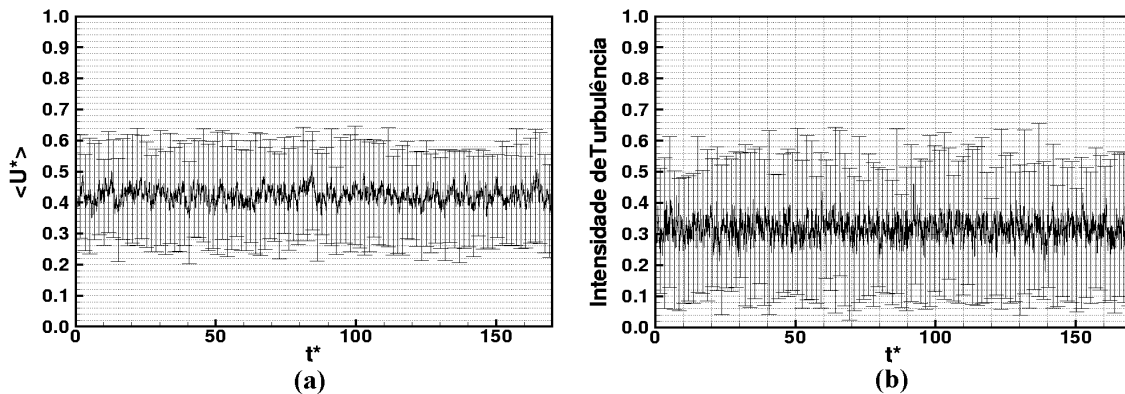


Figura 3. Sinal médio de velocidade e intensidade de turbulência.

A velocidade adimensional média do escoamento, calculada pela média temporal da série mostrada na Fig.(3a) é $\langle u \rangle = (0,42 \pm 0,2)$. A intensidade de turbulência média, também avaliada através da média temporal do sinal de intensidade de turbulência da Fig.(3b) é $\overline{IT} = (30 \pm 10)\%$. É importante ressaltar que nenhuma tendência pode ser observada em nenhum dos sinais, tanto na média que é um momento estatístico de primeira ordem, quanto na intensidade de turbulência que representa um momento de segunda ordem.

Os fatores de assimetria e curvatura computados para este caso foram $\varphi = 0,41$ e $\kappa = 2,95$. O fator de curvatura é muito próximo de 3 e, apesar de o fator de assimetria não ser 0, a parte imaginária da função apresentada na Eq.(12) é da ordem de 10^{-7} , de forma que a distribuição do processo pode ser considerada, praticamente, normal.

4.2.1 Análise de longo tempo

Por meio de uma análise de longo tempo é possível a determinação do tempo de correlação do escoamento

e do tempo a partir do qual $C(\tau) = 0$. O tempo de correlação está relacionado com o tamanho do intervalo de memória que o fenômeno tem dos eventos anteriores. Já o tempo para $C(\tau) = 0$ mede o intervalo necessário para que o escoamento perca toda a memória.

O gráfico da função autocorrelação normalizada mostrando o processo estocástico decorrelacionando-se totalmente com tempo é apresentado na Fig.(3a). O detalhe do decaimento exponencial previsto pela Eq.(8) é confirmado na Fig(3b), mostrando um decaimento na direção de zero, típico de autocorrelações de processos estocásticos.

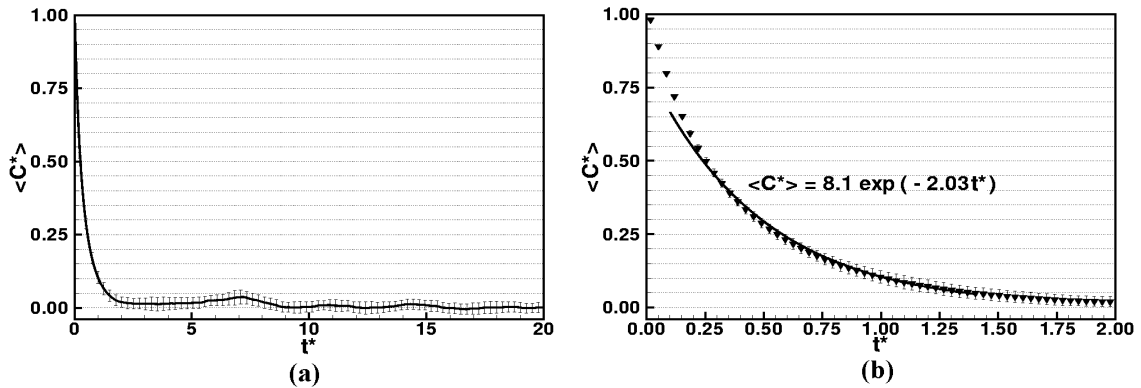


Figura 4. Função autocorrelação normalizada pela variância para $\tau = 0$ e detalhe do decaimento exponencial.

Da equação $\langle C^* \rangle = 8,1e^{-2,03t}$ encontrada para o decaimento exponencial da função autocorrelação na Fig.(4), calcula-se que $\Theta^* = 0,5$, que, em termos dimensionais, resulta em um tempo de correlação $\Theta = 0,003s$.

Outra maneira de se obter o tempo de correlação é através da integral dada pela Eq.(22)

$$\Theta = \int_0^T \langle C^*(\tau) \rangle dt \tag{22}$$

A integral acima resulta em $\Theta = 0,0038s$. Ambas as estimativas coincidem, em ordem de grandeza, com uma escala de tempo integral baseada em $\langle U \rangle$ e H . Com a estimativa do tempo de correlação, pode-se dizer que para $T = 100 \times \Theta = 0,3s$, é suficiente para se realizar uma análise estocástica estacionária do processo.

Nas análises de longo tempo, as intensidades de turbulência foram calculadas a partir das energias cinéticas de turbulência obtidas da integração dos espectros de potência. A densidade espectral de energia cinética de turbulência, obtida através da média estatística entre todas as realizações, para cada frequência adimensional, é apresentada na Fig.(5).

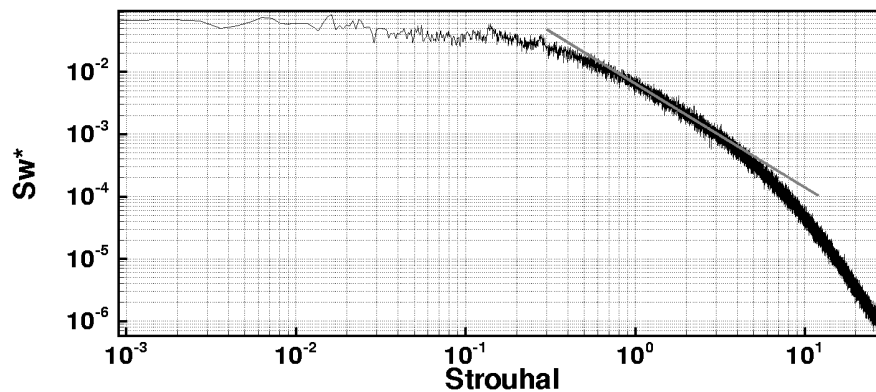


Figura 5. Espectro de potência. Detalhe do decaimento de Kolmogorov $S_w = \omega^{-5/3}$.

A intensidade de turbulência obtida da integração do espectro mostrado na Fig.(5) é $IT = 31\%$. Esse

resultado concorda com a intensidade média de turbulência obtida por meio da análise do resultado mostrado na Fig(2b).

Desta forma, é possível estimar-se o erro em relação à média estatística cometido ao adotar-se a hipótese da ergodicidade. Aplicando-se a Eq.(10) e usando $\Theta = 0,003$ têm-se $\epsilon_{\Theta} = 1,1\%$, por outro lado, se usarmos uma escala de tempo integral tem-se que $\epsilon_{t_{\infty}} = 1,4\%$ e, finalmente, o erro calculado pelo desvio padrão entre a média temporal e a estatística normalizado por $\langle u \rangle$, foi de $\epsilon = 1,1\%$.

5 Conclusão

O trabalho desenvolvido apresenta uma metodologia de tratamento estocástico de sinais turbulentos. Esta metodologia, baseada em médias de probabilidade e momentos estatísticos ao invés de temporais, é mais rigorosa e fornece informações de escala de tempo características mais confiáveis para o processo em questão. Além disso, permite verificar se a hipótese da ergodicidade pode ou não ser usada no fenômeno de interesse e, em caso afirmativo, fornece ferramentas para a avaliação do erro introduzido na análise devido a essa hipótese.

No caso estudado pôde-se verificar que o tempo de aquisição do sinal turbulento é suficiente, uma vez que os erros entre as velocidades médias calculadas pela abordagem estocástica e temporal estão abaixo de 2%. Apesar da frequência de aquisição utilizada ser, consideravelmente, maior do que as menores frequências previstas pela análise de escala, avalia-se o valor utilizado como satisfatório, uma vez que praticamente toda energia cinética de turbulência do escoamento foi capturada na banda utilizada. Inferiu-se, também, que o escoamento em questão pode ser descrito em termos de uma distribuição normal.

Em trabalhos futuros, deseja-se aplicar a metodologia apresentada em escoamentos onde não se verifique plenamente a hipótese da ergodicidade e o processo estocástico apresente menos características de randomicidade. Também serão feitas adaptações da metodologia para que análises semelhantes possam ser realizadas em escoamentos resultantes de simulações de grandes escalas ou diretas, determinando assim fatores importantes como tamanho necessário das séries temporais para que sejam representativas do escoamento e o erro cometido por adotar-se a hipótese da ergodicidade.

Referências

- Batchelor, G.K., 1953, "The Theory of Homogeneous Turbulence", Cambridge University Press.
- Bendat, J.S., Piersol, A.G.,1986, "Random Data, Analysis and Measurement Procedures", by Jonh Wiley and Sons, Inc., ed.2, California, United States.
- Bobenrieth, R.F.M.,1996, "Simulação Numérica de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos", Tese de doutoramento, São José dos Campos, SP, Brasil.
- Carvalho, G.C., Zandonale, P.S.K., Cunha, F.R., Alfaro, S.C.A.,2001, "Proceedings of American Welding Society: Gas Metal Arc for 21st Centure", pp. 205-212.
- Ifeachor, C.E., Jervis, B.W.,1993, "Digital Signal Processing", Addison-Wesley, United States.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1984, "Fluid Mechanics", Pergamon Press.
- Moller, S.V.,2000, "Experimentação em Turbulência", II Escola de Primavera, Transição e Turbulência , Uberlândia, MG, Brasil.
- Silvestrini, J.H.,2000, "Simulação Numérica Direta e de Grandes Escalas de Escoamentos Transicionais e Turbulentos", II Escola de Primavera, Transição e Turbulência , Uberlândia, MG, Brasil.

7. Direitos autorais

A STOCHASTIC ANALYSIS METHODOLOGY FOR TURBULENT FLOWS

Taygoara Felamingo de Oliveira

Department of Mechanical Engineering - FT, University of Brasília - UnB, Brasília - DF, 70910-900, Brazil
taygoara@unb.br

Francisco Ricardo da Cunha

Department of Mechanical Engineering - FT, University of Brasília - UnB, Brasília - DF, 70910-900, Brazil
rfcunha@unb.br

Aldo João de Sousa

Department of Mechanical Engineering - FT, University of Brasília - UnB, Brasília - DF, 70910-900, Brazil
aldo@unb.br

Roberto Francisco Bobenrieth Miserda

Department of Mechanical Engineering - FT, University of Brasília - UnB, Brasília - DF, 70910-900, Brazil
rmiserda@unb.br

***Abstract.** The main objective of the present work is the development of a stochastic treatment of turbulent signals obtained from experimental or numerical simulations. It is wanted to characterize the flow from its ergodicity and also to evaluate the errors inserted in the analysis when the process is considered to be statistically steady and ergodic. To do this, an analysis of the time series based upon the statistical moments of several ensembles of realizations for the same experiment is carried out. The data used in the analysis were collected by a hot wire anemometer system in a wake produced by a flow around one cube mounted on a internal flat surface of a small wind tunnel test section with a Reynolds number based on the cube edge equal to 2.4×10^4 . Autocorrelation and spectral analysis are accomplished and an error evaluation in assuming the ergodicity hypothesis is also done. This analysis gives quantitative support to determine the time window and frequency to be used in the data acquisition. It is shown that the ergodic hypothesis is valid for the flow in question and, consequently, subsequent experiments based upon temporal series analysis can be accomplished without relevant statistical error incoherencies*

***Keywords:** 1)Stochastic Analisis; 2)Turbulence; 3)Ergodicity; 4)Anemometry*

UM MÉTODO PARA SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS DE SISTEMAS PARTICULADOS RANDÔMICOS COM INTERAÇÃO HIDRODINÂMICA

Gustavo Coelho Abade

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
gustavo@vortex.unb.br

Francisco Ricardo da Cunha

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
frcunha@unb.br

Resumo. O presente trabalho enfoca a geração de um conjunto ergódico de sistemas particulados randômicos e a descrição de um procedimento numérico para o cômputo de interações entre partículas esféricas baseado na técnica das somas de Ewald para tensores mobilidade hidrodinâmica. Um dos principais objetivos consiste em simular sistemas numericamente grandes compostos por muitas esferas interagindo hidrodinamicamente sob condições de escoamento viscoso. Para a simulação de uma suspensão infinita, considera-se uma estrutura periódica no espaço, cujas células unitárias contêm um número finito de partículas esféricas impenetráveis. A partir do processo de geração, foram obtidas mono e polidispersões realmente randômicas, a baixas e moderadas concentrações, sob um critério de mínima energia. Em relação ao cômputo das somas de Ewald, o método numérico reduz drasticamente o tempo de CPU das simulações e fornece resultados em concordância com correlações experimentais e aproximações assintóticas para distribuições ordenadas e randômicas.

Palavras chave: suspensões randômicas, conjuntos ergódicos, interações de partículas, dinâmica de lattice

1. Introdução

Sistemas bifásicos fluido-sólido nos quais a fase sólida é constituída por partículas discretas, usualmente modeladas como esferas que mantêm alguma interação mútua, são muito comuns em situações de engenharia. Como em tais situações visa-se atender a propósitos práticos, faz-se necessária a descrição de comportamentos globais e a determinação de propriedades macroscópicas que, para esta classe de sistemas em particular, inevitavelmente estão baseadas em investigações ao nível da microestrutura.

Análises microestruturais comumente requerem simulações numéricas cujos métodos podem se tornar computacionalmente intensivos a depender da natureza e dinâmica das interações e do grau de detalhamento do estudo que se pretende desenvolver. Inseridas neste contexto estão as suspensões constituídas por uma fase particulada dispersa em meio a um fluido Newtoniano, susceptível ao processo de sedimentação devido à ação de uma força de campo proporcional à densidade.

Sob condições de baixo número de Reynolds, uma partícula em sedimentação é uma fonte contínua de vorticidade, que se propaga em todas as direções por difusão molecular devido à ação da viscosidade. Este distúrbio produzido no ambiente fluido decai muito lentamente e induz flutuações na velocidade das demais partículas em relação à velocidade média de sedimentação, conferindo à microestrutura da suspensão uma forte dinamicidade. As constantes mudanças na distribuições espacial e temporal das partículas são responsáveis por uma gama de fenômenos passíveis de investigação, o que tem motivado, nos últimos anos, uma série de trabalhos tanto teóricos quanto numéricos e experimentais.

Estudos teóricos pioneiros para mono e polidispersões diluídas foram desenvolvidos por Batchelor (1972, 1982) a partir de um rigoroso procedimento para cálculo da velocidade média de sedimentação que envolve a renormalização de integrais divergentes. Como uma extensão das análises acerca da velocidade média, Caffisch e Luke (1985) abordam a questão das flutuações de velocidade, e sua divergência sob certas condições, devidas à natureza dinâmica da microestrutura da suspensão. Hinch (1988) e Cunha (1997) discutem o problema da divergência da variância da velocidade de sedimentação em termos de análise de escala para suspensões monodispersas randômicas, onde uma flutuação típica no número N de partículas é $O(\sqrt{N})$. Ham e Homay (1988) e, posteriormente, Nicolai *et al.* (1995) reportam a característica difusiva (Fickiana) do processo de sedimentação a partir de observações experimentais do comportamento de longo tempo da suspensão, obtendo estimativas para a difusividade hidrodinâmica a partir de uma estatística rigorosa sobre um grande número de realizações.

Notáveis progressos no tratamento analítico das interações hidrodinâmicas, em grande parte motivados pela linearidade das equações de Stokes, vem oferecendo suporte às simulações computacionais para determinação acurada de propriedades transporte. Um método de expansões multipolo para o cálculo das interações entre

partículas rígidas foi desenvolvido por Ladd (1988) e aplicado posteriormente a simulações numéricas (Ladd, 1993), cujos resultados para a velocidade média de sedimentação recuperam a lei empírica proposta por Richardson e Zaki (1954). Com base nestas simulações, Ladd mostrou ainda que o processo de dispersão não é Fickiano a elevadas concentrações devido a efeitos de agregação das partículas. Recentemente, Cunha, Hinch e Sousa (2001) e Cunha e Silva Rosa (2001) realizaram simulações numéricas com contorno impenetrável na direção da gravidade, obtendo resultados mais realísticos de anisotropia de flutuações e coeficientes de dispersão hidrodinâmica.

Neste trabalho, desenvolve-se um método numérico para simulação de suspensões particuladas não coloidais, cujas velocidades médias de sedimentação são avaliadas sobre um conjunto de distribuições iniciais de partículas com igual probabilidade de ocorrência. Para o cálculo das interações hidrodinâmicas, adota-se uma extensão do método proposto por Beenaker (1982), baseado em somas de Ewald (1921) para o tensor de Rotne-Prager, aplicável a suspensões polidispersas, cuja heterogeneidade deve-se a diferenças de raio e densidade entre seus espécimes constituintes. Atentando para o elevado número de operações envolvidas no cômputo das somas de Ewald, propõe-se um esquema numérico alternativo que permite o tratamento de suspensões nas quais o número de partículas seja $O(10^3)$.

As seções que seguem se organizam de forma a estabelecer um acordo sobre a terminologia e sumariar as idéias afins de estrutura periódica tridimensional e somas de *lattice* para tensores mobilidade hidrodinâmica. Na seção 2.2, enfoca-se o procedimento para a geração da condição inicial do sistema particulado. O método numérico que se propõe para avaliação das interações entre partículas é apresentado na seção 2.3. Na seção 3, estabelece-se uma comparação dos resultados numéricos com resultados assintóticos e empíricos visando validar de forma conjunta os códigos de geração de distribuições ergódicas e simulação das interações hidrodinâmicas.

2. Simulação de suspensões

Considera-se uma suspensão composta de N partículas esféricas rígidas, que podem diferir em raio e densidade, interagindo hidrodinamicamente enquanto sedimentam através de um fluido Newtoniano de viscosidade μ e densidade ρ_f , sob condições de baixo número de Reynolds. O sistema ocupa um domínio tridimensional representado por uma célula paralelepipedal com dimensões $d \times \ell \times h$ e condições de contorno periódicas em todas as direções. Para a simulação de uma suspensão infinita, as células unitárias compõem uma estrutura periódica tridimensional como uma *lattice* de Bravais (Born e Huang, 1954).

Para o caso geral de uma fase particulada polidispersa composta por m espécies, o raio, a densidade, o número de densidade e a concentração característicos de cada espécie s serão denotados por a_s , ρ_s , n_s e ϕ_s , respectivamente. Os parâmetros adimensionais de polidispersidade relativos a uma espécie s serão representados por razões de aspecto λ_s e razões de densidade reduzida η_s como segue

$$\lambda_s = \frac{a_s}{\hat{a}}, \quad \eta_s = \frac{\rho_s - \rho_f}{\hat{\rho} - \rho_f}, \quad (s = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

em que \hat{a} e $\hat{\rho}$ correspondem, respectivamente, ao raio e densidade característicos da espécie adotada como referência para a adimensionalização do sistema particulado.

Em geral, as grandezas que aqui forem representadas na forma $\hat{\theta}$ são relativas à espécie referência e podem ser escritas para as demais em termos dos parâmetros λ e η . Desta forma, a velocidade terminal de uma partícula isolada, a difusividade ordinária de Stokes-Einstein (1956) e o número de Péclet relativos a uma espécie s são

$$\mathbf{U}_0^{(s)} = \eta_s \lambda_s^2 \hat{\mathbf{U}}_0, \quad D^{(s)} = \lambda_s^{-1} \hat{D}, \quad Pe^{(s)} = \eta_s \lambda_s^2 \hat{Pe}, \quad (s = 1, \dots, m) \quad (2)$$

respectivamente, em que

$$\hat{\mathbf{U}}_0 = \frac{2}{9\mu} \hat{a}^2 (\hat{\rho} - \rho_f) \mathbf{g}, \quad \hat{D} = \frac{\kappa T}{6\pi\mu\hat{a}}, \quad \hat{Pe} = \frac{\hat{a}\hat{\mathbf{U}}_0}{\hat{D}}, \quad (3)$$

em que \mathbf{g} é a força gravitacional por unidade de massa, κ é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta.

A grandezas com dimensão de comprimento (vetores posição, distância relativa entre esferas e dimensões do domínio) serão adimensionalizadas considerando-se \hat{a} como comprimento característico. Para a adimensionalização das forças, utiliza-se o arrasto hidrodinâmico de Stokes $6\pi\mu\hat{a}\hat{\mathbf{U}}_0$ sobre uma partícula isolada, sedimentando com velocidade terminal $\hat{\mathbf{U}}_0$.

2.1. Interações hidrodinâmicas

Sendo bem conhecido o problema da divergência da soma das interações hidrodinâmicas de várias partículas em suspensão inerente ao lento decaimento do potencial interpartícula, faz-se uso da técnica de Ewald (1921) caracterizada pela rápida convergência das somas de *lattice* aplicadas ao tensor mobilidade hidrodinâmica de Rotne-Prager (Beenaker, 1986).

Será apresentada a seguir, de forma sucinta, uma extensão da formulação proposta por Beenaker para o cômputo das interações hidrodinâmicas em uma suspensão heterogênea atrelada ao conceito geométrico de periodicidade no espaço.

Sejam os centros das N esferas em uma célula unitária denotados pelo conjunto de vetores $\mathcal{C}_N = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$. Considere uma *lattice* periódica na qual o conjunto de vetores posição das partículas assume a forma geral $\mathcal{C}_N = (\mathbf{x}_{\gamma 1}, \dots, \mathbf{x}_{\gamma N}) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_{\gamma}, \dots, \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_{\gamma})$, em que

$$\mathbf{x}_{\gamma} = (\gamma_1 d, \gamma_2 \ell, \gamma_3 h), \quad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

define os pontos da *lattice*, construídos pela combinação linear dos vetores básicos ortogonais $d\mathbf{e}_1, \ell\mathbf{e}_2, h\mathbf{e}_3$, utilizando os coeficientes inteiros $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, denominados índices da célula. O conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ constitui a base canônica do espaço Euclidiano.

Os vetores de *lattice* recíprocos \mathbf{k}_{ζ} são construídos de modo que a função $e^{i\mathbf{k}_{\zeta} \cdot \mathbf{x}_{\gamma}}$ seja periódica em relação aos vetores básicos e assumam valor unitário para todo $\gamma \in \mathbb{Z}$, assumindo portanto a forma

$$\mathbf{k}_{\zeta} = 2\pi \left(\frac{\zeta_1}{d}, \frac{\zeta_2}{\ell}, \frac{\zeta_3}{h} \right), \quad (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

em que $\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ indexa as células da *lattice* recíproca.

A Figura (1) ilustra uma *lattice* representativa daquelas utilizadas nas simulações.

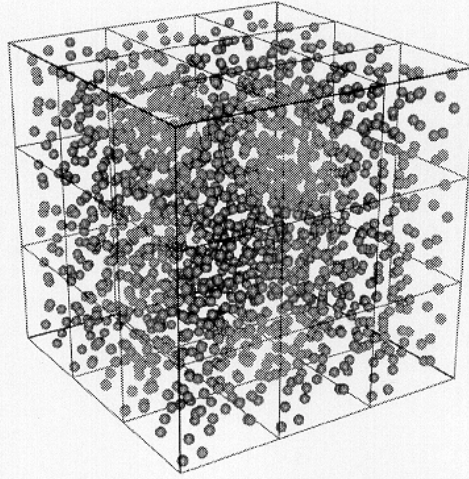


Figura 1: Representação tridimensional de uma *lattice* composta por 27 células unitárias cúbicas. A célula periódica contém 57 partículas idênticas, distribuídas randomicamente, a uma fração volumétrica $\phi = 0.03$.

A determinação da velocidade de sedimentação \mathbf{U}^{α} de uma partícula teste α , considerando-se os distúrbios de velocidade induzidos pelas demais, envolve o cálculo de duas mobilidades: uma relativa à partícula isolada, representada por um tensor isotrópico, e outra relativa ao par α, β de partículas que considera as imagens nas demais células, representada por um tensor simétrico de segunda ordem. As duas mobilidades possuem termos relativos à soma nos espaços físico e recíproco cuja convergência é controlada por um parâmetro $\xi > 0$, ao qual foi atribuído o valor $\xi = \pi^{\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{3}}$, em que V é o volume de uma célula periódica.

Considerando que as partículas α e β pertençam a espécies s e p respectivamente e definindo o parâmetro $\lambda = \frac{1}{2}(1 + a_p/a_s)$, a velocidade de sedimentação de uma partícula α é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{\alpha} = & \mathbf{M}^{\alpha} \cdot \mathbf{F}^{\alpha} + \sum_{\substack{\gamma \\ \mathbf{x}_{\gamma\beta} \neq \mathbf{x}_{\alpha}}} \sum_{\beta=1}^N \mathbf{M}^{(ps)}(\mathbf{x}_{\gamma\beta} - \mathbf{x}_{\alpha}) \cdot \mathbf{F}^{\beta} \\ & + \frac{1}{V} \sum_{\substack{\zeta \\ \mathbf{k}_{\zeta} \neq \mathbf{0}}} \sum_{\beta=1}^N \mathbf{M}^{(rs)}(\mathbf{k}_{\zeta}) \cdot \mathbf{F}^{\beta} \cos[\mathbf{k}_{\zeta} \cdot (\mathbf{x}_{\beta} - \mathbf{x}_{\alpha})], \end{aligned} \quad (6)$$

em que

$$\mathbf{M}^{\alpha} = \left(1 - 6\xi\pi^{-\frac{1}{2}} - \frac{40}{3}\pi^{-\frac{1}{2}}\xi^3 \right) \delta \quad (7)$$

representa a mobilidade associada à partícula α isolada, desconsiderando o efeito das demais, e δ denota o tensor unitário de segunda ordem.

Quanto às mobilidades periódicas associadas ao par α, β

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(ps)}(\mathbf{r}) &= \left\{ \left[3\xi^3 r^2 - \frac{9}{2}\xi + (4\xi^7 r^4 - 20\xi^5 r^2 + 14\xi^3 + \xi r^{-2})\lambda \right] \pi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\xi^2 r^2) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{3}{4} r^{-1} + \frac{1}{2} r^{-3} \lambda \right) \operatorname{erfc}(\xi r) \right\} \boldsymbol{\delta} \\ &+ \left\{ \left[-3\xi^3 r^2 + \frac{3}{2}\xi + (-4\xi^7 r^4 + 16\xi^5 r^2 - 2\xi^3 - 3\xi r^{-2})\lambda \right] \pi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\xi^2 r^2) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{3}{4} r^{-1} - \frac{3}{2} r^{-3} \lambda \right) \operatorname{erfc}(\xi r) \right\} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (8)$$

representa a componente da mobilidade de pares associada à soma no espaço físico, em que $r = |\mathbf{x}_{\gamma\beta} - \mathbf{x}_{\alpha}|$, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ e erfc é a função erro complementar. Por fim,

$$\mathbf{M}^{(rs)}(\mathbf{k}) = \left(1 - \frac{1}{3} k^2 \lambda \right) \left(1 + \frac{1}{4} \xi^{-2} k^2 + \frac{1}{8} \xi^{-4} k^4 \right) 6\pi k^{-2} \exp\left(-\frac{1}{4} \xi^{-2} k^2\right) (\boldsymbol{\delta} - \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}) \quad (9)$$

representa a componente da mobilidade associada à soma no espaço recíproco.

As mobilidades acima fornecem dois níveis de aproximação para as interações. O nível mais simples (aproximação ponto-partícula) é obtida ao considerar apenas os termos não multiplicados pelo parâmetro λ ($O(1/\hat{a})$). Os termos que incluem λ ($O(1/\hat{a}^3)$) conferem precisão adicional por considerar efeitos relativos à finitude das partículas.

Considerando que o sistema como um todo está sob a ação do campo gravitacional e que as partículas estão livres de torque, a força \mathbf{F}^{α} atuando em uma partícula α pertencente a uma espécie s é dada por

$$\mathbf{F}^{\alpha} = -\eta_s \lambda_s^3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{f}^{\alpha}, \quad (10)$$

onde o termo $-\eta_s \lambda_s^3 \mathbf{e}_3$ representa o peso líquido da partícula e \mathbf{f}^{α} representa uma força artificial de repulsão mútua e de curto alcance.

2.2. Geração numérica de suspensões randômicas

Nesta seção, será descrito um procedimento numérico, à luz do método proposto por Metropolis *et al.* (1953), para a simulação da condição inicial de sistemas particulados polidispersos, termodinamicamente estáveis, a frações volumétricas da fase particulada que não excedem $\phi = 0.30$. Como principal objetivo, pretende-se gerar um conjunto ergódico no qual cada elemento consiste de N esferas impenetráveis cujos centros $\mathcal{C}_N = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ estão randômicamente distribuídos em um domínio de volume V .

Espera-se que o método seja aplicável ao estudo de outros sistemas físicos, tais como compósitos particulados, nos quais a fase particulada seja representada por espécimes esféricos discretos e a análise do comportamento macroscópico seja alicerçada em investigações microestruturais.

2.2.1. Descrição do método

Considera-se o sistema de N partículas definido em seção anterior compondo um domínio paralelepipedal $d \times \ell \times h$. Dada a mútua impenetrabilidade das esferas, o centro de uma esfera de raio a_s não poderá ocupar o volume de exclusão $a_p < |\mathbf{r}| < a_p + a_s$ de outra esfera de raio a_p .

Com o intuito de considerar uma fina camada de fluido entre partículas que estejam muito próximas, incorpora-se ao volume de exclusão um parâmetro geométrico ϵ que quantifica a espessura desta camada fluida, sendo o seu valor escolhido segundo características inerentes ao processo a ser simulado como, por exemplo, sedimentação ou escoamento cisalhante. Consideremos ainda um outro parâmetro geométrico σ incorporado ao volume de exclusão que atuará como calibrador da distância mínima entre as esferas com grande influência no grau de randomicidade das configurações. Em termos das razões de aspecto e dos parâmetros supracitados, o volume de exclusão *numérico* é representado por

$$\lambda_p + \frac{1}{2}(\epsilon + \sigma) < |\mathbf{r}| < \lambda_p + \lambda_s + \frac{1}{2}(\epsilon + \sigma) \quad (p, s = 1, \dots, m) \quad (11)$$

O procedimento numérico de geração do sistema a uma dada concentração $\phi = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^m n_i \lambda_i^3$ se inicia com o posicionamento seqüencial das partículas de forma randômica e condicionado ao critério de impenetrabilidade imposto pelo volume de exclusão. Durante o posicionamento inicial, incrementos no parâmetro σ determinam uma redução das configurações possíveis e a suspensão tende assumir um estado ordenado.

Conhecido o conjunto $\mathcal{C}_N = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ que caracteriza a configuração inicial estática da distribuição, atribuímos ao sistema uma energia potencial definida por

$$E(\mathcal{C}_N) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=\alpha+1}^N \mathcal{V}(r_{\alpha\beta}), \quad (12)$$

em que $\mathcal{V}(r_{\alpha\beta})$ representa um potencial interpartícula arbitrário e esféricamente simétrico que decai rapidamente com a distância $r_{\alpha\beta} = |\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|$.

A partir de sua energia potencial, atribui-se ao sistema \mathcal{C}_N uma densidade de probabilidade $P(\mathcal{C}_N) = e^{-E}$, que definirá o critério de ergodicidade e homogeneidade estatística do conjunto das configurações geradas.

O sistema será submetido a uma evolução temporal induzida por movimentos aleatórios regidos pela equação de difusão Browniana

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + Pe^{(s)} \delta t + \sqrt{6\lambda_s^{-1}\delta t} \varepsilon_n \quad (13)$$

em que $\delta t = \delta T \hat{a} / \hat{D}$ é o passo no tempo adimensional e ε_n é um vetor randômico com cada componente possuindo média zero e variância unitária, gerada independentemente das outras componentes e dos passos anteriores.

As simulações, entretando, consideram somente a componente estocástica da equação acima, sendo a componente determinística negligenciada pela imposição de $Pe^{(s)} \ll 1$ de forma que o movimento como um todo seja isotrópico. A condição de impenetrabilidade durante a evolução utiliza como critério o volume de exclusão (11), mas considera $\sigma = 0$.

A evolução dos sistemas para diferentes estados, nos quais as partículas não se interpenetram, estará condicionada ao seguinte critério, aplicado ao movimento de cada uma das N partículas: se o movimento de uma dada partícula α implicar em redução da energia do sistema, a nova posição \mathbf{x}_α^{n+1} passará a integrar o conjunto \mathcal{C}_N em substituição ao elemento \mathbf{x}_α^n . Caso contrário, consideremos o incremento de energia ΔE devido ao movimento e um número randômico ε entre 0 e 1. A posição \mathbf{x}_α^{n+1} será confirmada se e somente se $\varepsilon < e^{-\Delta E}$. Sendo $\varepsilon > e^{-\Delta E}$, parte-se para o movimento de outra partícula sobre o qual serão impostas as mesmas condições.

Convém notar que a rapidez e eficiência do método depende do valor do passo no tempo δt que definirá a amplitude do deslocamento estocástico. Foi utilizado um valor de δt de forma que $\sqrt{6\lambda_s^{-1}\delta t}$ seja uma fração da distância média entre as partículas distribuídas inicialmente, que por sua vez depende da concentração e do valor atribuído ao parâmetro σ durante o posicionamento seqüencial. Embora se tenha utilizado uma equação de difusão sem inércia, característica de simulações de movimento Browniano, a decisão sobre o valor de δt não deve ser necessariamente coerente com o fenômeno físico em si, mas sim ser escolhido de forma que a evolução dos sistemas, condicionada a dois critérios fortes (impenetrabilidade e energia), permita que o conjunto se aproxime mais rapidamente de uma distribuição canônica. Da mesma forma, uma escolha importante está relacionada à rapidez do decaimento do potencial interpartícula, para que, dentro da faixa de concentrações e das dimensões do domínio que contém o sistema, não se estejam gerando configurações com baixa densidade de probabilidade. Para os propósitos deste trabalho e atendendo a critérios de eficiência numérica, considerou-se um potencial $O(r^{-6})$ caracteristicamente molecular e, portanto, desvinculado fisicamente do tratamento hidrodinâmico que se pretende desenvolver.

2.3. Cômputo das interações hidrodinâmicas

Nesta seção, desenvolve-se um procedimento numérico baseado na técnica das somas de Ewald (1921) para o cálculo das interações hidrodinâmicas numa suspensão de partículas esféricas utilizando o tensor mobilidade de Rotne-Prager (1969). A eficiente técnica de Ewald quanto à superação dos problemas de convergência no cômputo da soma dos efeitos de um grande número de partículas sobre uma partícula teste pode perder aplicabilidade para a simulação de sistemas numericamente grandes devido ao elevado tempo de CPU requerido. Genericamente, definimos como sistemas numericamente grandes aqueles que contenham a fase particulada com número de espécimes no interior de cada célula periódica $O(10^3)$, mesmo a baixas e moderadas frações volumétricas, o que permite que se obtenha uma estatística mais representativa, sobretudo quando se pretende obter propriedades médias, tais como coeficientes de dispersão hidrodinâmica, inerentes a um comportamento de longo tempo de evolução da suspensão.

O cálculo das somas de *lattice*, para cada passo no tempo, envolve um número de operações $O(n_{cp}N^2)$, em que n_{cp} é o número total de células periódicas que compõem a *lattice*. A idéia principal para tornar o procedimento computacionalmente mais barato é utilizar uma função mobilidade para um dado par de partículas que inclua o efeito das interações com as imagens em cada célula da estrutura periódica, com as somas de Ewald pré-calculadas, reduzindo o número de operações para $O(N^2)$.

O procedimento numérico consiste em se discretizar a célula unitária e calcular, previamente, as mobilidades periódicas de pares de partículas que estejam localizadas em pontos discretos do domínio da célula, construindo-se uma fonte de dados organizados em uma tabela tridimensional para que, no decorrer das simulações, possa ser acessada utilizando-se aproximações lineares ou de ordem superior. A construção desta tabela considera as propriedades de simetria da função de Green em relação à geometria da *lattice*, otimizando memória de armazenamento de dados.

Como se pretende simular sistemas com distribuições iniciais randômicas, há a possibilidade de formação de pares de partículas muito próximas ainda que sob condição de suspensão diluída. Nestas situações, o comportamento não adequadamente suave das funções de Green periódicas em regiões que avizinham as singularidades

pode comprometer a acurácia dos resultados provenientes de aproximações lineares. Uma forma eficiente que se sugere para contornar o problema, permitindo minimizar o número de pontos que compõem a malha, é a de se tabular estas funções de Green periódicas subtraídas da função de Green de espaço livre (*Stokeslet*) (Kim e Karrila, 1991)

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) = \frac{3}{4} \left[\frac{\delta}{|\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha|} + \frac{(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha)}{|\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha|^3} \right], \quad (14)$$

a qual pode considerar ainda um quadrupolo degenerado para compatibilizar os níveis de aproximação das interações. A minimização do número de pontos discretos do domínio é de suma importância para a simulação de sistemas polidispersos por requererem uma fonte de dados associada a cada combinação possível de espécies duas a duas.

Considerando o resultado apresentado em seção anterior, podemos reescrevê-lo de forma a identificar explicitamente a mobilidade periódica associada ao par α, β de partículas, como segue

$$\mathbf{U}^\alpha = \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{F}^\alpha + \sum_{\beta=1}^N \mathbf{G}^{(per)}(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{F}^\beta, \quad (15)$$

em que

$$\mathbf{G}^{(per)}(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) = \sum_{\substack{\gamma \\ \mathbf{x}_{\gamma\beta} \neq \mathbf{x}_\alpha}} \mathbf{M}^{(ps)}(\mathbf{x}_{\gamma\beta} - \mathbf{x}_\alpha) + \frac{1}{V} \sum_{\substack{\zeta \\ \mathbf{k}_\zeta \neq \mathbf{0}}} \mathbf{M}^{(rs)}(\mathbf{k}_\zeta) \cos[\mathbf{k}_\zeta \cdot (\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha)] \quad (16)$$

é a função de Green periódica da interação entre o par α, β de partículas, que considera as somas de *lattice* nos espaços físico e recíproco.

Portanto, a função associada a um par de partículas a ser tabelada pode assumir duas formas com relação ao nível de aproximação das interações. A primeira, representada por

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_\beta^{(0)} - \mathbf{x}_\alpha^{(0)}) = \mathbf{G}^{(per)}(\mathbf{x}_\beta^{(0)} - \mathbf{x}_\alpha^{(0)}) - \left(1 + \frac{\lambda_p^2}{6} \nabla^2 \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta^{(0)} - \mathbf{x}_\alpha^{(0)}), \quad (17)$$

em que $\mathbf{x}_\beta^{(0)}, \mathbf{x}_\alpha^{(0)}$ representam dois pontos nodais quaisquer da célula unitária discretizada, considera termos $O(a^3)$, incluindo portanto um quadrupolo degenerado ao *Stokeslet*.

Para o nível mais simplificado (aproximação ponto-partícula), consideramos apenas

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_\beta^{(0)} - \mathbf{x}_\alpha^{(0)}) = \mathbf{G}^{(per)}(\mathbf{x}_\beta^{(0)} - \mathbf{x}_\alpha^{(0)}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta^{(0)} - \mathbf{x}_\alpha^{(0)}) \quad (18)$$

Durante a simulação, a mobilidade do par de partículas localizadas por \mathbf{x}_α e \mathbf{x}_β é aproximada da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{r}) \approx & \left(1 + \frac{\lambda_p^2}{6} \nabla^2 \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r}^{(0)}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}^{(0)})}{\partial r_i} (r_i - r_i^{(0)}) \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\mathbf{r}^{(0)})}{\partial r_i \partial r_j} (r_i - r_i^{(0)})(r_j - r_j^{(0)}) \end{aligned} \quad (19)$$

em que as derivadas parciais são avaliadas numericamente por uma aproximação de segunda ordem utilizando-se diferenças centrais e $\mathbf{M}(\mathbf{r}^{(0)})$ é dado pela Eq. (17).

Desta forma, a velocidade de sedimentação de uma partícula α , passa a ser aproximada por

$$\mathbf{U}^\alpha \approx \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{F}^\alpha + \sum_{\beta=1}^N \mathbf{M}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{F}^\beta \quad (20)$$

A equação acima é aplicável diretamente a simulações de problemas do tipo mobilidade, nos quais se desconsidera a inércia da partícula.

3. Resultados

As simulações no tempo zero foram conduzidas com cada célula da *lattice* possuindo dimensões fixas $30 \times 30 \times 30$ de forma que a variação da fração volumétrica fosse obtida por incrementos no número de partículas. Para garantir a convergência das somas de Ewald, as *lattices* física e recíproca eram compostas, respectivamente, por 125 e 27 células periódicas. Sob estas condições, o procedimento numérico que utiliza somas de Ewald pré-calculadas promoveu uma redução de cerca de 98% no tempo de CPU em relação àquele em que as somas, associadas a cada par de partículas, são avaliadas durante a simulação. O domínio discretizado continha 8×10^3

pontos, igualmente espaçados ao longo de cada direção, suficientes para manter o erro da aproximação inferior a 1%.

Quanto à geração da condição inicial, a Fig. (2) ilustra três configurações iniciais randômicas de partículas, obtidas pelo processo descrito na seção 2.2., contidas numa célula unitária $\ell \times \ell \times h$, com razão de aspecto $\ell/h = 3.0$.

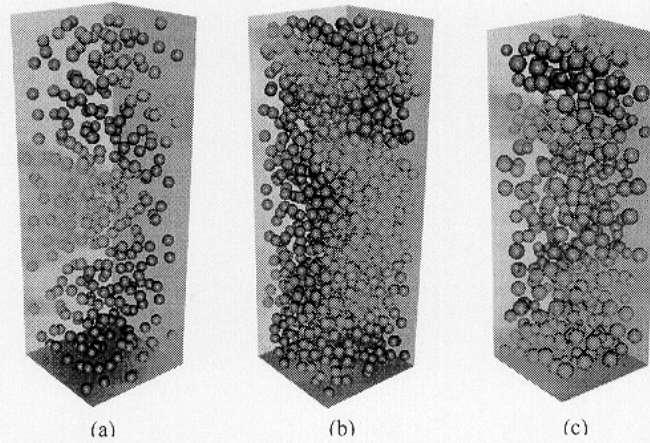


Figura 2: Representação tridimensional das configurações iniciais C_N no interior de uma célula unitária com dimensões $20 \times 20 \times 60$. (a) suspensão monodispersa, $\phi = 0.05$, $N = 286$; (b) suspensão monodispersa, $\phi = 0.15$, $N = 859$; (c) suspensão polidispersa, $\phi = 0.08$, com 4 espécies ($\lambda_1 = 1.0$, $\phi_1 = 0.02$; $\lambda_2 = 1.2$, $\phi_2 = 0.02$; $\lambda_3 = 1.4$, $\phi_3 = 0.02$; $\lambda_4 = 1.5$, $\phi_4 = 0.02$).

3.1. Validação do código numérico

Os testes de convergência iniciais com a rotina de simulação no tempo zero visavam verificar a relação

$$U/\tilde{U}_0 = f(\phi) \sim 1 - \gamma\phi^{1/3} + O(\phi), \quad (21)$$

típica de configurações regulares, nas quais as partículas estão sob ação da mesma força e, a cada concentração, possuem uma velocidade comum. O valor da constante γ difere, mas não significativamente, para os três tipos padrões de distribuição ordenada numa *lattice* cúbica.

Para a validação dos resultados numéricos, utilizaram-se como referência resultados assintóticos para $f(\phi)$ relativos a suspensões ordenadas propostos inicialmente por Hasimoto (1959) e, posteriormente, por Sangani e Acrivos (1982).

Considerando o caso em que a suspensão constitui um reticulado cúbico simples, o resultado obtido por Hasimoto (1959) a partir das soluções fundamentais periódicas das equações de Stokes fornece

$$f(\phi) = 1 - 1.7601\phi^{1/3} + \phi - 1.5593\phi^2 + O(\phi^{8/3}) \quad (22)$$

Sangani e Acrivos (1982), por meio de uma modificação do método desenvolvido por Hasimoto (1959), introduziram termos de ordens superiores à equação acima de forma que

$$f(\phi) = 1 - 1.7601\phi^{1/3} + \phi - 1.5593\phi^2 + 3.9799\phi^{8/3} - 3.0734\phi^{10/3} + O(\phi^{11/3}) \quad (23)$$

A Figura (3) representa graficamente a comparação entre resultados numéricos e assintóticos para uma ampla faixa de concentrações. Para suspensões diluídas, o comportamento de $f(\phi)$ é linear com $\phi^{1/3}$ e, sob estas condições, observa-se uma total concordância entre os resultados preditos analiticamente por expressões assintóticas e os obtidos pela presente simulação. As discrepâncias que se verificam com o aumento da concentração indicam a necessidade de se introduzir termos de ordem mais elevada à aproximação. Convém observar que simulações com suspensões ordenadas, realizadas paralelamente, nas quais a tabela com as mobilidades periódicas não consideraram a subtração do *Stokeslet*, forneceram resultados espúrios para $f(\phi)$ a concentrações superiores a $\phi = 0.16$.

Dado que a relação funcional $f(\phi)$ assume outras formas para suspensões em que as partículas estejam distribuídas randomicamente, a validação do método empregado para a geração da condição inicial do sistema particulado associado com a rotina de cálculo das interações é feita mediante comparação com correlações empíricas e expressões assintóticas baseadas na premissa de ergodicidade e homogeneidade estatística das distribuições.

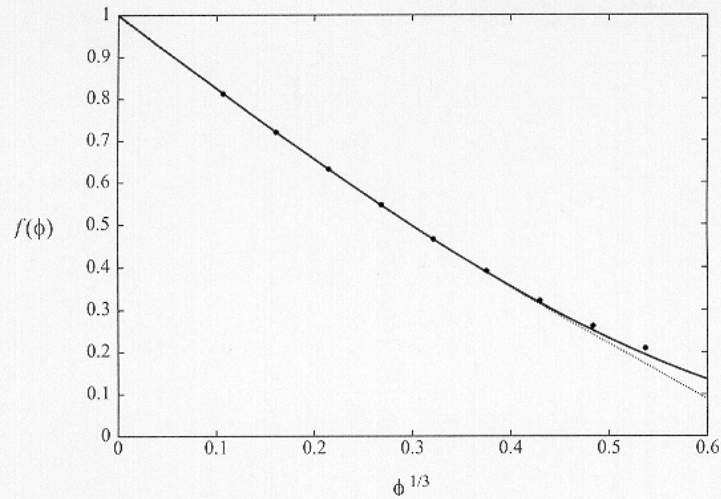


Figura 3: Representação da relação funcional $f(\phi) = U/\hat{U}_0$. Comparação dos resultados numéricos das simulações no tempo zero com resultados assintóticos para uma distribuição monodispersa, ordenada (cúbica simples); ● resultados numéricos; ... resultado teórico dado pela Eq. (22); — resultado teórico dado pela Eq. (23).

O resultado teórico proposto por Batchelor (1972) para suspensões diluídas monodispersas e estatisticamente homogêneas fornece a seguinte relação

$$\langle U \rangle / \hat{U}_0 = f(\phi) \sim 1 - \gamma\phi + O(\phi^2) \tag{24}$$

em que $\langle U \rangle$ representa a velocidade média de sedimentação avaliada sobre todas as configurações \mathcal{C}_N que compõem o conjunto ergódico e $\gamma = 6.55$.

Uma série de trabalhos (Garside e Al-Dibouni, 1977; Davis e Hassen, 1988; Ladd, 1993 e Nicolai *et al.*, 1995) relatam a acurácia e simplicidade da relação

$$f(\phi) = (1 - \phi)^n, \tag{25}$$

para $n = 5$, proposta por Richardson e Zaki (1954), como representação de resultados experimentais para monodispersões, numa ampla faixa de concentração, sob condições de baixos números de Reynolds de partícula.

A Figura (4) representa a comparação gráfica entre os resultados das simulações e aqueles atribuídos a Batchelor e Richardson-Zaki. A velocidade média para a menor concentração representada ($\phi = 0.01$) foi avaliada sobre 100 configurações iniciais independentes. À medida em que se aumentava o número de partículas, reduzia-se o número de configurações de forma a manter aproximadamente uniforme a base estatística para cálculo das médias e variâncias. As barras de erro representadas foram determinadas com referência ao número de configurações e ao número de partículas em cada configuração. A representação do resultado teórico de Batchelor para suspensão diluída considera $\gamma = 5.0$, cujo valor é compatível com a ordem da aproximação para as interações hidrodinâmicas utilizada na formulação em que se baseia o procedimento numérico, de forma que a correção $O(\phi)$ considere o forte efeito do *back flow* (-5.5ϕ) e o efeito positivo de um quadrupolo degenerado (0.5ϕ).

Os resultados obtidos apresentam boa concordância com a relação teórica para frações volumétricas inferiores a 4%. Observa-se que, para maiores concentrações, um melhor ajuste da curva teórica aos resultados experimentais exige a introdução de uma correção $O(\phi^2)$, que considera mais detalhes das interações hidrodinâmicas. Por fim, a lei empírica é recuperada dentro do intervalo de concentrações representado, para o qual a ordem de aproximação das interações relativamente baixa não induz discrepâncias significativas.

4. Conclusões

Neste trabalho, descreveu-se um método numérico para o cômputo das interações hidrodinâmicas entre partículas esféricas que compõem uma suspensão heterogênea não coloidal baseado nas somas de Ewald para a mobilidade hidrodinâmica de Rotne-Prager. Foi apresentado um procedimento para a geração de distribuições iniciais randômicas e equilibradas para a composição de um conjunto ergódico sobre o qual a relação funcional $f(\phi)$ entre velocidade média de sedimentação e fração volumétrica de esferas foi avaliada. O esquema numérico, baseado em somas de *lattice* pré-calculadas, promoveu significativa redução no tempo de CPU das simulações, o que permitiu superar restritivas limitações quanto ao número de partículas que compõem o sistema numérico.

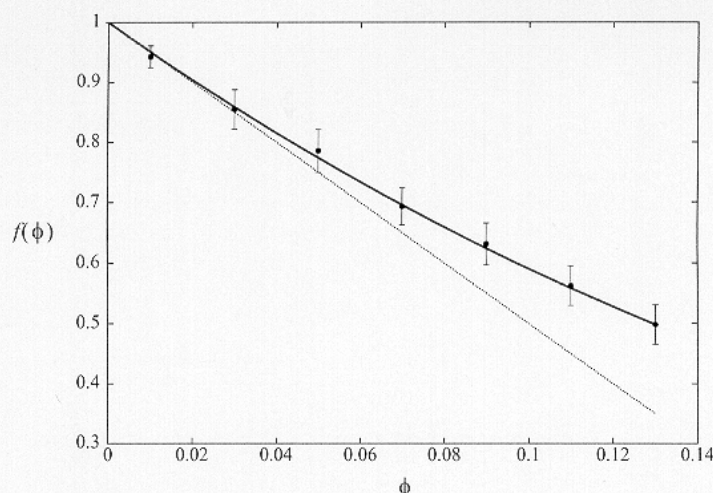


Figura 4: Representação da relação funcional $f(\phi) = \langle U \rangle / \hat{U}_0$. Comparação entre resultados numéricos, teóricos e experimentais para monodispersões randômicas e estatisticamente homogêneas; — correlação experimental dada pela Eq. (25) com $n = 5$; • resultados numéricos; ... resultado teórico de Batchelor ($\gamma = 5.0$).

Por fim, os resultados numéricos obtidos para $f(\phi)$ mostraram-se em excelente concordância com previsões teóricas e correlações experimentais. Em trabalhos futuros, pretende-se adotar esta metodologia para investigar, por simulação numérica, flutuação, dispersão hidrodinâmica e taxa de coagulação em suspensões polidispersas.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq-Brasília/Brasil e ao CTPetro-Finep pelo suporte financeiro.

Referências

- Batchelor, G. K., 1972. "Sedimentation in a Dilute Dispersion of Spheres", *J. Fluid Mech.*, Vol. 52, pp. 245-268.
- Batchelor, G. K., 1982. "Sedimentation in a Dilute Polydisperse System of Interacting Spheres. Part 1. General Theory", *J. Fluid Mech.*, Vol. 119, pp. 379-408.
- Beenaker, C. W. J., 1986. "Ewald Sum of the Rotne-Prager Tensor", *J. Chem. Phys.*, Vol. 85, No. 3, pp. 1581-82.
- Born, M., Huang, K., 1954. "Dynamical Theory of Crystal Lattices", Oxford, Clarendon Press.
- Caffisch, R. E., Luke, J. H. C., 1985. "Variance in The Sedimentation Speed of a Suspension", *Phys. Fluids*, Vol. 28, pp. 759-760.
- Cunha, F. R., 1997. "On the Fluctuations in a Random Suspension of Sedimenting Particles", *RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences*, Vol. XIX, No. 4, pp. 474-495.
- Cunha, F. R., Silva Rosa, O. L., Sousa, A. J., 2001. "Do We Understand Hydrodynamic Dispersion in Dilute Sedimenting Suspension?", *RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences* (in press).
- Cunha, F. R., Sousa, A. J., Hinch, E. J., 2001. "Numerical Simulations of Velocity Fluctuations and Dispersion of Sedimenting Particles", *Chem. Eng. Commun.* (in press).
- Davis, R. H., Hassen, M. A., 1988. "Spreading of the Interface at the Top of a Slightly Polydisperse Sedimenting Suspension", *J. Fluid Mech.*, Vol. 196, pp. 107-134.
- Einstein, A., 1956. "Investigations on the Theory of the Brownian Movement", Dover, New York.
- Ewald, P. P., 1921. "Die Berechnung Optischer und Elektrostatischer Gitterpotentiale", *Ann. Phys. Lpz.*, Vol. 64, p. 253.
- Garside, J., Al-Dibouni, M. R., 1977. "Velocity-Voidage Relationship for Fluidization and Sedimentations in Solid-Liquid Systems", *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, Vol. 16, pp. 206-214.
- Ham, J. M., Homsy, G. M., 1988. "Hindered Settling and Hydrodynamic Dispersion in Quiescent Sedimenting Suspensions", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 14, No. 5, pp. 533-546.
- Hasimoto, H., 1959. "On the Periodic Fundamental Solutions of the Stokes Equations and Their Applications to Viscous Flow Past a Cubic Array of Spheres", *J. Fluid Mech.*, Vol. 5, pp. 317-328.
- Hinch, E. J., 1988. "Sedimentation of Small Particles", in *Disorder and Mixing*, Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 153-161.
- Ladd, A. J. C., 1988. "Hydrodynamic Interactions in a Suspension of Spherical Particles", *J. Chem. Phys.*, Vol. 88, pp. 5051-63.

- Ladd, A. J. C., 1993. "Dynamical Simulations of Sedimenting Spheres", *Phys. Fluids A*, Vol. 5, No. 2, pp. 299-310.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E., 1953, "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines", *J. Chem. Phys.*, Vol. 21, No. 6, pp. 1087-92.
- Kim, S., Karrila, S. J., 1991. "Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications", Butterworth-Heinemann.
- Nicolai, H., Herzhaft, B., Hinch, J. E., Oger, L., Guazzelli, E., 1995. "Particle Velocity Fluctuations and Hydrodynamic Self-Diffusion of Sedimenting non-Brownian Spheres", *Phys. Fluids*, Vol. 7, No. 1, pp. 12-23.
- Nijboer, B. R. A., Wette, F. W., 1957. "On The Calculation of Lattices Sums", *Physica*, Vol. 23, p. 309.
- Richardson, J. F., Zaki, W. N., 1954. "Sedimentation and Fluidization: Part I", *Trans. Inst. Chem. Eng.*, Vol. 32, No. 35.
- Rotne, J., Prager, S., 1969. *J. Chem. Phys.* Vol. 50, p. 4831.
- Sangani, A. S., Acrivos, A., 1981. "Slow Flow Through a Periodic Array of Spheres", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 8, No. 4, pp. 343-360.

A METHOD FOR COMPUTER SIMULATIONS OF RANDOM HYDRODYNAMICALLY INTERACTING SYSTEMS

Gustavo Coelho Abade

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
gustavo@vortex.unb.br

Francisco Ricardo da Cunha

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
frcunha@unb.br

Abstract. *The present work focuses upon the generation of ergodic ensembles of random particulate systems and the description of a numerical procedure for computing interactions among spherical particles based on Ewald summation technique for hydrodynamic mobility tensors. One of the main aims is to implement simulations with numerically large systems composed of many hydrodynamically interacting spheres under creeping flow conditions. To simulate a large suspension we consider a spatially periodic lattice whose unit cell contains a finite number of mutually impenetrable spherical particles. From the generation process truly random both monodispersed and multimodal size distributions of particles were obtained for dilute and moderate densities based on minimum energy criterion. Concerned with computations of the Ewald sum our numerical procedure drastically reduces the CPU time in simulations and provides results in agreement with available asymptotic results for ordered and random periodic arrays of particles with Stokes flow interactions at dilute conditions. These studies motivate further effort towards a realistic numerical simulation of suspension flow, presumably a description that incorporates the essential features of the disordered and dynamically changing three-dimensional microstructure.*

Key words: *random suspensions, ergodic ensembles, particle interaction, lattice dynamics*

A NOTE ON THE GOVERNING EQUATIONS OF FLUIDIZED BEDS SUSPENSIONS

Yuri Dumaresq Sobral

Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília
Campus Universitário Darcy Ribeiro. 70910-900 - Brasília - DF - Brazil
yurisobral@hotmail.com

Francisco Ricardo da Cunha

Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília
Campus Universitário Darcy Ribeiro. 70910-900 - Brasília - DF - Brazil
frc@orion.enm.unb.br

Abstract *The analysis of the motion of a single particle in sedimentation is used as the starting point for a fluidized bed description. In this stage, the hydrodynamic forces acting in a single particle are modeled, analyzed and their effects evaluated with respect to the governing dimensionless parameters. This analysis is the basis to model the fluid-particle interaction force term that appear in the averaged continuum equations derived to study the dynamical behaviour of fluidized beds. It is known that the most pressing problem in a fluidized bed seems to be some uncertainties in the governing equations. These equations are derived and we start by adopting a simple physically credible expression for each term in the constitutive closure expressions.*

Key words: *Fluidized beds, Sedimentation, Fluidization*

1. Introduction

A fluidized bed is a system in which small particles of solid matter are suspended by an upward fluid flow. An 'equilibrium' state is established among all forces acting in the particle so that it remains 'fluidized' in a determinate area (they are not carried by the fluid flow).

Fluidized beds are frequently used as industrial combustors, gasifiers and general reactors. One of the best reasons is that the intense agitation in the fluidized beds increases both the heat exchange and the mass exchange coefficients, the result of this being the increase in the efficiency rate. When inert particles are used (sand, for example), it is possible to burn biomass and wastes of other industrial processes like peat, shale and wood wastes. In the early 40's, the fluidized bed technology was successfully used in the petroleum cracking reaction. Nowadays, new processes using the fluidized bed technology are common in hydrometallurgy, food technology and water treatment, for example.

Due to the complexity of all the phenomena involved in fluidized beds, several works have been developed such as the experimental work of Richardson & Zaki (1954), the theoretical works of Anderson & Jackson (1967) and Cunha & Fortes (1990) and the contribution in the stability analysis of Batchelor (1988) and Garg & Pritchett (1975). In the second part of this work, the main guide will be those of Anderson & Jackson (1967).

In this paper, after the analysis of the motion of a single particle, we shall base our development on the assumption that the flow in a fluidized bed consists of two phases, which are adequately described by the compressible stokesian fluid equilibrium equation. Separating these two phases, there is a interface where interfacial transfer of momentum is presumed to occur. We shall not consider energetic effects in this preliminary model, since the focus is primarily on the mechanical effects in a fluidized bed.

2. The motion of a single particle

The study of the motion of a single particle in sedimentation is a good starting point for understanding a fluidized bed. Although in fluidization the interest is to keep the particles suspended in and by the fluid, both cases are mainly determinate by the fluid-solid interacting forces caused by the hydrodynamics of the fluid flow. A very careful analysis of the motion of the particle in sedimentation can lead to a first approach to the modeling of the fluid-solid interacting forces term in the governing equations of a fluidized bed.

The first idea to determine the forces involved in the motion of a single particle in sedimentation comes from a simple scaling argument from the Navier Stokes equation for an incompressible fluid flow, written as:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (1)$$

The interest is to define the viscosity effects and the effects of the inertia terms. This can be done by comparing these effects to the pressure term. It can be shown that the pressure gradient term scales with force per unit of volume, ($|\nabla P| \sim FL^{-3}$), since P scales with FL^{-2} . Here, F is the force scale and L is the length scale. Setting U as the velocity scale, μ as the fluid viscosity and ρ as fluid specific mass, the viscosity effects can be found to scale with μUL^{-2} , leading to write:

$$\mathbf{f}_\mu \sim \mu LU \Rightarrow \mathbf{f}_\mu = \alpha_1 \mu LU, \quad (2)$$

where α_1 is a geometry dependent dimensionless coefficient. An identical procedure used to evaluate the inertia terms leads to:

$$\mathbf{f}_\rho \sim \rho L^2 U^2 \Rightarrow \mathbf{f}_\rho = \alpha_2 \rho L^2 U^2. \quad (3)$$

As before, α_2 is a geometry dependent dimensionless coefficient.

The Archimedes buoyancy force is also present in this case, and can be written as $\mathbf{f}_g = \vartheta_p(\rho_f - \rho_p)\mathbf{g}$, where ϑ_p represents the volume of the particle.

Finally, the last force of interest is called the virtual mass force and its definition is not as easy as the others. This force is due to the transient term of the Navier-Stokes equation: it's defined to be the force needed to put into movement the fluid that surrounds the body, initially at rest. Using a potential solution for the flow past a rigid sphere, for example, the kinetic energy of the accelerated fluid can be calculated and the result of this leads to write that the virtual mass force acting in the particle is:

$$\mathbf{f}_{vm} = \alpha_3 \rho_f \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (4)$$

where, as before, α_3 is a geometry dependent dimensionless coefficient and \mathbf{v} is the velocity of the particle.

In this case, the Basset's force is not going to be considered, since the effects of the transient term are already taken into account by the virtual mass force and, which may be the most important reason, in a fluidized bed the effects of the history of the particle's motion does not mean any advance in the modelling of the fluid-particle interaction force term.

The balance of the described forces can be written as:

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}_\mu + \mathbf{f}_\rho + \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_{vm} \quad (5)$$

where m_p is the mass of the particle. Considering only the z direction, substituting the forces for their equations and the scales for real parameters, the force balance can be re-organized and re-written as:

$$(m_p + \alpha_3 \rho_f) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\alpha_1 \mu a \mathbf{v} - \alpha_2 \rho_f a^2 \mathbf{v}^2 + \vartheta_p(\rho_f - \rho_p)\mathbf{g}. \quad (6)$$

To define the physical parameters of the system, a dimensionless form of this equation must be found. The proposed dimensionless variables are $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/U_s$ and $t^* = tU_s/a$, where $U_s = 2a^2 \Delta \rho g / 9\mu$ is the Stokes terminal velocity. To avoid a heavy notation, the dimensionless velocity and time will be written simply as \mathbf{v} and t . After some algebraic calculations, the dimensionless equation can be written as:

$$\left(1 + \frac{3}{4\pi} \delta \alpha_3\right) St \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \alpha_1 \mathbf{v} + \alpha_2 Re \mathbf{v}^2 - N_s = 0. \quad (7)$$

In this equation, δ represents the specific mass ratio $\delta = \rho_f / \rho_s$, where ρ_s is the particle's specific mass, St is the Stokes number $St = \frac{m_p U_s}{\mu a}$, Re is the particle based Reynolds number $Re = \rho a v / \mu$ and $N_s = \frac{\Delta \rho g \vartheta_p}{\mu a U_s}$ is the sedimentation number. This equation is written on its most general form: the geometry of the particle does not matter and Re can be of any value. In fact, α_1 , α_3 and N_s are not Re dependent coefficients. For spherical particles, their values are $\alpha_1 = 6\pi$, $\alpha_3 = 2\pi/3$ and $N_s = 6\pi$. The coefficient for the non-linear effects term is Re dependent and has different values for specific ranges of Re . However, in sedimentation at low Re number, the Oseen's approximation (Batchelor, 1967) for $Re \sim 1$ is a good choice. For very low finite Re , Oseen proposes that the governing equations in the surroundings of the particle are the Stokes' equations. However, for distances considerably far from the particle, the equation should be, besides the continuity equation, $\rho_f \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$, where \mathbf{u} is the fluid velocity at the analysed point. The convective drag calculated by this assumption leads to write $\alpha_2 = 9\pi/4$. Finally, the equation that governs the motion of the particle, in

terms of the scalar velocity of the particle, is:

$$\frac{1}{6\pi} \left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) St \frac{dv}{dt} + v + \frac{3}{8} Re v^2 - 1 = 0, \tag{8}$$

subjected to $v(0) = 0$ as the initial condition. A first analysis of Eq.(8) shows that the parameters that govern the motion of the particle are St , δ and Re .

It was determined an approximated analytical solution of this equation using an asymptotic expansion. When differential equations have a non-linear term whose effects are related to a small parameter ε , $\varepsilon \ll 1$, their solution can be written in terms of a perturbation series. In our case, for the velocity of the particle $v(t)$, the perturbation series would be:

$$v(t) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n(t) \tag{9}$$

with $0 = v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots$ as the initial condition. Substituting Eq.(9) and the initial condition in Eq.(8), the perturbation solution for $v(t)$ is found to be:

$$v(t) = \underbrace{1 - e^{-\frac{t}{a}}}_{O(1)} + \varepsilon \underbrace{\left(-1 + 2e^{-\frac{t}{a}} ta^{-1} + e^{-2\frac{t}{a}}\right)}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{+\varepsilon^2 \left(2 - 2e^{-\frac{t}{a}} ta^{-1} - 2e^{-\frac{t}{a}} t^2 a^{-2} - 4e^{-2\frac{t}{a}} ta^{-1} - 2e^{-2\frac{t}{a}} - e^{-3\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)}_{O(\varepsilon^2)} \tag{10}$$

where $a = \frac{1}{6\pi} \left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) St$ and $O(1)$, $O(\varepsilon)$ and $O(\varepsilon^2)$ represents the order of the term in ε . In the case of the motion of a particle in sedimentation at low Re ($Re \sim 1$), the non-linear term is εv^2 where $\varepsilon = \frac{3}{8} Re$.

In order to analyze individual effects of each parameter, a numerical 4th order Runge-Kutta scheme was used to integrate Eq.(8), a non-linear and non-homogeneous equation, in time. This Runge-Kutta scheme was tested with respect to the time step. Some values were tested and for $\Delta t \ll St$, typically $St/100$, the integration gave good results for any time t , with an error below 1%. For higher values of Δt , either the convergence was good only for the end part of the calculus or there wasn't convergence.

The first comparison that comes to mind is between the solution obtained with the Runge-Kutta scheme and with the perturbation method. For different Re , the dimensionless final velocity was determined by both methods, the result being Figure 1.

For very low Re numbers, ε is very small and the effect of the non-linearity is also small, which means that all solutions (numerical, $O(\varepsilon)$ and $O(\varepsilon^2)$) provide the same results, except $O(1)$, since it does take any account of the non-linearity of the equation. As Re increases, ε increases and $O(\varepsilon)$ is no longer a good approximation. As Re touches values round 0.5, $O(\varepsilon^2)$ is no longer valid neither: it would become necessary to determinate the third order term to fit the real (calculated) values. The great advantage in this case is that for $Re \leq 0.5$ there are no needs to use the numerical scheme, since the asymptotic solution perfectly fits the real solution.

The effect of the St number can be related to the transient part of the motion of the single particle. For high St , the particle takes more time to achieve its terminal velocity. The St number can be, then, considered as a relaxation parameter, as it quantifies how long it takes to the particle to achieve its terminal velocity (the equilibrium state). The virtual mass force is responsible to put the surrounding fluid of the sphere into movement and can be related to the specif mass ratio. For high δ , the fluid specific mass is big considered to the particle's one, the consequence of this being a greater transient acceleration time. As δ decreases, this effect is no longer important and, in some cases, a gas-solid fluidized bed, for exemple, can be neglected.

3. The averaged continuum equations for a fluidized bed

In the first part of the article, the interest was to describe the motion of a single particle in sedimentation. Now, the focus is changed and the interest is to describe the local behavior of a fluidized bed, what means that the local continuum equations (such as mass balance, momentum balance and energy balance) need to be defined both for the fluid and for the solid phase, in terms of averaged variables.

When the analyzed system involves too many particles, it's interesting to describe its dynamics considering that each phase occupies the hole control volume but has its movement resisted by the other phase. This analysis is called the inter-penetrating theory.

There is an extensive and varied literature on the averaging process such as Anderson & Jackson (1967) and

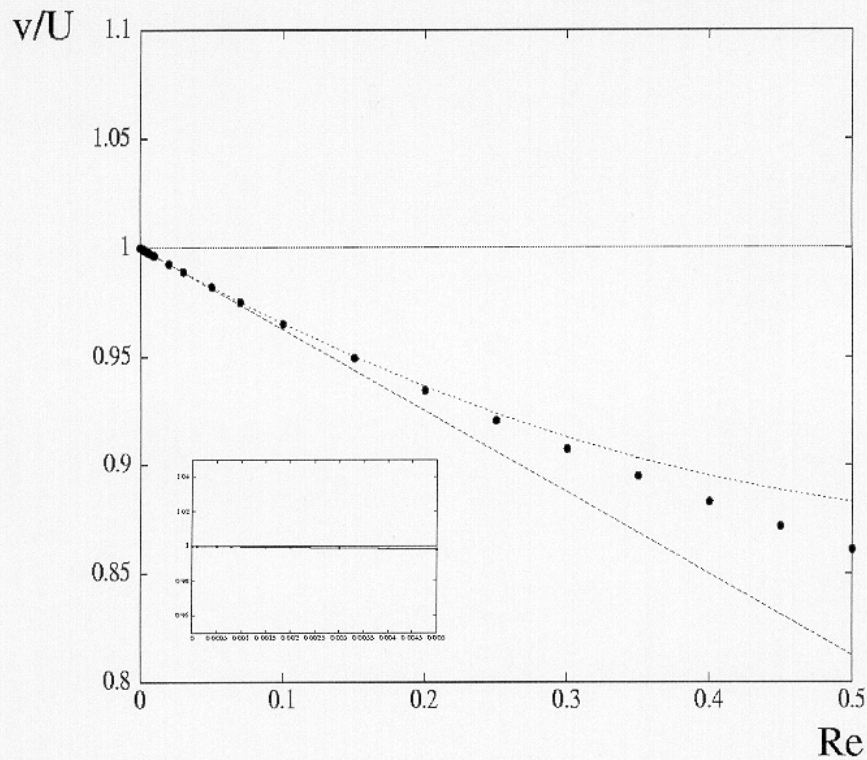


Figure 1: Comparison of the different obtained solutions: • numerical results; horizontal line solution $O(1)$, -- solution $O(\epsilon)$, .. solution $O(\epsilon^2)$. Detail shows the behaviour of solutions for very low Re .

Drew (1971), for example. The averaging process described here follows closely the one proposed by Anderson & Jackson (1967).

3.1 Local mean values for point properties

Consider a weight function $g(\mathbf{r})$ defined for $\mathbf{r} \geq 0$. Despite the exact form of this function does not need to be known, some special properties are imperative:

- 1st $g(\mathbf{r}) \geq 0, \forall \mathbf{r}$
- 2nd $\forall \mathbf{r}, g(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ when $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, it means that $g(\mathbf{r})$ decreases monotonically
- 3rd $g(\mathbf{r})$ has derivatives of all orders
- 4th $\int_{V_\infty(t)} g(\mathbf{r}) dV = 1$, it means that $g(\mathbf{r})$ is normalized, where $V_\infty(t)$ represents the control volume at t

Some properties for both phases can be derived from $g(\mathbf{r})$. The void fraction is defined as the ratio between the volume occupied by the fluid and the total control volume. Formally, the void fraction in an arbitrary \mathbf{x} point at time t is:

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{V_{f(t)}} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \tag{11}$$

where \mathbf{y} represents all the surrounding points of \mathbf{x} occupied by fluid at time t and where $V_{f(t)}$ represents the volume occupied by fluid of the total control volume. Using the 4th property of $g(\mathbf{r})$, it comes:

$$\int_{V_\infty(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV = \int_{V_{f(t)}} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y + \int_{V_{p(t)}} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = \epsilon(\mathbf{x}, t) + \phi(\mathbf{x}, t) = 1 \tag{12}$$

$V_{p(t)}$ is the volume occupied by particles of the total control volume. The property $\phi(\mathbf{x}, t)$ is called the particle concentration.

Consider now a function $\Phi(\mathbf{x}, t)$ that represents any point property of the fluid phase and a function $\Psi(\mathbf{x}, t)$ that represents any point property of the solid phase. The local mean value $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ and $\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ are defined to

be:

$$\epsilon(\mathbf{x}, t)\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{V_f(t)} \Phi(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y \quad (13)$$

and

$$\phi(\mathbf{x}, t)\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \int_{V_p(t)} \Psi(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y, \quad (14)$$

respectively. The local mean values (or variables) have two main properties. First, the weight function $g(\mathbf{r})$ varies little inside the particles. So, Eq.(14) can be re-written as:

$$\int_{V_p} \Psi(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y \approx g(\mathbf{x} - x_p) \int_{V_p} \Psi(\mathbf{y}, t)dV_y = g(\mathbf{x} - x_p)\vartheta_p\Psi_p(t). \quad (15)$$

Here, x_p is the center of the particle and $\Psi_p(t)$ is the volumetric mean of the point property inside the particle. Second, the local mean value of a local mean variable is equal to itself. This can be shown if we consider that the local mean variables vary little spatially. So,

$$\int_{V_p(t)} \bar{\Psi}(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y \approx \phi(\mathbf{x}, t)\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t). \quad (16)$$

The point value property can be written as the sum of two components: one average term (which is its local mean value) and one fluctuation term, $\Phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) + \Phi'(\mathbf{x}, t)$. It is defined that the local mean value of the fluctuations vanishes.

3.2 Derivatives of local mean variables

Consider a point property $\Phi(\mathbf{x}, t)$ for the fluid phase decomposed into its local mean value and its fluctuation. The interest is to determine expressions for the time and space derivatives of its local mean value.

A first approach to derive an expression for the space derivatives is to take the divergence of the definition of the local mean value, Eq.(13), what results in:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\epsilon(\mathbf{x}, t)\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\int_{V_f(t)} \Phi(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y \right). \quad (17)$$

Here, $\nabla_{\mathbf{x}}$ represents that the divergence is taken at the point \mathbf{x} . As $\Phi(\mathbf{y}, t)$ is not \mathbf{x} dependent, the divergence operator can be introduced into the integral. Since the weight function has the following property $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, we have:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\epsilon(\mathbf{x}, t)\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)) = - \left(\int_{V_f(t)} \Phi(\mathbf{y}, t)\nabla_{\mathbf{y}} \cdot g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y \right). \quad (18)$$

The integral in Eq.(18) can be re-written considering that

$$\int_{V_f(t)} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\Phi(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y}))dV_y = \int_{V_f(t)} (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \Phi(\mathbf{y}, t))g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y + \int_{V_f(t)} \Phi(\mathbf{y}, t)\nabla_{\mathbf{y}} \cdot g(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV_y. \quad (19)$$

The divergence theorem can be applied to the integral on the left of Eq.(19) so that:

$$\int_{V_f(t)} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\Phi(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y}))dV_y = \int_{S_f(t)} (\Phi(\mathbf{y}, t)g(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}_f dS_y, \quad (20)$$

where $S_f(t)$ indicates the boundaries surfaces of the fluid region and \mathbf{n}_f the local outward normal vector of these surfaces. In the surface integral on the right term of Eq.(20), the region of integration $S_f(t)$ can be written as the difference between the boundary surface of the total system and the total surface of the solid phase, this

being defined as the sum of all the surfaces of the n particles in the system. These reflexions result in:

$$\int_{S_f(t)} \left(\Phi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \cdot \mathbf{n}_f dS_y = \int_{S_{\infty(t)}} \left(\Phi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \cdot \mathbf{n}_p dS_y - \sum_n \int_{s_p} \left(\Phi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \cdot \mathbf{n}_p dS_y \quad (21)$$

where s_p is the surface of a single particle and \mathbf{n}_p is the outward normal vector of s_p . Since $g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow 0$ as $\mathbf{x} - \mathbf{y} \rightarrow \infty$, the integral taken over $S_{\infty(t)}$ vanishes or is very small compared with the others. Finally, the equation for the space derivative of local mean variable $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ for the fluid phase is:

$$\int_{V_f(t)} \left(\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \Phi(\mathbf{y}, t) \right) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\epsilon(\mathbf{x}, t) \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)) - \sum_n \int_{s_p} \left(\Phi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \cdot \mathbf{n}_p dS_y \quad (22)$$

The space derivative for the local mean variable $\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ representing a solid phase property can be derived following the same method and the result is:

$$\int_{V_p(t)} \left(\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \Psi(\mathbf{y}, t) \right) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\phi(\mathbf{x}, t) \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)) + \sum_n \int_{s_p} \left(\Psi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \cdot \mathbf{n}_p dS_y. \quad (23)$$

The aim now is to derive an expression for the time derivative of local mean variables. Consider now that $\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ is a local mean variable describing any property of the solid phase. As before, a first approach to calculate the time derivative of $\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ is to apply the operator $\frac{\partial}{\partial t}$ to its definition, Eq.(14):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi(\mathbf{x}, t) \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p(t)} \Psi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y. \quad (24)$$

The integral in this equation can be evaluated if the Reynolds Transport Theorem,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p(t)} \Psi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = \int_{V_p(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) dV_y + \int_{S_p(t)} \left(\Psi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \mathbf{v}^s(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}_p dS_y, \quad (25)$$

is used. Here, $\mathbf{v}^s(\mathbf{y}, t)$ denotes the point velocity of the particles on their surfaces. Using the same arguments as before, the last integral on the right side of the above equation can be integrated over the surfaces of each single particle instead of being integrated in the whole solid volume. So, the time derivative of local mean variables for the solid phase is:

$$\int_{V_p(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) dV_y = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi(\mathbf{x}, t) \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) \right) - \sum_n \int_{s_p} \left(\Psi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \mathbf{v}^s(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}_p dS_y \quad (26)$$

The time derivative for the local mean variable $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ representing a fluid phase property can be derived following the same method and the result is:

$$\int_{V_f(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) dV_y = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon(\mathbf{x}, t) \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) \right) + \sum_n \int_{s_p} \left(\Phi(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \mathbf{u}^s(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}_f dS_y \quad (27)$$

where $\mathbf{u}^s(\mathbf{y}, t)$ is the fluid velocity in the surface of the particle.

3.3 The continuum equations

The first equation to be considered is the mass balance equation. For an incompressible fluid flow, the fluid point velocity $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t)$ satisfies $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) = 0, \forall \mathbf{y} \in$ the fluid phase at t . However, the interest is to deal with local mean variables. So, using their definition, it can be written:

$$\int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) dV_y = 0. \quad (28)$$

In the above section, the relation found for space derivatives, Eq.(22) leads Eq.(28) to be:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\epsilon(\mathbf{x}, t) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) - \sum_n \int_{s_p} \left(\mathbf{u}(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \cdot \mathbf{n}_p dS_y = 0 \quad (29)$$

If $\Phi(\mathbf{x}, t)$ is set to be 1 in the time derivative equation for the fluid phase, Eq.(27), and $\mathbf{u}^s(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{y}, t)$, since the boundary condition for the fluid in the particle surface is the non-slip condition, the summation term in Eq. (29) can be written in terms of the time derivative of ϵ . These reflexions lead us to write, in a lighter notation, the mass balance equation for the fluid and the solid phases, respectively, as:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (30)$$

Once the continuity equations are established, the next step is to establish the motion equations. The initial point of departure is the Cauchy equation in terms of point properties:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho_f \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T}_f \quad (31)$$

where \mathbf{T}_f represents the point value for the stress tensor of the fluid. To avoid heavy notation, the dependence of the variables is omitted. This equation can be changed if we add the continuity equation for the fluid phase, in Eq.(33), multiplied by \mathbf{u} , resulting in:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_f \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho_f \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T}_f. \quad (32)$$

To proceed with the analysis, the average of this equation is taken:

$$\begin{aligned} \int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} \rho_f \mathbf{u} \, dV_y + \int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u} \mathbf{u}) \, dV_y = \\ = \int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho_f \mathbf{g} \, dV_y + \int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{T}_f \, dV_y. \end{aligned} \quad (33)$$

As it can be seen, some of these terms can be written in a different way if the equations for the time and space derivatives are used. First, consider the first integral on the left side of Eq.(33). Using the time derivative relation, Eq.(27), it becomes:

$$\int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} \rho_f \mathbf{u} \, dV_y = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \bar{\rho}_f \bar{\mathbf{u}}) + \sum_n \int_{s_p} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_p \, dS_y. \quad (34)$$

In the last integral of this equation, it should be written \mathbf{u}^s instead of \mathbf{u} . But, since the non-slip condition in the surface of the particles say $\mathbf{u}^s = \mathbf{u}$, the fluid velocity was preferred. For the second term on the left side of Eq.(33), using the space derivative relation, Eq.(22), it can be written:

$$\int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u} \mathbf{u}) \, dV_y = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\epsilon \bar{\rho}_f \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) - \sum_n \int_{s_p} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_p \, dS_y. \quad (35)$$

The first term on the right side of the Eq.(33), related to the gravity, can be written as:

$$\int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho_f \mathbf{g} \, dV_y = \epsilon \rho_f \mathbf{g}, \quad (36)$$

and, finally, the last integral on the right side of Eq.(33):

$$\int_{V_f(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{T}_f \, dV_y = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\epsilon \bar{\mathbf{T}}_f) - \sum_n \int_{s_p} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}_p \, dS_y. \quad (37)$$

Before substituting all these new terms in the Eq.(33), there are still some consideration to be done: first, both the time derivative and the space derivative involved in the left term of Eq.(33) have identical summation terms but with different signs, the result of this being their cancellation. Second, the summation term related to the space derivative of the stress tensor is written in terms of the outward normal vector of the surface of the particle. However, as the aim is to derive an equation of motion for the fluid phase, we can write $\mathbf{n}_p = -\mathbf{n}_f$.

Finally, proceeding to the substitution of these new terms in the Eq.(33) the result is:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \bar{\rho}_f \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\epsilon \bar{\rho}_f \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = \epsilon \rho_f \mathbf{g} + \nabla \cdot (\epsilon \bar{\mathbf{T}}_f) + \sum_n \int_{s_p} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}_f dS_y. \quad (38)$$

It's interesting to point out the meaning of $\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}_f$. It represents the traction acting in the fluid in the boundaries of the particles. The summation over all the particles of this traction represents the local mean force caused by the particles in the fluid per unit of volume, which is going to be represented by \mathbf{f}_{pf} . When there is no presence of superficial stress, the 3rd Newton's law implies that $\mathbf{f}_{pf} = -\mathbf{f}_{fp} = \mathbf{f}$. So, Eq.(38) becomes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \rho_f \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\epsilon \rho_f \mathbf{u} \mathbf{u}) = \epsilon \rho_f \mathbf{g} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{T}_f) + \mathbf{f} \quad (39)$$

which is the final equation for the motion of the fluid phase (or, the linear momentum balance equation for the fluid phase). Note that the bars that indicate the averaged variable were omitted to avoid a heavy notation. In total analogy to this procedure, the equation for the motion of the solid phase can be derived:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_s \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\phi \rho_s \mathbf{v} \mathbf{v}) = \phi \rho_s \mathbf{g} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{T}_s) - \mathbf{f} \quad (40)$$

where T_s is the stress tensor for the solid phase.

At this point, the reason why the study of the motion of a single particle in sedimentation is important becomes clear. In the equations of motion for both phases, there are some terms that need to be modeled, more specifically the stress tensors for the solid and the fluid phases, and the interaction forces. There are two main types of interaction forces: forces due to collisions between two particles, which is stochastic, and forces due to the hydrodynamic of the fluid flow around the particles. Although fluidization and sedimentation are different kinds of flow, the hydrodynamic forces are the same and can modeled following the same pattern for both flows.

3.4 A First Model and the Closure Problem

Empirical closure expressions for fluid-particle interaction force are available, but for the stress tensor \mathbf{T}_s they are not known with any certainty. In this work, we adopt the simplest physically credible expression for each term, since the interest is to evaluate whether equations of motion of simple form can account for the correct prediction of a fluidized bed.

The first term to be modelled is the interaction force, which can simply be taken as $\mathbf{f} = \alpha^*(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta^*(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}})$, where α^* represents the viscous drag dimensional coefficient and β^* the virtual mass effect dimensional coefficient. This expression for the drag force, linear with respect to the relative velocities of the fluid and the particles, is appropriate only if the Re number, based on this velocity and on the particle's diameter is sufficiently small (typically $O(1)$). Here, we consider fluidized beds with small Re number so that the upper bound for the linear velocity is a reasonable approximation. For large Re number, this linear expression should be replaced by a more elaborated expression such as $\mathbf{f} = \alpha^*(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \gamma^*(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) |\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}|$, what could be done without any difficulty, since there are empirical correlations for the drag force for high Re available (Ergun, 1952, for example). We choose, for instance, to retain the simple linear form for $Re \sim O(1)$.

The possible forms of α^* and β^* are not unique and depend on the expression relating the particle velocity and the particles concentration. In this case, the Richardson & Zaki (1954) correlation, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_s(1 - \phi)^n$, where \mathbf{U} is the average velocity of the particle due to the presence of the others, is going to be used to evaluate α^* , considered here to vary only with ϕ . Since the viscous drag is to balance the weight of the particles, it can be written that

$$\frac{\mathbf{f}_\mu}{\vartheta} = \alpha^*(\phi) \mathbf{U}_s (1 - \phi)^n \sim \phi \Delta \rho \mathbf{g}. \quad (41)$$

If the expression for the Stokes velocity is introduced in Eq. (41), one can write

$$\alpha^*(\phi) = \frac{\phi}{(1 - \phi)^n} \frac{9 \mu}{2 a^2} = \alpha(\phi) \frac{\mu}{a^2}, \quad (42)$$

where $\alpha(\phi)$ is the dimensionless coefficient for the viscous drag.

In order to evaluate the form of the virtual mass coefficient, the Zuber (1964) approximated relation that represents the effects of virtual mass in an homogeneous dispersion in a irrotational fluid seems to be a good

choice. Considering $\beta^* = \beta(\phi)\rho$, where now $\beta(\phi)$ is dimensionless and only ϕ dependent, we have:

$$\beta(\phi) = \frac{1 + 2\phi}{2(1 - \phi)}. \quad (43)$$

So, the fluid-particle interaction force can be modelled as:

$$\mathbf{f} = \alpha(\phi) \frac{\mu}{a^2} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\phi)\rho(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}). \quad (44)$$

The other terms that need to be modelled are the stress tensors for the fluid and for the solid phase. Although the analysis is almost the same as the one used to model \mathbf{f} , some extra properties must be defined. The first one is the interstitial fluid pressure, p_e . It represents the fluid pressure in the interstices of the system, which are the inter-particle spaces originated by the random distribution of particles in the system. By analogy, an effective solid pressure, p_{se} can be defined, representing the effects of the fluid phase in the solid phase. These pressures can be used to define the collisional term, $\Sigma(\phi)$, representing the collisions among particles, as $p_{se} - p_e = \Sigma(\phi)$ (Garg & Prichett, 1975). In general, this term is quite small, specially for liquid-solid fluidized beds.

So, the first models for \mathbf{T}_f and \mathbf{T}_s can be, respectively:

$$\epsilon \mathbf{T}_f = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}), \quad (45)$$

and

$$\phi \mathbf{T}_s = -p_s \mathbf{I} + \mu_s(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}), \quad (46)$$

where μ_s is the equivalent viscosity for the solid phase, $p = \epsilon p_e$ and $p_s = \phi p_{se}$. This last definition, p_s , is called the particle pressure. Usually, the particle based Re number in fluidization is high, being small only in liquid-solid fluidized beds of very small particles. The particles within the bed are in active motion, frequently bouncing off one another. As the particles collide, there is an exchange of momentum and this must be described by a particle pressure term. It is expected the particle pressure to increase with the particle concentration, since there will be more collisions and stronger fluctuations of the fluid drag force. A region of enhanced concentration would then be at a higher pressure and this would cause the flow to even out the disturbance. In other words, the particle pressure must be a stabilising effect. The solid phase viscosity, μ_s , can be considered as a short wave cut-off, since it might dissipate small perturbations.

In this first stage, p_s and μ_s will be considered monotone increasing function of ϕ only. Several specific forms for p_s and μ_s have been proposed. The ones adopted here are chosen to match an ad-hoc form for p_s used with success by Hernandez & Jimenez (1991) and the asymptotic expression for μ_s of Frankel & Acrivos (1995), derived for statistically homogeneous suspensions. They are: $p_s = \varphi G(\phi)$ and $\mu_s = Mh(\phi)$, where:

$$G(\phi) = \phi^3 e^{\frac{r\phi}{\phi_c - \phi}} \quad \text{and} \quad h(\phi) = \phi / (1 - (\phi/\phi_c)^{\frac{1}{3}}). \quad (47)$$

Here, φ , M and r are parameters subjected to calibration and ϕ_c is the maximum random packing of particles ($\phi_c = 63\%$). Finally, using Eq.(45) and Eq.(46) in Eq.(39) and Eq.(40) and choosing the right dimensionless parameters to appear, the closure problem for fluidized bed can be resumed to the following system of equations: the mass balance equations for incompressible fluid and solid phases, Eq.(30), the momentum balance equation for the fluid and for the solid phase, respectively:

$$(1 - \phi) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - (1 - \phi) Fr^{-1} \hat{e}_3 + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\alpha(\phi)}{Re} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\phi)(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) \quad (48)$$

and

$$\phi \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\delta \varphi \nabla G(\phi) - \phi Fr^{-1} \hat{e}_3 + \frac{M \delta h(\phi)}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\delta \alpha(\phi)}{Re} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \delta \beta(\phi)(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}), \quad (49)$$

where $Fr = U_s^2/ga$ is the Froude number and, finally, the angular momentum equations for the fluid and for the solid phase, respectively, $\mathbf{T}_f = \mathbf{T}_f^T$ and $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_s^T$.

4. Concluding Remarks

We have shown that the description of the motion of a single particle is an adequate beginning for the study of a fluidized bed, since it's possible to define the form of the fluid-particle interaction force and to identify the same physical parameters involved in the modelling (dimensionless governing equations) of a fluidized bed. In addition, the derivation of the averaged continuum equations follows the same approach adopted by Roy & Jackson (1967), but the proposed equations for the closure problem have now a simpler form, based on physically credible arguments.

The particle pressure and the particle phase viscosity are important parameters in the description of the fluidized bed. As stated in §3.4, these parameters influence the stability of the bed. Actually, these parameters are related to the microscale random motion of the particles, leading to say that $p_s \sim f_p(\phi)T$ and $\mu_s \sim f_\mu(\phi)T$, where T is a particle temperature, defined by $T = \frac{1}{3}\langle \mathbf{v}'^2 \rangle$, where \mathbf{v}' is the particle velocity fluctuation. In a model of gas-solid fluidization, this effect should be taken into account by the kinetic energy of random motion of solid particles, $\rho_s \phi \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \phi \mathbf{T}_s : \nabla \mathbf{v} + \Phi^*$ (Sergeev, 1995), this equation expressing a balance of pseudo-thermal energy as a direct consequence of the random motion of the particles, where Φ^* is the rate of kinetic energy per unit of volume due to collisions between the particles, \mathbf{q} is the heat flux of the pseudo-thermal energy, and \mathbf{T}_s is the stress tensor of the particulate phase given by $\phi \mathbf{T}_s = p_s(\phi, T)\mathbf{I} + \mu_s(\phi, T)[\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}]$.

Fluidized beds involves a complex multiphase flow due to high particle Reynolds number. The most pressing problem in describing the dynamic of a fluidized bed seem to be uncertainties in the governing equations. A more precise theoretical description, such as the one presented here, and experiments are required rather abstract hypothesis and the hard empiricism usually presented in publications concerning fluidized beds.

Once these equations and all the parameters involved are established, the next step would be the linear stability analysis of the uniform state of fluidization. These equations are going to be perturbed with a void fraction plane wave to evaluate if the particle pressure, indeed, stabilizes the fluidized bed (Sobral & Cunha, 2001).

5. Acknowledgments

The authors would like to thank the CNPq and the CTPetro-Finep for the financial support.

References

- Anderson, T. B., Jackson, R., 1967, "A Fluid Mechanical Description Of Fluidized Beds: Equations Of Motion", I&EC Fundamentals Vol. 6, N° 4, pp 527-539.
- Batchelor, G. K., 1967, "An Introduction To Fluid Dynamics", Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Batchelor, G. K., 1988, "A New Theory Of The Instability Of A Uniform Fluidized Bed", Journal of Fluid Mechanics, vol 193, pp 75-110.
- Cunha, F. R., Fortes, A. F., 1990, "Nonlinear Fluid-Particle Interaction In The Mechanics Of Fluidization - Part II", III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, pp 715-719.
- Drew, D. A., 1971, "Averaged Equations For Two-phase Flows", Studies In Appl. Math., pp 205-231.
- Ergun, S., "Fluid Flow Trough Packed Columns", 1952, Chemical Engineering Progress, vol. 48, pp 89-94.
- Frankel, N. A., Acrivos, A., 1995, "Suspensions Of Non Colloidal Particles", in Mobile Particulate Systems, NATO ASI Series, vol 287, pp 57-68.
- Garg, S. K., Pritchett, J. W., 1975, "Dynamics Of Gas-Fluidized Beds", Journal of Applied Physics, Vol. 46, N° 10, pp 4493-4500.
- Hernandez, J. A., Jimenez, J., 1991, "Bubble Formation In Dense Fluidized Beds", in IN. Proc. NATO Advanced Research Workshop On The Global Gerentry Of Turbulence (ed. J. Jimenez), pp 133-142.
- Richardson, J. F., Zaki, W. N., 1954, "Sedimentation And Fluidization", Trans. Inst. Chem. Engrs., Vol. 32, pp 35-52.
- Sergeev, Y. A., 1995, "Basic Equations And Constitutive Relations Of Fluidized Beds Of Interacting Particles", in Mobile Particulate Systems, NATO ASI Series, vol 287, pp 221-232.
- Sobral, Y. D., Cunha, F. R., 2001, "A Linear Stability Analysis Of A Homogeneous Fluidized Bed", XXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 01, pp 60.
- Zuber, N., 1964, "On The Dispersed Two Phase Flow In The Laminar Flow Regime", Chem. Engng. Sci., Vol. 19, pp 897.

THE DYNAMIC BEHAVIOR OF A COLLAPSING BUBBLE IN A NON-NEWTONIAN FLUID

Rodrigo Avelino Mesquita dos Santos

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brazil
rodrigo.avelino@bol.com.br

Francisco Ricardo da Cunha

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brazil
frcunha@unb.br

Abstract. *In this article it is investigated the dynamic of an oscillatory spherical bubble suspended in a Non-Newtonian fluid composed by a fiber suspension. It is considered an extension of Rayleigh-Plesset equation for studying the effect of the fiber suspension on the non-linear oscillatory motion of a spherical bubble. After an appropriate non-dimensionalization of the governing equation it is found that the most relevant non-dimensional parameters of the system are: the Reynolds number, the Weber number, the fibers concentration and the aspect ratio of the fibers. A regular asymptotic expansion is used to find the first order solution of the non-linear governing equation. The results are compared with numerical integration of the nonlinear initial value problem by using a Runge-Kutta scheme. An important consequence of the fibers addition in the flow is that it attenuates the instability of bubble non-linear oscillations and may avoid bubble against collapse. Finally results are shown for several combinations of the non-dimensional parameters involved in the problem.*

Key words: *bubble dynamic, spherical bubble, fiber suspension, oscillatory motion, regular asymptotic expansions*

1. Introduction

In a non-flowing system the ambient pressure can be varied by applying sound waves through the liquid. When the amplitude of the pressure variation is great enough to bring the pressure locally below, the vapor pressure in the negative parts of the sound cycle transversing the liquid, any minute cavities or bubble will grow. If the pressure amplitude is increased to produce zero, and then 'negative' pressures locally in the liquid, the bubble growth is increased. The tiny bubbles is thus set into motion, growing and contracting in the pressure field. According to the pressure field applied into the flow, the bubble may present non-linear oscillation in several periods or then collapse.

As Young(1999) have written, acoustic cavitation has two important characteristics: firstly generally it is non-linear process in that the change in the radius of the bubble is not proportional to the sound pressure. Secondly the high compressibility of the gas bubbles means that much potential energy is obtained from the sound waves when the bubbles expand and that kinetic energy is concentrated when the bubbles collapse. In transient cavitation, this transformation of a low energy density sound wave into a high energy density collapsing bubble occurs due to the motion is non-linear. Because it concentrates the energy into very small volumes it can produce very high pressures and temperatures which can erode solids like vanes of a turbine in a hydroelectric plant, or initiate chemical reactions or produce sonoluminescence, Hammitt (1980), Knapp, Daily, Hammitt, (1970), see also (Barber, Hiller, Loftsdedt, Putterman, 1997).

Lord Rayleigh (1917) has proposed a first theoretical study for observation of the phenomenon of bubbles motion. He has supposed firstly an empty cavity inside a stationary viscous fluid submitted to a pressure field. This field excites the system and the bubble develop a radial oscillating motion. The well-known Rayleigh-Plesset(1949) equation for describing this phenomena is :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}(p(R, t) - p_{\infty}(t)) \quad (1)$$

The collapsing time of the bubble predict by Rayleigh theory is $\tau \sim 0.915(\rho p_0^{-1})^{-1/2} R_0$, where ρ is the fluid density, p_0 is the pressure field on the interface bubble-liquid in the initial instant and R_0 is the initial radius of the bubble.

The purpose of this work is to investigate the dynamic of oscillatory motion of bubble, immersed in an equivalent fluid composed of a fiber suspension undergoing to a sound pressure field. It is considered an extension of Rayleigh-Plesset (1949) equation to investigate the effects of the fiber orientation on the non-linear response of the oscillatory bubble. Results are shown for several combinations of the dimensionless parameters involved in the problem.

1.1. Description of the model

Consider a bubble of radius R_0 developing an oscillatory motion in a suspension composed of a concentration ϕ of cylindrical fibers of length ℓ and radius a immersed in a incompressible Newtonian fluid of viscosity μ and density ρ which is, initially, in rest in the infinite. The bubble is composed of a perfect gas which describes a politropic process $P_b V^n = C$, where P_b is the internal absolute pressure, $V = (4/3)\pi R^3$ is the bubble volume at any time and n is the politropic coefficient. It is assumed that the bubble remains perfectly spherical and thus the bubble surface $r = R(t)$ moves only in the radial direction. The equivalent fluid is subject to an acoustic perturbation like $p_\infty(t) = p_0(1 + \varepsilon \sin \omega t)$. In this work it is not taken in consideration the non-equilibrium effects that occur at the moment of the instantaneous collapse of the bubble.

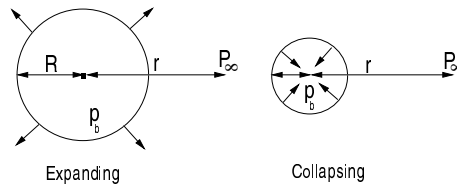


Figure 1. Schematic of a spherical bubble in oscillatory motion

2. Governing equation

In this section is developed an extension of Rayleigh-Plesset (1949) equation that governs the transient motion of a spherical bubble in a fiber suspension like a non-Newtonian fluid that is subjected to a acoustic pressure field.

The momentum equation is given by:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

where $\boldsymbol{\Sigma}$ is the fluid stress tensor, \mathbf{u} is the velocity field, \mathbf{g} is the gravity acceleration vector and ρ is the fluid density.

The continuity equation for an incompressible fluid is:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

As a consequence of the pure radial motion, the continuity equation in spherical coordinates reduces to:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = 0, \quad (4)$$

where r is the distance from the bubble center to an arbitrary point in the liquid, and u is the velocity radial component. Integrating the above equation and applying a kinematic boundary condition for a bubble containing an insoluble gas one obtains:

$$u(r, t) = \frac{R^2}{r^2} \dot{R} \quad (5)$$

2.1 Normal stress jump boundary condition

It can be shown that due to the pure radial motion, shear stress do not exist in this flow. However, the viscosity effect may appear in the condition of normal stress jump in the bubble interface. The normal component of the traction in spherical coordinates is:

$$\sigma_{nn} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p(R, t) + 2\mu f(\phi, \ell/a, R) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{R=r}, \quad (6)$$

where $f(\phi, \ell/a, R)$ is a function which depends on the fiber concentration, aspect ratio and orientation. A constitutive relation for this function will be present in the following two sections. Here ϕ is fiber concentration and (ℓ/a) is the aspect ratio of the fibers and R_0 the bubble initial radius. Applying the stress jump for a clean interface free of surfactants, this gives:

$$\sigma_{nn} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_{susp} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_{gas} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (7)$$

where σ is the surface tension coefficient and \mathbf{n} is the normal vector to the bubble wall. $\nabla \cdot \mathbf{n} = 2\bar{K}$, and $\bar{K} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ is the mean curvature of the surface. The normal traction in the gas side is given by

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_{gas} = - \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3n} \quad (8)$$

Whereas, the normal traction in the fiber suspension side is given by:

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_{susp} = -p(R, t) + 2\mu f(\phi, \ell/a, R(t)) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = -p(R, t) - 4\mu f(\phi, \ell/a, R) \frac{\dot{R}}{R} \quad (9)$$

Consequently, after applying the boundary condition, Eq.(7), the interior and the superficial bubble pressures are expressed, respectively, by

$$p_b = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3n} \quad (10)$$

and

$$p(R, t) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3n} - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu f(\phi, \ell/a, R) \frac{\dot{R}}{R} \quad (11)$$

3. Fiber suspension constitutive equation

The stress tensor of the Eq.(2) cannot be described by a Newtonian model because the fibers cause a stress anisotropy in the flow. Thus a constitutive equation to this tensor is needed to take into account the effect of the fibers in the flow. Consider the stress tensor for the equivalent fiber suspension written as follow

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + 2\boldsymbol{\Sigma}^f, \quad (12)$$

here p is the pressure field, $\boldsymbol{\Sigma}^f$ is the stress tensor due to the presence of fibers, \mathbf{I} is the isotropic unity tensor and \mathbf{D} is the rate of strain tensor, $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$

The constitutive model for $\boldsymbol{\Sigma}^f$ is based on a particular case of the general formulation proposed by Hinch & Leal(1976), namely

$$\boldsymbol{\Sigma}^f = \mu[f(\phi, \ell/a, R) - 1](\mathbf{s} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}\mathbf{s} \quad (13)$$

Physically, $\boldsymbol{\Sigma}^f$ corresponds to an extra stress in the direction of the fibers orientation $\mathbf{s}\mathbf{s}$ that is proportional to the rate of strain tensor component in the fiber orientation direction $\mathbf{s} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{s}$. A long fiber tends to resist to

the stretching along its own axis and the extensional viscosity $\mu[f(\phi, \ell/a, R) - 1]$ characterizes the importance of this resistance. Batchelor(1971), found analytically an expression for the extensional viscosity in a dilute suspension of fibers by using a slender body theory for dilute regime ($m\ell^3 \ll 1$). Here, m is density number of the fibers.

$$f(\phi, \ell/a, R) = 1 + \frac{4}{3}\phi \frac{(\ell/a)^2}{\ln(\ell/a)} \tag{14}$$

A correction to semi-dilute regime ($m\ell^3 \gg 1 \gg \phi$), Hinch & Cunha(1997), one gives:

$$f(\phi, \ell/a, R) = 1 + \frac{4}{3}\phi \frac{(\ell/a)^2}{\ln(\phi^{-\frac{1}{2}})} \tag{15}$$

4. A constitutive model for a suspension of initially randomly oriented fibers

The local orientation θ of one fiber can be analysed if the probability density function $P(\theta)$ is known. For a incompressible Newtonian fluid flow, despite the particles inertial effects and considering the absence of sedimentation and Brownian motion, $P(\theta)$ can be calculated by means of the Fokker-Planck equation (McQuarie, 1976).

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla P + \nabla \cdot (\dot{\mathbf{s}}P(\mathbf{s})) = 0 \tag{16}$$

where $P(\theta)d\theta$ or $P(\mathbf{s})ds$ is the probability of the fiber being oriented between an interval of θ and $\theta + d\theta$.

When a axisymmetric fiber free of forces, torque and inertia, oriented in the direction \mathbf{s} is subject to a linear velocity field, this fiber will develop a rotation motion with the flow according to:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{s} + \left[\frac{H^2 - 1}{H^2 + 1} \right] [\mathbf{D} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{s})] \tag{17}$$

Here H is the aspect ratio of the fiber ℓ/a , and \mathbf{W} is the vorticity tensor. Now, applying the Eq.(16) and (17) for the case of radial flow to a spherical bubble motion, one determines that the probability density function $P(\theta)$ is given by:

$$P(\theta) = \frac{1}{4\pi} [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)e^{h\gamma}]^{-\frac{3}{2}} e^{h\gamma} \tag{18}$$

where $h = \frac{3(H^2-1)}{H^2-1}$ and $\gamma(r)$ is the local deformation calculated as following

$$d\gamma(r) = \dot{\gamma}dr \Rightarrow \gamma(r) = \int_0^r \frac{\partial u_r}{\partial r} dt' = 2\ln \left(\frac{r^3 + R_0 - R^3}{r^3} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{19}$$

It is important to notice that in the general situation described above it is not considered the simple approximation of a permanent alignment of the particles in the flow direction like $\mathbf{s} = \mathbf{u} / |\mathbf{u}|$, and consequently, the function $f(\phi, \ell/a, R)$ depends also on R because the fiber orientation it is now linked to the bubble radius evolution. In this way one obtains that:

$$f(\phi, \ell/a, R) = 1 + \phi \frac{H^2}{\ln(\phi^{-\frac{1}{2}})} G_1(R) \tag{20}$$

where

$$G_1(R) = \frac{1}{3} + \int_{\infty}^R 3 \frac{R^3}{r^4} \langle G_2 \rangle dr \tag{21}$$

and $G_2(\theta) = 2\cos^2\theta - 3\cos^4\theta$. The expression of $f(\phi, \ell/a, R(t))$ may be applied for semi-dilute system and $\langle G_2 \rangle$ is evaluated by the probability average of the function $G_2(\theta)$, namely

$$\langle G_2(\theta) \rangle = \int_0^\pi G_2(\theta) P(\theta) d\theta \quad (22)$$

This work will be restricted first to the approximation of fibers aligned in the radial direction of the non-linear bubble motion. So, $\theta = 0 \forall t$ and $G_1(R) = 4/3$. Under these conditions one recovered Batchelor's (1970) given in Eq.(14).

5. Bubble dynamic equation

Now, making a change of variable $R = 1 + r$ and after an appropriate non-dimensionalization of the system the dimensionless equations for the internal gas pressure and the bubble dynamic and internal pressure equations are given, respectively, by:

$$p_b(t) = \left(1 + \frac{2}{We}\right) R^{-3n}(t) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (1+r)\ddot{r} + \frac{3}{2}\dot{r}^2 &= \frac{2}{We} \left[\frac{1}{(1+r)^{3n}} - \frac{1}{(1+r)} \right] - \\ &- \frac{4}{Re} (1 + f(\phi, \ell/a, R)) \frac{\dot{r}}{(1+r)} - (1 + p'(t)) + \frac{1}{(1+r)^{3n}} \end{aligned} \quad (24)$$

In the above equations some dimensionless parameters appear. These parameters can be defined after a simple scaling analysis. For $F_i \sim \rho R_0^2 U_c^2$, the inertial force; $F_\mu \sim \mu R_0 U_c$, the viscous force; $F_\sigma \sim R_0 \sigma$ the superficial tension force, we define We (Weber number) = F_i/F_σ ; Re (Reynolds number) = F_i/F_μ . Here $U_c = (p_0 \rho^{-1})^{1/2}$ is a characteristic velocity.

6. Asymptotic solution

As the governing equation, Eq.(24), is strongly non-linear, it is needed to make an asymptotic expansion in terms of a small parameter ε identified in the problem. We start by expanding the terms $(1+r)^{-3n}$ and $(1+r)^{-1}$ by using binomial series. Substituting in the Eq.(24) and simplifying it gives:

$$\begin{aligned} (1+r)\ddot{r} + \frac{3}{2}\dot{r}^2 &= \frac{2}{We} \left[(1-3n)r + \left(\frac{3}{2}n + \frac{9}{2}n^2 - 1\right) r^2 \right] - \\ &- \tau [\dot{r}(1-r+r^2)] - p'(t) - 3nr + \left(\frac{3}{2}n + \frac{9}{2}n^2\right) r^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Here τ is the constant $4/Re [1 + 4/3(\ell/a)(\phi/\ell n \sqrt{\phi})]$.

For a regular asymptotic solution for the bubble radius is expanded like

$$r = \sum_{n=1} \varepsilon^n f_n(t) \quad (26)$$

Considering $O(\varepsilon^2)$ only, one obtains.

$$r = \varepsilon f_1(t) + \varepsilon^2 f_2(t), \quad \dot{r} = \varepsilon \dot{f}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{f}_2(t) \quad \text{and} \quad \ddot{r} = \varepsilon \ddot{f}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{f}_2(t) \quad (27)$$

It is assumed that the dimensionless pressure disturbance applied in the system is an acoustic one given by

$p'(t) = \varepsilon \sin(\omega t)$. Substituting harmonic pressure forcing and the expansions given in Eq.(27) into the Eq.(25), after simplifying and separating terms $O(\varepsilon)$ and $O(\varepsilon^2)$ we find

$$\ddot{f}_1(t) + \tau \dot{f}_1(t) + \kappa f_1(t) = -\sin(\omega t) \tag{28} \quad O(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}_2(t) + f_1(t)\ddot{f}_1(t) + \frac{3}{2}\dot{f}_1(t)^2 - \alpha f_2(t) - \beta f_1(t)^2 - \\ - \tau(f_1(t)\dot{f}_1(t) - \dot{f}_2(t)) + \lambda f_2(t) - \eta f_1(t)^2 = 0 \end{aligned} \tag{29} \quad O(\varepsilon^2)$$

where $\alpha = (2/We)(1 - 3n)$, $\beta = (2/We)[(9/2)n^2 + (3/2)n - 1]$, $\lambda = 3n$ and $\eta = [(9/2)n^2 + (3/2)n]$.

Now, the first order analysis can give some important dynamic properties of the system behavior. Solving the homogeneous ODE it is determined the natural frequency ω_0 of the system when viscous term is ignored. On the other hand an exact answer $O(\varepsilon)$ is determined when one solves the full differential equation Eq. (28).

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa} \tag{30}$$

where $\kappa = \lambda - \alpha$

Now, the full $O(\varepsilon)$ equation is solved for initial conditions $R(0) = R_0$ and $\dot{R}(0) = 0$ is found to be

$$\begin{aligned} R(t) = R_0 + \frac{1}{2v_2} \omega e^{-\frac{1}{2}(\tau+v_1)t} \left[-\tau(1 + e^{v_1 t}) - \frac{-1 + e^{v_1 t}(\tau^2 + 2v_3)}{v_1} \right] + \\ + \frac{1}{v_2} (\tau \omega \cos \omega t + v_3 \sin \omega t) \end{aligned} \tag{31}$$

where ω is the forcing frequency. The other parameters that appear in Eq. (31) are $v_1 = (\tau^2 - 4\kappa)^{1/2}$, $v_2 = \tau^2 \omega^2 + \kappa - \omega^2$ and $v_3 = -\kappa + \omega^2$.

7. Results and discussion

A fourth order Runge-Kutta scheme is used to obtain the numerical solution of the bubble dynamics non-linear equations, Eq.(23) and Eq.(24). The routine was developed in Fortran 77 platform Linux. As a preliminary test, the exact solution for the Rayleigh problem was recovered by the simulation using dimensionless time step of 10^{-3} . The error between exact and numerical solution was much smaller than 1%. So for most of the simulations done, the time step used was kept 10^{-3} . Figure(2) shows the comparison between numeric and asymptotic solutions for $We = 10$, $Re = 1$, $\omega = 1.0$ and $\phi = 0$.

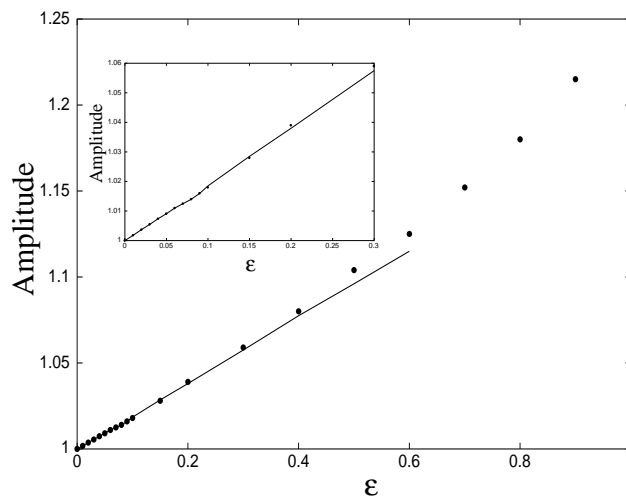


Figure 2. The amplitude of the bubble radius as function of the pressure amplitude ε for $We = 10$, $Re = 1$ and $\omega = 1.0$, $\phi = 0$. The full line is the asymptotic answer and the circles are the numerical result

The plot in Fig.(2) shows the variation of the amplitude of the radius of the bubble versus the parameter ε for the asymptotic and numerical solutions. It can be seen that the analytic solution for $O(\varepsilon)$ can be applied for ε approximately 0.6. For this value of ε , the error between the methods is smaller than 1 %. The insert to Fig. (2) shows the details of this comparison for small ε . The asymptotic solution quite agree with the numeric for $\varepsilon = 0.3$.

The non-linear response of the bubble is investigated in Fig.(3), Fig.(4), Fig.(5) and Fig.(6). A time step of 10^{-3} was used in the Runge-Kutta scheme for all cases that will be present. The error for this time step is less than 0.1%.

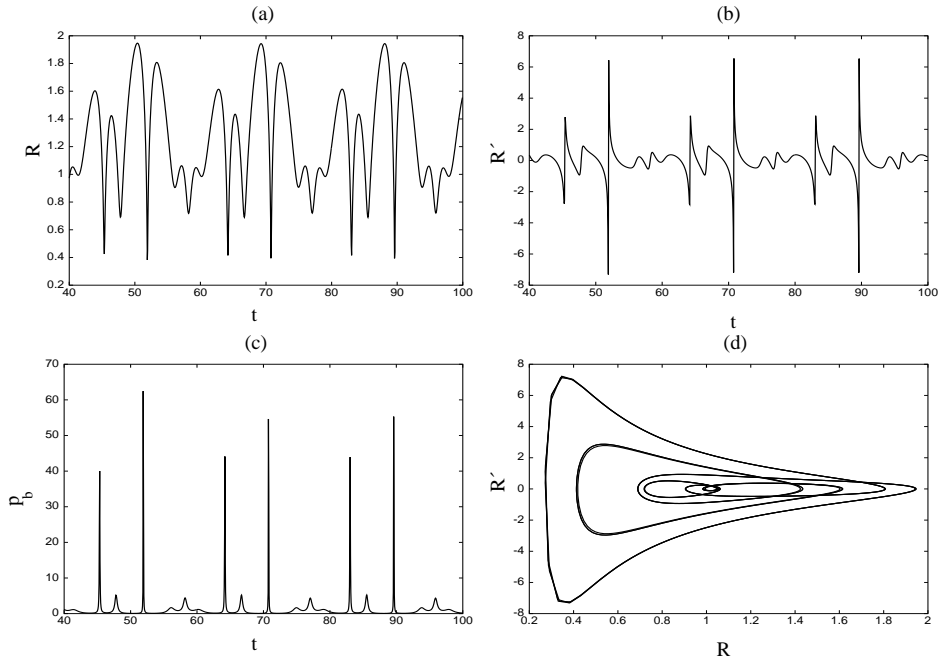


Figure 3. Non-linear response of the bubble for $Re = 28$, $We = 20$, $\varepsilon = 0,9$ e $\phi = 0$. (a) $R \times t$, (b) $\dot{R} \times t$, (c) $p_b \times t$ and (d) $R \times \dot{R}$

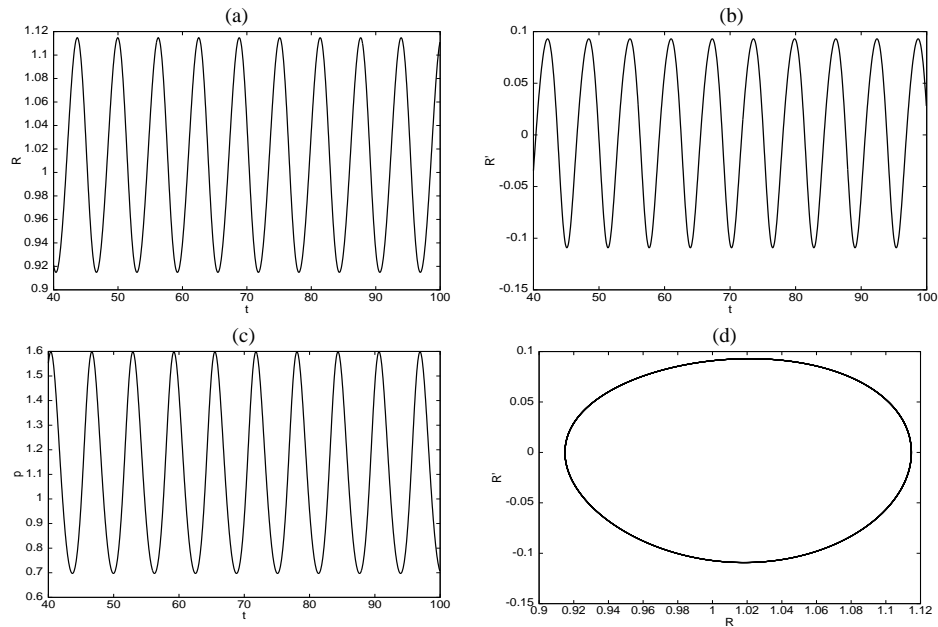


Figure 4. Non-linear response of the bubble for $Re = 28$, $We = 20$, $\varepsilon = 0,9$ e $\phi = 1\%$. (a) $R \times t$, (b) $\dot{R} \times t$, (c) $p_b \times t$ and (d) $R \times \dot{R}$

Figures (3) and (4) show the non-linear response of the bubble motion under an acoustic pressure field with amplitude of $\varepsilon = 0.9$ and $\omega = 1.0$, $We = 20$ and $Re = 28$. In Fig.(3) the concentration of fibers is null ($\phi = 0$). It can be seen that oscillation of the bubble is developing a quite unstable motion and do not obey regular periods of oscillation. $\dot{R}(t)$ versus t presents the non-linearity of the velocity of the wall of the bubble. Comparing the pressure of the internal gas of the bubble and the radius oscillation, it is observed that when the radius reaches the minimum value, the pressure takes the high amplitude. At this moment the bubble wall can not hold the pressure and it start growing until the pressure take a minimum value. Each period of oscillation forms a closed circle in the phase diagram ($\dot{R}(t)$ versus $R(t)$). This circle becomes deformed due to the instability in the response of the bubble. After several periods we can see that every cycle forms a different deformed circle. It occurs due to the non-linearity of the flow and each period gives a different response for the motion. The more unstable the motion of the bubble is, the more deformed the circle is. Figure (4) shows the results for the same Weber and Reynolds numbers, ω and ε . In this case the bubble is oscillating in a fluid composed of $\phi = 1\%$ of fibers with aspect ratio $\ell/a = 100$. It is seen that the fiber orientation stabilize the non-linear response of the bubble. The phase diagram shows periods of oscillation more uniform, but it can be seen a slightly instability in the flow. It is seen by the few deformed circle showed in the phase diagram.

Figures (5) and (6) present the bubble response under a high amplitude of pressure forcing. Here we consider $Re = 10$, $We = 5$, $\omega = 1.0$ and $\varepsilon = 2.0$. The fiber orientation effect on a collapsing of bubble is shown in Fig.(6).

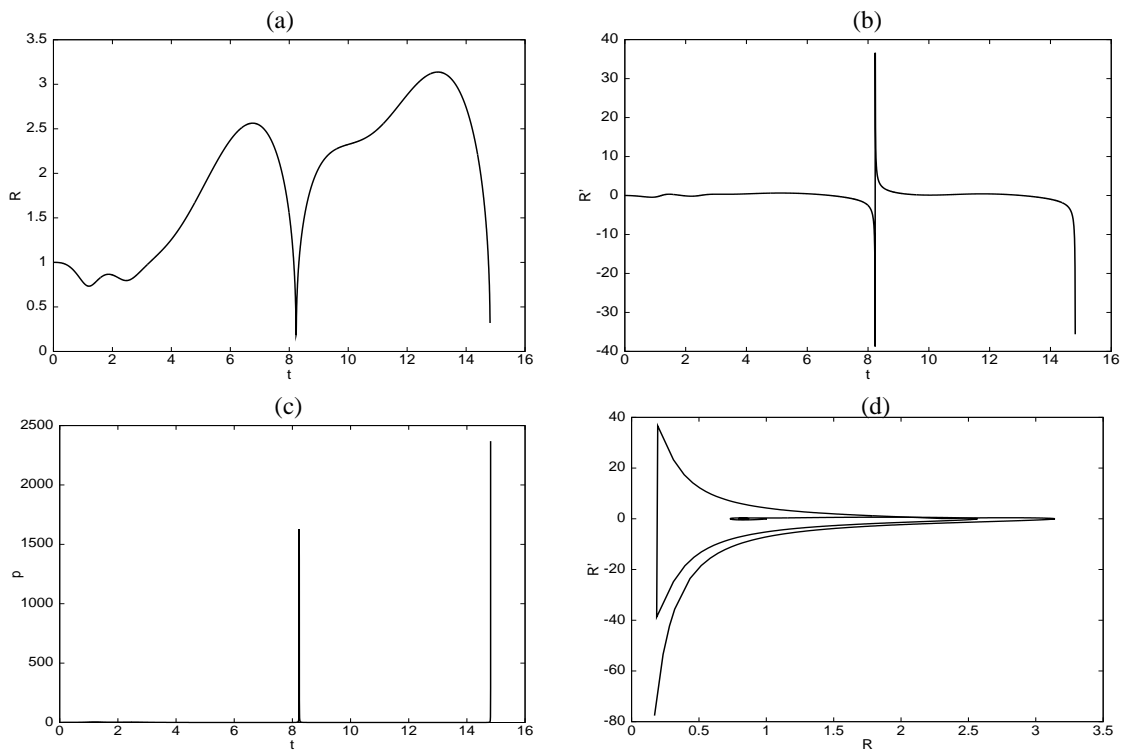


Figure 5. Non-linear response of the bubble for $Re = 10$, $We = 5$, $\varepsilon = 2.0$ e $\phi = 0$. (a) $R \times t$, (b) $\dot{R} \times t$, (c) $p_b \times t$ and (d) $R \times \dot{R}$

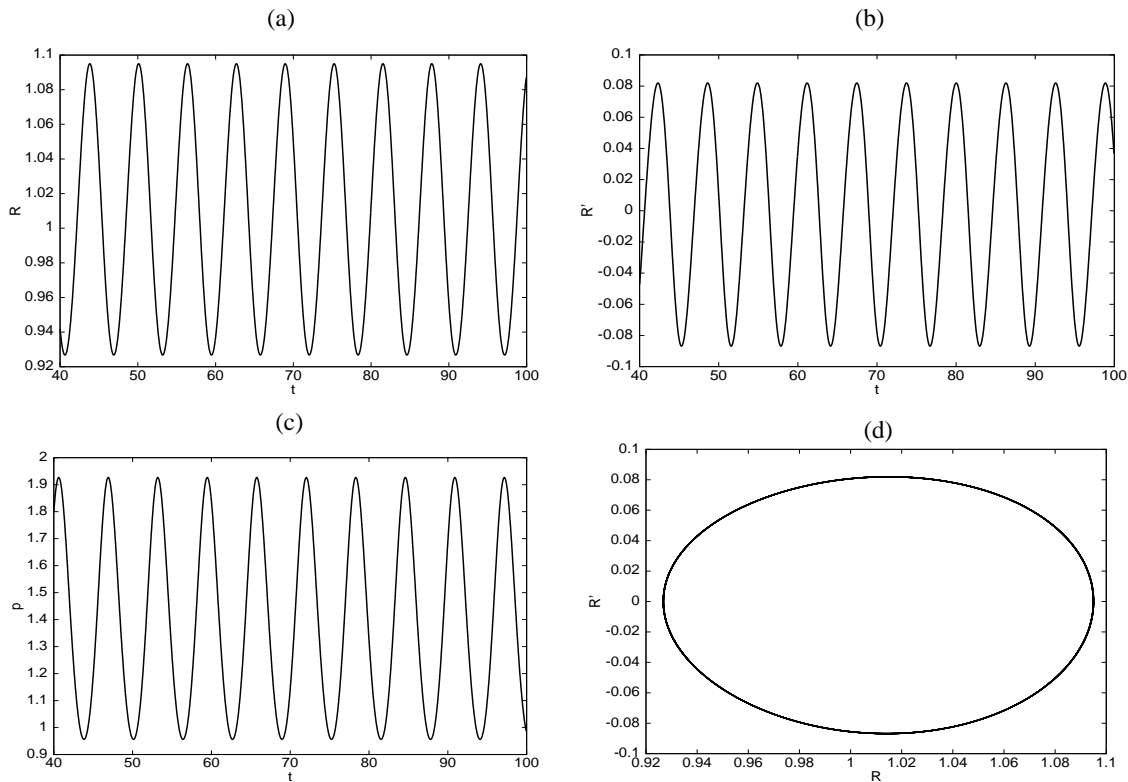


Figure 6. Non-linear response of the bubble for $Re = 10$, $We = 5$, $\varepsilon = 2.0$ e $\phi = 1\%$. (a) $R \times t$, (b) $\dot{R} \times t$, (c) $p_b \times t$ and (d) $R \times \dot{R}$

In Fig.(5), the bubble collapses after a short time of oscillation. With the dimensionless time about 8.5, the radius starts to grow quite rapidly. The bubble wall reaches a limit size at the time about 13. So it starts to decrease and the pressure increases drastically until the bubble implodes with the hard core Van der Waals at time approximately 14.5. The opened phase diagram seen corresponds to the situation of the bubble collapse.

Figure (6) shows the bubble motion for the same set of parameters, except the bubble is oscillating in a suspension of ($\phi = 1\%$) and ($\ell/a = 100$). It is seen a dramatic change of the bubble non-linear motion. The presence of fibers brings the bubble for a weakly unstable situation showed by the phase diagram.

8. Conclusion

In this paper it was developed a new formulation for describing the dynamic of bubble in complex fluid. The analytic model based on the asymptotic equation considers all the parameters involved in the problem and it is important in a preliminary investigation of the phenomena. The first order $O(\varepsilon)$ gives an exact theory to predict the bubble radius evolution for ε less than 0.6 ($0 < \varepsilon < 0.6$) at finite Reynolds and Weber numbers. The simulations showed that the bubble motion is completely chaotic and do not obey regular frequencies of oscillations. The model of fibers aligned in the direction of the flow has shown that a low concentration of long fibers stabilizes the flow and keep the bubble oscillating even though under extreme amplitudes of forcing pressure and high values of Reynolds or Weber number. The addition of fibers may avoid collapse of bubbles and inhibit cavitation in turbomachines.

References

- Barber, B.P., Hiller R.A., Loftsdedt, R., Putterman, S.J. "Defining the unknown of sonoluminescence". Elsevier Science p. 80-82. 1997
- Batchelor, G.K. "Slender-body theory for particle of arbitrary cross section in Stokes flow". (1970), Journal Fluid Mechanics, **44**, pp. 419
- Hammit, F.G., "Cavitation and multiphase flow phenomena". McGraw-Hill:New York (1980)
- Hinch, E.J. & Cunha F.R., "A course on the behavior of elastic liquid" (1997), University of Brasília, Department of Mechanical Engineering.
- Hinch, E.J. & Leal, L.G, "Constitutive equations in suspension mechanics. Part 2 Approximate forms for suspension of rigid particles effect by Brownian rotates". J. Fluid Tech (1970), Vol. 76 part 1, pap 187 - 208
- Knapp, R.T., Daily, J.W. and Hammit, F.G. "Cavitation". McGraw-Hill. p80. 1970
- McQuarrie, D.A., "Statistical Mechanics", Harper&Row, 1976, New York.
- Plesset, M.S., "Trans ASME, J. Appl. Mech.", **71** , 277, 1949.
- Rayleigh, L. "On the pressure developed in a liquid during the collapse a spherical cavity". Phil. Magazine(series 6) **34**:94-98(1917)
- Young, F.R., "Cavitation". Imperial College Pr. pp.1-36, 1999.

Investigação da Redução de Arrasto usando Fibras em escoamentos Turbulentos: Parte Teórica

Marcelo Andreotti

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
marcelo-andreotti@bol.com.br

Francisco Ricardo da Cunha

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
frcunha@unb.br

Aldo João de Sousa

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brasil
aldo@unb.br

Resumo. Neste trabalho é realizado um estudo preliminar sobre redução de arrasto em escoamentos turbulentos. Esse efeito de diminuição do fator de fricção do escoamento pode ser obtido pela adição de fibras que geram uma anisotropia de tensões viscosas, diminuindo a eficiência do transporte da quantidade de movimento por flutuações turbulentas. Esta análise é feita com base num modelo constitutivo não-linear que leva em consideração a taxa de deformação extra do escoamento na direção de orientação das fibras. O modelo é aplicado para o desenvolvimento de uma análise assintótica da teoria de Kármán-Prandtl com o objetivo de se investigar o primeiro efeito das fibras no escoamento. Os resultados obtidos pelo modelo assintótico mostram que para uma concentração de 3% de fibras longas pode-se ter uma redução de aproximadamente 80% do fator de atrito do escoamento.

Palavras chave: suspensão de fibras, redução de arrasto, escoamento turbulento, anisotropia

1. Introdução

O fenômeno de redução do arrasto em escoamentos turbulentos devido a certos aditivos, notadamente, polímeros lineares com alto peso molecular e fibras tem sido assunto de diversas pesquisas durante os últimos quarenta anos Toms (1948), Bark, Hinch e Landhal (1975), Gyr & Berwersdorff, (1995). O estudo desse mecanismo de redução do arrasto é importante devido ao seu grande potencial em aplicações de engenharia, uma vez que, uma redução da resistência do escoamento em até 50% pode ser obtido adicionando-se algumas partes por milhão em peso de aditivos poliméricos. A redução do fator de atrito também tem sido observada com a utilização de outros aditivos anisotrópicos e surfactantes (ver Gyr et al., 1995). Além de soluções de polímeros em água e outros solventes, se utiliza, por exemplo, fibras, partículas grossas de poeiras, argila e bolhas. Experimentos, recentemente, realizados no Departamento de Engenharia Mecânica da UnB mostram resultados de redução do arrasto de até 35% (Tavares, Almeida e Cunha, 1997), usando-se fibras de nylon como aditivos. O campo de ação desse estudo é bastante extenso, sendo já apontado sua utilização para diminuição de custos do bombeamento em oleodutos, prevenção de cavitação, redução de ruídos, aumento de velocidade de embarcações por meio do recobrimento do casco com camadas poliméricas e na estabilidade de jatos para combate a incêndios.

Uma suspensão de fibras pode ser, geralmente, caracterizada por uma viscosidade de cisalhamento μ , e por uma viscosidade extensional μ_e . Essa anisotropia de viscosidade pode ser a causa principal que explica como o fator de atrito, em um escoamento turbulento, pode ser reduzido.

Lumley (1969), argumenta que o mecanismo de redução de arrasto está associado com as mudanças nas escalas de turbulência, devido a presença dos aditivos. Utilizando argumentos de escala, Lumley postulou que a extensão das moléculas de polímeros tem efeito pronunciado fora da subcamada laminar, causando um aumento da viscosidade efetiva nessa região. Por outro lado, resultados de simulações numéricas diretas mostram que um aumento da viscosidade efetiva fora da subcamada viscosa não é suficiente para produzir as reduções de arrasto observadas nos experimentos (Sureshkumar e Beris, 1997). Desta forma, seria necessário considerar o efeito elástico e a

anisotropia dos aditivos no escoamento. Landhal (1972) sustenta a teoria de anisotropia devido a extensão de macromoléculas de polímeros em solução quando os mesmos são sujeitos a escoamentos com tempos característicos menores que o tempo de relaxação do polímero. Landhal associa o mecanismo de redução de arrasto com a atenuação da produção de energia turbulenta devido a presença dos aditivos. Virk (1975) desenvolveu uma análise assintótica como sendo a maior redução possível de arrasto devido a presença de fibras no escoamento, podendo ser estimada como: $f^{-0,5} = 19 \log_{10}(Re f^{0,5}) - 32,4$. Recentemente, Azaiez (2000) examinou a estabilidade linear de uma camada de mistura na presença de aditivos usando fibras, determinando mecanismos de estabilização de escoamentos em alto número de Reynolds em função da razão de aspecto e concentração volumétrica das fibras. Nos últimos anos existe um avanço promissor no campo de simulações numéricas de escoamento turbulentos de fluidos não-Newtonianos em canais, para números de Reynolds em torno de 2000. O trabalho mais recente foi desenvolvido por Dimitropulus, Sureshkumar & Beris (1998), os quais realizaram simulações diretas de escoamentos viscoelásticos turbulentos em canais, com redução de arrasto. Observações experimentais recentes mostram que as componentes normais de flutuações de velocidade são reduzidas em todas as frequências (Gyr et al.,1995). Isto pode explicar a questão da inibição de vórtices, mesmo de grande escala, também observadas nos experimentos.

Apesar de extensas pesquisas na área, desde a descoberta do fenômeno por Toms (1948), ainda não existe um modelo, universalmente, aceito que explique os mecanismos de atuação desses aditivos na redução de arrasto em escoamentos turbulentos. Diversas teorias, como as mencionadas acima, têm sido apresentadas para explicar os mecanismos responsáveis pela redução do arrasto (Gyr et al., 1995). Uma questão importante nas investigações da redução do fator de fricção é avaliar se os mecanismos envolvidos estão relacionados com uma alteração da eficiência do transporte de quantidade de movimento por flutuações devido a presença dos aditivos ou se os mesmos devem-se às propriedades físico-químicas (e.g. flexibilidade) do aditivo. Ambos os mecanismos podem ser responsáveis por uma redução de produção de energia turbulenta por unidade de massa, P , definida como, $P = -(\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}') : \bar{\mathbf{D}}$, em que \mathbf{u}' denota o campo de flutuações de velocidade do escoamento em torno da média $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{D}}$ é o tensor taxa de deformação médio do escoamento, $\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T)$.

O maior interesse deste trabalho é investigar o mecanismo de redução de arrasto quando adiciona-se ao escoamento baixas concentrações de aditivos anisotrópicos, em particular, fibras. Dentro do contexto anterior propõe-se uma extensão da teoria de Kármán-Prandtl que leva em consideração uma primeira correção do efeito de fibras rígidas de grandes razões de aspecto e baixas concentrações no escoamento turbulento no interior de tubos. Os resultados obtidos com o modelo teórico proposto indicam que uma anisotropia de tensões criada no escoamento pela presença das fibras, seria o principal mecanismo físico responsável pela diminuição da eficiência do transporte de quantidade de movimento por flutuações turbulenta e conseqüentemente pela diminuição do arrasto.

2. Modelo Matemático

2.1. Considerações do Modelo

A finalidade de se propor um modelo constitutivo para uma suspensão diluída de fibras é explicar qualitativamente o mecanismo de redução de arrasto pelo uso de partículas anisotrópicas no escoamento. A presente abordagem teórica também poderá ser usada em trabalhos futuros como um modelo preliminar para simulação numérica do fenômeno. A geometria para descrição do modelo é mostrado na Fig. (1).

Nesse modelo considera-se que um fluido Newtoniano de viscosidade μ e massa específica ρ , contendo n fibras por unidade de volume, está confinado entre dois planos paralelos infinitos separados por uma distância h . As fibras possuem comprimento l e diâmetro b . Supõe-se uma razão de aspecto $l/b \gg 1$. Admite-se que o tempo de sedimentação das fibras é muito maior que uma escala de tempo do escoamento, por exemplo, $1/\dot{\gamma}$ no caso de cisalhamento simples, ou h/\bar{U} , no caso de escoamento turbulento em tubos. Aqui $\dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento e \bar{U} é a velocidade média do escoamento. A velocidade média de sedimentação das fibras pode ser estimada por meio de uma análise de escala (Cunha, 1995). Considere que um aglomerado de n fibras sedimente com velocidade terminal \bar{V} . O tamanho linear ou raio do aglomerado de fibras é caracterizado por R . Procedendo com um balanço entre a força de arrasto viscoso (Lei de Stokes) e a força gravitacional líquida do aglomerado de fibras, obtém-se que:

$$\bar{V} \sim V_0 c \left(\frac{R}{\ell} \right)^2 \tag{1}$$

em que $V_0 = \frac{2}{9\mu} l^2 \Delta\rho g$, é a velocidade terminal de uma fibra isolada e c é a concentração de fibras do agregado.

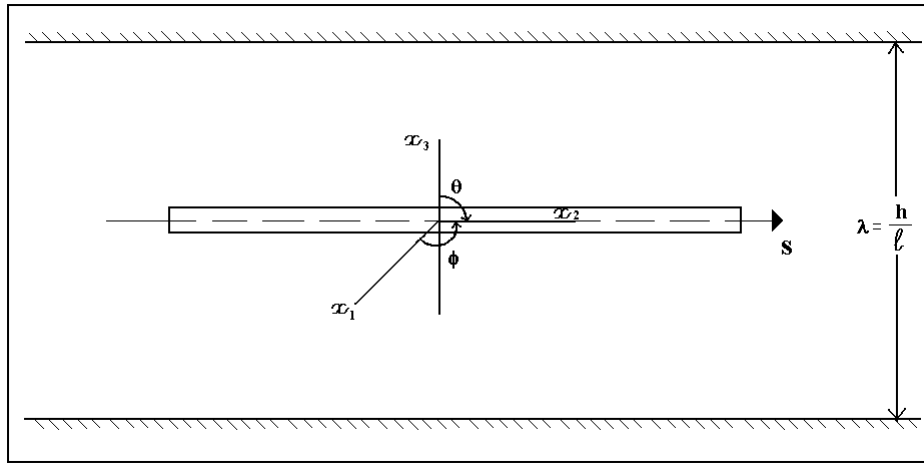


Figura 1: Desenho esquemático da geometria do modelo de uma suspensão de fibra para pequenas concentrações e grandes razões de aspecto.

A condição para que as fibras estejam livres da ação da gravidade pode ser escrita na forma:

$$t_{sedimen.} \sim \frac{h}{V_0 \phi \left(\frac{R}{l}\right)^2} \gg t_{esc.} \sim \frac{h}{\bar{U}} \quad (2)$$

Com isso, é possível se estimar a taxa de sedimentação típica de fibras no escoamento.

2.2. Equações de Balanço

Nesta seção, apresenta-se as equações de conservação e o modelo constitutivo para o tensor de tensões que descreve o efeito médio da presença de fibras em regimes semi-diluídos de concentração num escoamento.

Define-se como escalas de comprimento e velocidade para adimensionalização do problema em questão o diâmetro do tubo ($d = 2R$) e a velocidade média do perfil médio do escoamento U , respectivamente. As tensões são, então, adimensionalizadas por ρU^2 . As equações de balanço adimensionais são:

(i) Continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

(ii) Cauchy:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} \quad (4)$$

Em que \mathbf{u} é a distribuição de velocidade do escoamento médio.

2.3. Modelo Constitutivo

O escoamento na presença de aditivos não pode ser descrito pelo modelo Newtoniano, pois a presença das fibras produz uma anisotropia de tensões no escoamento, causando um efeito não-linear conforme apresentado a seguir:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + \boldsymbol{\Sigma}_f \quad (5)$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é o tensor de tensões médio do escoamento, p é a pressão do fluido, \mathbf{I} é o tensor unitário isotrópico, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação e $\boldsymbol{\Sigma}_f$ é o tensor de tensões extra devido a presença das fibras na suspensão. A tensão extra não local, $\boldsymbol{\Sigma}_f$, é definida como uma função generalizada que é finita quando os pontos de interesse \mathbf{x} pertencem

ao domínio da fibra e igual a zero quando o ponto de interesse não pertence à fibra, (Shaqfeh e Frederickson 1990).

$$\Sigma_f = \begin{cases} \neq 0, & \text{se } x \in \text{volume a fibra} \\ = 0, & \text{se } x \notin \text{volume da fibra} \end{cases} \quad (6)$$

É importante ressaltar que, enquanto os dois primeiros termos da equação (5) (contribuição Newtoniana) não são afetados pela configuração das fibras, a tensão extra depende fortemente desta configuração. De uma maneira formal, pode-se expressar a média de probabilidade da tensão extra $\Sigma_f(x)$, para uma suspensão diluída de fibras por:

$$\Sigma_f = \int_{\Omega(x_c)} ds \int_{x \in D(x_c, s)} dx_c (\Sigma_f^*(x|x_c, s)) s(x_c, s) \quad (7)$$

Na primeira integral, o domínio de integração $\Omega(x_c)$, é o conjunto de todas as orientações, s , permitidas para uma fibra com centro de massa em x_c . O segundo domínio de integração $x \in D(x_c, s)$, é o conjunto das posições de centros de massa x_c , tal que o ponto de interesse x encontra-se no interior do domínio de uma fibra, cujo centro de massa está em x_c e tem orientação s , (Batchelor 1970, 1971).

Fisicamente, $(\Sigma_f^*(x|x_c, s))$, representa a tensão média extra em um ponto x , dado que existe uma fibra com centro de massa na posição x_c e com orientação s . A média é calculada tendo como base todas as posições e orientações possíveis das outras fibras em suspensão. O termo $s(x_c, s)$, na equação (7), é a função densidade de probabilidade para configuração das fibras na suspensão. Em se tratando de um modelo preliminar, é instrutivo considerar uma suspensão de fibras rígidas, onde uma deformação axial experimentada por esta é muito menor que sua espessura. Considerando-se ainda, fibras orientadas numa direção arbitrária s e que estas são suficientemente grandes de forma a não serem afetadas por difusão Browniana. A presente análise limita-se ao caso de uma suspensão de fibras em regimes diluídos e semi-diluídos. Nestas condições, o modelo constitutivo pode ser expresso como sendo uma adaptação do modelo mais geral proposto por Hinch e Leal (1976).

$$\Sigma_f = \mu_e (\mathbf{D} : \mathbf{s}\mathbf{s}\mathbf{s}\mathbf{s}) \quad (8)$$

sendo Σ_f , a parte não Newtoniana do tensor de tensões, tendo origem no efeito médio anisotrópico das fibras no escoamento e μ_e é uma viscosidade extensional associado com a presença das fibras descrita a seguir. Note que Σ_f é proporcional a taxa de deformação na direção de orientação das fibras. Este modelo é acoplado a equação cinemática que descreve a evolução da orientação das fibras no escoamento. Fibras longas giram aproximadamente como elementos de fluido tal que:

$$\frac{Ds}{Dt} = \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{u} - (\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} \quad (9)$$

Para uma primeira análise do efeito das fibras em um escoamento turbulento não é, rigorosamente, necessário usar o modelo constitutivo baseado na equação de evolução cinemática de s . Portanto, considera-se a aproximação de orientação permanente das fibras na direção do escoamento. Nesse caso,

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (10)$$

A solução dada pelo modelo descrito acima é uma aproximação razoável para fibras de alta razão de aspecto, ($\ell \gg b$) onde os experimentos mostram que nessas condições, fibras tendem a se orientar localmente na direção do escoamento. Esta aproximação também é confirmada pelas observações de Stover, Koch & Cohen (1992) e nas simulações numéricas de Keiller e Hinch (1991), que mostram que essa orientação das fibras é sempre uma solução permanente.

O modelamento constitutivo descrito aqui também pode ser usado para caracterizar o efeito de aditivos, como polímeros de alto peso molecular M . Neste caso, o tempo de relaxação τ das macro-moléculas seria maior que o tempo característico do escoamento, já que $\tau \sim M^{\frac{3}{2}}$ e M é $O(10^6 \text{g/mol})$. Os manômeros dessas moléculas permaneceriam estendidos e desde que não sofram degradação apreciável, se comportariam de forma similar ao de uma fibra com grande razão de aspecto.

A forma adimensionalizada da equação constitutiva para o tensor de tensões médio Σ do escoamento pode

ser expressa como:

$$\Sigma_f = -PI + 2\frac{1}{Re} \left[\mathbf{D} + \frac{\mu_e}{\mu} f(\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{u} \right] \quad (11)$$

em que $f(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{D}:\mathbf{u}\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^4}$ e $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|$, P é o campo de pressão médio do escoamento e Re é o número de Reynolds.

A constante material μ_e/μ , pode ser determinada usando-se a aproximação da teoria de corpos delgados aplicado por Batchelor (1970, 1971), baseada na representação de uma fibra em termos de singularidade distribuídas ao longo do seu eixo principal. Batchelor determinou que:

$$\frac{\mu_e}{\mu} = \frac{4\pi n \ell^3}{3 \ln(\ell/b)} \quad (12)$$

A expressão para a viscosidade extensional dada em (12) mostra que numa suspensão de fibras existe um efeito pronunciado, proporcional a $n\ell^3$. Esse efeito é mais intenso que qualquer outro proporcional a concentração em volume das fibras, $\phi = 2n\ell b^2$, quando $\frac{b}{\ell} \ll 1$. A princípio pode-se argumentar que o efeito de fibras rígidas numa suspensão diluída $n\ell^3 \ll 1$ seria equivalente a uma viscosidade efetiva de uma suspensão de esferas rígidas com diâmetro igual ao comprimento da fibra, $\mu_{efetivo} = \mu(1 + C\phi)$, e $C = \frac{1}{\ln(\ell/a)}$. Este resultado anterior explica qualitativamente como é possível uma pequena concentração de fibras produzir um efeito significativo em escoamentos turbulentos, reduzindo consideravelmente a diferença de pressão. A expressão da viscosidade extensional proposta por Batchelor (1971), é válida apenas em regimes diluídos, ou seja, quando $n\ell^3 \ll 1$. Resultados experimentais, mostram que uma expressão similar pode ser aplicada para regimes semi-diluídos ($\phi \ll 1 \ll n\ell^3$) bastando trocar $\ln(\ell/a)$ por $\ln(1/\sqrt{\phi})$, tal que (Gyr et al., 1995):

$$\frac{\mu_e}{\mu} = \frac{4\pi n \ell^3}{3 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\phi}}\right)} \quad (13)$$

2.4. Aplicação do Modelo

Nesta seção considera-se uma primeira extensão da formulação bem conhecida de Kármán-Prandtl, (e.g. Pao 1966) para escoamentos turbulentos em tubos de seção circular na presença de uma baixa concentração de fibras com altos razões de aspecto. Considerando-se escoamento isotérmico, axi-simétrico, estatisticamente permanente e ergódico e Usando o modelo constitutivo introduzido em (8) a equação diferencial de Kármán-Prandtl pode ser reescrita como:

$$\tau_w = \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu} \frac{1}{Re} f(\bar{\mathbf{u}}) \right) \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (14)$$

em que τ_w é a tensão de cisalhamento na parede do tubo.

2.4.1. Distribuição de Velocidade

Baseando-se em análise de escala assume-se, inicialmente, que $f(\bar{\mathbf{u}})$ depende fracamente de $\bar{\mathbf{u}}$ e com isso a equação (14) pode ser integrada analiticamente. Aplicando-se as condições de contorno $y = r_0$ e $\bar{u} = \bar{u}_{max}$ obtém-se:

$$\frac{\bar{u}}{(\tau_w/\rho)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\bar{u}_{max}}{(\tau_w/\rho)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\kappa(1-\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \ln r_0 + \frac{1}{\kappa(1-\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \ln y \quad (15)$$

em que $\epsilon = C \frac{\mu_e}{\mu} \frac{1}{Re}$, contém uma constante de calibração do modelo, C , que poderá ser avaliada empiricamente por meio de ensaios experimentais. Nessa formulação propõe que $C=O(1)$.

Analisando a equação (15) pode-se concluir que $\epsilon < 1$, por meio de uma expansão binomial $O(\epsilon^2)$ a equação é, então, reescrita na forma,

$$\frac{\bar{u}}{(\tau_w/\rho)^{\frac{1}{2}}} = 5.5 - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 \right) \ln r_0 + \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 \right) \ln y \quad (16)$$

A fig.(2) mostra que a aproximação assintótica $O(\epsilon^2)$ predita pela presente teoria, para $\epsilon \cong 0,3$, resulta numa aproximação com um erro menor do que 2%.

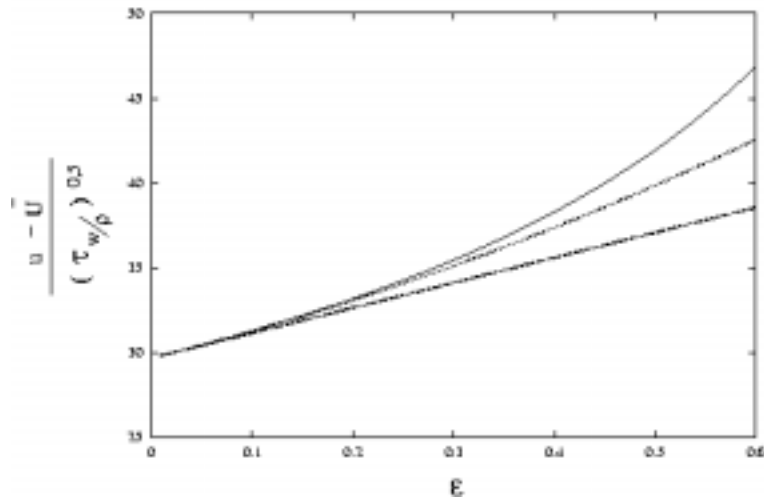


Figura 2: Comparação do modelo da aproximação assintótica de $O(\epsilon)$, representada pela linha tracejada; $O(\epsilon^2)$, representada pela linha pontilhada e a curva cheia representa o modelo completo sem usar série binomial.

2.4.2. Fator de Atrito

A seguir determina-se uma expressão para o fator de atrito do escoamento. Por definição, a velocidade média, \bar{U} , em um tubo de seção circular pode ser calculada da seguinte forma:

$$\bar{U} = \frac{\int_0^{r_0} \bar{u} 2\pi(r_0 - y) dy}{\pi r_0^2} \tag{17}$$

desde que $r = r_0 - y$ e $dr = -dy$.

Substituindo a equação (16) em (17) e integrando, obtém-se,

$$\frac{\bar{U}}{(\tau_w/\rho)^{\frac{1}{2}}} = 4.25 + 2.5 \left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 \right) \left(-\frac{5}{2} + \ln r_0 \right) \tag{18}$$

O fator de atrito para escoamentos turbulentos totalmente desenvolvido em tubos hidraulicamente lisos é dado por

$$\frac{1}{f^{\frac{1}{2}}} = \frac{\bar{U}}{(\tau_w/\rho)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{19}$$

Agora substituindo (18) em (19) determina-se uma expressão para o fator de atrito em termos dos parâmetros das fibras no escoamento.

$$\frac{1}{f^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[4.25 + 2.5 \left(\frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 \right) \left(-\frac{5}{2} + \ln r_0 \right) \right] \tag{20}$$

Para quantificar a redução de arrasto no escoamento, define-se o fator de redução de arrasto como,

$$frd(\%) = \left(1 - \frac{f_s}{f} \right) 100 \tag{21}$$

em que f_s é o fator de atrito do fluido puro e f o fator de atrito da solução (água + aditivos).

3. Resultados

Para um número de Reynolds 10^4 e uma concentração de fibras de 3%, a Fig. (3) mostra o efeito das fibras no perfil de velocidade do escoamento. Observa-se que com o adicionamento de fibras ao escoamento, a área de contato do perfil com a parede do tubo diminui, mostrando perfis menos difusionais. Conseqüentemente a estrutura de transporte de quantidade de movimento na camada limite turbulenta pode ser alterado significativamente. Para o mesmo número de Reynolds, a Fig. (4) mostra o fator de atrito em função da concentração de fibras com diferentes razões de aspecto. As linhas horizontais inferior e superior correspondem respectivamente a Teoria de Kármán-Prandtl ($\phi = 0$) e a solução assintótica de Virk para a máxima redução de arrasto possível devido a presença dos aditivos. O resultado indica que a eficiência do transporte de quantidade de movimento médio por flutuações turbulentas é alterado devido uma tensão extra produzida no escoamento em consequência da orientação das fibras. Isto não significa uma re-laminarização do escoamento, mas uma diminuição de intensidade da tensão cisalhante turbulenta $-\rho < u'v' >$ nas regiões de parede do escoamento.

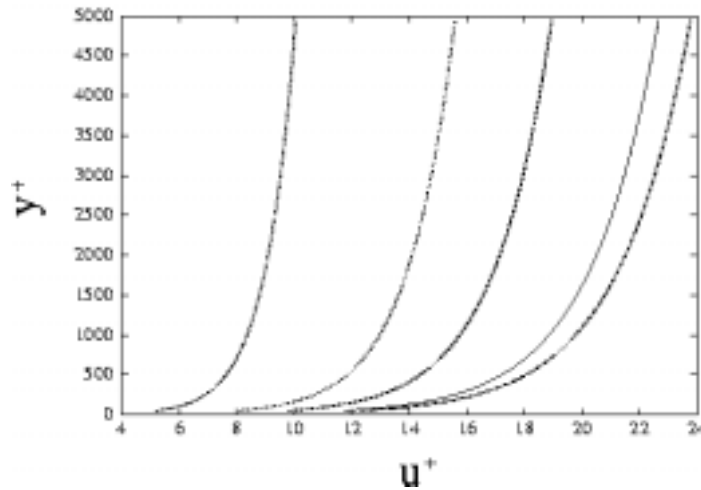


Figura 3: Perfis de velocidade adimensionais em função da distância transversal adimensional para diferentes razões de aspecto de fibras, $\phi = 3\%$, $Re = 10^4$. A linha traço-ponto para $\phi=0$; a linha cheia $l/b = 200$; a linha tracejada $l/b = 400$; a linha pontilhada mais grossa $l/b = 500$ e a linha pontilhada $l/b = 600$.

A tabela abaixo mostra um sumário dos valores aproximados preditos pela presente teoria.

Tabela 1. Resultados aproximados obtidos por meio do modelo assintótico.

Razão de Aspecto	frd
400	22%
600	45%
800	65%

4. Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido uma primeira análise com base em expansão assintótica para se investigar o efeito da orientação de fibras no fenômeno de redução de arrasto. A presente análise mostrou que para uma pequena concentração de fibras com grandes razões de aspecto a eficiência do transporte de quantidade de movimento por flutuações turbulentas pode ser drasticamente reduzida, proporcionando redução do fator de fricção de até 80%.

Os valores dos fatores de atrito estimados aqui encontram-se entre os dois limites especificados acima. A presente análise prediz resultados de redução de arrasto em proporções realísticas como observadas em experimentos.

Os resultados do trabalho fornecem suportes para se arguir que o principal mecanismo físico responsável pelo fenômeno de redução de arrasto deve estar intimamente relacionado com a anisotropia de tensões produzida no escoamento devido a orientação das fibras, em direções preferenciais no escoamento. Efeito este, que pode ser equivalente aquele produzido por uma configuração de macromoléculas poliméricas de grandes tempos de relaxação e

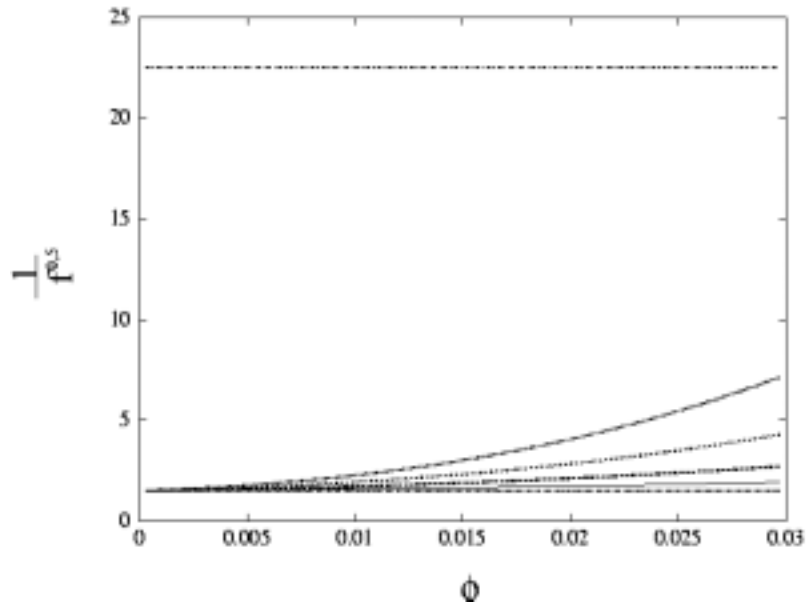


Figura 4: Fator de atrito em função da concentração para diferentes razões de aspecto. As curvas horizontais inferior e superior refere-se a Teoria de Kármán-Prandtl e a de máxima redução de Virk, respectivamente. A linha cheia representa a influência das fibras de $l/b = 400$; a tracejada $l/b = 600$; a pontilhada mais grossa $l/b = 800$ e a pontilhada $l/b = 1000$.

grandes razões de aspecto totalmente alongadas, quando sujeita a um campo de deformação em um escoamento turbulento.

Uma extensão do modelo será proposto em estudos posteriores para se examinar a questão do papel das interações hidrodinâmicas (entre aditivos) na re-orientação dos aditivos.

Experimentos em laboratório estão sendo realizados visando validar a análise assintótica desenvolvida e calibrar o modelo.

Referências

- Hinch, E.J. & Leal, L.G., (1976), Constitutive equations in suspension mechanics. Part 2 Approximate forms for suspension of rigid particles effect by Brownian rotations, *Journal of Fluid Mech*, vol. 76 part 1, pp 187 - 208
- Landhal, M.T., (1972), Drag Reduction by polymer additive. Proc. 13th JUTAM Congr. (ed. E. Becher & G.R. Mikhai 100). Springli
- Hinch, E.J., (1979), *The Mechanics of Fluid Suspension In Theoretical Rheology* edited by J.F Hudson, J.R.A Peorson, K. Walters (Applied Science Publishes), p. 206
- Den Toonder J.M.J., Hulsen M.A., Kuiken G.D.C. & Nieuwstadt F.t.M., (1997), Drag reduction by polymer additives in a turbulent pipe flow: numerical and laboratory experiments, *Journal of Fluid Mechanic*, **337**, p. 193
- Lumley, J.L., (1969), Drag reduction by additives. *Ann. Rev. Fluid Mechanic*, **1**, 367
- Einstein, A., (1956), *Investigations on the theory of the Brownian movement*. *Dover*, New York
- Gyr, A & Bewersdorff, H.W., (1995), *Drag Reduction of Turbulent Flow by Additives*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 1-13
- Hinch, E.J., (1977), Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows. *Phys. of Fluids*, **20**, s22
- Keller, R. & Hinch, E.J., (1991), Corner flow of a suspension of rigid rods. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **40**, 323
- Landau, L.D., & Lifshitz, E.M., (1986), *Fluid mechanics*. Pergamon, Oxford.
- Sureshkumar, R., Beris, A. & Cohen, M.T., (1992), Observations of fibre orientation in simple shear flow of semi-dilute suspensions, *Journal of Fluid Mechanics*, **238**, pp. 277.
- Sureshkumar, R. & Beris, A., (1997), Direct numerical simulation of the turbulent channel flow of a polymer solution, *Phys. Fluids*, **9**(3), p. 1-13
- Toms, B.A., (1948), Some observations of the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers. North Holland, Amsterdam, Proc. 1 st Inter. Congr. On Rheology **2**, 135.
- Batchelor, G.K., (1971), The stress generated in a non-dilute suspension of elongated by pure straining motion, *Journal of Fluid Mechanics*, **46**, pp. 813.
- Batchelor, G.K., (1970), Slender-body theory for particle of arbitrary cross section in Stokes flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **44**, pp. 419
- Bark, F.H., Hinch, E.J. & Landhal, M.t., (1975), Drag Reduction in Turbulent Flow due to Additives, *Journal of Fluid Mechanics*, **68**, pp. 129.
- Almeida, B.B., Tavares, S.M. & Cunha, F.R. (1997), Relatório interno do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, p. 1-107
- Cunha, F.R., (1995) Hydrodynamic dispersion in suspension, Ph.D Thesis University of Cambridge
- Shaqfeh, E.S.G & Frederickson, G.H., (1990), The hydrodynamic stress in a suspension of rods, *Phys. Fluids*, **2**, p. 7-24
- Azaiez J., (2000) Linear stability of free shear flows of fibre suspensions, *Journal of Fluid Mechanics*, **404**, p. 179-209
- Virk, P.S., (1975) Drag reduction fundamentals. *AIChE* **21**, p. 625-656
- Pao, R.H., (1966), *A first course in fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Investigation of Drag Reduction Using Fibers in Turbulent Flows: Theoretical Development

Marcelo Andreotti

The University of Brasília - UnB, Department of Mechanical Engineering - FT
marcelo-andreotti@bol.com.br

Francisco Ricardo da Cunha

The University of Brasília - UnB, Department of Mechanical Engineering - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brazil
frcunha@unb.br

Aldo João de Sousa

The University of Brasília - UnB, Department of Mechanical Engineering - FT
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 - Brasília, DF, Brazil
aldo@unb.br

Abstract. *In this work is accomplished a preliminary study about drag reduction in turbulent flow. This effect of decreasing the friction factor of the flow, can be obtained by the addition of fibers that cause a viscosity stress anisotropy, decreasing the efficiency of transport of momentum by turbulent fluctuation. This analysis is done basing in a non-linear constitutive model which takes in consideration the extra deformation rate of the flow in the direction of fibers orientation. The model is applied on the development of an asymptotic analysis of Kármán-Prandtl theory with the objective to investigate the first fiber effect on the flow. The results obtained by this analytic show that for a long fibers concentration of 3%, one obtains a drag reduction of 80%*

Keywords. *fiber suspension, turbulent flow, drag reduction*

WIND ENERGY PARK LOCATION BY AIR FLOW SIMULATION AROUND HILLS

Borges, A. D.S.

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – Departamento de Engenharias – 5000 Vila Real – Portugal
amadeub@utad.pt

Abel Rouboa

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – Departamento de Engenharias – 5000 Vila Real – Portugal
arouboa@utad.pt

Abstract. *The energy power production must to be ecologic and safe. Wind energy constitutes one of the most ecologic and safe solutions to the energy production problem. In order to allocate the towers of the wind Parks, we have to choose the optimum place for a good yield (high normal wind velocity and low circulation). The Trás-os-Montes region is known by hills/valleys and blast of wind in South-west of Europe. The main objectives of this study allow knowledge of the Wind Power potentiality in Portugal.*

In this paper we will present a numerical model based on modified $k\epsilon$ model and the solution method used by ANSYS. The airflow around hills will be applied in several cases; slope of hills from 15° to 35° . We will show the evolution of the velocities on several zones around a hill's top. The location of the high velocity will be analysed in the presented cases.

This paper contain three parts, we start by showing up the mathematical model governing by a Reynolds average system equations. Then, we present the solution method, based on Finite elements using the TDMA solver. Then, we show several applications (flow around hill with varied slopes). We conclude this paper by analysing the important results and perspectives of this work.

Keywords. *Navier Stokes, $k\epsilon$ model, Incompressible fluid, Finite Element Method, TDMA solver*

1. Introduction

Actually, wind towers may be the most environment safe energy production. This energy represent less than 1% of total production in Europe, this percentage increase with the environment preoccupation. Europe countries exemplifies wind energy's rapid growth, for instance the Spanish wind industry increased from 72MW of installed capacity in 1994 to 1800MW of installed capacity by the end of 1999. In order to have a good yield the Wind Energy Towers Park should be located in the higher horizontal velocity area. For this, we have to make global and local studies of possible parks. The global study can be made by an atmospheric cartography. A local study can be target in two points: a simulation approach and/or an experimental one.

The simulation study needs an appropriate CFD (Computational Fluid Dynamics), Gibson (1978), Mellor (1966), Davidson (1991). This code allows to have all main parameters responsible for good yield of Wind Energy production. A fluid flow simulation needs an existence solution of the governing differential system equations as $k\epsilon$ turbulence model. A necessary condition for this existence on a bounded domain Ω is that an appropriate set of boundary conditions is imposed on a $d\Omega$.

We will consider rather different situations occurring when we have at disposal only a limited data set of boundary conditions *a priori* insufficient to close the differential system equations. This situation occurs in the simulation of the fluid flow in complex geometries.

A multiple mathematical model can be conceived as a $k\epsilon$ turbulence model. This model reveals more efficiency in turbulence prediction. This model is simpler to write, but conflict exists in a boundary condition treatment. *FLOTRAN* model of *ANSYS* resolve a modified $k\epsilon$ model. The *ANSYS* models don't show any conflict with a complex geometry and boundary conditions.

In the present study, we apply the modified $k\epsilon$ model of *FLOTRAN* (*ANSYS*), this approach reveal efficiency in the outlet flow around fixed structures.

To examine the main parameters effects of the high horizontal velocity location, modified $k\epsilon$ model as been applied to several hills' slope. The main factors influencing flow over hills were identified and the optimum tower's location was studied by measuring horizontal velocities as a function of altitude and hills' abscises. In particular, the horizontal velocities and their location that depends on input boundary conditions, were studied. For the later, a simple boundary condition model can be used for CFD on complex geometries.

According to the objectives, the present study is detailed in the following sections. The governing equations of modified $k\epsilon$ model and the solution method are presented in section 2. The position of the problem, the numerical tests of the turbulence flow around various hills' slope and principal results are discussed in section 3. Finally, in section 4, by using information resulted by *FLOTRAN/ANSYS* code, the Wind Towers location, in order to have an optimum performance, are evaluated.

2. Mathematical model and solution method

In this section we show the governing system equations based on the $k-\varepsilon$ model, then we present the solution method using the *TDMA* (Tri-Diagonal Matrix Algorithms) solver; the use method of the fluid flow code *FLOTRAN* of *ANSYS*.

2.1. Mathematical model

It is usually stated that a system equations representing turbulence models, as $k-\varepsilon$, even when including a low Reynolds modelling, Guézengar (1997), Rouboa (2001), cannot predict the details of an unstudied flow such as the flow over hills and /or around structures. Here we consider the incompressible Reynolds averaged Navier-Stokes equations with the *modified* $k-\varepsilon$ model. This model was implemented in *FLOTRAN* module of *ANSYS*. According to this variables, the continuity equation, a momentum conservation equations and a $k-\varepsilon$ conservation equations, Rouboa (1999), Patankar (1980), Versteeg (1995), for an incompressible fluid in Cartesian coordinates, are writing in conservative form as:

$$\text{div}U=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + -U \cdot \nabla U + \nabla p + -\nabla \cdot \left(\nu + c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) (\nabla U + \nabla U^t) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x k}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y k}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right)}{\partial y} + \mu_t \phi - \rho \varepsilon + \frac{C_4 \beta \mu_t}{\sigma_t} \left(g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)}{\partial y} + \mu_t \frac{\varepsilon}{k} \phi - C_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} + \frac{C_1 C_\mu (1 - C_3) \beta \rho k}{\sigma_t} \left(g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{4}$$

Where k is the turbulent kinetic energy and ε is the turbulent kinetic energy dissipation ratio. V_x and V_y represent the x and y components of velocity U . μ_t is the turbulence viscosity. ρ represent a fluid density, T is the fluid temperature. x and y are respectively the horizontal and vertical coordinate. The other constants are:

Table 1. Modified $k-\varepsilon$ model constants:

Const	Standard $k-\varepsilon$	Modified $k-\varepsilon$
C1	1.44	0.43
C2	1.92	1.9
C μ	0.09	0.09
C σ	1.0	1.0
σ_y	1.3	1.2
σ_t	1.0	1.0
C3	1.0	1.0
C4	0.0	0.0
β	0.0	0.0

2.2. Resolution method:

The numerical method, used by *ANSYS*, is based on the finite elements approach. The permanent solution of the governing system equations is given at each square elements of the discretized whole domain. In order to solve the linear system *ANSYS* code adopt a *TDMA* (Tri-Diagonal Matrix Algorithms) solver. A horizontal and vertical velocities, a pressure, a turbulence kinetic energy (k) and a turbulence kinetic energy dissipation ratio are a DOF (degrees of freedom) for each element. The convergence criteria of TDMA are 10^{-5} for the two component velocities U and V , and 10^{-3} for the pressure, the turbulence kinetic k and turbulence energy dissipation ratio ε .

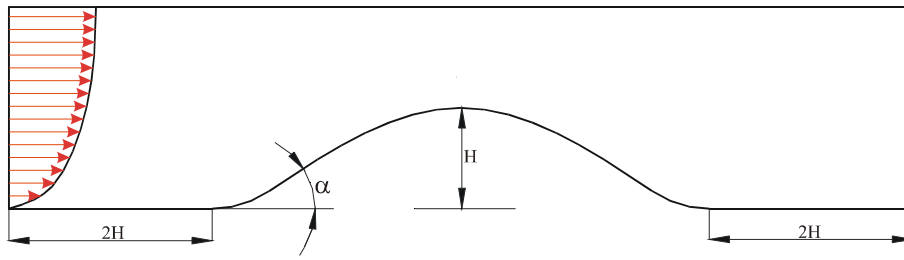


Figure 1. Problem position

3. Results and discussion

Physically, the wake flow's characteristics on the top or behind a hill, depends on the condition of approaching flow (such as the wind speed, velocity distribution) and hill's slope and altitude.

Results from three simulation applications are presented here. Flows over a hill with a slope equal to 15°, 25° and 35°. For all applications the development of the boundary layer and analysis of the velocity are presented.

3.1. Physical problem

A simple geometrical model measuring $4H + 2H/tg\alpha$ and $2H$ is used as showed in Fig. (1), where H represent altitude of the studied hill. In the middle, is located a rigid structure representing a hill. In order to represent a large part of hills of Portugal's Northeast the slope α take the values 15°, 25° and 35°.

The whole domain is meshed by square elements with four nodes. As boundary condition we have, on the input, an hyperbolic velocity where the maximum is located on the top of the domain and its value is 10m/s, on the output we have $\partial P/\partial x = 0$. On the top of this meshed domain, we adapt for an imperturbated fluid flow; a vertical component of a velocity equal to 0 ($V_y = 0$) and the pressure gradient equal to 0 too ($\partial P/\partial y = 0$). For the down side we have mirror conditions.

For each of these three computations, one meshed the studied structure with square elements. The size of these elements is 20 m. In fact, near the wall (hill structure) the elements are a parallelogram style.

The computation of each test case $\alpha=15^\circ$, $\alpha=25^\circ$ and $\alpha=35^\circ$ need respectively 40, 44 and 48 hours in term of CPU time. This difference of CPU may be explicated by the size and shape elements near the hill's structure, Sangsan (1996). We will discuss this aspect later.

3.2. Discussion of results

Figure (2) shows the instantaneous horizontal velocities around the hill for various slopes ($\alpha=15^\circ$, $\alpha=25^\circ$, $\alpha=35^\circ$). A classical stationary high and low velocity around hill is observed. The highest horizontal velocity is located around the top of hill; this zone represents approximatively a square of 200x200m. This region moves to the top as the hill's slope increase. Horizontal velocities varied from 1m/s to 12.5m/s for the case $\alpha=15^\circ$, we notice that the high velocity is located on the top of the hill. In the case of $\alpha=25^\circ$ the velocity varied from 0.5m/s to 11.4m/s, we observe that the high velocity zone move to the top of the hill comparing with the first case. The last case $\alpha=35^\circ$ the velocity varied from 0.1m/s to 12.1m/s, we remark that the high velocity zone is located far from the top of the hill.

In order to locate, with more detail, a highest horizontal velocity zone, we have to use velocities information and show by detail a velocity evolution as function of altitude y . Figure (3) shows the horizontal velocities of five column elements inside the cited zone (highest horizontal velocity zone). We note that the velocity varied from 12.35 to 12.65m/s, S1 and S2 represent the ideal area to locate a wind-tower, Fig. (4). S1 represents the top of this hill and S2 represents 20m on the right of the top, see on Fig. (3). Figure (5) shows the vertical velocities of the same zone. We observe that the vertical velocities varied between 0 and -0.2m/s. It should be noted, that for the cases of $0 < V < -0.2m/s$, velocity depends only on the horizontal component. The contribution of the vertical velocity in this case, is less than 1.6%.

Figure (6) shows the evolution of horizontal velocities as a function of altitude in the case of $\alpha=25^\circ$. This figure content five curves representing velocities as a function of altitude for y between 975m and 1100m. We are interested only for these altitudes witch may represent a large part of existing tower size. The velocity varied between 9.4m/s to 9.5m/s 20m behind the top (S2), on the top of hill (S1) the horizontal velocity decrease from 9.4 to 9.5m/s for altitude 0 to 40m on the top, then increase to 9.4 for 40m on the top to 100m. The analysis of the curves S3, S4 and S5 show two result: first the values of horizontal velocities are less than other zones (s_1 and s_2) between 8 and 9.3 m/s, the vertical velocities are important, on Fig. (7) this velocity varied between -0 to -1.4 m/s. In wind power domain, and in order to

have a high performance of towers in term of production its need low vertical velocities. In this case the vertical component of velocities varied between 0.1 and 0.4m/s which represents less than 2% of horizontal component of velocity. The contribution of the vertical component of velocity, in this case, is less than 2.2%.

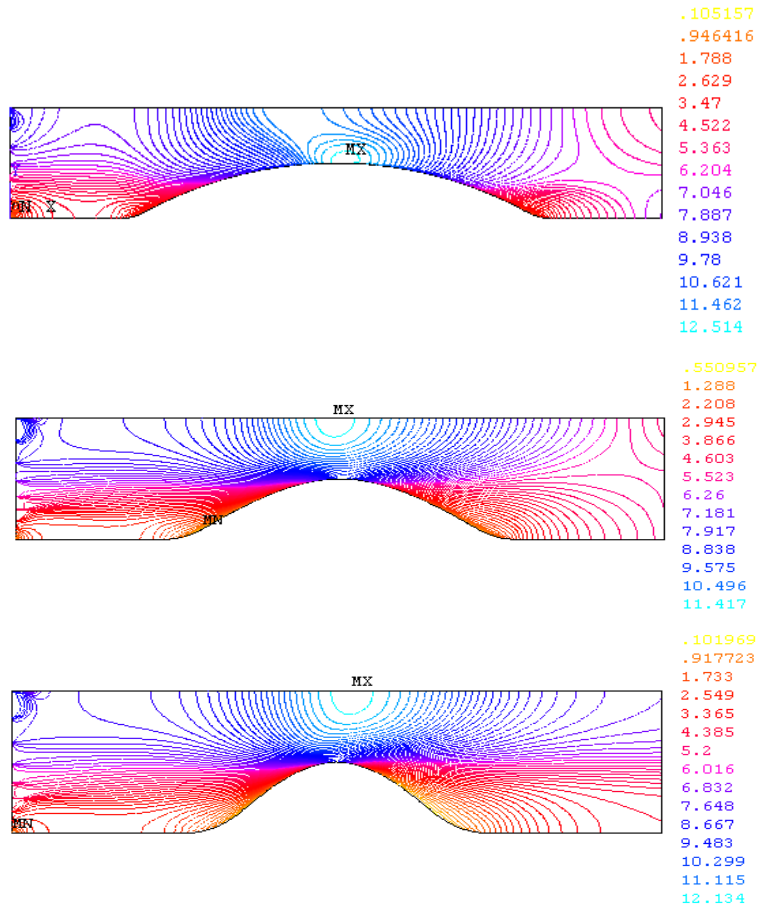


Figure 2. Horizontal velocities for $\alpha=15^\circ, 25^\circ$ and 35°

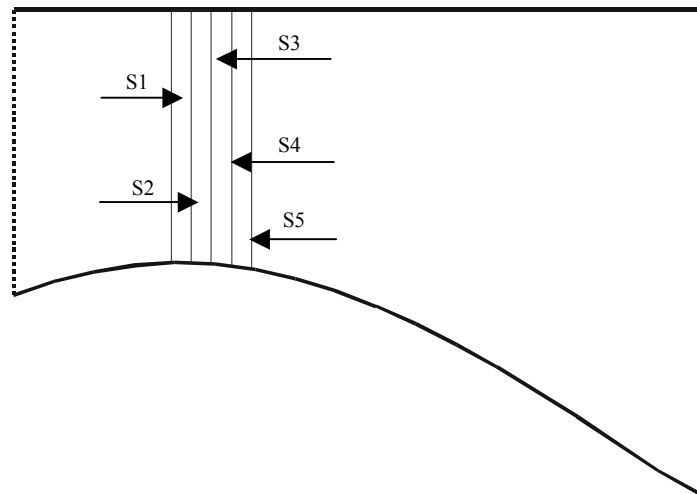


Figure 3: The important zone of high horizontal velocities

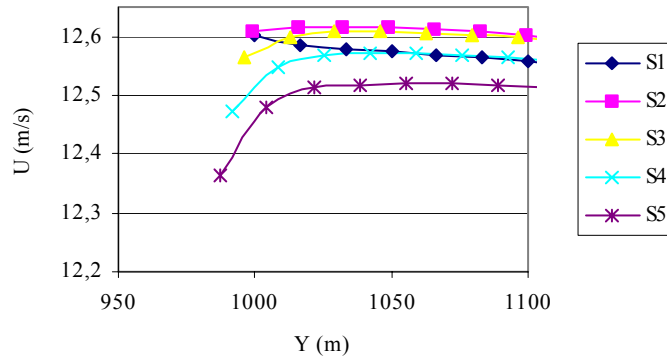


Figure 4. Horizontal velocities as a function of altitude for the case $\alpha=15^\circ$

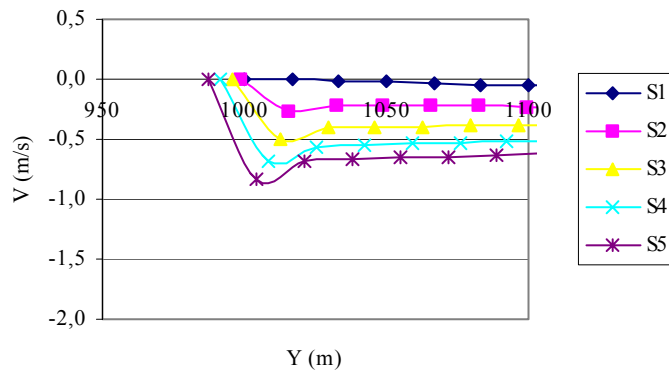


Figure 5. Vertical velocities as a function of altitude for the case $\alpha=15^\circ$

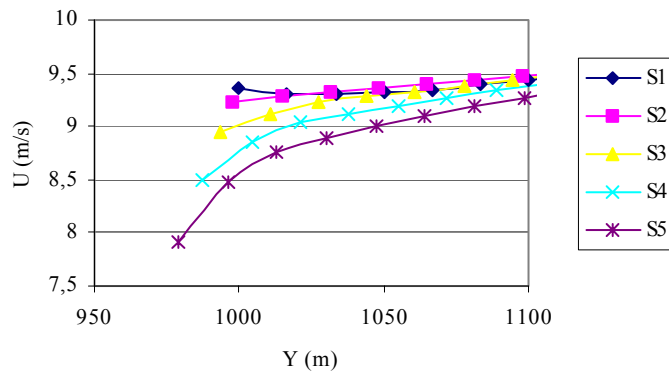


Figure 6. Horizontal velocities as a function of altitude for the case $\alpha=25^\circ$

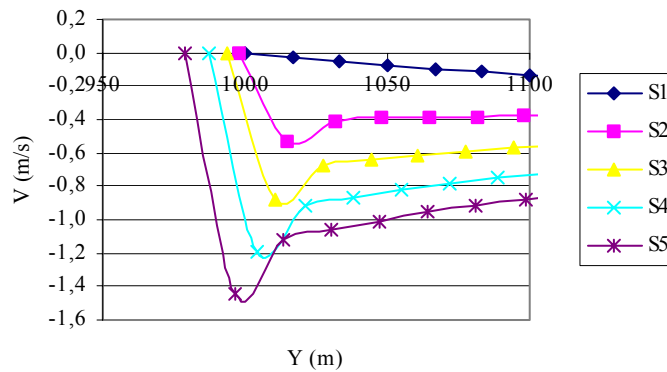


Figure 7. Vertical velocities as a function of altitude for the case $\alpha=25^\circ$

The case of hills' slope $\alpha=35^\circ$ is represented on Fig. (8). We observe that the interesting zone, in term of high velocity, is located in the top of the hill. In fact, the horizontal velocities varied between $9.3m/s$ to $9.6m/s$ for the top to $100m$ and for the top (S1). For $40m$ behind the top the velocity varied between 8.7 and $9.4m/s$. The others zones (S3, S4 and S5), where the velocity varied between 4.3 and $9.2m/s$, are not suitable zones to locate Wind Towers. On the other hand, Fig. (9) shows the vertical components of the velocity as a function of altitude. We observe that the vertical component, V_y , increase from 0 to $0.1m/s$ for the top (S1), decrease from 0 to $-0.7m/s$, then increase to $-0.2m/s$ for $20m$ behind the top (S2). For S3, S4 and S5 the vertical velocity decrease from 0 to $-1.5m/s$ and increase to $-0.4m/s$. The contribution of the vertical component of velocity, in this case, is less than 3.2% .

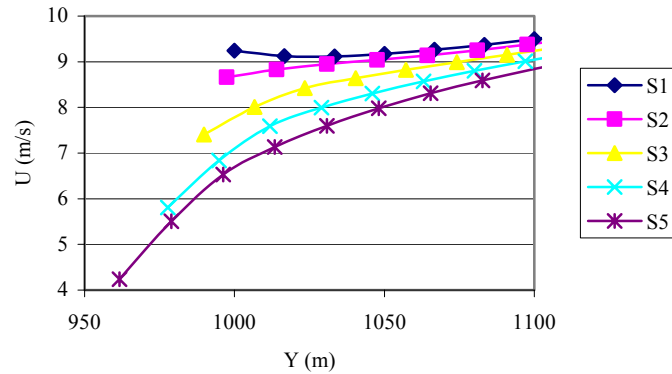


Figure 8. Horizontal velocities as a function of altitude for the case $\alpha=35^\circ$

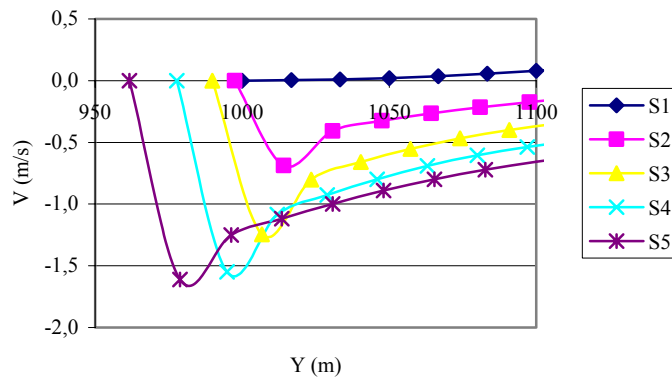


Figure 9. Vertical velocities as a function of altitude for the case $\alpha=35^\circ$

4. Conclusion

This study contributes, among other numerical tests studies; to the knowledge of physical phenomena related with the two-dimensional $k-\epsilon$ model flow. The strategy adopted in this work consists of applying modified $k-\epsilon$ turbulence model implanted in *ANSYS*, and analysing the important parameters of the flow around the hill.

According to our objectives, this work dissociates the fixed boundary conditions on the hill (the base of the domain) and the input boundary condition, on the other side of the domain. In particular, the input boundary conditions as hyperbolic function influence the value of the high velocity and its location. In fact this condition was ulterior applied as a constant ($10m/s$), the corresponding velocity results are completely different from the present case.

In this work, we presented three tests of simulation flow around hill. Each test use the same meshed domain, but different hill's slopes, $\alpha=15^\circ$, $\alpha=25^\circ$ and $\alpha=35^\circ$. The results show that the high horizontal component of velocity zone is located on the top of the hill and move up when the slope increase. In the other hand, the vertical component of velocity don't exceed $1m/s$ for the most interesting location. Analysing these results, we conclude :

- In the case of $\alpha=15^\circ$, the best location to place the Wind Tower is situated $20m$ behind a top. The horizontal component of the velocity is about $12.6m/s$, the vertical one is less than $0.5m/s$.
- In the case of $\alpha=25^\circ$, the best location to place the Wind Tower is situated $20m$ behind a top. The horizontal component of the velocity is about $9.4m/s$, the vertical one is less than $0.8m/s$.
- In the case of $\alpha=35^\circ$, the best location to place the Wind Tower is situated on the top. The horizontal component of the velocity is about $9.6m/s$, the vertical one is less than $1m/s$.

Furthermore, the Wind Tower should have an angle with the vertical axis around 1.6% for $\alpha = 15^\circ$, 2.2% for $\alpha = 25^\circ$ and 3.2% for $\alpha = 35^\circ$ in order to optimise energy production.

In the future, we project to see different approach as turbulence model wall (hill) conditions and the input boundary conditions. In fact, the presence of various hills behind and/or in front of the studied hill may influence the input conditions. Also, the three dimensional study will be interesting in order to have a global cartography of the most suitable areas to implant the Wind Energy Towers.

5. References

- A. Rouboa, P. Areal and L. Palma (1999), "Some results on a parallel version of the SIMPLE algorithm", ASME, Technical paper, Vol. 551, pp. 723-730
- A. Rouboa, F. Castro and L. Palma (submitted paper, to be published soon), "Parallisation of a block implicit algorithm for fluid flow simulations"
- Davidson L. (1991), "Calculation of the flow around a high-lift airfoil using an explicit code and an algebraic stress model", Numerical Methods in Laminar and Turbulent flow, Pinaridge Press, Vol. III, pp. 852-862
- D. Guézengar (1997), "Modélisation et simulation de la turbulence compressible dans les écoulements cisailés supersoniques", Ph.D. Thesis, Université de la Méditerranée, France
- Gibson M. M. and Launder B.E (1978), "Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 86, part 3, pp. 491-511
- H.K. Nersteeg and W. Malalasekera (1995), "An introduction to computational fluid dynamics", Eds Longman Group
- Mellor G. L. (1996), "The effects of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 24, pp. 255-274
- Sangsan Lee (1996), "Unsteady aerodynamic force prediction on a square cylinder using k- turbulence models", Journal of Wind Engineering, Vol.2, pp. 79-102
- S. V. Patankar (1986), "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill Book Company

An Experimental Study of Turbulent Stratified Flows over Hills with Large Changes in Surface Elevation.

Juliana B. R. Loureiro

Mechanical Engineering Department (DEM/EE/UFRJ)
C.P. 68503, 21945-970 – Rio de Janeiro – Brazil.
jbrloureiro@serv.com.ufrj.br

Marcio Cataldi

Mechanical Engineering Program (PEM/COPPE/UFRJ)
C.P. 68503, 21945-970 – Rio de Janeiro – Brazil.
mcataldi@serv.com.ufrj.br

Atila P. Silva Freire

Mechanical Engineering Program (PEM/COPPE/UFRJ)
C.P. 68503, 21945-970 – Rio de Janeiro – Brazil.
atila@serv.com.ufrj.br

This work studies the effects that local topographical variations have on the properties of stratified atmospheric boundary layers. Wind tunnel experiments were performed to investigate airflow over a two-dimensional hill with a steep elevation rate. The work presents local measurements of velocity and of temperature. A two-channel hot-wire system was used so that two components of the flow mean velocity and of its fluctuations were obtained outside the reverse flow region. The temperature data was obtained with the help of micro-thermocouples. All results are then compared with field data and the results of other authors. The speed up factor, i.e., the point where the flow acceleration achieves its maximum value on top of the hill surface, was measured and compared with a linear theory corrected according to the Monin-Obukhov expression.

Keywords. *Turbulence, hills, separation, stratified boundary layer.*

1. Introduction

A faithful modelling of atmospheric flows would have in any case to consider geographic variations that can modify the properties of the boundary layer in conjunction with diurnal heating cycles. The warming of terrain by daytime sunlight and the cooling by nocturnal radiation results in very different flow patterns where buoyant forces play a key role.

Unfortunately, the combined effects of terrain characteristics and flow stability give rise to a host of very complex atmospheric problems. For flat terrain, wind tunnel experiments by Meroney and Cermak(1975) and Ogawa et al.(1985) have revealed the main features of the phenomenon. For complex terrain, neutral and stably stratified, Ohba et al.(1990) and Ohya et al.(1994) have also carried wind tunnel simulations with the purpose of studying the diffusion of gas.

The real difficulty with the wind tunnel simulation of flows over a change of topography is the strong dependence of the resulting velocity field on hill geometry. As we shall see in the next section, seven possible classes of flow occur depending on values of local Froude number and other parameters such as the Monin-Obukhov length and inner layer thickness. All this, topped by the difficulties of uniformly controlling the wall temperature of the model and the unsteadiness of the meteorological conditions, make the experimental confirmation of general rules and procedures an arduous task.

The purpose of this work is to perform, in a controlled laboratory environment, the simulation of stratified atmospheric boundary layer flows over terrain with a change in topography. In this framework, the paper will shortly describe some of the design features of a wind tunnel specially constructed for the present study. A complete report on the wind tunnel is given in a companion paper by Cataldi et al.(2001).

Because many sources of air pollution are located in complex terrain, detailed and accurate information about the flow field are needed so that reasonable predictions of gas concentration can be made. A typical example is the formation of large re-circulation flow regions within valleys where atmospheric conditions prevent the diffusion of pollutants into the outer atmosphere. This paper examines problems associated with this motivation.

This work studies the effects that a hill may have on the properties of a stratified atmospheric boundary layer (SABL). Mainly, experimental aspects of the problem are investigated. All experimental simulations are carried out in a large high turbulence wind tunnel. The SABL is thickened with elliptic vortice generators; its properties are validated through global and local parameters, including the energy spectrum. Modelling hills in the wind tunnel always presents the difficult problem of obtaining a realistic reduction in scale. The alternative is to work with an aerodynamically smooth model or to increase disproportionately the surface roughness.

The hill is two-dimensional, and has a 30° maximum slope; its surface can be heated at will so that different degrees of stratification can be obtained. Indeed, a stratification section was included in the wind tunnel so as to simulate unstable or stable flow conditions. The speed up factor, i.e., the point where the flow acceleration achieves its maximum value on top of the hill surface, was measured and compared with results provided by the Monin-Obukhov expression.

The work presents local measurements of velocity and of temperature. A two-channel hot-wire system was used so that two components of the flow mean velocity and of its fluctuations were obtained outside the reverse flow region. The temperature data was obtained with a cold-wire anemometer. A flow visualisation study is also made.

The existence of a region of reverse flow adds much complexity to the problem in all aspects: theoretical and experimental. The fact that the pressure field cannot be simply approximated by the potential flow around the hill shape, but must be calculated considering the hill shape and the separation region makes it very clear that the correct assessment of the location of the separation point is a crucial step on the development of theories for the description of the velocity field.

The large-scale pressure field that develops over the hill results from the flow in the outer region of the boundary layer which in turn reacts as if the hill and the separation region formed a single obstacle. It follows that quantifying the onset and extent of separation is a necessary and fundamental step for the characterisation of the velocity field. As a matter of illustration, some authors in the past had difficulties in explaining some non-expected behaviour of the speed up factor due to uncertainties in the characterisation of the separation point.

Unfortunately, the development of a comprehensive theory for the prediction of the correct location of a separation point is a very difficult problem. In turbulent flows, the mechanism of flow separation is poorly understood so that the classical logarithmic expressions used to represent the flow in the near wall region do not find their counterpart near the separation point and in the reverse flow region. This poses severe difficulties for a numerical simulation of the flow field, for the working turbulence model must be capable of incorporating all turbulence features down to the wall.

At the present stage, the research has striven in characterising the flow in three distinct regions: in the undisturbed region upstream of the hill, on the top of the hill and in the undisturbed region downstream of the hill. Results for the reversed flow region downstream of the hill will be presented on another occasion. We have seen in previous works (see, e.g., Cruz and Silva Freire(1998, 1999)) that near to a separation point the near wall logarithmic profile ceases to be valid and that a power law takes place; this problem is very complex and hence out of the scope of this study; it will be addressed in a specific work.

2. Similarity Conditions

The flow of a fluid over surfaces that present large changes in elevation is controlled by the large-scale changes in the pressure field. The internal gravity waves generated by the hills are the key effect on the definition of the drag that will be exerted over the atmospheric boundary layer.

In statically stable conditions, the vertical oscillations of air parcels take on the Brunt-Väisälä frequency,

$$N = \left(\frac{g}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (1)$$

where $\bar{\alpha}$ stands for temperature, z for distance from the wall and g for gravity.

When oscillating air parcels are transported downwind at a mean speed, U , a wave is traced by the parcels. Taking as a characteristic length of the hill its half-width at half-height, L_h , the time an air parcel takes to traverse the hill is L_h/U . We define the Froude number as the ratio of the time during which an air parcel is displaced vertically to the time an air parcel takes to traverse the hill,

$$F_L = \frac{U}{NL_h} \quad (2)$$

A variety of flows are possible depending on the value of Froude number. For the neutral case, strong winds and neutral stability, N approaches zero so that F_h approaches infinity. In this situation, the oncoming streamlines are deflected upwind and above the hill to a distance of about three times the height of the hill. At the top of the hill the streamlines are brought together causing a speed up of the wind. A short review of neutral stability flows was presented by Loureiro et al.(2000a, 2000b) in two works where neutral flows were produced in a laboratory and compared with the theory of Hunt et al.(1988b). For further details on the neutral flows the reader is referred to these publications.

Under diabatic conditions, the effects of stability can be classified according to $F_L = U/(NL_h)$ and $F_h = U/(Nh)$; h is the height of the hill. The classification classes are (Kaimal and Finnigan(1994)):

1. Strongly stable: $0 < F_h \leq 1$
2. Moderately stable: $F_L \leq 1$; $F_h > 1$.
3. Weakly stable: $u_r/NL_h \leq 1$; $F_L > 1$; $F_h \gg 1$.
4. Weakly unstable: $1 \geq -l/L > 0$, where l is the inner layer thickness and L the upwind Monin-Obukov length.
5. Moderately unstable: $1 \geq -l/L \approx 1$.
6. Strongly unstable: $-l/L \gg 1$.

The Monin-Obukhov length is recognised by meteorologists to be the appropriate parameter to measure stability in the surface layer; it is given by:

$$L = -\frac{u_\tau^3}{k(g/\theta)(\overline{w'\theta'})_0}, \quad (3)$$

where u_τ denotes the friction velocity, k , the Von Karman constant and $(\overline{w'\theta'})_0$ the temperature flux at the wall.

For strongly stable conditions the wind blows rather around the hill than over it; a region of stagnant air may form in front of the hill resulting in a hill profile that is more streamlined. In strong stability, linear approximations are not valid anymore. To determine the amount of fluid that would flow over a hill instead of around it, Sheppard(1956) advanced some simple energy arguments. Considering the amount of kinetic energy that a fluid parcel would have to overcome the potential energy required to lift itself through the potential density gradient from its upstream height to the top of the hill he was able to find an expression for the dividing streamline, the streamline that separates those streamlines that pass around the hill from those that pass over the hill. Some authors have tried to improve Sheppard's solution (Smith(1990)). However, it has been demonstrated that the simple expression of Sheppard matches very well laboratory and field data (Snyder et al.(1985)).

For two-dimensional hills, if the flow is unable to pass over the hill it cannot pass around it. In this circumstance, the flow will be trapped below the height of the dividing streamline. Before this situation is achieved, the occurring non-linear flow patterns can be analysed through the shallow water equations for supercritical and subcritical flows; hydraulic jumps and abrupt turbulent transitions can also occur. All these aspects are discussed in Lamb and Britter(1984).

In moderately stable conditions, the winds are stronger and the natural wavelength of air parcels compare with the size of the hill. The natural resonance yields large amplitude lee waves which may result in flow re-circulation regions near the ground. Because very few experimental data are available, the behaviour of moderately stable flows is mainly appreciated by theoretical studies. The linearized inviscid equation for the mean vertical velocity together with the theory of Hunt et al.(1988b) are commonly used to calculate speedup in the inner and middle layers. When this is done for flows over a two-dimensional ridge, results show that for F_L between 2 and infinity little change is observed over the neutral conditions. With F_L increased to 0.33 and 0.5, the speedup on the hillcrest is reduced and strong wind speed maximum on the downwind side of the hill is observed.

For weak stability conditions, the winds are even stronger and the natural wavelength of air parcels is longer than the size of the hill; the flow separates at the lee of the hill creating a large bubble of re-circulating flow. The wave drag is at a maximum for the resonance state.

Under weakly stable conditions, linear theories can be used. Again, the linear theory of Hunt et al.(1988b) can be invoked provided they are changed by inserting the Monin-Obukhov diabatic corrections. The modified equations are shown (Kaimal and Finnigan(1994)) to work well for values of L down to 40 m. This corresponds to $F_L \approx 1.5$.

Weak and moderate instabilities can also have the speedup calculated through Hunt et al.'s theory (Hunt et al.(1988a,1988b)) by inserting the Monin-Obukhov corrections into the equations. The changes in speedup are much less significant for unstable flows attaining a constant value of about 0.44. Under unstable conditions the mixing of the flow tends to impose a zero shear condition on the flow which decreases the speedup value.

Strong instability conditions are met only under the very special condition of very small and negative values of the Monin-Obukhov length. With actual values of wall heat flux, this is bound to occur only at times of almost zero mean wind speed. Although this flow has been observed in nature, no data are available which provide a good account of it.

3. Experimental Set-up and Measurements

The experimental apparatus and the hill features are basically those previously described in Loureiro et al.(2000a, 2000b) in connection with neutral flow studies. However, because we are now dealing with stratified flows, considerable modifications were performed in the wind tunnel and in the hill themselves.

The experiments were carried out in the high turbulence, low speed, open return wind tunnel sited at the Laboratory of Turbulence Mechanics of the Mechanical Engineering Program (PEM/COPPE/UFRJ). An artificially thickened boundary layer was generated to simulate an atmospheric boundary layer using the vortice generators developed by Guimaraes et al. (1999) and by Barbosa et al.(2000). The thickening device consisted of equally spaced 16 mm vertical rods. In the configuration used, an array of rods that extended across the width of the wind tunnel was used. A rectangular bar located on the downstream side of the rods was also used to achieve normal turbulence structure. As the flow approached the rods, a trip was placed over the wall. An assessment of the flow properties was carried out considering the integral properties of the flow, skin-friction, mean velocity profiles in inner and outer co-ordinates and turbulence. The characteristics of the boundary layer will be shown in the next section.

The main characteristics of the wind tunnel, as presented by Cataldi et al.(2001), are:

- Circuit: open.
- Test section: 0.67 m high, 0.67 m wide and 5 m long.
- Wind speed: continuously variable from 0.5 to 3 m/s.
- Longitudinal pressure gradient: adjustable to zero by means of an adjustable ceiling.

- Turbulence intensity: 2%.
- Surface heating capacity: 5 kW/m².
- Length of wall heating section: 2 m.
- Wall temperature: variable from 21 to 100 °C.
- Number of elements used to heat the air flow: 10, individually controlled.
- Element heat capacity: 2 kW/m².
- Vortice generators: rods with 1/8" diameter and 16 mm length spaced by 10 mm. One or two trailing transversal strips were also used.

The hill is two-dimensional and similar in shape to those studied in Britter and Hunt(1981). The hill shape is given by a Witch of Agnesi curve,

$$z = H \left[1 + \left(\frac{x}{L_H} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4)$$

where H denotes the height of the hill, L_H the distance to the half-height point and x the distance from the crest.

The hill was constructed with H = 6.0 cm and L_H = 15 cm. This was a very steep hill where flow separation was expected to occur. Because this study is primarily concerned with stratified flows, the hill was constructed with an individual heating system. Inside the hill an electrical resistance was fitted which could be controlled with a thermostat. The knob of the thermostat was regulated in each run to provide a uniform surface heating in agreement with the wind tunnel floor temperature. To start the measurements in the unstable case the following procedure was adopted. First, the heat was turned on so that the wind tunnel surface was kept at a constant temperature (39 °C ± 1) all along the hill length. Next, the fan was turned on so that a mean flow velocity of 2.1 m/s was obtained.

The topographic profiles of the hills are shown in Figure 1 together with the heating system.



Figure 1. Picture of the wind tunnel and the considered hills.

The floor of the wind tunnel and the hill surface were made of aluminium.

Measurements were performed for values of the free-stream velocity of about 2.1 m/s. Longitudinal mean velocity profiles and turbulence intensity levels were measured together with mean and fluctuating temperatures through a boundary layer probe of type 55P76. The probe was connected to two anemometers, a constant temperature anemometer Dantec model 55M01/M10 and a constant current anemometer model 56C20. A Pitot tube, a reference thermocouple, a reference electronic manometer, and a computer controlled traverse gear were also used. In getting the data, 10,000 samples were considered. The mean temperature profiles were obtained through a chromel-constantan micro-thermocouple mounted on the same traverse gear system used for the hot-wire probe. An uncertainty analysis of the data was performed according to the procedure described in Kline(1985). Typically the uncertainty associated with the velocity and temperature measurements were: U = 0.0391 m/s precision, 0 bias (P=0.95); T = 0.0058 degree Celsius precision, 0 bias (P=0.99).

To obtain accurate measurements, the mean and fluctuating components of the analogic signal given by the anemometer were treated separately. Two output channels of the anemometer were used. The mean velocity profiles were calculated directly from the untreated signal of channel one. The signal given by channel two was 1 Hz high-pass filtered leaving, therefore, only the fluctuating velocity. The latter signal was then amplified with a gain controlled between 1 and 500 and shifted by an offset so as to adjust the amplitude of the signal to the range of the A/N converter. The hot-wire anemometers were calibrated in the thermal wind tunnel. The calibration procedure made use of a system where the velocity and the temperature of the income flow could be controlled independently.

For an inspection on the existence of separated and recirculating flows along the hill profile, a flow visualisation was used. The smoke was produced with glycerine and forced into a wand where it could be released anywhere in the flow.

4. Results

Before we comment on the effect of the hill over the flow, let us first evaluate the effect of the stratification on the oncoming flow. The flow global properties measured at station $x = -30$ cm are shown in Table 1. All stations are located considering as the origin of the x-direction the centerline point of the hill; y is always measured from the wall. Table 1 shows that under the effects of stratification the velocity profile becomes more “full” suffering a considerable decrease in the momentum thickness parameter. This increase in velocity in the lower portions of the flow will eventually result in an increase in the speedup factor.

Table 1: Global flow parameters.

	Stable Boundary Layer	Neutral Boundary Layer	Unstable Boundary Layer
G	7.12	8.48	7.40
u_τ (m/s)	0.110	0.082	0.085
δ (m)	0.12	0.13	0.27
n	0.21	0.27	0.20

The structure of the neutral boundary layer is shown in Figures 2 through 5. The mean velocity profiles upstream of the hill are shown to satisfy the law of the wall and the law of the wake. When plotted in linear co-ordinates the boundary layer followed a power law with an exponent $n=0.21$. Thus, our flow is typical of a rural type boundary layer.

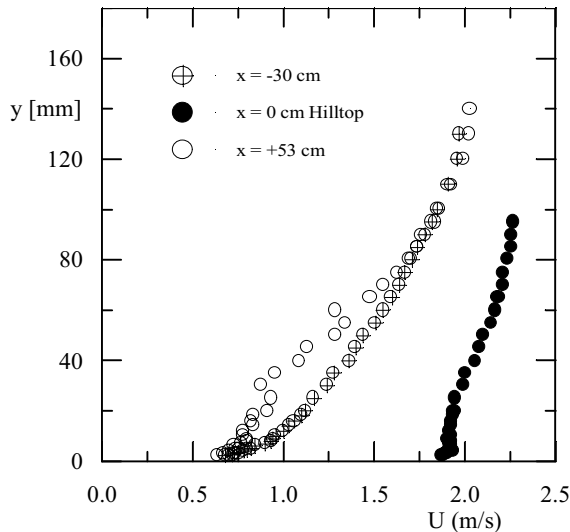


Figure 2. Mean velocity profiles in physical co-ordinates. Neutral boundary layer.

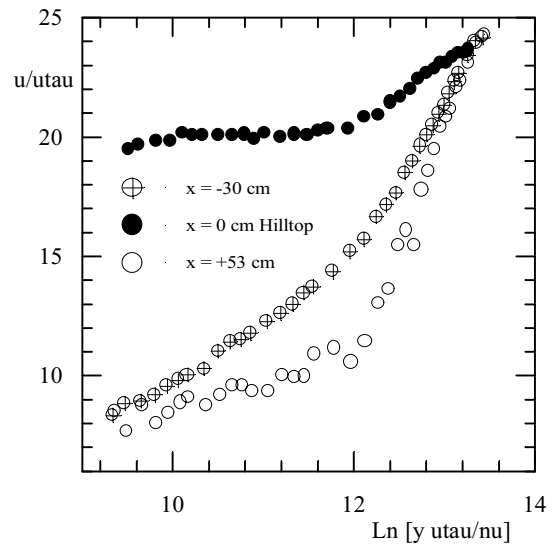


Figure 3. Mean velocity profile in inner variables. Neutral boundary layer.

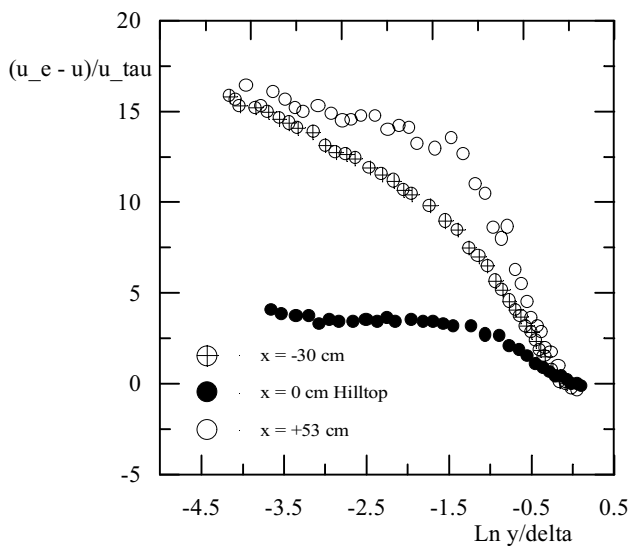


Figure 4. Mean velocity profiles in defect co-ordinates. Neutral boundary layer.

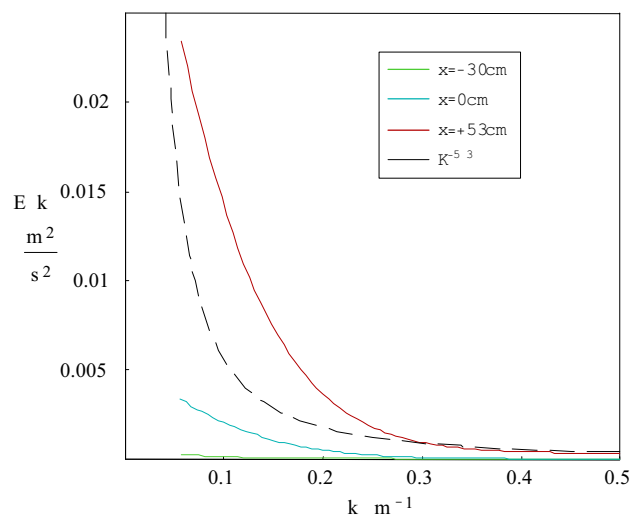


Figure 5. Turbulence energy spectra. Neutral boundary layer.

The speedup factor can be observed in the figures. According to the measurements, Δs was found to vary between 1.74 and 0.24 from wall to mean stream position. These values are always higher than those obtained through Hunt et al.(1988b)'s formulation which gives $h_m = 0.10$ m, $l = 0.019$ m and $\Delta s_{max} = 0.12$ at $l/3 = 0.0063$ m. The formulation of Hunt et al.(1988b) was developed for flows over low slope hills, so that it is no surprise to find that it fails here.

Thus, we have reached the main objective of the present work: to investigate the conditions in which the location and intensity of the maximum wind speed vary with upstream stratification. In particular, does the shape of the hill have the same effect in neutral and in stratified conditions?

This question arises in practical situations related to air pollution dispersion, the estimation of wind loads and the siting of wind turbines. The paper of Hunt et al.(1988a) addressed theoretical considerations on the problem for flow over low hills. Here we will characterise the flow over steep hills.

The results for a stably stratified flow are shown in Figures 6 through 11. The law of the wall and the law of the wake are well discriminated in Figures 7 and 8. Figure 9 shows that for most of the boundary layer there exists a positive temperature gradient across it, assuring the stability condition.

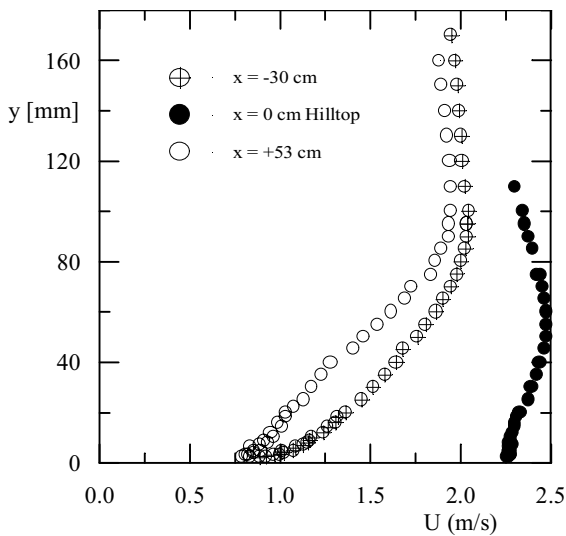


Figure 6. Mean velocity profiles in physical co-ordinates. Stable boundary layer.

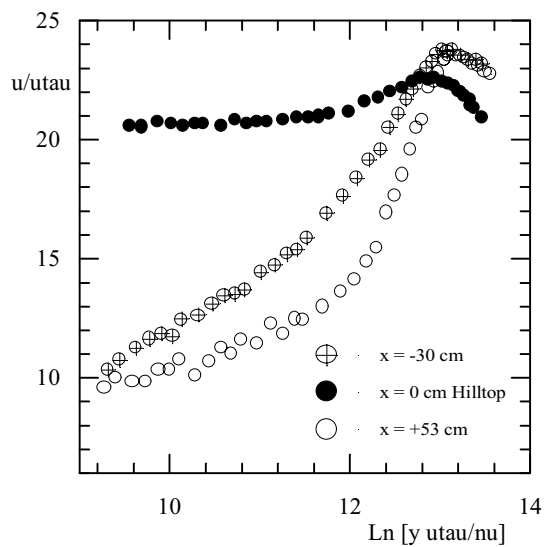


Figure 7. Mean velocity profile in inner variables. Stable boundary layer.

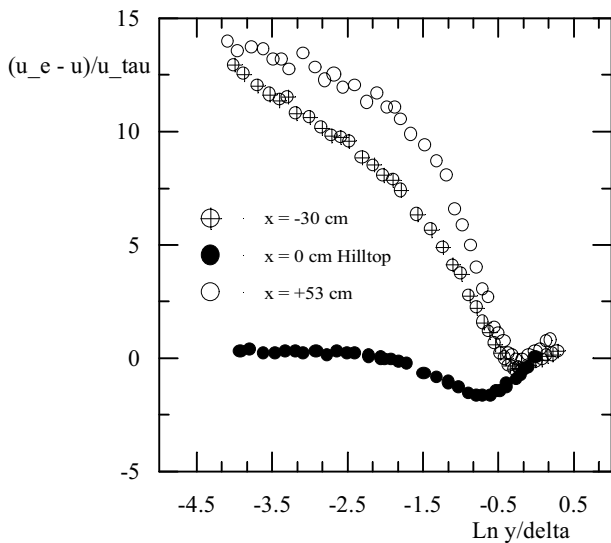


Figure 8. Mean velocity profiles in defect co-ordinates. Stable boundary layer.

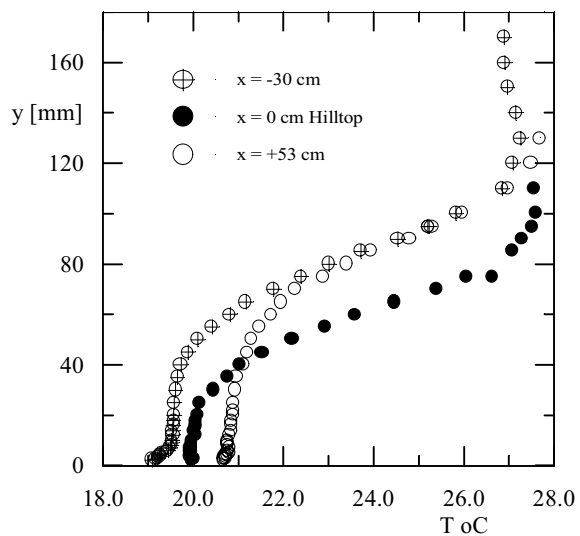


Figure 9. Mean temperature profiles in physical co-ordinates. Stable boundary layer.

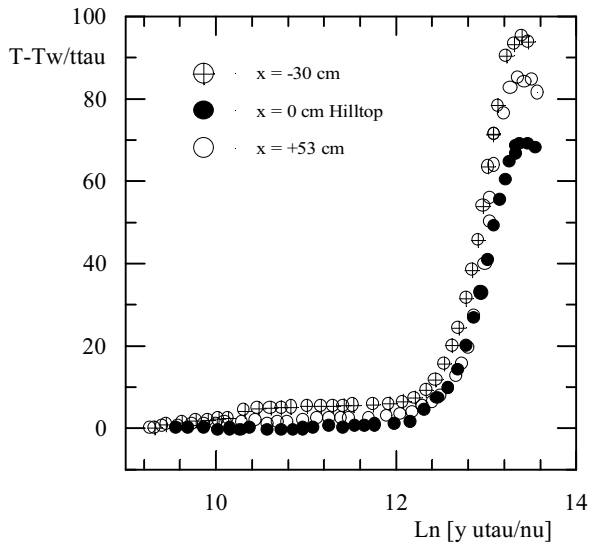


Figure 10. Mean temperature profile in inner variables. Stable boundary layer.

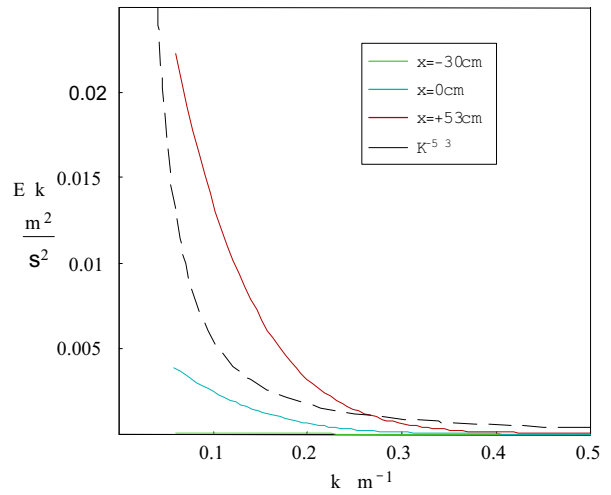


Figure 11. Turbulence energy spectra. Stable boundary layer.

The results for an unstable stratified flow are shown in Figures 12 through 17. The law of the wall and the law of the wake for the velocity field show marked departures from the stable flow case. Figure 15 shows that across the boundary layer there exists a strong negative temperature gradient, so that the flow is definitively unstable. The law of the wall for the temperature field that virtually did not exist for the stable case can be clearly seen in the far downstream station ($x = 53$ cm), Figure 16.

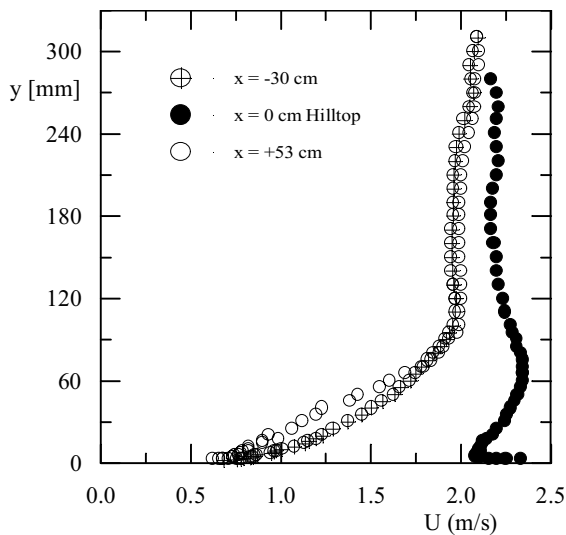


Figure 12. Mean velocity profiles in physical co-ordinates. Unstable boundary layer.

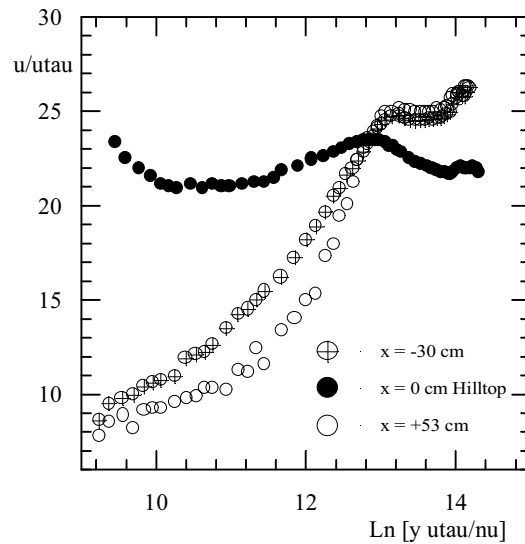


Figure 13. Mean velocity profile in inner variables. Unstable boundary layer.

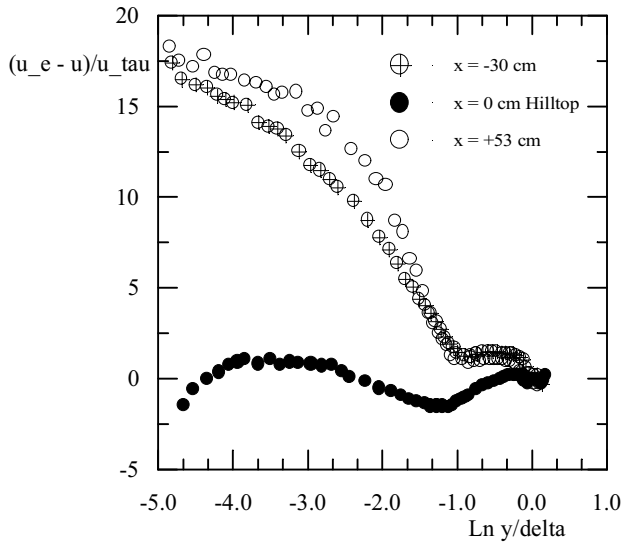


Figure 14. Mean velocity profiles in defect co-ordinates. Unstable boundary layer.

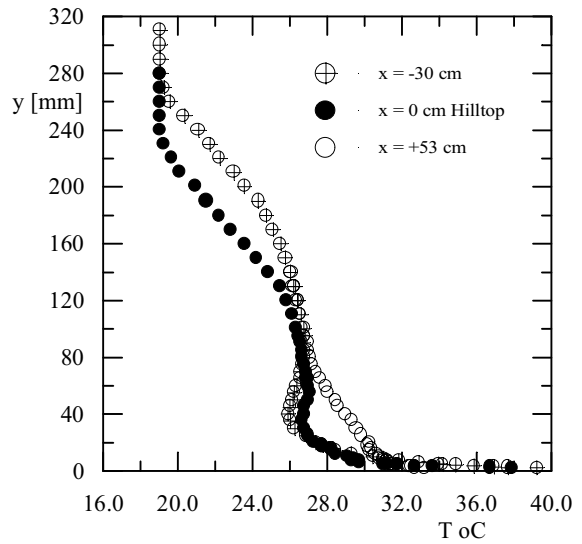


Figure 15. Mean temperature profiles in physical co-ordinates. Unstable boundary layer.

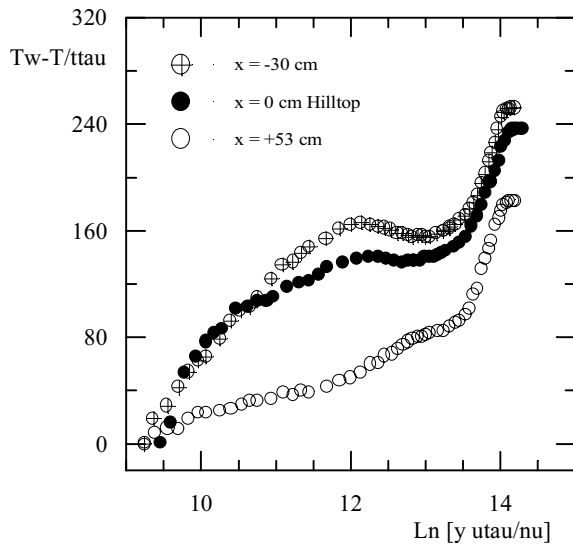


Figure 16. Mean temperature profile in inner variables. Unstable boundary layer.

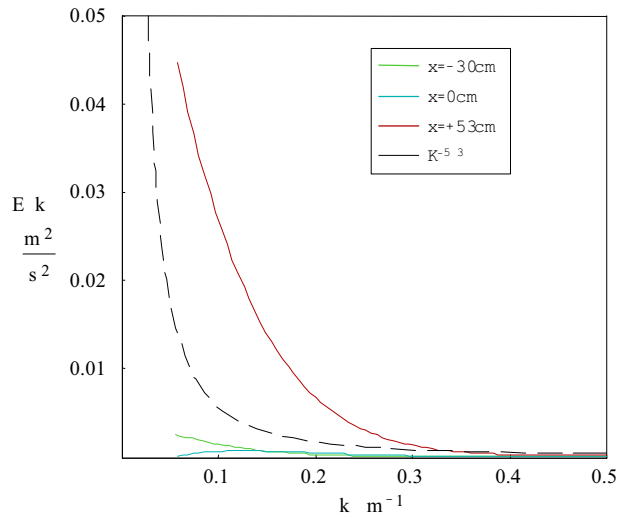


Figure 17. Turbulence energy spectra. Unstable boundary layer.

The effects of stratification on the velocity flow will be illustrated through the speed up factor and the heat up/down factor, which can be defined as

$$\Delta s = \frac{u(x, y) - u_0(y)}{u_0(y)},$$

and

$$\Delta st = \frac{T(x, y) - T_0(y)}{T_0(y)},$$

where the subscript stands for undisturbed upstream reference conditions.

Values of the speed up and the heat up/down coefficients are shown in Figures 18 and 19.

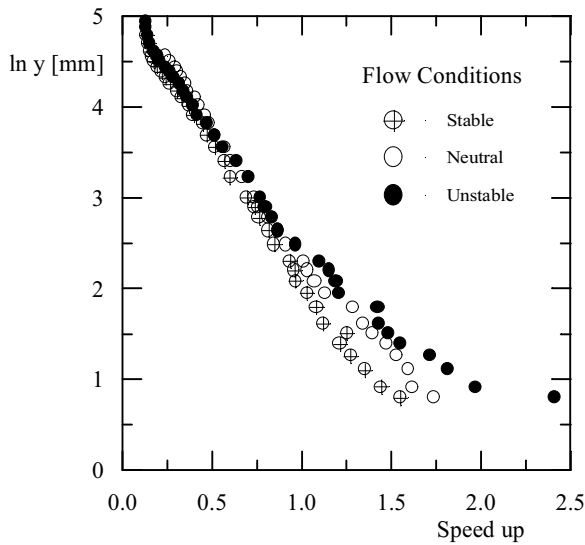


Figure 18. Speed up factor.

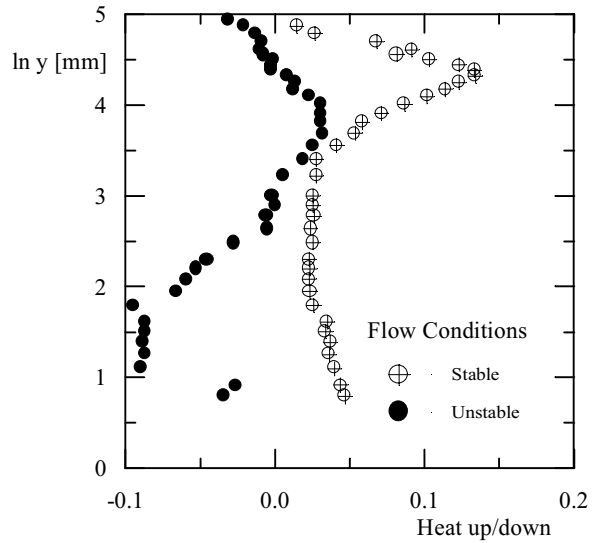


Figure 19. Heat up/down factor.

The evidence given by Figure 18 is that under stable conditions the speed up factor decreases whereas under unstable conditions it increases. The heat up/down factor is shown in Figure 19, which indicates that for stable flows it is mostly positive whereas for unstable flow it is mostly negative.

For flows over low hills, Hunt et al.(1988a) have shown that under weak stratification, stable or unstable, the turbulence and the velocity profile in the middle region are affected. The stratification, however, is too weak to affect the dynamics of the flow over the hill. When the temperature gradient in the approaching flow is large enough to characterize a moderate stratification, then the buoyancy forces greatly affect the mean flow provoking changes in the speed up factor of up to 20%. These trends were mostly observed for stable conditions with the streamlines approaching the surface of the lee slopes. In unstable conditions, the authors claim that no major change in the pattern of the perturbation flow would occur.

As illustrated by Figures 18 and 19, we have found very different results for the present experimental conditions. Both flow patterns for stable and unstable conditions clearly suffered large changes due to stratification.

5. Final Remarks

In the present work we have performed a preliminary experimental analysis of stratified flow around a steep two-dimensional hill. Vortice generators were used to generate a thick boundary layer that was made to flow over a heated hill. Flow visualization experiments were performed to characterize the wake behind the hill and to determine the point of flow-re-attachment; these were not presented here. Mean velocity and temperature profile measurements were made. Results were presented with particular emphasis on the behaviour of the speed up factor and the heat up/down factor. It was found that the stable conditions provoked a decrease in speed up factor whereas the unstable conditions provoked an increase. The findings were compared with theory of Hunt et al.(1988a) providing bad agreement; they, however, have shown that turbulent transfer has a strong influence on the near wall scalar fields and vice-versa.

The bad agreement between the present data and the theory of Hunt et al. may, perhaps, be explained by the large height of the hill compared with the boundary layer height (1:4.5); this ratio for most previous works had been taken as 1:10. The complete process of performing the experiments was also very complicated. In addition to all inherent difficulties to measure a turbulent flow we also had to deal with a very complex geometry and with local temperature variations. Because of the large scope of the present work, stable, neutral and unstable conditions, only three stations for each flow condition were presented. In the future, the authors will present much more complete reports on the phenomenon. Hills with low slope shall also be revisited in a future work.

Acknowledgements. The authors are grateful to Prof. L. J. S. Bradbury for the many helpful discussions undertaken during the course of the present research. Prof. Bradbury together with Prof. Su Jian have helped to construct the computer code that currently operates the hot-wire units. Both researchers have, in fact, had a leading role in developing the experimental facilities currently in use at COPPE/UFRJ. CNPq through grant 350183/93-7 has financially supported the work. JBRL and MC are grateful to CNPq for the award of research scholarships. APSF is also grateful to CNPq for the award of a research fellowship.

6. References

- Barbosa, P. H., Cataldi, M. and Silva Freire, A. P.; 2000, "Wind tunnel simulation of atmospheric boundary layer flows", 7th ENCIT, Porto Alegre.
- Cataldi, M., Loureiro, J. B. R., Pimentel, L. C. G. and Silva Freire, A. P.; 2001, "Design features and flow measurements in a thermally stratified wind tunnel", COBEM2001, Uberlândia.
- Cruz, D. O. A. and Silva Freire, A. P.; 1998, "On single limits and the asymptotic behaviour of separating turbulent boundary layers", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 41, No 14, pp. 2097--2111.
- Cruz, D. O. A. and Silva Freire, A. P.; 1999, "A thermal law of the wall for separating and recirculating flows", ASME International Mechanical Engineering Conference and Exposition, Nashville, USA.
- Guimarães, J. H. D., dos Santos, S. J. F., Jr., Su, J. and Silva Freire, A. P.; 1999, "Large artificially generated turbulent boundary layers for the study of atmospheric flows", COBEM99, Águas de Lindoia.
- Hunt, J. C. R., Richards, K. J. and Brighton, P. W. M.; 1988a, "Stably stratified shear flow over low hills", *Q. J. R. Meteorological Society*, vol. 114, 859--886, 1988a.
- Hunt, J. C. R., Leibovich, S. and Richards, K. J.; 1988b, "Turbulent shear flows over hills", *Q. J. R. Meteorological Society*, vol. 114, 1435--1470.
- Kaimal, J. C. and Finnigan, J. J.; 1994, "Atmospheric boundary layer flow"; Oxford University Press.
- Kline, S. J.; 1985, "The Purpose of Uncertainty Analysis", *J. Fluids Engineering*, 107, 153-160.
- Lamb, V. R. and Britter, R. E.; 1984, "Shallow flow over an isolated obstacle", *J. Fluid Mechanics*, 147, 291—313.
- Loureiro, J. B. R., Vasques, F. S., Rodrigues, D. A., Terra, R. J. and Silva Freire, A. P.; 2000, "A wind tunnel study of turbulent flow over hills. Part I: Smooth changes in surface elevation", VII Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Porto Alegre, Outubro.
- Loureiro, J. B. R., Vasques, F. S., Rodrigues, D. A., Terra, R. J. and Silva Freire, A. P.; 2000, "A wind tunnel study of turbulent flow over hills. Part II: Large changes in surface elevation", VII Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Porto Alegre, Outubro.
- Meroney, R. N. and Cermak, J. E.; 1975, "Modeling of atmospheric transport and fumigation at shoreline sites", *Boundary-layer Met.*, 9.
- Ohba, R., Ukegushi, N., Kakishima, S and Lamb, B.; 1990, "Wind tunnel experiment of gas diffusion in stably stratified flow over a complex terrain", *Atmospheric Environment*, 24A, 1987-2001.
- Ogawa, Y., Diosey, P. G., Uehara, K., and Ueda, H; 1985, "Wind tunnel observation of flow in diffusion under stable stratification", *Atmospheric Environment*, 19, 65-74.
- Ohya, Y., Nakamura, Y. and Ozono, S.; 1994, "A wind tunnel for studying density-stratified flows", *Atmospheric Environment*, 28, 1895-1900.
- Sheppard, P. A.; 1956, "Flow over mountains", *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 82, 528-529.
- Smith, R. B.; 1990, "Why can't stably stratified air rise over high ground?" In *Atmospheric Processes over Complex Terrain. Meteorological Monographs*, 35, American Meteorological Society, Boston, MA, 105-107.
- Snyder, W. H., Thompson, R. S., Eskridge, R. E., Lawson, R. E., Castro, I. P., Lee, J. T., Hunt, J. C. R. and Ogawa, Y. , 1985; "The structure of strongly stratified flow over hills: Dividing streamline concept", *J. Fluid Mechanics*, 152, 249-288.

Design Features and Flow Measurements in a Thermally Stratified Wind Tunnel

Marcio Cataldi

Mechanical Engineering Program (PEM/COPPE/UFRJ)
C.P. 68503, 21945-970 – Rio de Janeiro – Brazil.
mcataldi@serv.com.ufrj.br

Juliana B. R. Loureiro

Mechanical Engineering Department (DEM/EE/UFRJ)
C.P. 68503, 21945-970 – Rio de Janeiro – Brazil.
jbrloureiro@serv.com.ufrj.br

Luis Cláudio G. Pimentel

Department of Meteorology (IGEO/UFRJ)
Rio de Janeiro – Brazil.
pimentel@lhc.coppe.ufrj.br

Atila P. Silva Freire

Mechanical Engineering Program (PEM/COPPE/UFRJ)
C.P. 68503, 21945-970 – Rio de Janeiro – Brazil.
atila@serv.com.ufrj.br

Abstract. The objective of this work is to develop, in a wind tunnel environment, boundary layers with different states of development that simulate the structure present in the atmospheric boundary layer. The work analyses the dynamic and thermal characteristics of different types of thick, artificially generated, turbulent boundary layers. In order to achieve a large boundary layer thickness, a combination of spires and trips placed upstream of the test station is used. The ability to artificially thicken a boundary layer provides a way of expanding the operational range of a wind tunnel, without all associated difficulties of increasing the length of the test surface. Different geometrical arrangements are proposed here to produce boundary layers with thickness of up to 15cm. All dynamic parameters of the resulting boundary layers are then qualified against the following characteristics: growth, structure, equilibrium, turbulent transport of momentum and energy spectrum. The thermal boundary layer is obtained by two methods: wall surface heating and main flow heating. The wall surface heating, made through electrical resistances, can furnish an increase in wall temperature of up to 100 °C above the ambient temperature and can be applied over a 2000 mm long surface with a controlled variation of -5 °C. The main flow heating is obtained by forcing the flow pass through a curtain of copper strings whose elements can be heated individually. The main flow can be heated up to 50 °C. The whole system can then be used to produce unstable, neutral and stable boundary layers. The parameters of the thermal boundary layer are qualified through: growth, structure, equilibrium, turbulent transport of heat and energy spectrum. The paper describes in detail the experimental arrangement, including the geometry of the wind tunnel and of the instrumentation.

Keywords. *Turbulence, vorticity generators, stratified boundary layer, atmospheric flows.*

1. Introduction

The motivation to study atmospheric flows is evident to all. Because man activities are largely influenced by the air motions that develop in the first few hundred meters from ground level, it is only natural to expect this subject to have arisen interest from scholars throughout the ages.

Unfortunately, the number of parameters that influence the atmospheric boundary layer is large; these have to account for such complex features as the cycle of solar heating of the ground, mesoscale phenomena and ground orography. Indeed, no single physical modelling of the atmospheric boundary layer that renders the problem completely solvable can be found in literature. Rather, researchers have approached the problem looking for specific models that can be applied to specific classes of phenomena.

The physical modelling of atmospheric flows can resort to direct observations or to laboratory data. Observation of natural flows has been carried out by instruments attached to fixed towers or fitted to aircrafts, balloons or kites. In all cases the difficulties are many, let alone the costs involved in performing the experiments. The need for an air flow system such as a wind tunnel to simulate the atmospheric boundary layer was recognised by Smeaton in 1759. Actually, the principle of the wind tunnel had already been recognised by da Vinci as early as 1505. The advantages of a controlled laboratory study are many. However, extreme care must be taken to ensure that data obtained in wind tunnels show good similarity with corresponding atmospheric data.

The purpose of this work is to describe the facilities that were built at COPPE/UFRJ to generate boundary layers that satisfy the requirements for geometric, dynamic and thermal similarity with the atmospheric boundary layer. Data validation will be made through comparison of results obtained in the present facilities with different types of flow

taken from other laboratories and the field. A short revision of the conditions in which boundary layer similarity is achieved is also presented here.

The paper shows how the boundary layer that is formed over the floor of the wind tunnel is controlled by heating the floor and the air stream through electrical resistances. The resistances can furnish an increase in floor temperature of up to 100 °C above ambient temperature and can be applied over a 2000 mm long surface with a controlled variation of ± 5 °C. The air is heated by forcing the flow through a set of 10 electrical heating elements which can be controlled individually. The system can then be used to produce, unstable, neutral and stable boundary layers.

To create a very thick boundary layer in the wind tunnel we resort to the method developed by Barbosa et al.(2000). In their work, these authors show how a combination of spires and bars can be used to generate boundary layers as thick as 28 cm over lengths as short as 5 meters. The experimental assessment of the thickening device was carried out considering the integral properties of the flow, skin-friction, mean velocity profiles in inner and outer coordinates and turbulence.

2. Similarity Conditions

The general requirements for similarity of flows are dictated by the equations of motion - conservation of mass, momentum and energy. In the atmospheric boundary layer, the great number of dimensionless groups that have to be matched to guarantee exact similarity seem to render the problem impossible to solve since, in principle, all conditions should have to be satisfied simultaneously by the model and some are incompatible or even conflicting. Thus, only approximate similarity can be achieved in a laboratory experiment; it results that small scale experiments must be designed to represent accurately the characteristics of motion which are of most importance for the desired application.

Following the procedure of Cermak(1971) we take as the basic physical model a boundary layer developed over the floor of a wind tunnel test section in which vertical temperature gradients are controlled by heating. The effects of radiation heat transfer and phase changes of water in the atmosphere will not be accounted for in the present analysis. Also, extreme meteorological events which give rise to local singular motions are not contemplated here.

The requirements for geometric, dynamic and thermal similarity can be obtained by direct inspection of the equations of motion.

The equation of continuity remains invariant when transformed to dimensionless form provided a same characteristic length is taken for the vertical and horizontal directions.

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x U_i}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

The momentum equation can be cast as

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{1}{Ro} 2e_{ijk} \omega_j U_k = - \frac{\partial P}{\partial x_i} - R_i (DT) g_{i3} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle -u'_i u'_j \rangle, \tag{2}$$

by scaling all variables in relation to the reference quantities $L_o, U_o, \omega_o, r_o, DT_o$ and g_o . Equation 2 is the time averaged Navier-Stokes equation where all variables represent a mean value. The fluctuating variables are indicated by a dash and the brackets $\langle \rangle$ indicate an average operation.

The effects of temperature stratification on the velocity field has been accounted for by Boussinesq approximation; this limits equation 2 to situations where $\Delta T \ll T_o$ and implies that p is the departure of the mean pressure from the hydrostatic pressure for an atmosphere of density ρ_o .

Equation 2 leads to the conclusion that complete dynamic similarity depends on the following dimensionless groups:

Rossby Number;	$R_o = U_o / L_o \Omega_o,$
Reynolds Number;	$R_e = U_o L_o / \nu_o,$
Richardson Number;	$R_i = (\Delta)_o T_o (L_o / U_o^2) g_o.$

When no rotation is imposed on the wind tunnel about a vertical axis, the Rossby number for the wind tunnel will be smaller than that for the atmosphere by a factor of approximately 10^{-3} (the length scale). This is a serious limitation to laboratory simulation of atmospheric flows for we know that at geostrophic heights, when the pressure forces and the Coriolis forces reach equilibrium, wind direction varies by an angle of 10 to 30 degrees from ground level. Some author

have removed this limitation by introduction of a cross flow through porous walls of a stationary wind tunnel or by use of a large rotating flow chamber (Cermak(1971)); this has incurred in very high costs and great operational difficulties. Rossby number similarity will, hence, be excluded from the present analysis. This limits our representation of the atmospheric boundary layer to the first 150 meters from ground level. This portion of the atmospheric boundary layer is referred to in literature as the atmospheric surface layer.

The Reynolds number for the wind tunnel will also be 10^{-3} smaller than that for the atmosphere. Reynolds number similarity is therefore not achievable. This fact, however, does not add much problem to our attempt at modelling the atmosphere for we know that for flows over rough surfaces the near wall flow becomes independent of viscosity, being a function of the roughness scale. Since all natural surfaces are rough, the flow structure related to momentum transfer will be equal provided the roughness lengths are appropriately scaled down.

The bulk Richardson number that is typical of the atmosphere, $-1 < R_i < 1$, can be obtained in a wind tunnel.

Thermal similarity is studied through the energy equation.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{R_e P_r} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_i' u_j' \rangle + \frac{E_e}{R_e} \Phi \quad (3)$$

Equation 3 adds two dimensionless groups to our problem:

Prandtl Number; $P_r = \nu_0 / (\kappa_0 / \tau_0 C_{p0})$,

Eckert Number; $E_c = U_0^2 / C_{p0} (\Delta T)_0$.

If air is used as the working fluid in the wind tunnel, Prandtl number similarity is immediately achieved. The influence of Eckert number on similarity considerations is not relevant until the flow approaches the speed of sound, this requirement is therefore relaxed.

In addition to equality of the dimensionless groups, requirements assuring that the boundary conditions and the approach-flow characteristics are similar for the wind tunnel and the atmosphere must be observed.

Similarity of surface conditions is characterised by the following factors:

1. Surface roughness,
2. topographic relief,
3. surface temperature distribution.

The approach-flow is characterised by:

1. Upstream distribution of mean and turbulent velocities,
2. upstream distribution of mean and turbulent temperatures,
3. longitudinal pressure gradient.

3. Wind Tunnel Design

The size of the wind tunnel test section will determine the model length scale ratio (LSR). Many wind tunnels are designed to represent the first 500 m of the atmosphere. For these, a scale ratio of 1:500 is used so that one meter thick boundary layers will have to be produced in the laboratory. Boundary layers with this thickness require very long test sections to be achieved resulting in large experimental installation. Meteorological wind tunnels can have a working cross section as large as 7x12 meters with a total section length of 40 meters (Monash University). Typically, most tunnels present working cross sections varying from 0.5x0.5 m to 3x4 m.

Design recommendations have been advanced by several authors, Cermak(1971, 1975, 1981), Poreh et al.(1991), Meroney and Melbourne(1992), Grainger and Meroney(1994), Ohya et al.(1994) and Fedorovich et al.(1996). All authors agree that ideally an atmospheric wind tunnel should have a working section longer than 10 meters. Indeed, Cermak(1975) has shown that only after 10 meters from the test section entrance the turbulent boundary layer becomes fully developed. This is in agreement with the findings of other authors. Furthermore, Poreh et al.(1991) have shown that the minimum desired wind tunnel dimension for diffusion experiments is 10 meters.

The general features of typical atmospheric wind tunnels are shown in Table 1. To construct this table, data was taken from the following facilities: Cornell University, Ithaca, USA, Yoon et al.(1990); Colorado State University, Fluid Dynamics and Diffusion Laboratory, USA, Cermak(1975); Ecole Centrale de Lyon, Ecully, France, Reynolds(1978); Institut für Hydrologie und Wasserwirtschaft, Karlsruhe, Alemanha, Rau et al.(1991); Research Institut for Applied Mechanics, Kyushu University, Kasuga, Japan, Ohya et al.(1996); Dept. Mechanical Engineering, Monash University, Australia, Grainger and Meroney(1994); Mitsubishi Heavy Industries, Nagasaki, Japan, Ohba et al.(1990); National Institute for Environmental Studies, Ibaraki, Japan, Ogawa et al.(1981).

Table 1. Atmospheric wind tunnel features.

	Cross-Section (mxm)	Length (m)	U (m/s)	dT/dz (°C/m)	δ (m)
Cornell	0.91 x 0.91	9.14	2.8 to 4.2	Up to 55	
Colorado	1.8 x 1.8	24	0.1 to 30	Up to 114	1.4
ECL	1.2 x 1	10	1 to 20		0.4
Karlsruhe	1.5 x 1.5	10	0.5 to 8	Up to 120	0.75
Kyushu	1.5 x 1.2	13.5	0.2 to 2	Up to 125	
Monash	10 x 5	40	0.5		0.3
MHI	2.5 x 1	10	0.4 to 1.5		
NIES	3 x 2.4	24	0.2 to 10	25	1

The instrumentation used in these tunnels is reviewed in Table 2.

Table 2. Wind tunnel instrumentation.

	HWA	LDA	CWT	Thermocouples	Max. Wall Temp. (°C)	P_{wall} (kW/m ²)	P_{air} (kW/m ²)
Cornell	YES		YES				60
Colorado	YES	YES	YES	YES	1.4		
ECL	YES		YES		0.4		
Karlsruhe		YES	YES	YES	0.75	32	120
Kyushu				YES		50	264
Monash	YES		YES		0.3	9	48
MHI	YES	YES	YES	YES		7	150
NIES	YES		YES	YES	1		

The data in Tables 1 and 2 give us some criteria as to what should be the operating range of an atmospheric wind tunnel. At this point we recognise that by using vortice generators and roughness elements, a large range of integral scales can be introduced into the boundary layer. In fact, a previous study by Barbosa et al.(2000) showed how a simple combination of cylindrical rods and rectangular bars can be used to produce artificial boundary layers with thicknesses up to 25 cm in a 5 m short wind tunnel test section. The experimental assessment of the generators was carried out by considering the integral properties of the flow, skin-friction, mean velocity profiles in inner and outer co-ordinates and turbulence.

Because of the very high cost involved in designing, constructing and operating a large atmospheric wind tunnel, we have decided at COPPE/UFRJ to construct a small pilot tunnel. The tunnel, if possible, should be capable of reproducing stable, neutral and unstable flows.

After careful consideration, a wind tunnel with the following characteristics was constructed:

- Circuit: open.
- Test section: 0.67 m high, 0.67 m wide and 5 m long.
- Wind speed: continuously variable from 0.5 to 3 m/s.
- Longitudinal pressure gradient: adjustable to zero by means of an adjustable ceiling.
- Turbulence intensity: 2%.
- Surface heating capacity: 5 kW m².
- Length of wall heating section: 2 m.
- Wall temperature: variable from 21 to 100 Celsius degrees.
- Number of elements used to heat the air flow: 10.
- Element heat capacity: 2 kW.
- Vortice generators: rods with 1/8" diameter and 8 or 16 mm length spaced by 10 mm. One or two trailing transversal strips were also used.

A general view of the wind tunnel can be seen in Figure 1 together with a picture illustrating the position of the heating elements.

With all above features, we can now evaluate the operating range of the wind tunnel sited at COPPE/UFRJ. The Monin-Obuckhov characteristic length can be calculated from (Kaimal and Finnigan(1994)) according to



Figure 1. Wind tunnel configuration with heating rods detail (right).

$$L = \frac{u_{\tau}^3 \overline{\theta_v}}{kg(q' / \rho c_p)}, \tag{4}$$

where θ_v denotes the ambient temperature or the mean temperature above the boundary layer; k is von Karman's constant and q' the heat flux at the wall. All other quantities take on their classical meaning.

The estimated value of q' was 314 W/m^2 ; then, it follows that for the naturally developed boundary layer $L = 0.59 \text{ m}$, whereas for the artificially thickened boundary layer $L = -0.60 \text{ m}$.

The Richardson number was evaluated according to:

$$R_i = \frac{g(T_H - T_B)(H - B)}{T(U_H - U_B)}, \tag{5}$$

where the subscripts H and B indicate the position in which the measurements are taken: H indicates the higher position of the probe, B indicates the lower position.

A normal practice in literature is to divide the boundary layer into two portions and evaluate the Richardson number in both of them. Calculations of the Richardson number for the two-layered model of the boundary layer is presented next.

For the tunnel instrumentation, the following instruments were available: 6 constant temperature anemometer units, 2 constant current anemometer units, 1 pulsed-wire anemometer unit, a range of hot-wire probes and supports, 16 thermocouples, 5 pitot tubes, one micro-manometer, one inclined manometer with 18 tubes, an automatic traversing gear system (0.02 mm sensitivity), all necessary support equipment (oscilloscopes, microcomputers, multi-meters).

4. Wind Tunnel Performance

Results given by the wind tunnel constructed at COPPE/UFRJ will be compared here with some real flow data and data of other authors. Typical atmospheric conditions are shown in Table 3.

Table 3. Atmospheric boundary layer characteristics (Driffield Power Station, Australia).

Inversion Height, z_i :	1000 m
Mean Velocity:	4 m/s
Mean Temperature:	20 °C
Heat flux:	400 W/m ²

The global flow parameters are shown in Table 4, where the notation is classical. Thus, G stands for the Clauser factor, u_{τ} for the skin-friction velocity, δ for the boundary layer thickness, δ_2 for the displacement thickness and n for the exponent in the power law.

Table 4: Global flow parameters.

	Stable Boundary Layer		Neutral Boundary Layer		Unstable Boundary Layer	
	Natural	Artificial	Natural	Artificial	Natural	Artificial
G	5.09	6.77	7.45	7.71	6.27	8.98
u_{τ} (m/s)	0.09	0.06	0.08	0.07	0.10	0.12
δ (m)	0.05	0.11	0.05	0.14	0.05	0.11
δ_2 (m)	0.004	0.011	0.007	0.018	0.005	0.013
n	0.20	0.21	0.20	0.22	0.25	0.35

We clearly see that both the naturally and the artificially generated boundary layers are in equilibrium condition under the neutral state. All other parameters are also very much within the expected trends.

The similarity conditions for the wind tunnel and for atmospheric boundary layer flows is shown in Table 5.

Table 5. Dimensionless groups for the COPPE/UFRJ wind tunnel.

	Stable Boundary Layer		Neutral Boundary Layer		Unstable Boundary Layer	
	ABL	Wind Tunnel	ABL	Wind Tunnel	ABL	Wind Tunnel
R_e	$6.7 \cdot 10^7$	$6.7 \cdot 10^4$	$6.7 \cdot 10^7$	$6.7 \cdot 10^4$	$6.7 \cdot 10^7$	$6.7 \cdot 10^4$
R_i	0.022	0.022	0.000	0.000	-0.021	-0.025

When the boundary layer is divided into two portions, an inner layer and an outer layer, the Richardson number can be evaluated using equation (5). Table 6 compares the results found at COPPE/UFRJ with the results of other successful wind tunnel and the atmospheric boundary layer.

Table 6. Richardson number for inner and outer layers.

	Stable COPPE	Stable Grainer and Meroney (1994)	Stable ABL	Neutral COPPE	Neutral ABL	Unstable COPPE	Unstable Ogawa et al.(1984)	Unstable ABL
Layer 1, Artificial	0.001	0.004 D	0.022	0.0002	0	-0.037	-0.29	-0.021
Layer 1, Natural	0.001	0.004 D	0.022	0.0000	0	-0.036	-0.29	-0.021
Layer 2, Artificial	-	-	-	0.0000	0	-0.005	-0.29	-0.021
Layer 2, Natural	-	-	-	0.0000	0	-	-	-
Artificially thickened	0.004	0.004 D	0.022	0.0001	0	-0.027	-0.29	-0.021
Naturally thickened	0.022	0.030 E	0.022	0.0000	0	-0.026	-0.29	-0.021

Table 7 shows the characteristic length used for the calculation of the Pasquill stability class shown in Table 7.

Table 7. Stability length.

	Stable		Unstable	
	Artificial	Natural	Artificial	Natural
Layer 1	0.020	0.020	-0.083	-0.769
Thermal Boundary Layer	0.024	0.135	-0.098	-0.032

The mean velocity profiles for naturally developed and artificially developed stable boundary layers are shown in Figure 2 in inner co-ordinates. The same velocity profiles are shown in Figures 3 and 4 in outer variables.

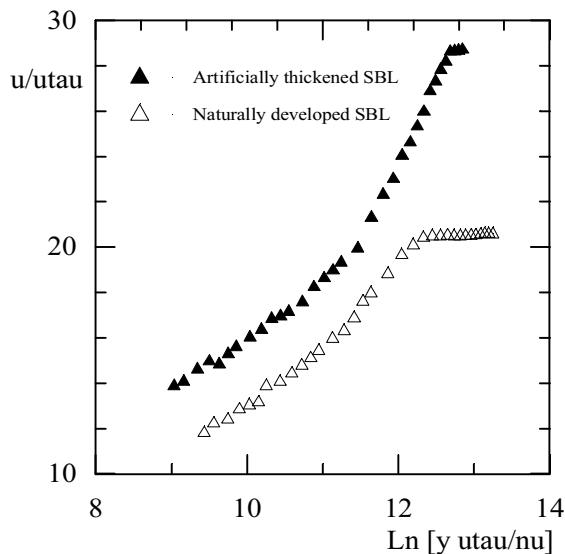


Figure 2. Mean velocity profile. Stable boundary layer.

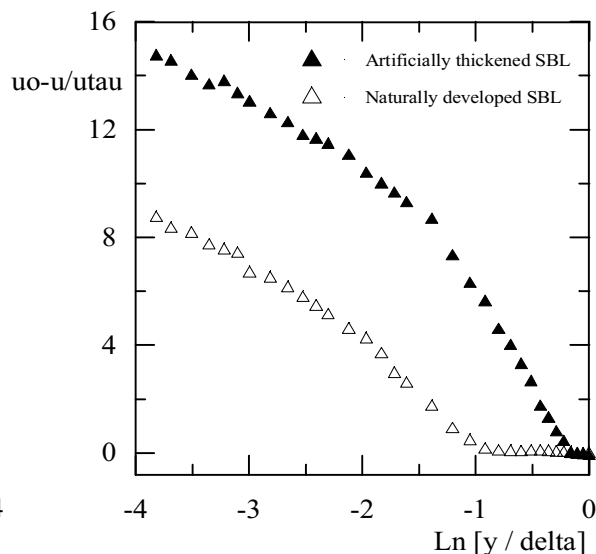


Figure 3. Mean velocity profile. Stable boundary layer.

The temperature profile is shown in Figure 5. The unstable velocity and temperature profiles are shown from Figures 6 through 9. The velocity profiles for neutral flow are shown from Figures 10 through 12. The energy turbulence spectra for the longitudinal velocity is shown in Figures 13 to 15.

The logarithmic wind profile is well characterised in all inner variable velocity profiles. The logarithmic profile is strictly valid only for the neutral boundary layer. However, we have just seen that for stable and unstable flow the departures from the logarithmic profile is very small so that close to the wall this property can be used to evaluate the fluxes from the local gradient of properties in the layer. Thus, values of the skin-friction coefficient have been estimated considering the inclination of the logarithmic portion of the velocity profile. Likewise, Stanton number has been estimated through the inclination of the temperature profile since

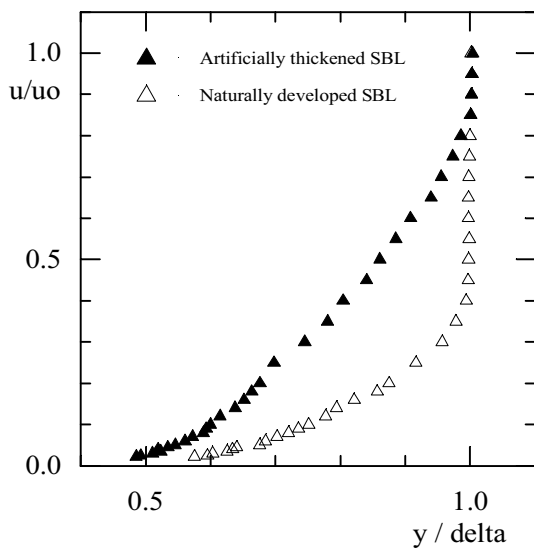


Figure 4. Mean velocity profile. Stable boundary layer.

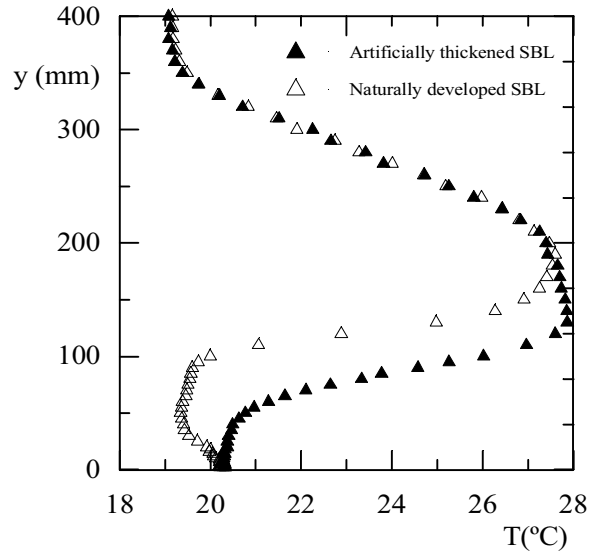


Figure 5. Mean temperature profile. Stable boundary layer.

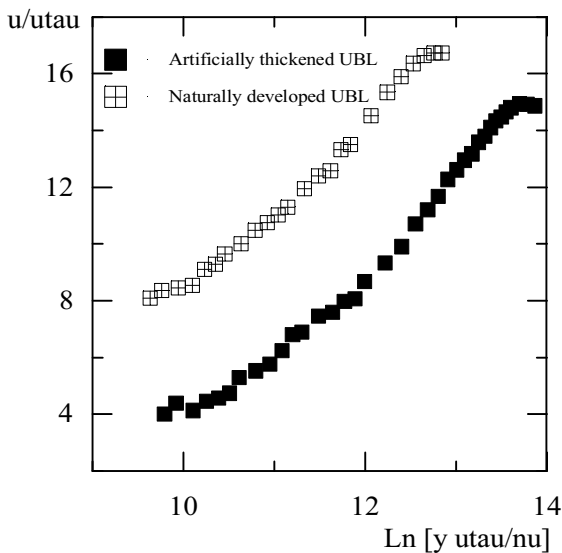


Figure 6. Mean velocity profile. Unstable boundary layer.

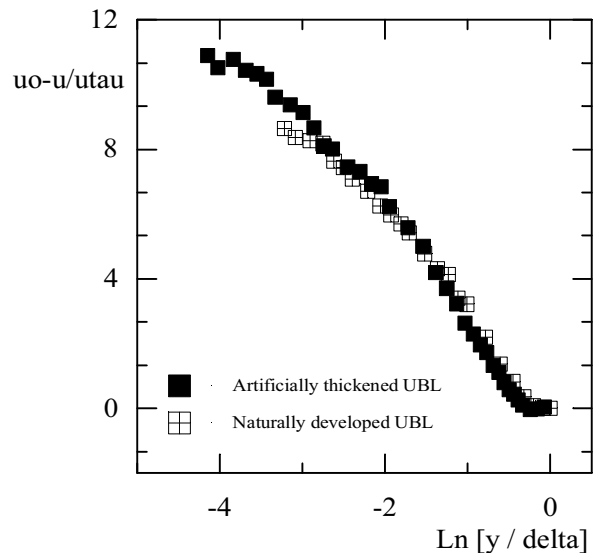


Figure 7. Mean velocity profile. Unstable boundary layer.

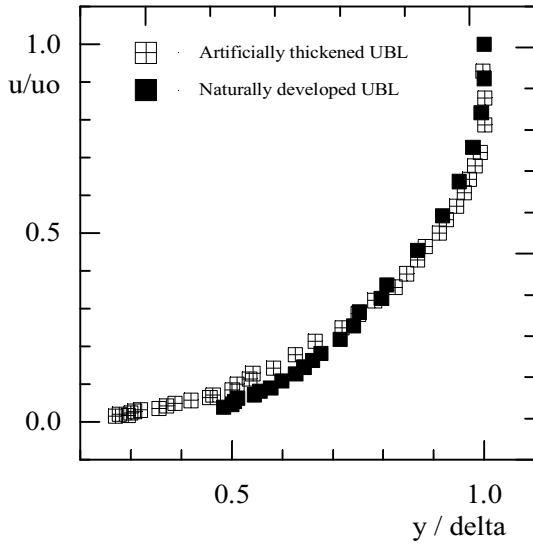


Figure 8. Mean velocity profile.
Unstable boundary layer.

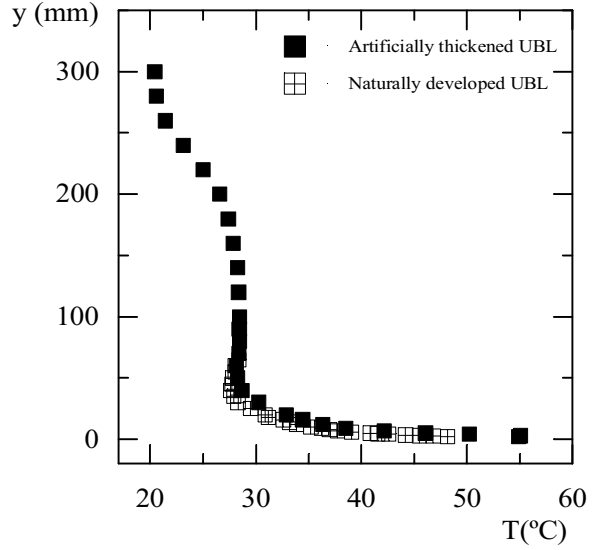


Figure 9. Mean temperature profile.
Unstable boundary layer.

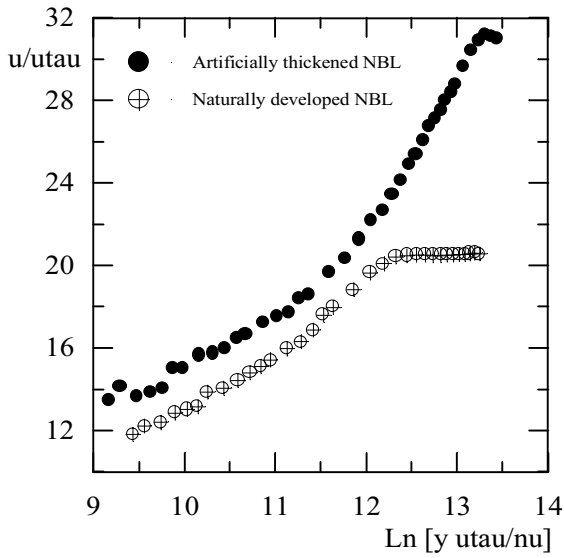


Figure 10. Mean velocity profile.
Neutral boundary layer.

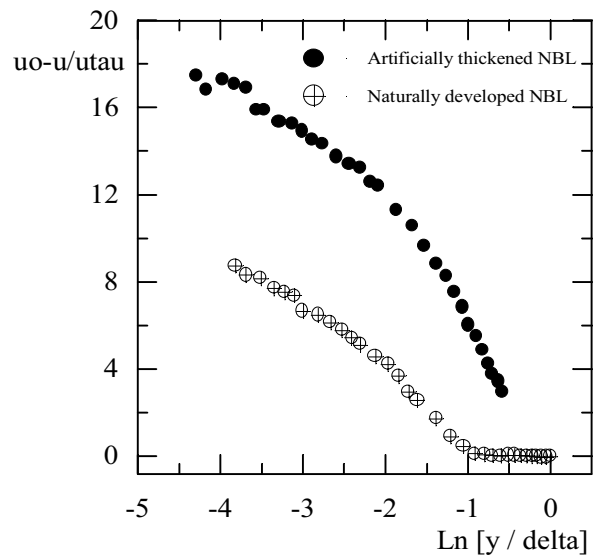


Figure 11. Mean velocity profile.
Neutral boundary layer.

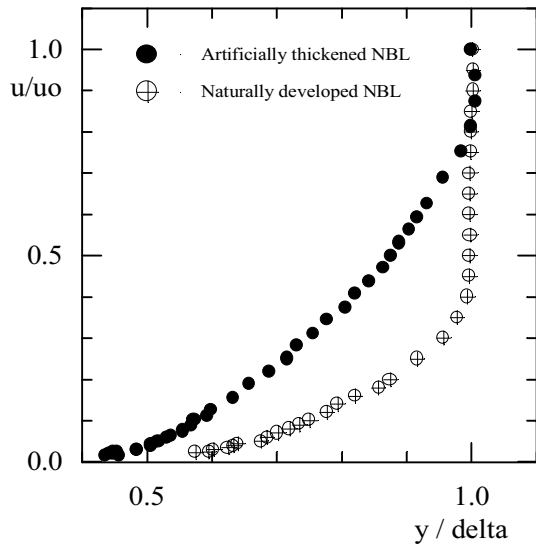


Figure 12. Mean velocity profile. Neutral boundary layer.

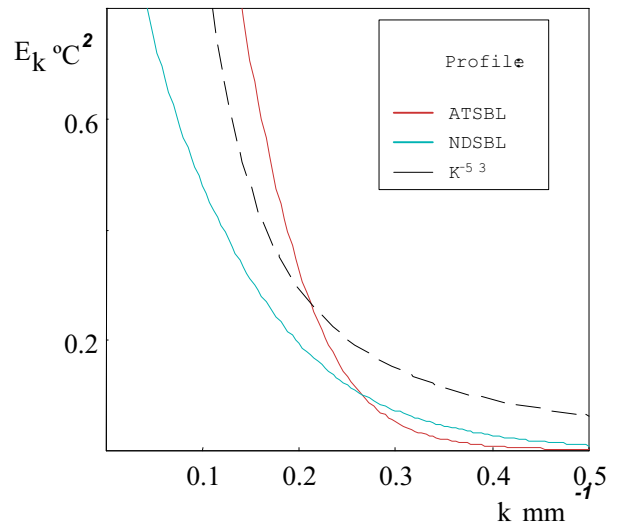


Figure 13. Turbulence energy spectra

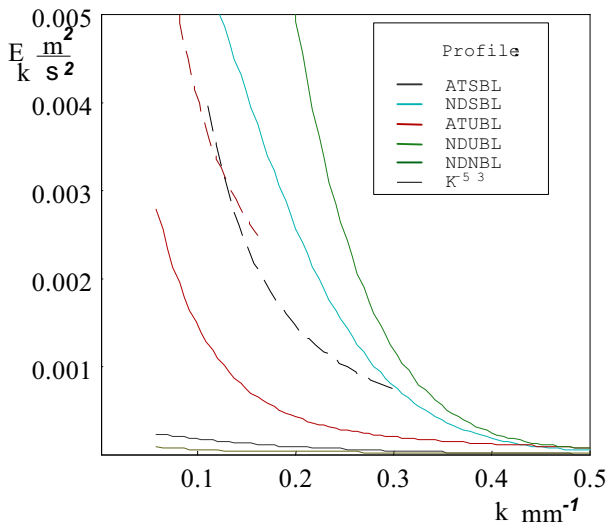


Figure 14. Turbulence energy spectra.

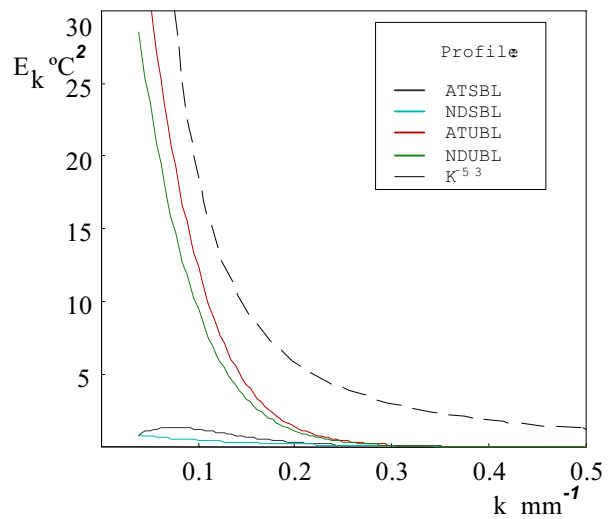


Figure 15. Temperature energy spectra.

$$C_f = u_{\tau}^2 / U_{\infty}^2 \quad (6)$$

$$S_t = u_{\tau} t_{\tau} / U_{\infty} D T \quad (7)$$

The law of the wake has been reasonably well discriminated for all situations.

5 . Conclusion

The present work has reported the recent progresses made at COPPE/UFRJ to construct a pilot wind tunnel which can generate boundary layers with characteristics close to those presented by an atmospheric flow. Results for stable, neutral and unstable flows were presented. In general, very satisfactory results were achieved. The velocity and temperature profiles in inner and outer variables adhere well to the atmospheric boundary layer features.

Acknowledgements. The authors are grateful to Prof. L. J. S. Bradbury for the many helpful discussions undertaken during the course of the present research. Prof. Bradbury together with Prof. Su Jian have helped to construct the computer code that currently operates the hot-wire units. The work was been financially supported by the CNPq through grant 350183/93-7. MC and JBRL are also grateful to the CNPq for the award of research scholarships.

6 . References

- Barbosa, P. H., Cataldi, M. and Silva Freire, A. P.; "Wind tunnel simulation of atmospheric boundary layer flows", 7th ENCIT, Porto Alegre, 2000.
- Cermak, J.E., "Laboratory Simulation of the Atmospheric Boundary Layer", AIAA J., Vol. 9, 1746-1753, 1971.
- Cermak, J.E., "Application of Fluid Mechanics to Wind Engineering - A Freeman Scholar Lecture", J. Fluids Engng., Vol. 97, 9-38, 1975.
- Cermak, J.E., "Wind Tunnel Design for Physical Modeling of Atmospheric Boundary Layers", Proceedings of ASCE, Vol. 107, 623-641, 1981.
- da Vinci, L., Codex Atlanticus, 1505.
- Fedorovich, E., Kaiser, R., Rau, M. and Plate, E., "Wind Tunnel Study of Turbulent Flow Structure in the Convective Boundary Layer Capped by a Temperature Inversion", J. Atmosph. Sciences, Vol. 53, 1273-1289, 1996.
- Grainger, C. and Meroney, R., "Inverted Floor Wind-Tunnel Simulation of Stably Stratified Atmospheric Boundary Layer Flow", Atmosph. Envir., Vol. 28, 1887-1893, 1994.
- Kaimal, J. C. e Finnigan, J. J.; Atmospheric boundary layer flow; Oxford University Press, 1994.
- Meroney, R.N. and Melbourne, W.H., "Operating ranges of Meteorological Wind Tunnels for the Simulation of Convective Boundary Layer(CBL) Phenomena", Boundary-Layer Meteor., Vol. 61, 145-174, 1992.
- Ohba, R., Ukegushi, N., Kakishima, S e Lamb, B.; "Wind tunnel experiment of gas diffusion in stably stratified flow over a complex terrain", Atmospheric Environment, 24A, 1987-2001, 1990.
- Ogawa, Y., Diosey, P.G., Uehara, K. and Ueda, H., "A Wind Tunnel for Studying the Effects of Thermal Stratification in the Atmosphere", Atmosph. Envir., Vol. 15, 807-821, 1981.
- Ohya, Y., Nakamura, Y. and Ozono, S."A Wind Tunnel for Studying Density-Stratified Flows", Atmosph. Envir., Vol. 28, 1895-1900, 1994.
- Poreh, M., Rau, M. and Plate, E.J., "Design Considerations for Wind Tunnel Simulations of Diffusion within the Convective Boundary Layer", Atmosph. Envir., Vol. 25A, 1251-1256, 1991.
- Rau, M., Bächlin, W. and Plate, E.J., "Detailed Design Features of a New Wind Tunnel for Studying the Effects of Thermal Stratification", Atmosph. Envir., Vol. 25A, 1258-1263, 1991.
- Smeaton, J., "An Experimental Investigation Concerning the Natural Powers of Water and Wind", Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. 51, 100-174, 1759.

GERAÇÃO NUMÉRICA DE MALHA PARA ANÁLISE DE CAVIDADES COM PAREDE IRREGULAR

Andressa Araújo Abreu

Albino José Kalab Leiroz

Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais

Instituto Militar de Engenharia

Rio de Janeiro, RJ – 22290-270 - Brazil

Resumo. *O presente trabalho descreve o desenvolvimento de uma malha para o estudo numérico da evolução dos campos de velocidade e de temperatura no interior de cavidades quadradas bidimensionais com paredes irregulares. Inicialmente, pontos da malha são distribuídos ao longo do contorno utilizando transformações analíticas. Para a determinação da distribuição de pontos no interior da cavidade, a solução de Equações de Poisson para cada variável transformada é utilizada, tendo os pontos do contorno gerados analiticamente como condições de contorno. Concentração de pontos e controle de ângulo da malha próximo as superfícies sólidas são também utilizadas. Um procedimento iterativo é utilizado para a determinação dos termos não-homogêneos de forma a garantir o espaçamento e o ângulo de malha especificados. As equações que governam o escoamento e a conservação de energia são discretizadas utilizando o Método de Diferenças Finitas e o sistema de equações algébricas resultante é resolvido por um procedimento iterativo com controle de erro local. Resultados são obtidos para cavidades quadradas com uma única superfície irregular do lado oposto da superfície deslizante. Resultados mostram o desenvolvimento de recirculações no escoamento e perfis de temperatura influenciadas pela superfície irregular.*

Palavras chave: *Escoamentos Confinados, Cavidades, Convecção-Difusão, Geração de Malha, Métodos Numéricos.*

1. Introdução

O estudo de escoamentos e da transferência de calor em cavidades fechadas possui interesse prático relacionado a diversas aplicações industriais, que incluem resfriamento de equipamentos eletrônicos, revestimento de superfícies e geradores de vapor, onde estes se encontram presentes. Além deste aspecto de interesse prático, escoamentos confinados em cavidades têm sido utilizados para o estudo de fenômenos físicos básicos, uma vez que apresentam diversas estruturas de escoamento, tais como vórtices, escoamentos secundários e instabilidades hidrodinâmicas em uma geometria simples. Esta característica dos escoamentos confinados em cavidades torna estes casos apropriados para o teste de novas metodologias numéricas para a simulação de escoamentos.

Revisões sobre trabalhos investigando aspectos do escoamento e de processos de transferência de calor em cavidades fechadas gerados pelo movimento de uma ou mais paredes (Shankar & Deshpande, 2000) ou por variação de massa específica (Kakaç et al, 1987) mostram a influência de diversos parâmetros no desenvolvimento do campo de velocidade e de temperatura. Estas revisões mostram ainda a importância da simulação numérica na análise dos fenômenos envolvidos, uma vez que soluções puramente analíticas se encontram restritas ao caso limite de $Re = 0$ (Escoamento de Stokes) onde os termos convectivos das equações de transporte podem ser desprezados (Shankar & Deshpande, 2000). As singularidades presentes nos cantos das cavidades assim como aspectos fenomenológicos e numéricos da análise de cavidades tridimensionais são também discutidos. Efeitos de convecção natural foram investigados em cavidades apresentando diferentes formatos, mostrando os efeitos da inclinação destas em relação ao campo gravitacional sobre os perfis de escoamento (Kakaç et al, 1987). Correlações para os coeficientes de troca de calor, expressos em termos do número de Nusselt, são também apresentadas para diversas situações de interesse. Devido ao reduzido número de resultados experimentais abrangendo uma apreciável faixa de intensidade de forças de corpo, resultados obtidos a partir de simulações numéricas têm sido utilizados na obtenção destas correlações (Kakaç et al, 1987).

O estudo numérico de efeitos de convecção natural em cavidades rasas bidimensionais abertas, foi realizado considerando a cavidade como fechada e utilizando a aproximação de Boussinesq (Chan & Tien, 1985). A hipótese de cavidade fechada para a análise numérica do escoamento e do campo de temperaturas busca a redução de custos computacionais, associado a redução de domínio de solução. Condições de contorno para a cavidade fechada correspondente são apropriadamente estabelecidas. As equações que governam o movimento de fluido são escritas em formulação de variáveis primitivas sendo o acoplamento pressão-velocidade tratado por um esquema baseado no SIMPLER. A influência de se considerar a cavidade aberta como fechada é analisada mostrando que esta hipótese leva a bons resultados para os campos de temperatura e de velocidade. Os resultados numéricos obtidos quando comparados a dados experimentais apresentam boa concordância, mostrando ainda que para baixos valores de Rayleigh o mecanismo de transferência de calor é predominantemente difusivo. Os resultados mostram ainda, que a medida que Rayleigh aumenta, a influência da abertura sobre o escoamento no interior da cavidade se torna mais significativa.

* E-Mail: andressa@epq.ime.eb.br

* Author to whom correspondence should be addressed. E-mail: leiroz@ime.eb.br

Cavidades retangulares rasas foram ainda estudadas considerando a hipótese de Boussinesq e o efeito da difusão de calor ao longo das superfícies horizontais (Wang & Daniels, 1994). Nestes estudos, a existência de um gradiente de temperatura entre as paredes verticais induz o escoamento estudado. Os efeitos de convecção natural são estudados para $Pr = 0.05$ e $Pr = 0.733$ e diferentes valores de Rayleigh e os resultados apresentados mostram a influência deste parâmetro na estrutura do escoamento. Os resultados mostram ainda que quando valores elevados de Rayleigh são considerados, efeitos não-lineares afetam o escoamento afastando-o da estrutura de duas regiões observada para baixos Rayleigh onde processos difusivos controlam os fenômenos.

Efeitos de convecção mista foram numericamente estudados em cavidades cúbicas com gradiente vertical de temperatura (Iwatsu & Hyun, 1995). A superfície superior da cavidade, que desliza a velocidade constante, induz o escoamento, enquanto mantida a uma temperatura mais elevada que a do fundo da cavidade. As demais paredes são consideradas termicamente isoladas. Os resultados mostram a influência de Reynolds e Grashof, expressos em função do número de Richardson ($Ri = Gr.Re^{-2}$) nos padrões gerais de escoamento. Para $Ri \ll 1$ a estrutura do escoamento é semelhante a observada para situações onde o gradiente de temperatura não está presente. Vórtices verticalmente alinhados são observados para $Ri \ll 1$, mostrando a influência da convecção mista. Vale ainda ressaltar que a comparação dos resultados obtidos com dados de estudos bidimensionais possibilitou a análise das diferenças das estruturas de escoamento observadas. Esta análise permitiu ainda a avaliação das limitações dos resultados obtidos a partir de análises bidimensionais.

Um estudo numérico investigando o transporte de calor e massa em cavidades bidimensionais foi direcionado à modelagem de um secador industrial (Alleborn et al., 1999). Um método de continuação numérica é utilizado de forma a determinar as configurações do escoamento e detectar multiplicidades de soluções juntamente com informações acerca da estabilidade linear destas. Soluções analíticas, obtidas para casos-limite da geometria e dos parâmetros do escoamento, foram comparadas com resultados numéricos. Os resultados mostram que o aumento de Reynolds melhora a eficiência do secador devido a predominância da convecção forçada. Para baixos Reynolds o escoamento torna-se instável devido aos efeitos de empuxo, e o aumento do comprimento da cavidade reduz a taxa de transferência de massa devido ao desenvolvimento de uma maior camada limite nas paredes.

Técnicas híbridas analítico-numéricas foram também aplicadas a solução das equações que governam o campo de velocidades em uma cavidade bidimensional que possui uma de suas superfícies se movendo a velocidade constante (Pérez Guerrero & Cotta, 1992). Uma formulação em vorticidade-função corrente é utilizada. A equação diferencial parcial bi-harmônica para a função corrente é integrada em uma das variáveis espaciais, fornecendo um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias para um conjunto de potenciais transformados apropriadamente definidos a partir de um problema de autovalor. Uma vez truncado em uma ordem apropriada, o sistema de equações diferenciais ordinárias é numericamente resolvido, levando a obtenção dos potenciais transformados. A transformação é analiticamente invertida, possibilitando a determinação da função corrente no interior da cavidade. As técnicas híbridas possuem a vantagem de restringir a utilização de aproximações numéricas a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias. Os resultados obtidos são comparados com dados disponíveis em estudos puramente numéricos como forma de demonstrar a convergência da expansão proposta.

Escoamentos em cavidades foram também objeto de estudos experimentais. Estudos experimentais da evolução temporal dos vórtices em cavidades de formato quadrado, retangular e semicircular permitiram a obtenção de informações cinemáticas e topológicas sobre a propagação da vorticidade (Migeon et al., 2000). Uma superfície fixa, longa e verticalmente posicionada é utilizada como uma fronteira sólida das cavidades estudadas. As demais paredes da cavidade são então deslocadas em relação a superfície fixa, promovendo o escoamento. A localização e as dimensões físicas dos vórtices observados no interior destas cavidades foram também obtidas. Os pontos de separação do escoamento localizados nas superfícies sólidas das cavidades são estudados e os resultados obtidos mostram uma recirculação mais homogênea e uniforme na cavidade semicircular onde apenas o vórtice principal se encontra presente. Para a cavidade quadrada apresentou um vórtice secundário enquanto que a cavidade retangular dois vórtices secundários.

Estudos experimentais de escoamentos em cavidades onde diferenciais de temperatura entre as paredes estão presentes indicam que simetria com campos de velocidade e de temperatura em relação ao plano médio da cavidade (Ivey & Hamblin, 1989). Convecção mista em cavidades profundas foi também estudada utilizando superfícies móveis e diferenciais de temperatura de forma a que uma larga faixa de Gr/Re^2 pudesse ser considerada (Prasad & Koseff, 1996). Cristais líquidos são utilizados para a visualização do escoamento e do campo de temperatura. Medições do fluxo de calor são realizadas ao longo da superfície inferior da cavidade. Devido a natureza do escoamento próximo a superfície inferior da cavidade, que não sofre influência da razão de aspecto e da diferença de temperatura estabelecida, o coeficiente de troca de calor se mostra pouco influenciado pelos valores de Gr/Re^2 estudados.

No presente trabalho a geração numérica de malha para o estudo de uma cavidade quadrada bidimensional que apresenta uma única superfície irregular de forma arbitrária é discutida. Inicialmente, expressões analíticas são utilizadas ao longo dos contornos da cavidade de forma a estabelecer as condições de contorno para o procedimento numérico de geração da malha no interior do domínio de solução. Estas expressões analíticas permitem ainda a concentração de pontos ao longo dos contornos em regiões onde elevados gradientes nos perfis de solução são esperados. A malha é numericamente gerada no interior da cavidade utilizando Equações de Poisson, onde os termos fonte permitem o controle do espaçamento e do ângulo da malha próximo a superfícies sólidas de interesse. Resultados numéricos para os campos de velocidade e de temperatura, obtidos a partir do Método de Diferenças Finitas, são discutidos e validados utilizando soluções analíticas obtidas para casos limite.

2. Análise

O domínio de solução é mostrado na Fig.(1), que também apresenta o sistema de coordenadas utilizado. As cavidades consideradas no presente trabalho possuem parede superior móvel e parede inferior irregular de acordo com uma função arbitrária $f(x)$. A velocidade de deslocamento da superfície superior é considerada constante. Considera-se ainda que o aquecimento do fluido no interior da cavidade é decorrente da temperatura elevada na qual a parede irregular é mantida. A temperatura das demais paredes da cavidade é igual a temperatura inicial do fluido.

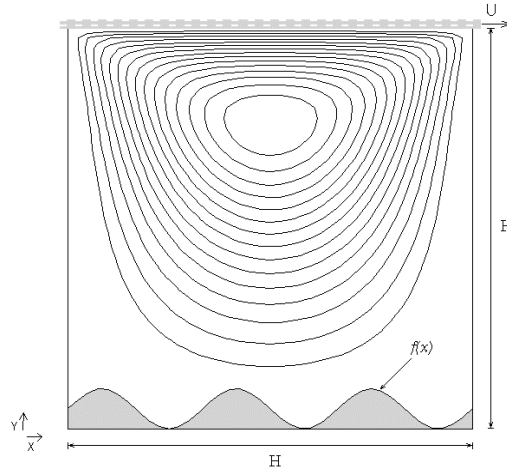


Figura 1. Domínio físico e sistema de coordenadas

Assumindo propriedades termo-físicas constantes, e desprezando-se a dissipação viscosa e efeitos de força de corpo, as equações que governam o escoamento e a transferência de calor transiente no interior da cavidade podem ser escritas em forma adimensional como:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

com condições de contorno

$$u_x = 1, u_y = 0, \theta = 0 \quad ; \quad y = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

$$u_x = 0, u_y = 0, \theta = 1 \quad ; \quad y = f(x), 0 \leq x \leq 1 \quad (6)$$

$$u_x = 0, u_y = 0, \theta = 0 \quad ; \quad x = 0, f(x) < y < 1 \quad (7)$$

$$u_x = 0, u_y = 0, \theta = 0 \quad ; \quad x = 1, f(x) < y < 1 \quad (8)$$

e condições iniciais

$$u_x = 0, u_y = 0, \theta = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1, f(x) \leq y \leq 1 \quad (9)$$

que correspondem a condições de fluido estagnado e isotérmico.

As variáveis adimensionais presentes nas Eqs.(1-9), são definidas como

$$x = \frac{x^*}{H}, \quad y = \frac{y^*}{H}, \quad u_x = \frac{u_x^*}{U}, \quad u_y = \frac{u_y^*}{U}, \quad t = \frac{t^* U}{H}, \quad P = \frac{P^*}{\rho U^2}, \quad \theta = \frac{T - T_o}{T_f - T_o} \quad (10)$$

onde a altura da cavidade H e a velocidade da tampa U são utilizados como comprimento característico e velocidade característica, respectivamente. A temperatura adimensional θ é definida em termos da temperatura inicial do fluido T_o e da temperatura do fundo T_f .

De acordo com as variáveis adimensionais descritas na Eq.(10), os números de Reynolds e de Prandtl são definidos como

$$Re = \frac{UH}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (11)$$

onde ν é a viscosidade cinemática e α a difusividade térmica.

Com o objetivo de desacoplar os campos de pressão e velocidade, e reduzir o número de equações simulatâneas necessárias para solução do problema, a formulação em variáveis primitivas descritas pelas Eqs.(1-4), é rescrita na forma de vorticidade-função corrente como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (13)$$

com condições de contorno

$$\psi = 0 \quad ; \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (14)$$

$$\psi = 0 \quad ; \quad y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (15)$$

$$\psi = 0 \quad ; \quad x = 0, \quad f(x) < y < 1 \quad (16)$$

$$\psi = 0 \quad ; \quad x = 1, \quad f(x) < y < 1 \quad (17)$$

Condições iniciais podem ser escritas

$$\psi = 0, \quad \omega = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (18)$$

Vorticidade (ω) e função corrente (ψ) são, respectivamente, definidas pelos componentes da velocidade transversal e longitudinal como

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (19)$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (20)$$

3. Considerações Numéricas

As equações que governam o desenvolvimento dos campos de velocidade e de temperatura são resolvidas utilizando o Método das Diferenças Finitas (Anderson et al, 1984). Devido a natureza dos fenômenos envolvidos, elevados gradientes nos perfis de velocidade e de temperatura podem ser esperados próximos a superfícies sólidas. Além disto, os fenômenos presentes nas regiões do domínio físico próximos as superfícies superior e inferior são de particular interesse no presente trabalho. Desta forma, o procedimento de geração de malha contempla a concentração de pontos e o controle de ângulo da malha nestas regiões, como forma de controlar os custos computacionais associados a simulação numérica. O procedimento de geração de malha possui ainda a característica de proporcionar a regularização do domínio de solução a ser discretizado.

Inicialmente, a distribuição de pontos é estabelecida ao longo das superfícies da cavidade. Para as paredes laterais, uma relação algébrica (Anderson et al, 1984) é utilizada como forma de permitir a concentração de pontos da malha próximos as superfícies inferior e superior do domínio, onde os parâmetros β e α permitem o controle da intensidade da concentração de pontos e da localização da concentração, respectivamente. Para $\alpha = 0.5$ a concentração da malha é feita igualmente para $y = 0$ e $y = H$.

$$x = \xi \quad (21)$$

$$y = H \frac{(\beta + 2\alpha) \left[(\beta + 1) / (\beta - 1) \right]^{\eta - \alpha / (1 - \alpha)} - \beta + 2\alpha}{(2\alpha + 1) \left\{ 1 + \left[(\beta + 1) / (\beta - 1) \right]^{\eta - \alpha / (1 - \alpha)} \right\}} \quad (22)$$

As Eqs. (21-22) definem uma relação entre as coordenadas físicas x e y e as coordenadas transformadas ξ e η , respectivamente, ao longo das paredes laterais da cavidade. Pontos igualmente espaçados são utilizados ao longo das superfícies inferior e superior da cavidade. Uma vez definida ao longo das superfícies, a relação entre as coordenadas físicas (x, y) e as coordenadas transformadas (ξ, η) deve ser estabelecida para o interior do domínio de solução. Esta relação entre coordenadas é escrita na forma diferencial como:

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta) \quad (23)$$

$$\nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (24)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (25)$$

A solução numérica da Eq. (23) e da Eq. (24) permite ainda o cálculo das métricas das transformações desenvolvidas. As funções $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ são utilizadas para o controle do ângulo e da concentração de pontos entre o interior e os contornos da malha, respectivamente. Um procedimento iterativo é utilizado na determinação de $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ a partir de valores estabelecidos para ângulo e espaçamento entre linhas de coordenadas transversais, da malha no domínio físico. Inicialmente, considerando $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ nulos, a Eq. (23) e a Eq. (24) são resolvidas numericamente utilizando, como condições de contorno, a distribuição de pontos estabelecida analiticamente ao longo das paredes da cavidade. Com os resultados obtidos, o espaçamento e ângulo da malha podem ser comparados com os valores estabelecidos. A partir desta comparação, valores corrigidos para $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ nos contornos podem ser determinados. Em seguida, os valores dessas funções são extrapolados para o interior do domínio de solução, utilizando as seguintes funções exponenciais.

$$P(\xi, \eta) = P(\xi, 1)e^{-a(\eta-1)/\eta_{max}-1} + P(\xi, \eta_{max})e^{-b(\eta_{max}-\eta)/(\eta_{max}-1)} \quad (26)$$

$$Q(\xi, \eta) = Q(\xi, 1)e^{-c(\eta-1)/\eta_{max}-1} + Q(\xi, \eta_{max})e^{-d(\eta_{max}-\eta)/(\eta_{max}-1)} \quad (27)$$

onde a, b, c, d , são denominados parâmetros de decaimento das equações.

Utilizando as métricas obtidas da transformação descrita acima, as Eqs. (4,12-20) e as correspondentes condições de contorno são reescritas em termos das variáveis independentes ξ e η , e discretizadas utilizando o esquema de diferenças finitas BTCS. Assim, o sistema transformado, discretizado por um esquema de segunda ordem em todo domínio computacional, é resolvido iterativamente com controle de erro local.

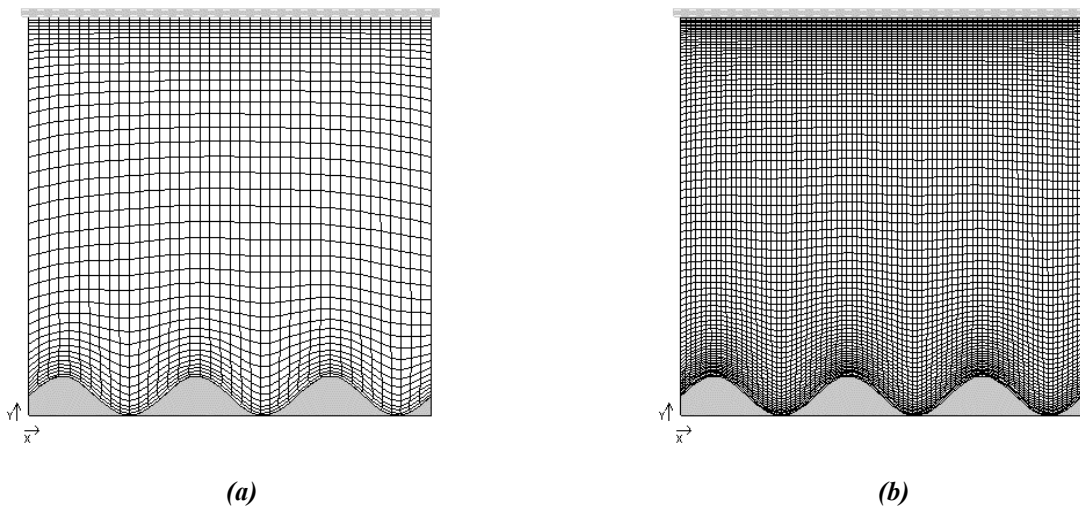


Figura 2: Malhas no domínio físico obtidas com $f(x) = 0.5 \times (1.0 + \text{sen}(6\pi x))$ para (a) 41x41 pontos (b) 81x81 pontos com tolerância de 10^{-8} e $a = 50, b = 0.5, c = 13, d = 10$.

Malhas obtidas a partir do procedimento descrito são mostradas na Fig. (2), para $f(x) = 0.5 \times (1.0 + \text{sen}(6\pi x))$. O espaçamento próximo a superfície irregular e a tampa móvel é estabelecido como sendo $0.25\Delta\eta$ e o ângulo das linhas transversais da malha a estas superfícies como $\pi/2$. Na determinação da distribuição de pontos da malha é utilizada uma tolerância de 10^{-8} como forma de garantir a significância das métricas das transformações, que são obtidas por diferenciação numérica, assim como das simulações realizadas. O tempo de computação das malhas geradas foi de 60 horas e 150 horas para 41^2 e 81^2 pontos, respectivamente, em um computador PENTIUM III 600 MHz.

Observou-se que a determinação dos parâmetros de decaimento, presentes na Eqs. (26) e na Eq. (27), deve ser realizada de forma que as correções impostas nas funções $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ ao longo da superfície superior da cavidade não influenciem significativamente a região próxima a superfície inferior. Observou-se ainda que a influência das correções relacionadas a superfície irregular, na região próxima a tampa móvel, também deve ser evitada. A redução dos parâmetros de decaimento leva a uma maior dificuldade de convergência do processo iterativo de determinação das funções $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$.

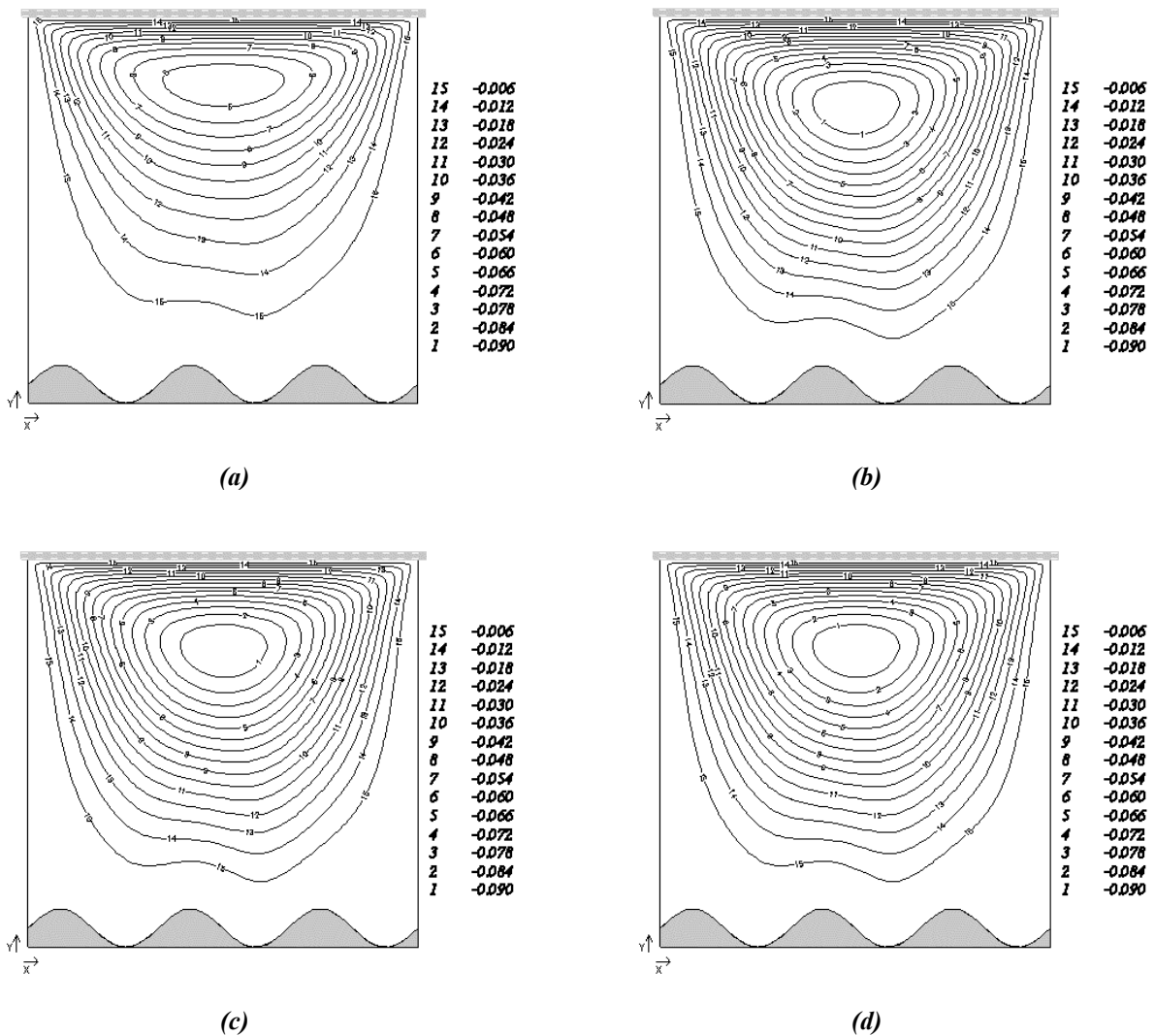


Figura 3. Função Corrente $Re = 1, Pr = 1, \Delta t = 10^{-5}$ para (a) $t = 0.01$, (b) $t = 0.14$, (c) $t = 0.27$, (d) $t = 0.40$

4. Resultados

O código numérico desenvolvido com o objetivo de avaliar os campos de velocidade e temperatura no interior da cavidade foi inicialmente validado considerando caso limite de $Re \rightarrow 0$ e superfícies da cavidade regulares, que corresponde ao caso onde $f(x) = 0$. Resultados analíticos para o campo de temperatura foram obtidos da solução da equação de energia desprezando-se os termos convectivos. Simulações numéricas foram realizadas utilizando uma malha de 81 pontos em cada direção. Os parâmetros de subrelaxação e as tolerâncias dos procedimentos iterativos utilizados adotados foram, respectivamente; $0,8$ e 10^{-4} para iterações da vorticidade, função corrente e temperatura nos pontos internos da cavidade, $0,6$ e 10^{-3} para vorticidade nos contornos. Uma tolerância de 10^{-2} para o teste do regime permanente foi também utilizada. Os resultados numéricos apresentaram um desvio máximo, em relação aos obtidos

analiticamente inferior, a 10^{-2} . O tempo de computação para as simulações numéricas foram da ordem de 40 horas para os casos discutidos no presente trabalho.

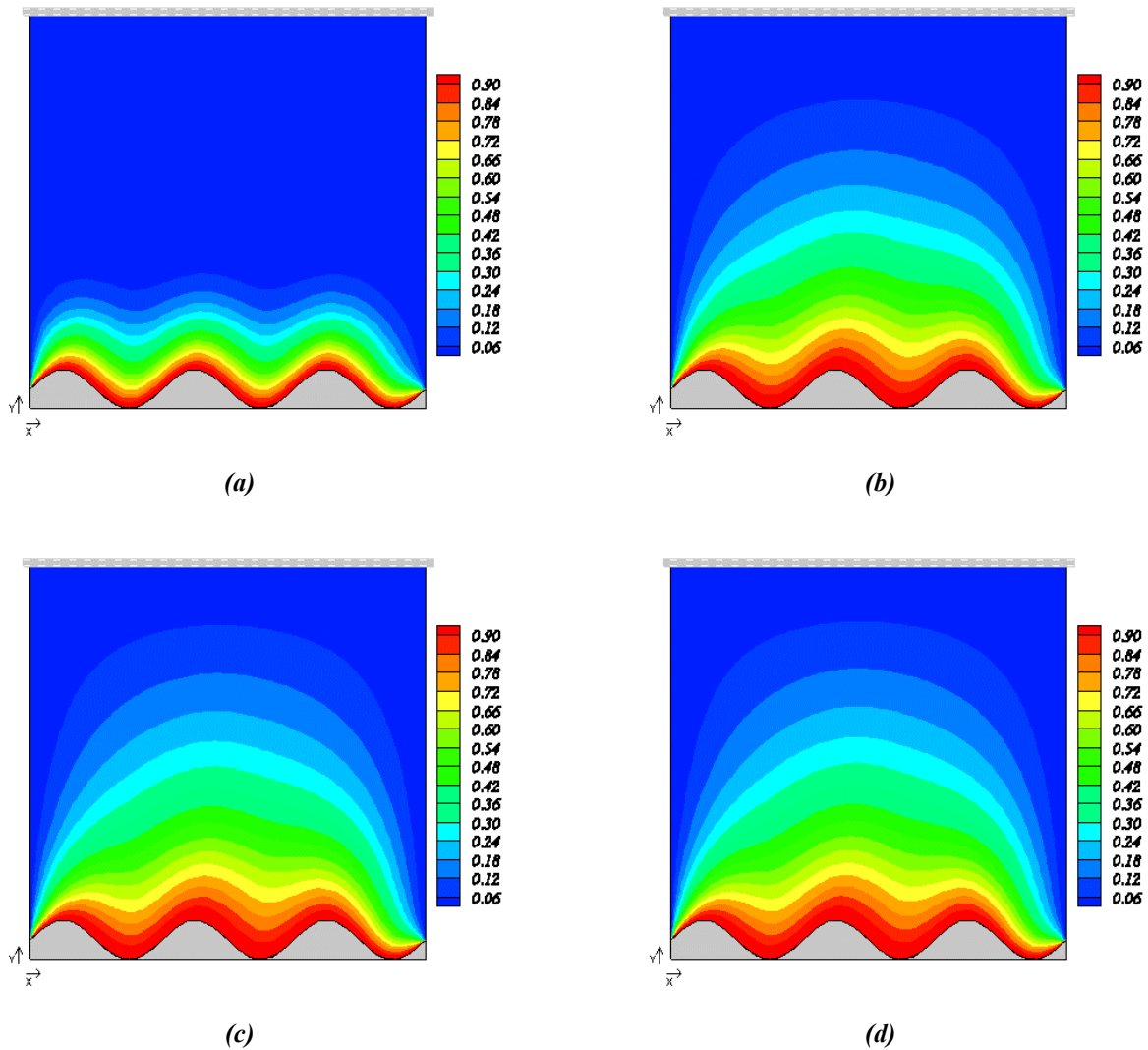


Figura 4. Temperatura $Re = 1, Pr = 1, \Delta t = 10^{-5}$ para (a) $t = 0.01$, (b) $t = 0.14$, (c) $t = 0.27$, (d) $t = 0.40$

Resultados para $Re=1, Pr=1$ são apresentados nas Figs. (3-4), ilustrados respectivamente através da função corrente e isothermas. O campos de velocidades para $t=0.14, t=0.27$ e $t=0.40$ apresentam semelhança, como mostra as Figs. (3b-3d). Esse comportamento configura condições próximas ao pleno desenvolvimento hidrodinâmico, que precede o desenvolvimento térmico, mostrado na Fig. (4). A simetria em relação a coordenada transversal observada no campo de temperatura mostra que o processo de transferência de calor é predominantemente difusivo. Da análise da Fig. (3) e da Fig. (4), pode ser observado que a influência da parede irregular no escoamento e no processo de transferência de calor está concentrada na região meridional da cavidade. Além disto, pode-se verificar um comportamento do fluido não afetado pela parede irregular na região superior da cavidade.

O comportamento transiente dos campos de velocidade e de temperatura para $Re = 100$ e $Pr = 1$, são apresentados na Fig. (5) e na Fig. (6), respectivamente. Pode-se observar, a partir dos resultados mostrados na Fig. (5), um deslocamento do vórtice principal na direção do movimento da tampa, quando comparado aos resultados de $Re = 1$ - Fig. (3). Este comportamento ocorre devido ao aumento do número de Reynolds que provoca um aumento da tensão cisalhante na região próxima a superfície. Comparando os resultados obtidos para o caso de $Re = 1$, mostrado nas Fig. (3), observa-se ainda que o desenvolvimento hidrodinâmico é alcançado para tempos superiores para o caso de $Re = 100$. Os resultados para o campo de temperatura apresentados na Fig. (6), mostram um desenvolvimento térmico mais pronunciado na região adjacente a parede esquerda da cavidade. Este efeito é decorrente do fluxo ascendente de massa causado pelo movimento da tampa. Próximo a parede direita da cavidade, localiza-se o fluxo descendente de massa à temperatura inferior, que dificulta o desenvolvimento do campo de temperaturas na região, formando assim um aspecto não simétrico observado no caso de $Re=1$.

A partir dos resultados mostrados, para os casos de $Re=1$ e $Re=100$, pode-se verificar que a influência da irregularidade na parede inferior, sobre os campos de velocidade e temperatura, concentra-se na região meridional da cavidade. Além disto os resultados mostram que esta influência é pouco significativa na região superior da cavidade.

Resultados para condição regime permanente dos campos de velocidade e de temperatura são mostrados na Fig. (7). Estes resultados mostram um comportamento qualitativamente semelhante ao observado para a fase desenvolvimento dos campos.

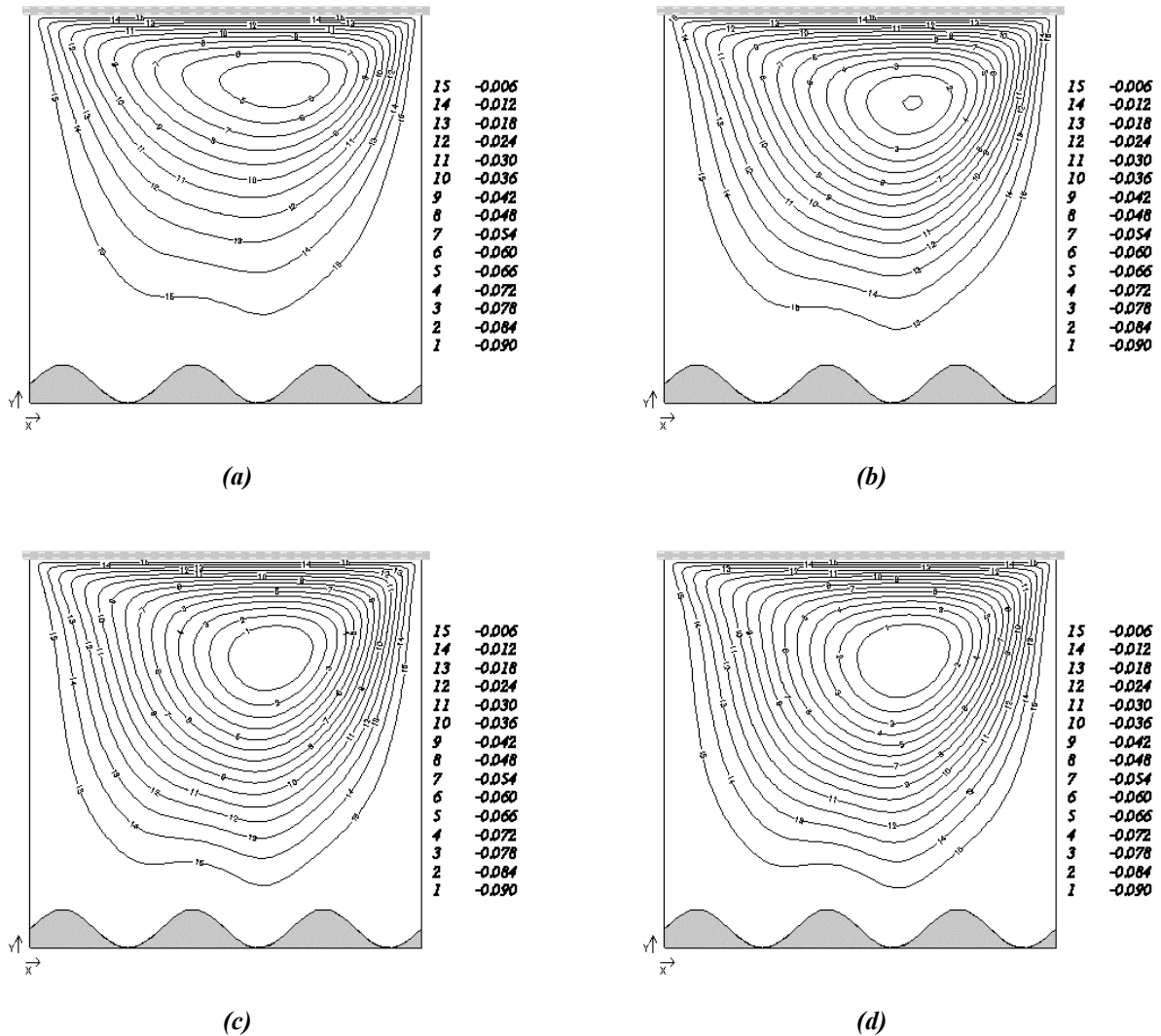


Figura 5 – Função Corrente $Re = 100, Pr = 1, \Delta t = 10^{-3}$, (a) $t = 1.$, (b) $t = 3.0$, (c) $t = 5.0$, (d) $t = 7.0$

5. Conclusões

Um procedimento geração de malha numérico a ser aplicado no estudo do desenvolvimento dos campos de velocidade e de temperatura no interior de cavidades com paredes irregulares é apresentado. Relações algébricas são inicialmente utilizadas para a distribuição de pontos ao longo dos contornos sólidos da cavidade. Equações diferenciais parciais elípticas são numericamente resolvidas de forma a determinar a distribuição de pontos no interior da cavidade. O procedimento desenvolvido é inicialmente aplicado a uma cavidade com paredes planas, quer permite solução analítica do campo de temperaturas para $Re = 0$. Resultados são apresentados para $Re = 1$ e 100 , considerando $Pr = 1$. Estes resultados mostram que a influência da parede irregular no campo de escoamento se mantém restrita a sua região próxima. Para $Re = 100$, o campo de temperatura se mostra influenciado tanto pela parede irregular como por efeitos convectivos. Estudos dos efeitos de convecção mista em cavidades com paredes irregulares se encontram em desenvolvimento.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – Processo No.520315/98-7 – e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Recursos computacionais foram alocados pelo Laboratório de Aerodinâmica e Termociências do Instituto Militar de Engenharia

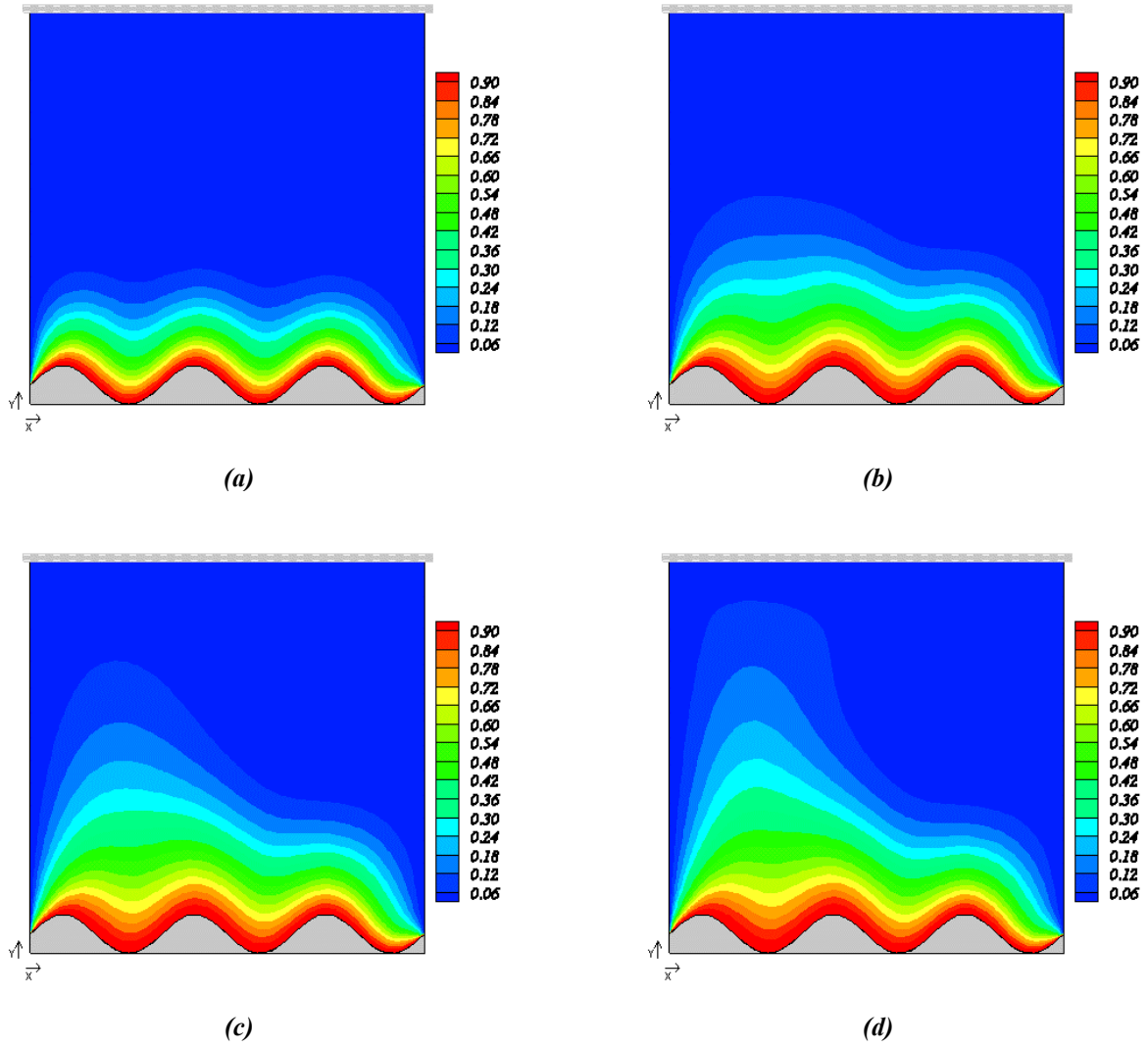


Figura 6 – Temperatura $Re=100$, $Pr=1$, $\Delta t=10^{-3}$, (a) $t=1.$, (b) $t=3.0$, (c) $t=5.0$, (d) $t=7.0$

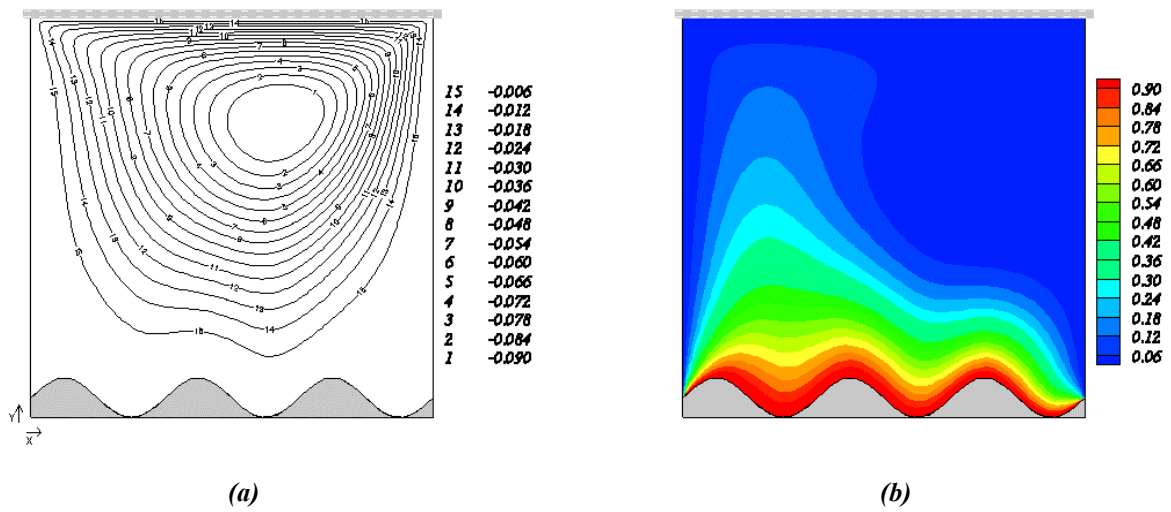


Figura 7 – Função Corrente (a) e Temperatura (b) em regime permanente para $Re=100$, $Pr=1$, $\Delta t=10^{-3}$

7. Referências

- Alleborn, N., Raszillier, H. and Durst, F., 1999, "Lid-driven Cavity with Heat and Mass Transport", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.42, pp. 833-853.
- Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, Richard H., 1984, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA.
- Chan, Y.L. and Tien, C.L., 1985, "A Numerical Study Of Two-dimensional Laminar Natural Convection in Shallow Open Cavities", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.28, pp. 603-612.
- Ivey, G.N. and Hamblin, P.F., 1989, "Convection Near the Temperature of Maximum Density for High Rayleigh Number, Low Aspect Ratio, Rectangular Cavities", Journal of Heat Transfer, Vol.111, pp. 100-105.
- Iwatsu, R. and Hyun, J.M., 1995, "Three-Dimensional Driven-Cavity Flows with a Vertical Temperature Gradient", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.38, pp. 3319-3328.
- Kakaç, S., Shah, R.K. and Aung, W., 1987, "Handbook of Single Phase Convective Heat Transfer", John Wiley, New York, USA.
- Migeon, C., Texier, A. and Pineau, G., 2000, "Effects of Lid-Driven Cavity Shape on the Flow Stablshment Phase", Journal of Fluids and Structures, Vol.14, pp. 469-488.
- Perez Guerrero, J.S. and Cotta, R.M., 1992, "Integral Transform Solution for the Lid-Driven Cavity Flow Problem in Streamfunction – Only Formulation", Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.15, pp. 399-409.
- Prasad, A.K. and Koseff, J.R., 1996, "Combined Forced and Natural Convection Heat Transfer in a Deep Lid-Driven Cavity Flow", Int. Journal of Heat and Fluid Flow, Vol.17, pp. 460-467.
- Shankar, P.N. and Deshpande, M.D., 2000, "Fluid Mechanics in the Driven Cavity", Annual Review in Fluid Mechanics, Vol.32, pp. 93-136.
- Wang, P. and Daniels, P.G., 1994, "Numerical Study of Thermal Convection in Shallow Cavities with Conducting Boundaries", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.37, pp. 387-399.

A NUMERICALLY GENERATED GRID FOR IRREGULAR WALL CAVITY ANALYSIS

Andressa Araújo Abreu

Albino José Kalab Leiroz

Departament of Mechanical and Materials Engineering

Instituto Militar de Engenharia

Rio de Janeiro, RJ – 22290-270 - Brazil

Abstract. *The present work describes the development of a discretizing grid for the numerical study of the flow and temperature field temporal evolution inside two-dimensional square cavities with irregular walls. Initially, grid points along the physical domain contour are determined using algebraic expressions. For the determination of the interior grid point locations, the numerical solution of Poisson equations for each of the transformed variables is used, with the algebraically generated contour grid points as boundary condition. Grid point clustering and grid line angle control on the cavity wall near fields are also introduced. An iterative procedure is used for the determination of the Poisson equation nonhomogeneous terms in order to satisfy a given grid spacing and angle criteria. The flow and energy governing equations are discretized using the Finite Difference Method and the resulting system of algebraic equations solved by iterative procedure with local error control. Results are obtained for square cavities with a single irregular wall located across the domain from the sliding boundary. Results show the development of recirculation flow patterns due to the wall irregularity, within which diffusion effects become import.*

Keywords: *Enclosed Flows, Convection-Diffusion, Grid Generation, Numerical Methods, Driven Cavity*

APLICACIÓN DE ALGORITMOS SIMPLEX PARA LA RESOLUCION DE REDES DE TUBERÍAS

Lisandro Curia, Sergio Cabezas
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
Departamento de Matemática - Facultad de Economía
lcuria@uncoma.edu.ar Buenos Aires 1400 - (8300) Neuquén - Argentina

RESUMEN

Gran parte de los problemas encontrados en redes de conducción hidráulica están relacionados con la necesidad de maximizar los caudales en las arterias o bien, imponer determinadas restricciones a los niveles de presiones nodales existentes.

El trabajo que aquí se describe, está dividido en dos partes. Por un lado, dado que las ecuaciones de gobierno de una red hidráulica son no lineales, se hará uso de técnicas de optimización lineal que permiten obtener un nuevo conjunto de inecuaciones lineales derivado del planteo original.

Debido a que los valores de contorno especificados como demandas en las aristas y niveles de presiones en los nodos no deben exceder o disminuir de ciertas cotas, se emplearán técnicas propias de programación lineal que permitan resolver problemas de maximización y minimización canónica en regiones críticas de la red.

En particular, los mismos se describirán utilizando tablas de Tucker ya que de este modo, es posible hacerlo en forma más sistemática y compacta facilitando la utilización de los algoritmos utilizados.

Por otra parte, el procedimiento que se describe en este trabajo permitirá realizar una primera aproximación al aplicar el método Newton-Raphson, tendiente a resolver los problemas de convergencia que se presentan cuando el valor con el que se inician las iteraciones esta fuera del radio de atracción de la solución.

INTRODUCCION

Durante su operación, una red hidráulica esta sujeta a diversas condiciones que pueden provocar cambios no deseados en las demandas requeridas por los usuarios así como roturas y averías provocadas por malas condiciones de diseño. Estos cambios en las operaciones de una red, establecen la necesidad de un estudio dinámico con el fin de analizar los cambios permanentes y establecer un diseño eficiente de la misma. Sin embargo las condiciones de operatividad de la red dan lugar al planteo de ecuaciones complicadas que dificultan un tratamiento numérico de la solución del problema (Bhave, 1991). Diversas alternativas consistentes en efectuar un tratamiento estático de la red ya se han desarrollado y probado con éxito (Wagner, 1988). Estos métodos consisten en efectuar un análisis hidráulico tendiente a determinar los caudales circulantes por las arterias de la red y las presiones nodales. Básicamente en un estudio estático de la red, las ecuaciones de gobierno se establecen basándose en las ecuaciones continuidad y de energía que se eligen en los circuitos o pseudo circuitos conformados convenientemente. Finalmente el sistema algebraico no lineal interviniente es linealizado por distintas técnicas donde una de las mas exitosamente empleadas es la de Newton Raphson (Bhave, 1991).

Estas técnicas destinadas a la resolución de sistemas algebraicos no lineales presenta a su vez dificultades que ya fueron reportadas por varios autores, (Rheinboldt, 1970). A su vez. Algunos resultados como los de Kantorovich (Kantorovich, 1964) han aportado herramientas de gran utilidad para asegura la existencia y la unicidad de sistemas algebraicos no lineales. Estas herramientas teóricas fueron empleadas y adaptadas por autores tales como Altman (Altman, 1989), para establecer la conveniencia de aplicar el método de los caudales por sobre el nodal para determinar valores cercanos a los denominados radios de atracción de la solución de la red hidráulica. Los aportes teóricos de estos autores están dirigidos a establecer la precaución que debe tenerse al aplicar teorías de linealización de los sistemas intervinientes, la confiabilidad en la solución obtenida descansa en definitiva, en la elección correcta del valor inicial con el que se comienza el proceso de iteración que conducirá a la resolución de la red.

En este trabajo se parte de las consideraciones realizadas por los autores citados anteriormente y se incorpora una técnica que combina los procedimientos de Newton Raphson con los de optimización de una red hidráulica. Este procedimiento puede resultar de utilidad cuando, por ejemplo, se quiere determinar una solución del sistema algebraico cuando los valores que con los que comienza el proceso iterativo están fuera del radio de atracción de la solución, en estos casos un mal condicionamiento de la matriz jacobiana conduciría a un procedimiento iterativo excesivamente lento e ineficaz desde el punto de vista computacional.

ECUACIONES DE GOBIERNO DE UNA RED

Las leyes de Kirchhoff caracterizan la distribución del flujo en una red hidráulica en estado estacionario y se conocen como ecuaciones de energía y de continuidad.

Ley de continuidad

La suma algebraica de los caudales que entran y salen de un nodo de unión es nula

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot Q_i + q_j \quad j = 1,2,\dots,n \quad (1)$$

donde

n = número de nodos.

Q_i = caudal circulante en la tubería conectada al nodo i

q_j = caudal saliente o entrante en el nodo j (suministros)

α_i = {-1,0,1} según la orientación del flujo en la tubería conectada al nodo i.

Ley de conservación de la energía

En todo circuito fundamental, las pérdidas de energía acumuladas deben ser igual a la energía exterior entregada al fluido. De este resultado, surgen las siguientes ecuaciones:

$$L_c + \sum_{x \in c}^e \beta_{cx} \Delta H_x = 0 \quad c = 1,\dots,t \quad (2)$$

donde

t = número de circuitos fundamentales.

e = número de tuberías (aristas).

ΔH_x = H_i - H_j , siendo H_i y H_j las presiones en los extremos de la tubería x conectada a los nodos i y j.

L_c = Energía externa entregada al camino c.

β = {-1,0,1} dependiendo de la pertenencia y de la orientación de la tubería x en el circuito c.

Existen varias alternativas para analizar el estado estacionario de alturas y caudales en una red de distribución hidráulica, como por ejemplo, el método de los caudales y el método de los nodos, presentando el primero mejores características de convergencia (Marchegiani, 1995).

METODOS DE RESOLUCION DE UNA RED HIDRAULICA

El método de los caudales

El método de los caudales tiene como incógnitas los caudales en las tuberías y consiste en la combinación de las ecuaciones (1) y (2) de manera de obtener un sistema no lineal que puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{F(Q_x)}=0 \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_e]^T$$

$$\mathbf{Q}_x = [Q_1, Q_2, \dots, Q_e]^T$$

El método de los nodos

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}_x) = \mathbf{0} \tag{4}$$

donde

$$\mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_e]^T \tag{5}$$

$$\mathbf{H}_x = [H_1, H_2, \dots, H_e]^T \tag{6}$$

La pérdida de carga en una de las tuberías de la red esta dada por la ecuación:

$$Q_i = (h_l - h_m) \cdot r_i + a_i$$

donde

r_i = es el factor de resistencia, función de la perdida de carga $(h_l - h_m)$ en la tubería de extremos m y l .

a_i = factores externos de suministro de energía.

Teniendo en cuenta la ecuación de conservación de masa y aplicando la ecuación anterior a todas las ramas de la red, el sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ a_i \\ \cdot \\ -a_i \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_i & \cdot & -r_i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -r_i & \cdot & r_i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ h_i \\ \cdot \\ -h_i \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ -Q_i \\ \cdot \\ Q_i \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Durante el desarrollo del método de Newton Raphson la matriz tangente T requiere ser evaluada reiteradamente (Campos, 1991) y el sistema algebraico puede escribirse del siguiente modo: $T \cdot \Delta H_i = \Delta Q_i$. Para los casos prácticos en los que la diferencia $(h_l - h_m)$ se acerque a cero, los elementos que intervienen en el cálculo del jacobiano, tenderán a valores muy grandes provocando un mal condicionamiento del sistema.

la diferencia de presiones $|h_l - h_m|$ entre los nodos extremos de una tubería, producto de un caudal circulante muy bajo por esta arteria, es la que a su vez provoca que la derivada de la pérdida de carga toma valores grandes originando un mal condicionando al sistema resultante.

Estas dificultades se suman a las que se originan cuando los valores con el que se inician las iteraciones está lejos del radio de atracción de la solución. Estas dificultades ya fueron señaladas por Campos (Campos, 1991), este autor propone para saltar esta dificultad la inclusión de elementos híbridos que originan un nuevo sistema equivalente al original con un orden superior pero donde la matriz resultante este bien condicionada. Este elemento híbrido como su nombre lo indica, no modifica los parámetros de funcionamiento de la red y solo colabora en el buen condicionamiento del jacobiano.

ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

El método nodal conduce a un desarrollo de la ecuación (4) que ahora toma la forma:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \left[\frac{(hl_1 \quad hm_1)}{R_1} \right]^{1/n} + \dots \\
 F_2 &= \left[\frac{(hl_2 \quad hm_2)}{R_2} \right]^{1/n} + \dots \\
 F_e &= \left[\frac{(hl_e \quad hm_e)}{R_e} \right]^{1/n} + \dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

El proceso de resolución de Newton-Rapson está caracterizado por la presencia de una matriz A (Martin, 1963), en la que cada elemento a_{ij} es tal que se satisface la ecuación: $G(h_i) = X - A(h_i)^{-1} \times F(h_i)$ siempre que A sea no singular en el punto fijo de G esta ecuación asegura una solución de $F(x) = 0$.

De esta manera la ecuación anterior se define como: $G(h_i) = X - J(h_i)^{-1} \times F(h_i)$ donde J es la matriz jacobiana evaluada inicialmente en un vector inicial de presiones nodales h_i en los cuales A es no singular. De hecho la dificultad consiste precisamente en determinar ese vector inicial, para lo cual puede emplearse el teorema de Kantorovich (Kantorovich, 1964) el que asegura la existencia de un radio de atracción dentro del cual puede adoptarse un vector con el que al iniciar el procedimiento se garantice además convergencia cuadrática a la solución del sistema.

En consecuencia si la dificultad consiste en determinar este radio de convergencia los resultados que derivan del teorema de Kantorovich pueden sintetizarse de la siguiente forma:

Dadas las funciones F_1, \dots, F_n y un valor inicial h^0 tal que se verifican las condiciones:

- i) $|F(h_1^0, \dots, h_n^0)| \leq \eta$
- ii) La matriz jacobiana $J = [\partial F / \partial h(h_1, \dots, h_n)]$ tenga determinante $|J| \neq 0$ y el cofactor A_{ij} del elemento, entonces:
 - a) $(1/|J|) \cdot \sum |A_{ij}| \leq B$
 - b) $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial h_i \partial h_m} [h_1, \dots, h_n] \right| \leq L$
 - c) $\theta = B^2 \cdot \eta \cdot n^2$

donde B puede considerarse como el máximo valor de $(1/|J|) \cdot \sum |A_{ij}|$, η es la cota superior de F_i y L cota superior de $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial h_l \partial h_m} \right|$.

Entonces puede asegurarse que un sistema no lineal como el originalmente planteado tiene una solución que pertenece al interior de una esfera de radio r dada por la expresión:

$$r \leq \frac{1}{h} (1 - 2.h)^{1/2} \cdot B \cdot \eta. \tag{8}$$

Estas relaciones muestran por un lado las características de convergencia que pueden presentarse cuando los caudales circulantes en una o varias arterias de la red son bajos. En estos casos la derivada:

$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial h_l \partial h_m} \right| = - \frac{(h_l - h_m)^{-3/2}}{4.R^{1/2}_i}$ origina un valor alto para la cota L como para satisfacer las condiciones del teorema anterior.

Por otra parte aunque estas condiciones permitan estimar un radio de atracción desde el cual pueda optarse por un vector inicial debe notarse la complejidad a la hora de implementar prácticamente este método. Una alternativa viable en estos casos, consiste en focalizar la atención en determinados nodos denominados críticos de la red. Los mismos pueden surgir si por ejemplo se requiere una demanda máxima, condiciones de caudales en las aristas que deben permanecer acotadas o bien por una condición que contemple estos dos casos. Un algoritmo de optimización especificando un nodo fuente con demanda máxima y condiciones de caudales circulantes en las aristas que actúen como restricciones, permite sobrellevar la dificultad de matrices mal condicionadas y la falta de convergencia asociada a las mismas.

OPTIMIZACION EN NODOS CRITICOS

El algoritmo simplex fue originalmente desarrollado por Dantzing en el año 1940. En este trabajo se describirá la técnica de Tucker que consiste en una representación tabular de problemas asociados a la maximización y minimización canónica de funciones. Luego se mostrará con un ejemplo, la manera en que esta técnica permite una descripción más compacta y sencilla del problema.

El problema general puede plantarse de la siguiente manera:

Maximizar la función:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1.x_1 + c_2.x_2 + \dots, c_n.x_n - d \tag{9}$$

Sujeta a las condiciones:

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n \leq b_1$$

$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n \leq b_m \tag{10}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

Si se elige $t_1, t_2, \dots, t_m \geq 0$ de manera que considera que

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + t_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + t_2 &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + t_m &= b_m \end{aligned} \tag{11}$$

el problema puede reformularse como sigue:

Maximizar la función:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - d \tag{12}$$

Sujeta a las condiciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 &= -t_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 &= -t_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - b_m &= -t_m \end{aligned} \tag{13}$$

$$t_1, t_2, \dots, t_m \geq 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

Este conjunto de desigualdades puede expresarse mediante una tabla conocida como tabla de Tucker, (Strayer, 1989)

x_1	x_2	\dots	x_n	-1	
a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	b_1	$= -t_1$
a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	b_2	$= -t_2$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	b_m	$= -t_m$
c_1	c_2	\dots	c_n	d	$= f$

Esta tabla muestra como se disponen las restricciones del problema de optimización. Las funciones a maximizar se muestran en la última fila de la tabla de Tucker.

El siguiente ejemplo muestra como se pueden aplicar estos conceptos en una red hidráulica. La figura 1 muestra una red hidráulica compuesta por un gran numero de nodos de suministro. Si bien determinar los valores de presiones nodales y caudal en las arterias puede conducir al problema de matrices mal condicionadas, una alternativa viable consiste en ubicar uno o mas sectores críticos de la red y luego fijar determinados parámetros de funcionamiento de modo que la sub-red funcione bajo condiciones óptimas.

En la figura 1, se puede apreciar la sub-red compuesta por 1 nodo de grado fijo y cinco nodos de unión: 2 ... 6 . Las ecuaciones de gobierno de la sub-red asociada a la red principal Son las siguientes:

$$\begin{aligned} F_1 &= Q_1 - Q_3 - q_2 = 0 \\ F_2 &= Q_3 + Q_4 - Q_6 - q_3 = 0 \\ F_3 &= Q_2 - Q_4 - Q_5 - q_4 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$F_4 = Q_5 - Q_7 - q_5 = 0$$

$$F_5 = Q_6 + Q_7 - q_6 = 0$$

$$F_6 = R_1 (Q_1)^2 + R_3 (Q_3)^2 - R_4 (Q_4)^2 - R_2 (Q_2)^2 = 0$$

$$F_7 = R_6 (Q_6)^2 - R_7 (Q_7)^2 - R_5 (Q_5)^2 + R_4 (Q_4)^2 = 0$$

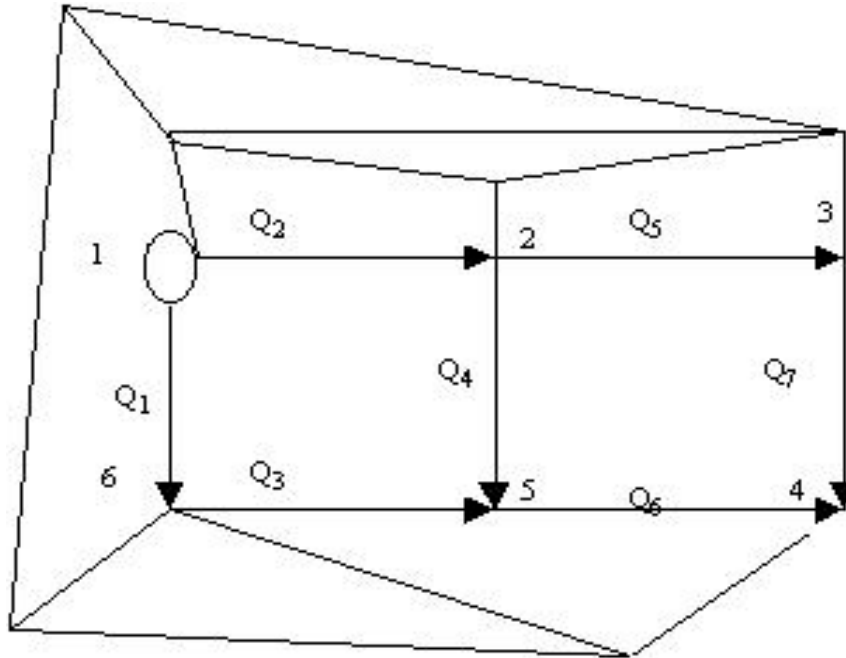


Figura 1

Ante el mal condicionamiento de la matriz jacobiana J, un planteo que deriva del problema original consiste en examinar una configuración “histórica” de la red, para lo cual se establecen restricciones los caudales, por caso:

$$Q_6 + Q_7 - q_6 \leq 1.2$$

$$Q_6 + Q_7 - q_6 \leq 1$$

$$Q_6 + Q_7 - q_6 \leq 0.9$$
(15)

Donde la función f a maximizar es la suma $Q_6 + Q_7$

Aceptando que como parte del problema se quiere se quiere satisfacer una demanda máxima en el nodo 4.

Si los demandas son: $q_2=1.1, q_3= 1.2, q_4= 0.8, q_5=1, q_6=0.9$.
 las resistencias en las aristas son: $R_1=2, R_2=1 R_3=2.5, R_4=4, R_5=2 R_6=3, R_7=4$. Mientras que la presión en el nodo de grado fijo 1 es $H=100m$.

La tabla de Tucker correspondiente a este problema es la siguiente:

	Q_6	Q_7	-1	
1	2	2	1.2	= $-t_a$
2	2	2	1	= $-t_b$

2	1	0.9	= -t _c
1	1	0	= f

Los caudales Q₆ y Q₇, actúan como variables independientes mientras que t_a, t_b y t_c son las variables dependientes.

t _c	t _b	-1	
1	1.3	0	= -t _a
-1	1	0.3	= - Q ₆
1	-1.6	0.6	= - Q ₇
1.02	0.95	1.1	= f

Ahora se dispone de dos caudales que junto con los otros tres constituyen el vector inicial con el que se inicia el método iterativo de Newton Rapshon. Luego de quince iteraciones los valores obtenidos para los caudales son: Q₁=2.086, Q₂=2.910, Q₃=0.980, Q₄=0.814 Q₅= 1.290, Q₆=0.600, Q₇= 0.299.

Estos resultados establecen valores cercanos a los óptimos de Q₆ y Q₇ que satisfacen una demanda máxima en el nodo 4. Por lo tanto, la utilización de esta técnica presenta una alternativa cuando se originan que permite resolver problemas de convergencia durante la aplicación del método de Newton Rapshon

CONCLUSIONES

Un problema que comúnmente puede presentarse al de resolver un sistema algebraico no lineal está asociado al de las características de convergencia que presente la técnica iterativa adoptada para su resolución.

Si durante la etapa de diseño y calibración de redes de distribución hidráulica los caudales circulantes en las arterias son bajos, la matriz jacobiana se torna mal condicionada y el proceso iterativo se torna indefinido no aportando ninguna solución al problema. Esta situación puede surgir debido al valor alto que toman las derivadas que componen la matriz tangente. Este trabajo propone una alternativa para tratar estos casos; Para ello se propone estudiar la red y establecer una sub-red en la que determinados parámetros denominados críticos deban satisfacer condiciones ligadas al funcionamiento histórico de la red, al tiempo que se genera una función de caudal demandado máximo o de presión nodal máxima.

El problema puede analizarse sistemáticamente con ayuda de las tablas de Tucker las que permiten plantear el sistema original como un problema de maximización canónica de caudales demandados. Estos resultados aportan los valores necesarios para iniciar el proceso iterativo de Newton-Rapshon cuando, de otro modo, su determinación a través del radio de atracción genera un enorme trabajo adicional de computación que lo torna inviable desde el punto de vista práctico.

BIBLIOGRAFIA

Bhave, P.R. - Analysis of Flow in Water Distribution Networks. Technomic Publishing Co. Inc. Lancaster 1991.

Marchegiani, A., Curia L. y Perini A. - Formulación de un Algoritmo en notación Matricial para la Resolución de Redes de Distribución Hidráulica. COBEM-CIDIM. Belo Horizonte, Brasil. 1995.

Martin, D. W. and Peters, G. - The application of Newton's method to network analysis by digital computers. J. Inst. Water Eng. Sci. 1963.

Ormsbree, L.E. and Wood, D.J. - Hydraulic design algorithms for pipe networks. - J. Hydraul. Eng. 1986.

Shamir, U. - Optimal design and operation of water distribution systems. - Water Resour. Res. 1974.

Shamir, U. - Optimization en water distribution systems. - Math Programming 1979.

Strayer, J. - Linear Programming and its Applications. - Springer - Verlag 1989.

Walters, G. A. - Optimal design of pipe networks: A review First International Conference on Computer Methods and Water Resources. Vol 2. Marrakesh, Morocco, 1988.

Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. A Functional Analysis in Normed Spaces, Mac Millan Book Co., New York, 1964.

LAMINAR-TURBULENT TRANSITION: A NEW MODEL OF THE NONLINEAR EVOLUTION OF A WAVE EMANATING FROM A POINT SOURCE IN A BOUNDARY LAYER

Marcello A. Faraco de Medeiros

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - Engenharia Mecânica
Av. Dom José Gaspar, 500 - 30535-610 - Belo Horizonte - MG - Brazil
email: marcello@pucminas.br

Márcio T. Mendonça

Centro Técnico Aeroespacial - Instituto de Atividades Espaciais
Pç Mal. Eduardo Gomes, 50 - 12228-904 - São José dos Campos - SP - Brazil
email: marcio_tm@yahoo.com

Summary. The nonlinear evolution of a wavetrain emanating from a point source is investigated. The experiments show that in the early stages the nonlinear behavior is characterized by the formation of longitudinal streaks. The theoretical model links these streaks to the generation of longitudinal vortices. The general behavior is similar to that observed in oblique transition. At later stages the experiments indicate the existence of resonant interaction of the K-type. This is triggered by the linear evolution of the waves close to the second branch under the influence of the streaks. The three-dimensional waves arising from resonant interaction in turn produce new streaks. The over all view is that the nonlinear regime displays features that are characteristic of both two and three dimensional waves.

Keyword: Hydrodynamic instability, laminar-turbulent transition, boundary layers, weakly nonlinear theory, perturbation methods.

1. INTRODUCTION

Most of the research in transition in boundary layers concentrates on the evolution of two-dimensional waves. However, the transition process that occurs naturally in practical applications almost always involves waves that are highly three-dimensional. The wavetrain emanating from a point source is a type of three-dimensional wave. The current work investigates the evolution of such wave system in the hope that it may bring some insight into more complicated transition scenarios, such as the natural transition.

Transition in boundary layers often develops from the amplification of Tollmien-Schlichting waves. Their initial evolution is described by the linear stability theory (Lin, 1955; Mendonça and Medeiros, 2000). When the waves become large the linear model fails, and nonlinear effects must be considered. It is now established that there are more than one nonlinear mechanism that can play a role in the process leading to transition (Herbert, 1988; Kachanov, 1994; Medeiros, 2000). For instant, if the linear regime is dominated by a two-dimensional wave, the process frequently involves the growth of three-dimensional subharmonic waves (Kachanov and Levchenko, 1984). The three-dimensional subharmonic waves have a preferred spanwise wavelength. Via the so called subharmonic resonance these waves grow from either artificially introduced subharmonic seeds or from the background noise. In other circumstances the three-dimensional waves that resonate are not subharmonic, but in fact have the same frequency of the two-dimensional dominant wave. In this situation the mechanism is called fundamental resonance. In both cases the subsequent evolution leads to the formation of lambda vortices. In the subharmonic case the vortices organize themselves in a staggered pattern. This is now frequently referred to as H-type transition after Herbert (1988). Otherwise the vortices organize themselves in lines. This is called K-type transition after Klebanoff, Tidstrom & Sargent (1962).

If the linear regime is dominated by a pair of three-dimensional waves traveling in opposite angles with respect to the streamwise direction, the nonlinear regime is characterized by the formation of streamwise vortices (Elofsson and Alfredsson, 1998). The vortices promote a redistribution of the streamwise momentum and give rise to streaks of positive and negative mean flow distortions. The streaks tend to keep their spanwise wavelength until turbulence sets in. The breakdown into turbulence appears to be connected to the instability of a spanwise secondary motion which is formed in the process. It is interesting to note that streamwise vortices are also a key ingredient of turbulent boundary layers.

The wavetrain emanating from a point source has been investigated elsewhere (Mack, 1985; Seifert, 1990; Kachanov *et al.*, 1985). These investigations were restricted to the linear regime. Stemmer, Kloker & Wagner (1998) and Medeiros (1999b) have studied the nonlinear regime of these waves. In both works it was found that the nonlinear regime was dominated by the formation of streamwise vortices and longitudinal streaks. These results tended to suggest that the nonlinear regime in this type of wavetrain was similar to that of oblique

transition. However, more recent developments to be shown here revealed that other mechanisms were also involved.

2. EXPERIMENTAL RESULTS

The experiments were carried out in the Low-Turbulence Wind-Tunnel of the University of Cambridge¹. The boundary layer developed on a 1.6m long flat plate placed vertically at the center of tunnel, with a free stream velocity of 17m/s. The streamwise velocity was recorded using a constant temperature hot-wire anemometer. The disturbances were generated by a loudspeaker embedded in the plate and connected to the flow via a small hole. Further details of the experimental set up and procedures can be found in Medeiros & Gaster (1999).

Some of the current experimental results have been published elsewhere (Medeiros, 1998; Medeiros, 1999b). They are also shown here to facilitate the reading. Figure 1 displays the evolution of the wavetrain along the centerline of plate at $y = 0.6\delta^*$, where δ^* represents the displacement thickness. The wave system is not a truly continuous wavetrain, but is long enough that its central part behaved like a continuous one. Initially the evolution is consistent with the linear instability theory. At about $x=700\text{mm}$ from the leading edge the flow develops a mean flow distortion, which is clearly linked to the passage of the wavetrain. This distortion grows and decays and at a latter stage becomes negative.

Measurements were also carried out at different spanwise positions, building up a three-dimensional picture of the disturbance field, figure 2. The mean flow distortion is more clearly seen if the oscillating part of the signal is filtered out. This is shown in figure 3, where the axes have been changed to facilitate the comparison between the frames. It is seen that the mean flow distortion is in fact three-dimensional. It involves a number of longitudinal streaks of positive and negative sign. Initially a negative streak forms at the center and two positive streaks appear, one on each side of the centerline. Further downstream other streaks develop. At $x=1000\text{mm}$ the central negative streak splits into two while a positive streak emerges at the center. This splitting is associated with the change of sign displayed in figure 1.

It is also interesting to observe the results in the Fourier domain, figure 4. Initially the energy is concentrated at relatively low spanwise wavenumbers. Further downstream, that is, after the splitting takes place, the spectra fills up. At that stage, significant energy is seen at a mode around $\beta = 0.2$. The very high wavenumber modes must be considered with care. The experiment did not have enough resolution to resolve such high wavenumbers, and therefore aliasing errors can not be ruled out.

In a previous work Medeiros (1999a) presented a weakly nonlinear model of the evolution of the wavetrain from a point source. The model links the first generation of streaks to a correction of order $O(a^2)$ to the linear approximation. In the model, a represents the amplitude of the wave. The second generation of streaks, that is, the streak splitting, was attributed to a correction of order $O(a^3)$. The model explained some features of the process. However, from the experimental data it appeared that the order $O(a^3)$ correction was larger than the order $O(a^2)$. This was difficult to explain within the frame work of the weakly nonlinear theory. Figure 4 shows that at later stages the mode of lower spanwise wavenumber decays. This feature also was not predicted by the model. In view of these shortcomings it was thought that further work would be of interest.

3. THE NEW THEORETICAL MODEL

The previous model considered the wavetrain as an essentially three-dimensional wave system. Indeed the wavetrain emanating from a point source in a boundary layer is composed of many modes with the same frequency, but covering a range of spanwise wavenumbers. However, the system is dominated by modes of very low spanwise wavenumber, including, the two-dimensional mode. Therefore it was considered that a nonlinear model would have to include also the interactions of two-dimensional waves. A simple model that allows two and three dimensional wave interactions comprises a two- dimensional wave and a pair of three-dimensional waves propagating at opposite angles.

Such a model has been presented by Benney (1961) in connection with the experiments carried out by Klebanoff et al. (1962). Improvements were made by Antar & Collins (1975) and Nelson & Craik (1977). The amplification is spatial, but the model presented here is temporal. It can easily be converted to a spatial model, as was done by Nelson & Craik (1977). However, as is frequently true in boundary layer transition, the essential features can be described by either a temporal or spatial model. The current example is no exception. In the temporal wavetrain the waves will have the same streamwise wavenumber α . The derivation outlined here is similar to that shown in these previews papers. The flow field is expanded in a perturbation series whose small parameter, a , is a measure of the amplitude of the wave system:

¹This facility is now located at the Queen Mary and Westfield College of the University of London.

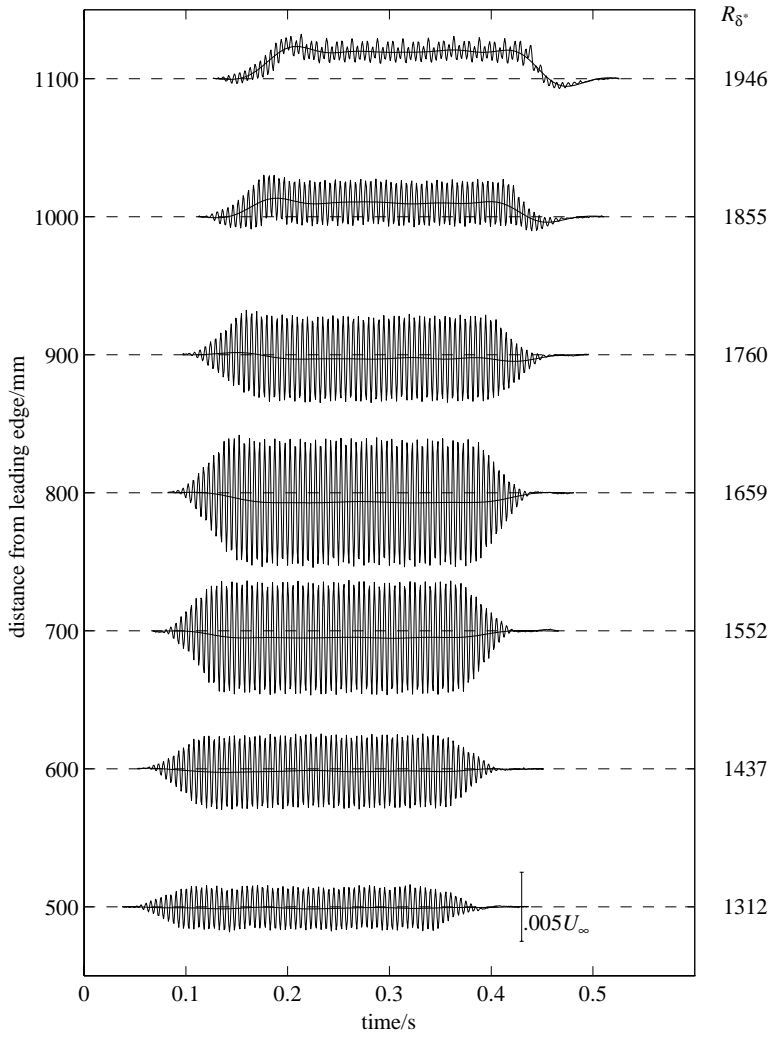


Figure 1: Evolution of the wave along the centerline at $0.6\delta^*$ from the wall. The wave amplitude is given by the scale at $x=500\text{mm}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + a\mathbf{v}_1 + a^2\mathbf{v}_2 + \dots, \\
 p &= p_0 + ap_1 + a^2p_2 + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

where \mathbf{v} is the velocity, with component u, v and w and p is the pressure.

The base flow is considered parallel: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{y})$. The streamwise direction is indicated by x , the spanwise direction by z and y is the direction perpendicular to the wall.

The order $O(1)$ system is associated with the base flow. Substituting the expansions in the Navier-Stokes equations, the order $O(a)$ equations read:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) &= 0, \\
 \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) &= 0, \\
 \frac{\partial w_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

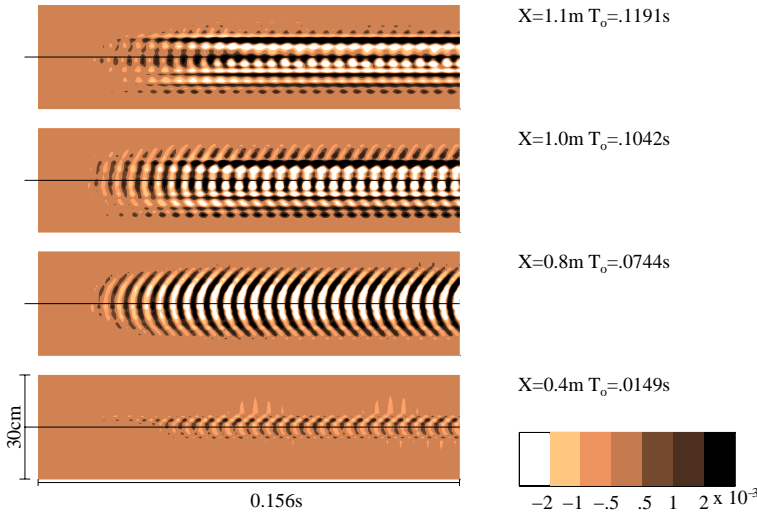
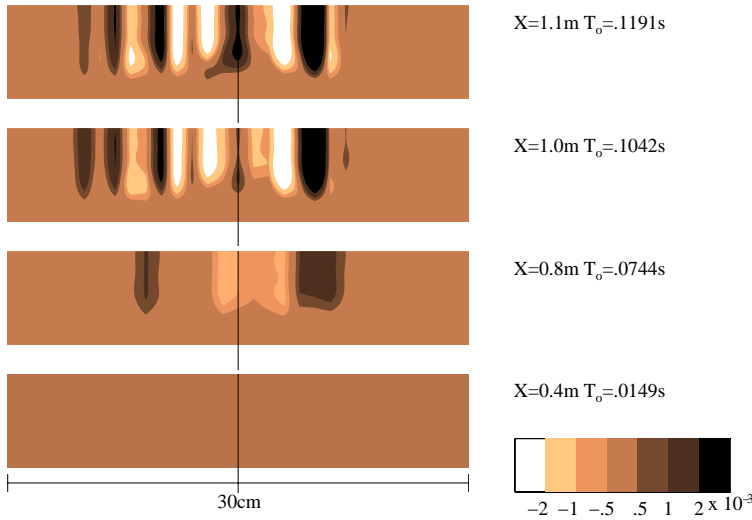

 Figure 2: Evolution of the wavetrain at $0.6\delta^*$ from the wall. Longitudinal disturbance velocity.


Figure 3: Evolution of the longitudinal mean flow distortion.

and

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

where the subscript 1 indicates order $O(a)$. The Reynolds number is represented by R .

A possible solution representing the three wave system proposed is given by:

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda \hat{u}_\lambda(y) e^{i\alpha x - \omega_\lambda t} + \mu \hat{u}_\mu(y) e^{i\alpha x - \omega_\mu t} \cos \beta z + \text{c.c.}, \\ v_1 &= \lambda \hat{v}_\lambda(y) e^{i\alpha x - \omega_\lambda t} + \mu \hat{v}_\mu(y) e^{i\alpha x - \omega_\mu t} \cos \beta z + \text{c.c.}, \\ w_1 &= \lambda \hat{w}_\lambda(y) e^{i\alpha x - \omega_\lambda t} + \mu \hat{w}_\mu(y) e^{i\alpha x - \omega_\mu t} \sin \beta z + \text{c.c.}, \\ p_1 &= \lambda \hat{p}_\lambda(y) e^{i\alpha x - \omega_\lambda t} + \mu \hat{p}_\mu(y) e^{i\alpha x - \omega_\mu t} \cos \beta z + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (4)$$

where subscript λ indicates the two-dimensional wave and μ the three-dimensional ones. The linear combination of the three-dimensional waves produces a wave that is stationary in the z direction. In Benney's work this was motivated by the use of spacers in Klebanoff's experiments. Here the wave system is fixed by the position of the point source. In order to have a real physical disturbance one includes the complex conjugate, which is indicated by c.c. All waves have identical streamwise wavenumber α , but different frequency ω . The disturbance field vanishes both at the wall and far from it. Solving the system 2 with these boundary conditions for given α and β , provides the eigenvalue ω and the eigenfunctions \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} , \hat{p} . These represent the solution of the linear instability problem, namely, the Tollmien-Schlichting waves.

The order (a^2) equations describe the first weakly nonlinear correction:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) = -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z},$$

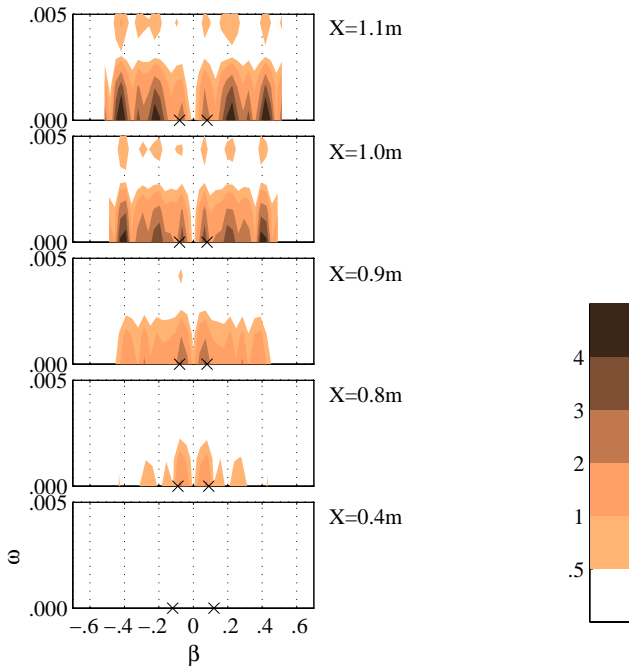


Figure 4: Evolution of the mean flow distortion in the Fourier domain

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right) &= -u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} \right) &= -u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} - w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

This linear system admits a solution similar to that of equation 2, but also includes the particular solution associated with the non-homogeneous term on the right-hand side. Following Benney (1961) the particular solution consists of two parts: one that oscillates with wavenumber 2α and another non-oscillatory that constitutes a secondary mean flow. It is the latter part that is linked to the experimental observations.

Upon consideration of the various components of the non-homogeneous terms it is found that the mean secondary flow is in the form:

$$\begin{aligned} u_2 &= \mu^2 \hat{u}_a e^{2\omega_{\mu i} t} \cos 2\beta z + \lambda \mu \left(\hat{u}_b(y) e^{-i(\omega_{\lambda} - \omega_{\mu}^*) t} + \hat{u}_b^*(y) e^{i(\omega_{\lambda}^* - \omega_{\mu}) t} \right) \cos \beta z + \\ &\quad \mu^2 \hat{u}_c(y) e^{2\omega_{\mu i} t} + \lambda^2 \hat{u}_d(y) e^{2\alpha \omega_{\lambda i} t}, \\ v_2 &= \mu^2 \hat{v}_a e^{2\omega_{\mu i} t} \cos 2\beta z + \lambda \mu \left(\hat{v}_b(y) e^{-i(\omega_{\lambda} - \omega_{\mu}^*) t} + \hat{v}_b^*(y) e^{i(\omega_{\lambda}^* - \omega_{\mu}) t} \right) \cos \beta z + \\ &\quad \mu^2 \hat{v}_c(y) e^{2\omega_{\mu i} t} + \lambda^2 \hat{v}_d(y) e^{2\alpha \omega_{\lambda i} t}, \\ w_2 &= \mu^2 \hat{w}_a e^{2\omega_{\mu i} t} \cos 2\beta z + \lambda \mu \left(\hat{w}_b(y) e^{-i(\omega_{\lambda} - \omega_{\mu}^*) t} + \hat{w}_b^*(y) e^{i(\omega_{\lambda}^* - \omega_{\mu}) t} \right) \cos \beta z + \\ &\quad \mu^2 \hat{w}_c(y) e^{2\omega_{\mu i} t} + \lambda^2 \hat{w}_d(y) e^{2\alpha \omega_{\lambda i} t}, \\ p_2 &= \mu^2 \hat{p}_a e^{2\omega_{\mu i} t} \cos 2\beta z + \lambda \mu \left(\hat{p}_b(y) e^{-i(\omega_{\lambda} - \omega_{\mu}^*) t} + \hat{p}_b^*(y) e^{i(\omega_{\lambda}^* - \omega_{\mu}) t} \right) \cos \beta z + \\ &\quad \mu^2 \hat{p}_c(y) e^{2\omega_{\mu i} t} + \lambda^2 \hat{p}_d(y) e^{2\alpha \omega_{\lambda i} t}. \end{aligned} \quad (6)$$

In the equations, the index i denotes the imaginary part while $*$ indicates complex conjugate. The meaning of the four terms is given by Benney (1961). The a and b flows are three-dimensional mean flow distortions. They arise, respectively, from the interaction of the three-dimensional waves and from the interaction of the two dimensional wave with the three-dimensional ones. The two-dimensional c and d flows originate from the interaction of the three-dimensional waves and of the two-dimensional waves, respectively. It can also be shown that

$$\hat{v}_c = \hat{w}_c = \hat{v}_d = \hat{w}_d = 0. \quad (7)$$

The system 5 can be solved to give the y -distribution of the secondary flow field. This was done by Benney (1961) for a free-shear flow and by Antar & Collins (1975) for a boundary layer. The results of Antar & Collins (1975) show that for a Blasius boundary layer the flow field in a y - z plane corresponds to that produced by a

number of longitudinal vortices of alternating sign whose center lies at about $y = 0.5\delta^*$. Benney also showed that, because equation (7), the u_c and the u_d flows add only small corrections to the secondary mean flow.

It is then concluded that the mean flow distortion is essentially three-dimensional. When the wave system is dominated by the two-dimensional wave the secondary mean flow has spanwise wavenumber β , the b flow. Otherwise the wavenumber is 2β , the a flow. The b flow has also an exponential factor that involves the frequency difference between the two and the three-dimensional waves. Since this difference is small, it imparts a low frequency (streamwise wavenumber, if spatial) modulation onto the b flow.

To apply these theoretical results it is necessary to approximate the wavetrain emanating from a point source to a system composed of a two-dimensional wave plus two three-dimensional ones. The two-dimensional wave is easily defined. For the selection of the appropriate three-dimensional wave, different criteria may be applied. The criterium used here was as follows. It is clear from experiments and theory that, in the linear regime, the streamwise component of the disturbance velocity field is, in some sense, dominated by the two-dimensional wave. However, this is not so for the spanwise component. Measurements of the spanwise component could not be carried out, but this can be computed from the linear stability theory.

Figure 5 displays spanwise velocity at a particular distance from the wall in a β - x plane. The results do not change significantly at other distances from the wall. It is seen that the maxima occur at β about 0.06. The results of Benney (1961) show that the streamwise vorticity is forced by interactions between the v and the w components. Because of it, it was then considered that the spectra of the spanwise velocity component could provide a good criterium for the selection of the most representative three-dimensional mode. The dominant β is given by the x-symbols in figure 4. It is seen that they lie close to the modes of the early nonlinear stages. The decay of these modes, as observed in the experiments, appears to be linked to the low frequency modulation of the b flow.

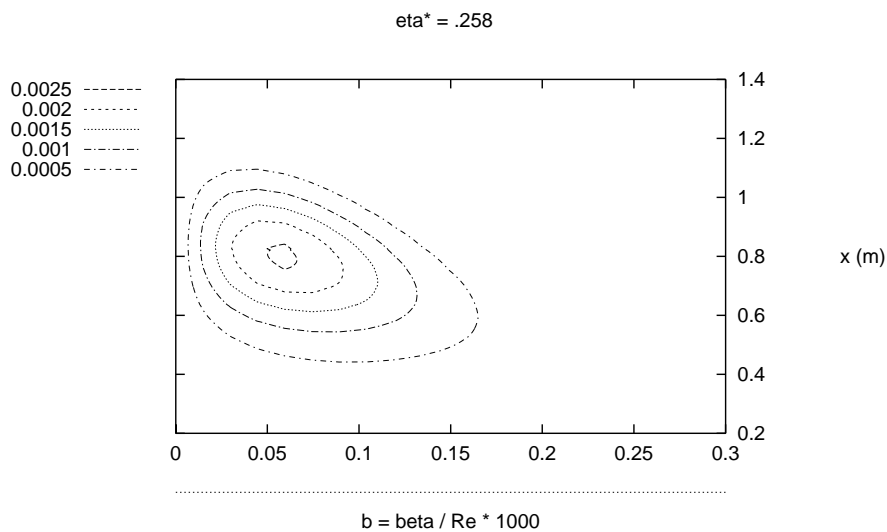


Figure 5: Spanwise velocity component in a β - x plane for a particular distance from the wall

At first the spectral peaks at $\beta = 0.2$ appeared to be linked to the a flow. The spanwise wavenumber is about twice that dominating the linear spanwise velocity field. It grows continuously because the c flow does not display a low frequency modulation. The reason that this flow arises at a later stage appeared to be that the linear wavetrain is dominated by a two-dimensional wave.

However, a careful look at equations 6 as well as the results by Benney (1961) and Antar & Collins (1975) reveals that the splitting is expected at a positive streak rather than negative. That is because, prior to the first change of sign of the b flow due to the slow modulation, both the a and the b flows produce a negative streak at $z = 0$. It appeared as if the a flow had had a 180° phase shift.

4. KLEBANOFF TYPE INSTABILITY

While the secondary mean flow is formed the oscillating part of the disturbance field also develops an interesting spanwise structure. This is more clearly seen in figure 6 where the three-dimensional mean flow

distortion was filtered out of the velocity record. In the linear regime the waves form crescents and there is one maximum in amplitude. Further downstream other maxima appear, but two amplitude maxima, one at each side of the center of the wave, dominate the velocity field. The picture resembles the peak and valley structures observed by Klebanoff et al. (1962).

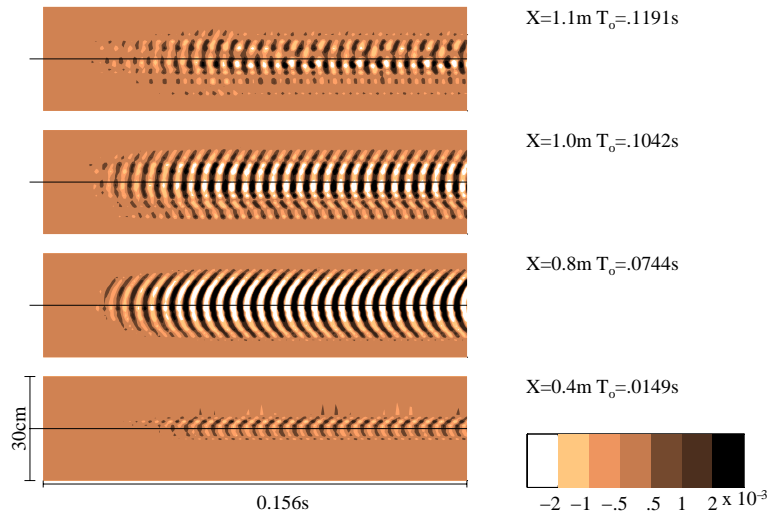


Figure 6: The peak and valley formation in the evolution of the three-dimensional wavetrain.

Further insight into the peak and valley structure can be obtained in Fourier space. Figure 7 shows, for different streamwise stations, the spanwise spectra of both the oscillating and the mean parts of the signal. It is seen that at around $x=700\text{mm}$ the spectral distribution of the oscillating part of the signal is roughly Gaussian. It is not very symmetrical and is also noisy, but these are due to experimental imperfections. The three-dimensional mean flow distortion displays basically two peaks at β about ± 0.08 . This is consistent with the streak structure observed there. At $x=1000\text{mm}$ and 1100mm the oscillating part develops two peaks at around $\beta = 0.2$. The pictures point to a secondary instability of the Klebanoff type whereby three-dimensional waves are excited by a fundamental resonance. This is not unexpected since the three-dimensional wavetrain contains modes that may provide the seed for such resonance. Since the wavetrain does not contain subharmonic waves, a seed for subharmonic resonance would have to come from the background noise of the tunnel which is considerably low.

At the same time the three-dimensional mean flow distortion develops other peaks. The highest peak is at very high spanwise wavenumber and must be considered with care since it is probably contaminated by aliasing errors and other experimental imperfections. The second highest peak is at $\beta = 0.2$. It appears to arise from a nonlinear interaction of the type described in section 2 between a two-dimensional wave and a pair of three-dimensional waves of spanwise wavenumber 0.2.

However, the modes composing the wavetrain have all the same phase in spanwise direction. Therefore, the mean flow distortion arising from the nonlinear interaction mentioned above would have to produce a negative streak at the center. This is not consistent with the streak splitting observed. To generate a negative streak at the center the three-dimensional would have to have a phase shift of 180° .

In the experiment by Klebanoff et al. (1962) a similar phase shift was reported. In that experiment, a two-dimensional disturbance was introduced using the now well-known vibrating-ribbon technique. Spacers were placed underneath the ribbon to impart a three-dimensional seed to the flow. The appearance of three-dimensionality in the wavetrain was attributed to spanwise variation of the linear amplification due to Reynolds number variation across the span. That was because the spacers produced small defects in the boundary layer profile which yielded a spanwise variation of the displacement thickness. At the spacer positions larger displacement thickness were obtained and so higher Reynolds number based on the displacement thickness. Therefore close to the first branch larger amplification rates were expected at the spacer positions, and accordingly peaks developed. On the other hand, close to the second branch, valleys appeared at the spacer locations, and the peak and valley structure were a 180° out of phase, Klebanoff et al. (1962) figure 13. In an earlier experiment, Klebanoff & Tidstrom (1959) studied this feature in even more detail. There it was found that the mean flow distortion had the role of establishing the phase of the peak and valley structure, and that the following amplification of the three-dimensional structure was the outcome of a nonlinear process not known at the time. It is now established that this nonlinear process is one of fundamental resonance, (Herbert, 1988). But what is of particular interest to the current study is the difference in behavior between the first and the second branch.

In the current experiment the waves cross the second branch somewhere between $x=800$ and 900mm , as is suggested by figure 1. That is also the position where peaks and valleys are seen to develop. Figure 8

shows a comparison between the three-dimensional mean flow distortion and the peak and valley structure at $x=800\text{mm}$. A valley develops within the negative streak, in a way that is consistent with the arguments presented by Klebanoff et al. (1962).

The displacement thickness variation at $x=800\text{mm}$ is too small to produce the amplitude variation via modulation of the linear amplification rate. Nevertheless, as occurred with the Klebanoff's spacers, it appears to be enough to establish the phase of the peak and valley structure.

In the linear regime the wavetrain displays a maximum close to the centerline of the plate. At $x=900\text{mm}$ a minimum is seen in that region. If now one wants to approximate the oscillating part of the signal at $x=900\text{mm}$ by one two-dimensional wave plus two three-dimensional ones, there would be a phase shift relative to the approximation in the linear regime. For a perfectly symmetric experiment this phase shift would be 180° . The spanwise wavenumber would also be different. It would arise from the selective amplification of the fundamental resonance mechanism. A weakly nonlinear interaction of the type described in section 3 would then produce streaks with higher spanwise wavenumbers and with a phase shift of 180° . This is consistent with the experimental observations.

5. CONCLUSIONS

The nonlinear evolution of two-dimensional waves in boundary layer usually involves a resonant mechanism of either fundamental or subharmonic nature. On the other hand, essentially three-dimensional waves form longitudinal streaks when they become nonlinear. In the current investigation the wave system involves two and three-dimensional waves. It should not be surprising that in this case both a resonant mechanisms and the formation of streak play important roles in the process. The resonance is of the fundamental type. The second branch is also seen to play an essential role in establishing the phase of the resonant waves. At a later stage new streaks are formed as a result of the interaction of the three-dimensional waves arising in the process.

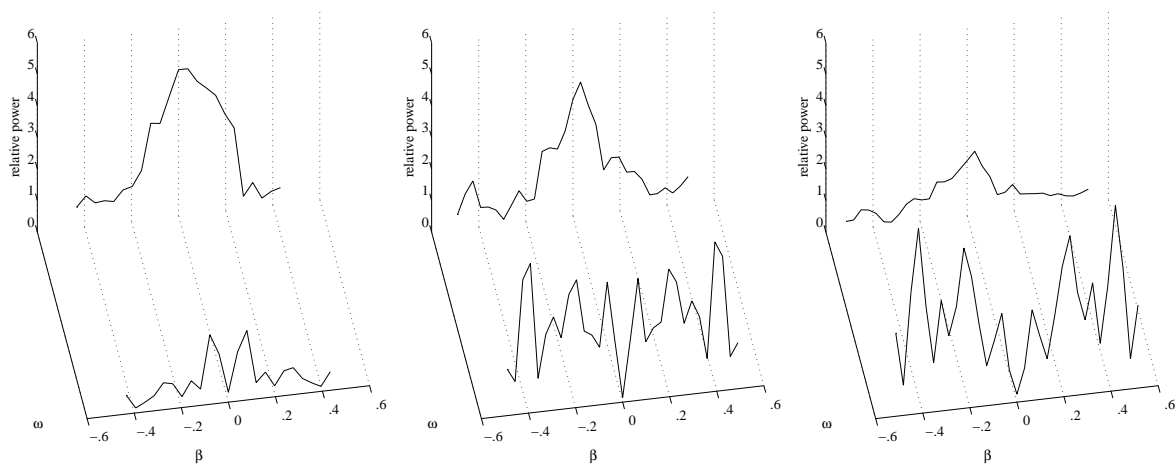


Figure 7: Comparison of the spanwise spectra of the mean and the oscillating signal for streamwise stations 800mm, 1000mm and 1100mm.

6. REFERENCES

- Antar, B. N., and Collins, F. G. 1975. Numerical calculations of finite amplitude effects in unstable laminar boundary layers. *Phys. Fluids*, **18**, 289–297.
- Benney, D. J. 1961. A nonlinear theory for oscillations in a parallel flow. *J. Fluid Mech.*, **10**, 208–236.
- Elofsson, Per A., and Alfredsson, P. Henrik. 1998. An experimental study of oblique transition in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, **358**, 177–202.
- Herbert, Th. 1988. Secondary instability of boundary layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20**, 487–526.
- Kachanov, Yu. S. 1994. Physical Mechanisms of laminar boundary layer transition. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **26**, 411–482.
- Kachanov, Yu. S., and Levchenko, V. Ya. 1984. The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **138**, 209–247.
- Kachanov, Yu. S., Kozlov, V. V., Levchenko, V. Ya., and Ramazanov, M.P. 1985. Nonlinear development of a wave in a boundary layer. *Pages 61–73 of: Kozlov, V. V. (ed), Laminar-turbulent transition.* Springer-Verlag.

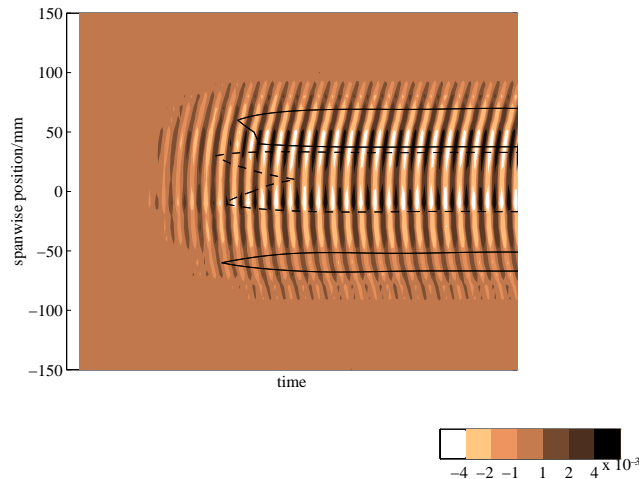


Figure 8: Flow field at $x=800\text{mm}$. The filled contours represent the oscillating part of the signal. The solid contour line indicates the positive streak, while the dashed line indicates the negative streak. The contour level are $\pm 0.5 \cdot 10^{-4}$.

- Klebanoff, P. S., and Tidstrom, K. D. 1959. *Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient*. Tech. rept. D-195. N.A.S.A. Tech note.
- Klebanoff, P. S., Tidstrom, K. D., and Sargent, L. M. 1962. The three-dimensional nature of boundary layer instability. *J. Fluid Mech.*, **12**, 1–34.
- Lin, C. C. 1955. *The Theory of Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- Mack, L. M. 1985. Instability Wave Patterns from Harmonic Point Sources and Line Sources in Laminar Boundary Layers. *Pages 125–132 of: Kozlov, V. V. (ed), Laminar-turbulent transition*. springer-Verlag.
- Medeiros, M. A. F. 1998 (September). nonlinear evolution of a three-dimensional wavetrain in a flat plate boundary layer. *In: 21th Congress of the International Council do the Aeronautical Sciences*.
- Medeiros, M. A. F. 1999a (december). Laminar-turbulent transition: a theoretical model of the nonlinear evolution of three-dimensional wavetrains in boundary layers. *In: XV Brazilian congress of mechanical engineering*. in CD-ROM.
- Medeiros, M. A. F. 1999b (June). Nonlinear evolution of low amplitude spanwise modulated wavetrains in boundary layers. *Pages 1–8 of: 30th AIAA Fluid Dynamics Conference*.
- Medeiros, M. A. F. 2000 (December). nonlinear hydrodynamic instability. *Pages 312–357 of: II school of transition and turbulence*. in portuguese.
- Medeiros, M. A. F., and Gaster, M. 1999. The influence of phase on the nonlinear evolution of wavepackets in boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **399**, 259–283.
- Mendonça, M. T., and Medeiros, M. A. F. 2000 (October). On subharmonic and fundamental instability modes in boundary layers. *In: 8th brazilian congress on thermal engineering and sciences*.
- Nelson, G., and Craik, A. D. D. 1977. Growth of streamwise vorticity in unstable boundary layers. *Phys. Fluids*, **20**, 698–700.
- Seifert, A. 1990. *On the interaction of small amplitude disturbances emanating from discrete points in a Blasius boundary layer*. Ph.D. thesis, Tel-Aviv University.
- Stemmer, C., Kloker, K., and Wagner, S. 1998 (June). DNS of harmonic point source disturbances in an airfoil boundary layer flow. *Pages 1–11 of: 29th AIAA Fluid Dynamics Conference*.

UMA ANÁLISE DO ERRO INDUZIDO PELA CONVECÇÃO NATURAL EM TERMO-ANEMÔMETROS

Saulo Güths

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica
88040-900 Florianópolis / SC
saulo@lmpt.ufsc.br

Luis Gustavo Bertezini

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica
88040-900 Florianópolis / SC
luis@lmpt.ufsc.br

Adirlei André Kraemer

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica
88040-900 Florianópolis / SC
adirlei@lmpt.ufsc.br

Resumo: *Esse trabalho apresenta um termo-anemômetro omnidirecional a corrente constante utilizando como elemento sensor um termistor tipo NTC (negative temperature coefficient). É descrito o circuito eletrônico de geração de corrente constante construído a partir de componentes de baixo custo. É igualmente apresentado um sistema de calibração para baixas velocidades de fluido baseado em um escoamento laminar plenamente desenvolvido. Através de um sistema de basculamento é gerado escoamentos ascendentes e descendentes, possibilitando a avaliação da influência da convecção natural induzida pelo aquecimento do elemento sensor. É feita também uma análise teórica avaliando-se a influência da convecção natural e convecção forçada a diversas velocidades do escoamento, a partir do parâmetro adimensional número de Nusselt.*

Palavras chave: *anemômetro, baixa velocidade, termo-anemômetro, túnel de vento, convecção*

1. Introdução

Os escoamentos em baixas velocidades estão presentes em diversas aplicações, em particular nos casos onde a convecção natural se faz presente. Os anemômetros freqüentemente apresentam erros aleatórios e sistemáticos importantes na medição de baixas velocidades. No anemômetro LASER-Doppler a perturbação pode ser gerada na injeção de partículas ou fumaças. Nos termo-anemômetros o calor gerado pelo sensor pode causar perturbações ao escoamento.

Esse trabalho apresenta um termo-anemômetro omnidirecional a corrente constante utilizando como elemento sensor um termistor tipo NTC (Negative Temperature Coefficient). É descrito o circuito eletrônico de geração de corrente constante construído a partir de componentes de baixo custo. É igualmente apresentado um sistema de calibração para baixas velocidades de fluido baseado em um escoamento laminar plenamente desenvolvido. Através de um sistema de basculamento é gerado escoamentos ascendentes e descendentes, possibilitando a avaliação da influência da convecção natural induzida pelo aquecimento do elemento sensor.

É feita também uma análise teórica avaliando-se a influência da convecção natural e convecção forçada a diversas velocidades do escoamento, a partir do parâmetro adimensional número de Nusselt.

2. Dispositivos Experimentais

2.1. Termo-anemômetro

Os termo-anemômetros podem ser divididos em duas classes; a corrente constante e a temperatura constante. Para este trabalho, optou-se pela construção de um termo-anemômetro a corrente constante devido à simplicidade do circuito eletrônico. A Figura (1) mostra esquematicamente o circuito.

Como elemento sensor utilizou-se um termistor tipo NTC na forma de disco com 2mm de diâmetro e 0,5mm de espessura. A forma do sensor foi aproximada a uma esfera com o objetivo de tornar o termo-anemômetro omnidirecional, conforme mostrado na Figura (2).

A alimentação do sistema pode variar de 15 a 30 VDC, produzindo como sinal de saída uma tensão da ordem de 10VDC. A corrente de alimentação do sensor depende do resistor R. Para uma corrente de 15mA foi utilizado um resistor de 330 Ω , com um regulador de tensão de 5 V DC (7805).

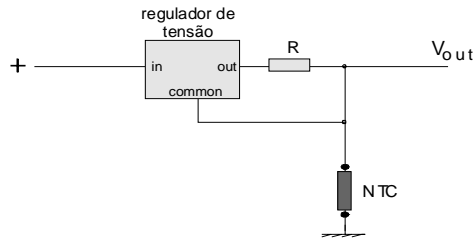


Figura 1: Esquema do circuito elétrico.



Figura 2: Fotografia do elemento sensor de formato esférico.

2.2. Túnel de vento

Construiu-se um sistema de calibração baseado no escoamento laminar plenamente desenvolvido em um longo duto (3m) com seção transversal retangular (16mm x 32mm), conforme mostrado na Figura (3).

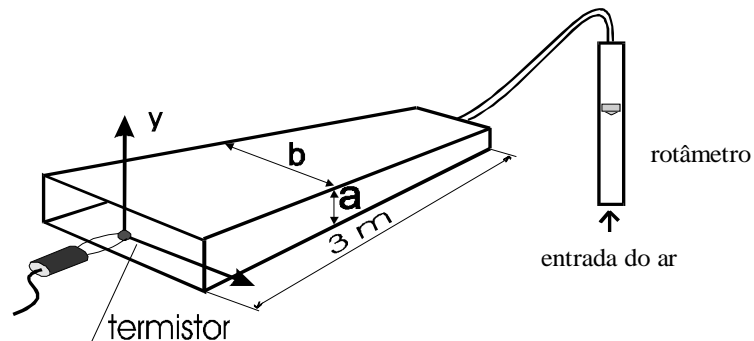


Figura 3: Sistema de calibração a escoamento laminar plenamente desenvolvido.

O termo-anemômetro é colocado no centro do escoamento onde a velocidade (V) é dada pela Equação (1):

$$V(x, y) = \frac{9Q}{4.ab} \left[1 - \left(\frac{x}{b/2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{y}{a/2} \right)^2 \right] \quad (1)$$

onde Q é a vazão (m^3/s) e a e b são as dimensões da seção transversal do duto, segundo Bejan (1984).

A vazão foi medida por um jogo de rotâmetros calibrados, apresentando uma incerteza inferior a 2 %. O duto tem sua temperatura controlada através da circulação d'água, condicionada por um segundo duto de envoltório, com escoamento a contracorrente. A variação de temperatura do sistema permaneceu inferior a 0,5 K durante o intervalo de calibração.

Para esse tipo de escoamento, Kays e Perkins (1984) propõem um comprimento mínimo de 2,8m para que os perfis dinâmicos e térmicos estejam plenamente desenvolvidos. A condição de regime laminar é obtida até velocidades centrais da ordem de 3m/s. Essa condição está sendo respeitado com a utilização de um duto com 3 m de comprimento.

O duto pode ser basculado de forma a permitir o estudo de escoamento a diferentes ângulos. Esse tipo de túnel de vento foi analisado por Güths (1994), onde detectou diferenças inferiores a 2 % quando comparado com um anemômetro LASER.

A Figura (4) mostra uma curva de calibração típica do termo-anemômetro construído, utilizado com corrente constante de 15 mA e temperatura do escoamento igual a 25 °C.

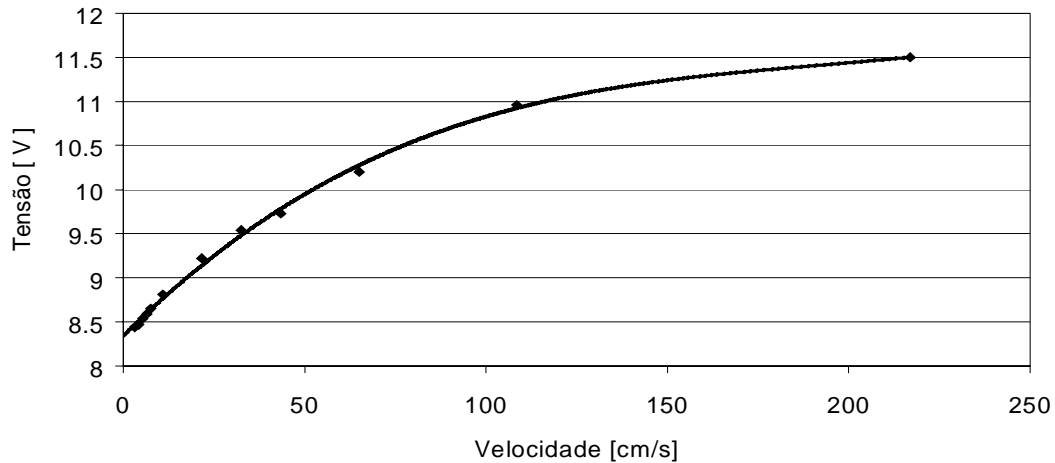


Figura 4: Curva típica de calibração do termo-anemômetro.

Nota-se um comportamento assintótico do sinal, apresentando sensibilidade elevada numa faixa de velocidade de 0 a 1 m/s (que é justamente a faixa desejável de medição). A aproximação de um polinômio de 3ª ordem produziu um coeficiente R² igual a 0,997. A incerteza de medição é estimada em 0,3 cm/s + 3 %.

3. Análise do Efeito da Convecção Natural

O fator limitante para a utilização do termo-anemômetro na medição de baixas velocidades de escoamento é a perturbação induzida por convecção natural, devido ao próprio aquecimento do elemento sensor. Como a convecção natural é direcional, pois depende da ação da gravidade, realizou-se a calibração do termo-anemômetro a diferentes escoamentos: horizontal, vertical ascendente e vertical descendente. A Figura (5) mostra os resultados obtidos, onde é visível a influência da perturbação causada pela convecção natural.

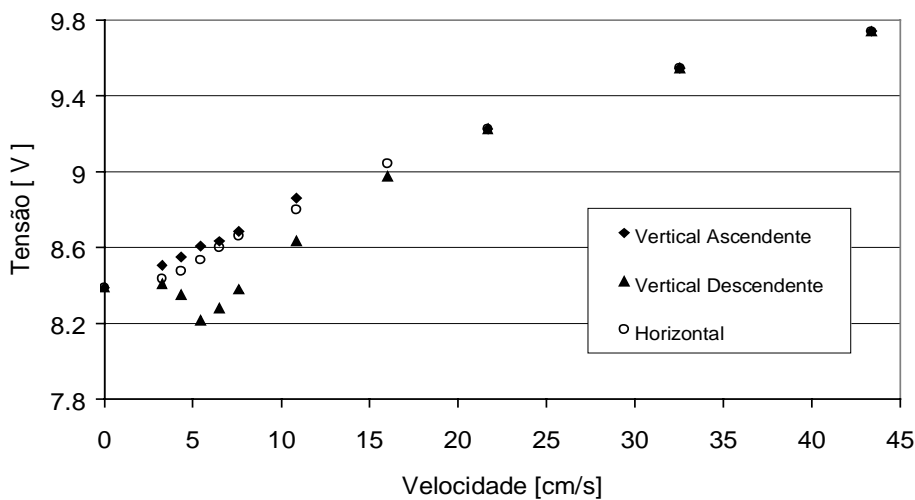


Figura 5: Calibração a escoamento horizontal, vertical ascendente e vertical descendente.

A curva superior é relativa a um escoamento vertical ascendente. A convecção natural intensifica o escoamento, causando um acréscimo do sinal, quando comparado com o escoamento horizontal (curva central). Já no escoamento vertical descendente, a convecção natural age a contra-corrente, reduzindo significativamente as trocas de calor, causando uma sensível redução do sinal. A Figura (6) mostra o erro de medição (em relação ao escoamento horizontal) para três níveis de corrente de alimentação no termo-anemômetro.

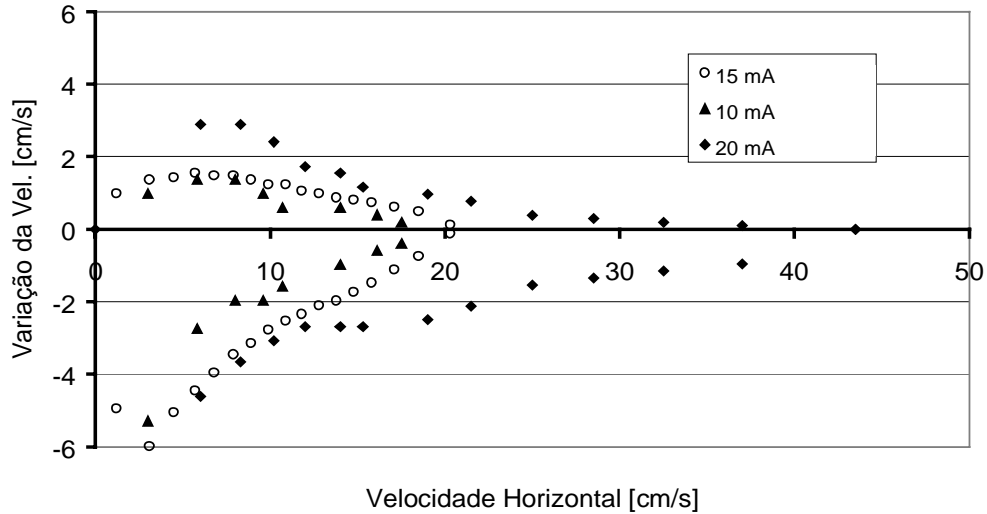


Figura 6: Erro de medição em relação ao escoamento horizontal para I=10mA, I=15mA e I=20mA.

Nota-se que o erro aumenta com a corrente de alimentação já que as temperaturas envolvidas são mais altas, e a influência da convecção natural se faz presente a velocidades maiores. Esse fenômeno ocorre em todos os termo-anemômetros e erros significativos podem estar presentes, caso a utilização aconteça em posição diferente àquela de calibração.

4. Análise Teórica

O elemento sensor do termo-anemômetro é considerado uma esfera com temperatura homogênea, trocando calor com o ar ambiente por convecção natural e convecção forçada. É desprezada a troca radiante, dado a baixa emissividade da superfície (superfície metálica polida). Uma das correlações para a transferência de calor por convecção forçada de uma esfera é proposta por Whitaker (1972).

$$\overline{Nu}_F = 2 + (0,4 \cdot Re_D^{1/2} + 0,06 Re_D^{2/3}) \cdot Pr^{0,4} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right) \tag{2}$$

onde Nu_D é o número de Nusselt baseado no diâmetro (D) da esfera, Re_D é o número de Reynolds, Pr o número de Prandt e μ a viscosidade do fluido.

Já para convecção natural, Churchill (1983) propõe a seguinte correlação:

$$\overline{Nu}_n = 2 + \frac{0,589 \cdot Ra^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0,469}{Pr}\right)^{1/6}\right]^{4/9}} \tag{3}$$

onde Ra é o número de Rayleigh.

A partir de dados experimentais de tensão em função da velocidade e resistência em função da temperatura do termo-anemômetro, foi determinado o valor de Nusselt para a convecção forçada e natural, em função da velocidade. A Figura (7) apresenta os resultados obtidos.

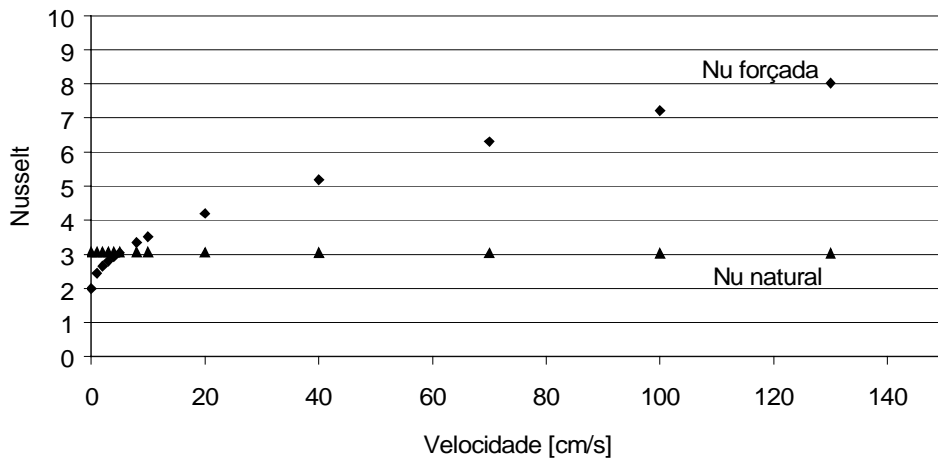


Figura 7: Comparação entre os valores de Nusselt referentes à convecção natural e forçada em função da velocidade.

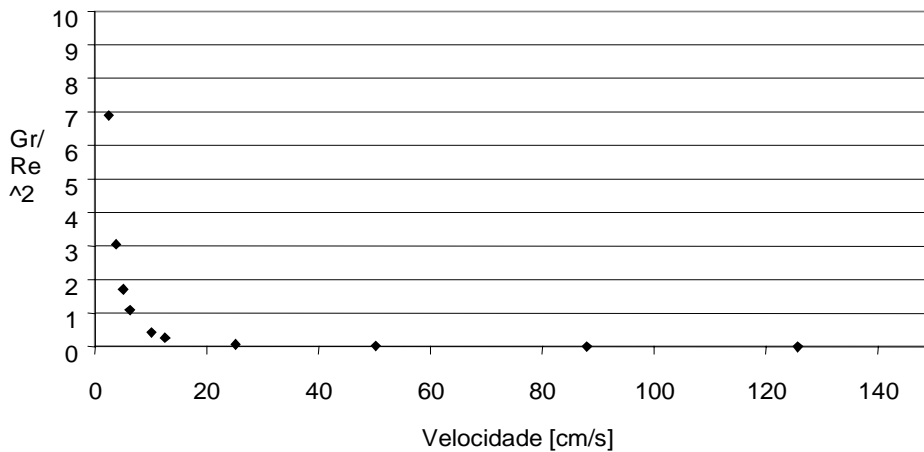


Figura 8: Avaliação do parâmetro Gr/Re^2 a diferentes velocidades do escoamento.

Nota-se que para baixas velocidades o valor de Nusselt natural é superior ao valor de Nusselt forçado, demonstrando a preponderância dessa forma de transferência de calor. Outra forma de avaliar o peso da convecção natural é através do parâmetro adimensional Gr/Re^2 . A Figura (8) mostra os valores obtidos em função da velocidade para o termo-anemômetro em análise.

Churchill (1983) e Bejan (1986) afirmam que para valores de Gr/Re^2 superiores à unidade a convecção natural é preponderante, e para valores muito menores que a unidade a convecção forçada é a principal forma de troca de calor. Essa avaliação vem corroborar os resultados obtidos experimentalmente, onde foi visível o efeito da convecção natural para velocidades até 20 cm/s.

4. Conclusão

A construção do termo-anemômetro a corrente constante apresentou-se extremamente simples tanto do ponto de vista mecânico como eletrônico. O circuito pode ser construído com componentes de baixo custo e fácil acesso no mercado.

O desenvolvimento do túnel de vento com escoamento laminar plenamente desenvolvido mostrou-se eficaz para a calibração de anemômetros a baixas velocidades, podendo vir a preencher uma importante lacuna nesse setor. O sistema basculante permitiu uma análise importante da influência da convecção natural nas trocas térmicas do sensor, permitindo uma avaliação rápida dos possíveis erros na medição de baixas velocidades. A análise dos números de Nusselt natural e forçado corroboram os resultados experimentais.

Pretende-se, na continuidade desse trabalho, avaliar diferentes termo-anemômetros encontrados no mercado, detectando a faixa de medição passível de incerteza elevada devido à convecção induzida pelo sensor.

5. Referências

- Bejan, A., 1984, "Convection Heat Transfer", Ed. Wiley & Sons, New York.
- Churchill, S. W., 1983, "Free Convection Around Immersed Bodies", in E.U. Schlunder, Ed.-in-Chief, Heat Exchange Design Book, section 2.5.7, Hemisphere Publishing, New York.
- Delmee, G. J., 1989, "Manual de Medidores de Vazão", 2ª Edição, Ed. Edgard Blucher LTDA.
- Fox, R. W., McDonald, W., 1992, "Introdução à Mecânica dos Fluidos", 4ª Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.
- Güths, S., 1994, "Anemometre a Effet Peltier et Fluximetre Thermique onception et Realization. Aplication a L'Etude de la Convection Naturelle", L'Universite D'Artois.
- Incropera, F. P., Witt, D., 1996, "Fundamentos de Transferência de Calor e Massa", 4ª Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.
- Kays, W. M., Perkins, H.C., 1984, "Forced Convection Internal Flow in Ducts", Bejan, A., "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons Inc., p. 67, New York.
- Whitaker, S., AIChE J., 1972, 22, 264.

An analyse of error induced by natural convection in termo-anemometers

Saulo Güths

Federal University of Santa Catarina
 Mechanical Engineering Department
 88040-900 Florianópolis/SC – Brazil
 saulo@lmpt.ufsc.br

Luis Gustavo Bertezini

Federal University of Santa Catarina
 Mechanical Engineering Department
 88040-900 Florianópolis/SC – Brazil
 luis@lmpt.ufsc.br

Adirlei Andre Kraemer

Federal University of Santa Catarina
 Mechanical Engineering Department
 88040-900 Florianópolis/SC – Brazil
 Adirlei@lmpt.ufsc.br

Abstract. In numerous applications, the problems arising during the control and measurement of low fluid velocities are very important. In several cases, the measurement of the low velocities in fluids is impregnated of systematic and aleatory errors generated by the sensors. In the Laser Doppler anemometer a disturbance can be generated by the injection of the particles or fumes. In the thermal anemometers the heating of the sensor generates the disturbance. The high temperature of the sensor generates a natural convection, inducing a residual flow. In this work will be presented a thin win tunnel that allow quantifier the measurement error of the fluid velocity generated by the sensor. The win tunnel is a rectangular and isotherm duct with a fully developed flow. The velocity is obtained by the theoretical profile, and the volumic flow is measured by calibrated flowmeter. The win tunnel can be turned to allow descendent flow, horizontal flow and ascendant flow. The variation of the sensor signal is the disturbance generated by the sensor. It will be presented the schema of a very simple omnidirecional termo-anemometer developed in your laboratories, and the results of the disturbance generated to different temperature sensor. Equally, it will be made an analyse of the relation signal / noise to different temperature sensors, to obtain to best relation to measure low fluid velocity.

Keywords. *anemometer, wind tunel, air velocity, convection.*

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO LAMINAR COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO EM UM CANAL HELICOIDAL DE SEÇÃO QUADRADA COM PASSO FINITO

Rigoberto E. M. Morales

Eugênio S. Rosa

Laboratório de Fenômenos Multifásicos – MULTLAB, FEM/DE/UNICAMP
CP 6122, 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

Resumo. É realizado uma simulação numérica do escoamento laminar completamente desenvolvido em um canal helicoidal de seção quadrada com passo finito. As equações de conservação foram escritas para um sistema ortogonal utilizando a transformação de Germano. O sistema de equações foi resolvido utilizando o método numérico de volumes finitos com o esquema híbrido de interpolação. Uma comparação direta entre a solução numérica e dados experimentais é realizada.

Palavras chave: Canal helicoidal, torção, curvatura, volumes finitos, escoamento desenvolvido.

1. Introdução

O estudo do escoamento em canais curvos planos e helicoidais constitui um problema de fundamental interesse na área de mecânica dos fluidos e transferência de calor. O interesse emerge tanto da área aplicada quanto da área básica. Em termos das aplicações estas configurações vêm sendo utilizadas em diversos processos industriais tais como: trocadores de calor, coletores ou difusores em máquinas de fluxo e máquinas térmicas, reatores químicos, separadores de fases na indústria de petróleo e nuclear entre outras áreas de aplicação. Do ponto de vista básico, este problema vêm atraindo a atenção da comunidade científica por cerca de um século, se tomarmos por referência o trabalho pioneiro de Dean (1927). Desde então, este problema vêm sendo abordado analítica e numericamente, para se analisar o comportamento das soluções quanto a variação da curvatura e torção no regime de transição, na multiplicidade das soluções, nas células de escoamento secundário, nos fatores de atrito e de transferência de calor entre outros parâmetros.

Os canais curvos são caracterizados geometricamente por meio de dois parâmetros: a curvatura, κ , e a torção, τ . A curvatura é responsável pelo surgimento de correntes secundárias transversais à seção do escoamento. Estas correntes secundárias são geradas pela força centrífuga devido a curvatura das linhas de corrente. No caso de canais curvos planos o escoamento secundário é basicamente constituído por duas células de recirculação simétricas, podendo aparecer células de recirculação adicionais para regimes de escoamento acima do número de Reynolds crítico. Em canais helicoidais as células de recirculação são assimétricas. Com o aumento do número de Reynolds o escoamento é caracterizado por duas células de recirculação adicionais, sendo estas posteriormente distorcidas até seu desaparecimento. A presença das correntes secundárias causa substancial desvio no fator de atrito assim como nos coeficientes de transferência de calor, sejam eles ocorrendo em regime laminar ou turbulento.

Existe uma extensa bibliografia sobre escoamentos em canais curvos planos (dutos toroidais) como evidenciado nas revisões de Berger *et al.* (1983) e Shah e Joshi (1987); nos trabalhos experimentais, analíticos e numéricos de Bara *et al.* (1992) e Mees *et al.* (1996) e também em Patel e Sotiropoulos (1997) que trazem uma revisão dos modelos de turbulência na presença de curvatura.

No entanto, para canais helicoidais, isto é, com passo finito, os resultados analíticos, computacionais e experimentais são bastante escassos. Truesdel e Adler (1970) sugeriram que os modelos hidrodinâmicos para helicóides de passo muito pequeno podem ser aproximados por aqueles aplicados em canais toroidais quando substitui-se a curvatura do canal helicoidal por aquela existente no modelo toroidal. Seguindo esta linha Thangam e Hur (1990) e Eason *et al.* (1994), publicaram soluções para canais helicoidais de seção retangular com passo tendendo a zero. A grande vantagem desta abordagem é que o sistema de coordenadas natural é ortogonal e traz simplificações quanto ao modelo das equações de transporte.

As consequências da falta de ortogonalidade no sistema de coordenadas natural para o escoamento num canal helicoidal foram apontadas por Wang (1981) e Murata (1981). As equações governantes são colocadas na forma tensorial em termos das componentes covariantes da velocidade. Esta modelagem é empregada com sucesso por Bolinder em canais helicoidais de passo finito de seção retangular. Ele determinou analiticamente as múltiplas soluções e os efeitos de curvatura e torção no campo de escoamento (Bolinder, 1996); estimou o fator de atrito e coeficiente de transferência de calor (Bolinder e Sunden, 1996) por meio de simulação numérica utilizando volumes finitos; e, visualizou e mediu experimentalmente as componentes do perfil de velocidade principal e secundária no canal helicoidal hidrodinamicamente desenvolvido (Bolinder e Sunden, 1995). Apesar de exata esta abordagem traz o inconveniente da equação de transporte ser mais complexa, apresentar mais termos devido a não-ortogonalidade da base além de exigir uma cuidadosa interpretação dos resultados pois as componentes covariantes e contra-variantes da velocidade não são coincidentes.

As complicações relacionadas com o sistema de coordenadas não-ortogonal podem ser evitadas por meio da transformação de Germano (1982) que propõe um sistema ortogonal de coordenadas. Tuttle (1990), mostra que ambas formulações produzem os mesmos resultados porém, aponta que ambos os sistemas de coordenadas trazem inconvenientes na modelagem. Em particular, a transformação de Germano traz a vantagem de se obter uma relação direta entre as componentes de velocidade e sua projeção nos eixos ortogonais, porém, ela não matem invariante as condições contorno. Por outro lado, a escolha de um sistema não-ortogonal torna complicado uma análise direta das velocidades, porém, mantém invariante as condições de contorno.

O presente trabalho desenvolve uma análise aproximada do escoamento laminar e isotérmico em um canal helicoidal de seção retangular hidrodinamicamente desenvolvido utilizando a transformação de Germano (1982). A metodologia empregada utiliza um sistema de coordenadas ortogonal que simplifica a forma das equações governantes. No campo transformado, o sistema de equações resultantes sofre duas aproximações: uma é relativa ao contorno e a outra é relativa a hipótese de completamente desenvolvido. As soluções numéricas obtidas são comparadas contra dados experimentais.

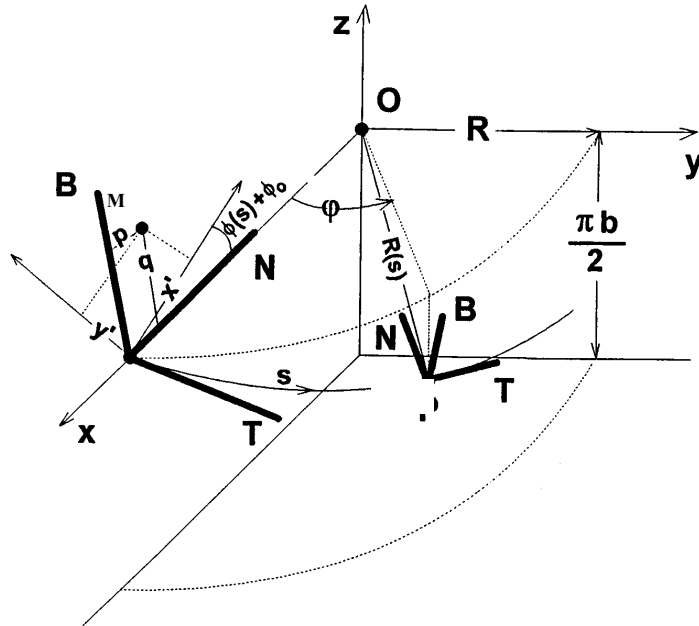


Figura 1. Representação esquemática da triade de Frenet T,N e B, do comprimento de arco s desenvolvido pela hélice e da base ortogonal (x',y',s) obtida pela transformação de Germano.

2. Formulação

O canal helicoidal é constituído a partir da trajetória da hélice que descreve sua linha de centro. O vetor posição da linha de centro é $\vec{R}(s)$ e “s” é o comprimento de arco conforme representação na Fig. (1). Com base na linha de centro pode-se definir três vetores ortogonais entre si: $\vec{T}(s), \vec{N}(s)$ e $\vec{B}(s)$, que representam os vetores tangente, normal e binormal a s. A curvatura, κ , a torção, τ , e a inclinação da linha de centro do canal com a horizontal, α , são respectivamente dadas por:

$$\kappa = \frac{\bar{R}}{\bar{R}^2 + b^2}; \quad \tau = -\frac{b}{\bar{R}^2 + b^2}; \quad \alpha = \text{arcTan}(b/\bar{R}) = \text{arcTan}(-\tau/\kappa), \tag{1}$$

onde \bar{R} é o raio do cilindro onde a linha do centro do canal se desenvolve e b é igual ao passo do helicóide dividido por 2π . O arco na direção “s” e o ângulo de deslocamento da hélice, $\varphi(s)$, medido no sentido anti horário no plano (x,y) e estão relacionados por:

$$\varphi(s) = \frac{s - s_0}{\sqrt{\bar{R}^2 + b^2}}. \tag{2}$$

A exceção da linha de centro, (0,0,s), a base $\vec{T}(s), \vec{N}(s)$ e $\vec{B}(s)$ constitui um sistema de coordenadas não-ortogonal (Wang, 1981) aqui denominado por sistema de coordenadas centrado no corpo. Um sistema ortogonal (x',y',s) pode

ser obtido utilizando-se a transformação de Germano (1982) aqui denominado por sistema de coordenadas centrado no espaço. O sucesso da transformação consiste na rotação introduzida nos eixos x' e y' com relação aos vetores $\bar{N}(s)$ e $\bar{B}(s)$ de forma contínua ao longo do arco s da linha de centro do canal. Pode-se mostrar (Morales, 2000) que os fatores de escala para as direções x' , y' e s são, respectivamente, dados por:

$$h_{x'}^2 = 1, \quad h_{y'}^2 = 1 \quad \text{e} \quad h_s^2 = [1 - \kappa x' \text{Sin}(\phi(s)) + \kappa y' \text{Cos}(\phi(s))]^2, \quad (3)$$

onde $\phi(s) = -\tau \cdot s$. Note que para torção nula, os fatores de escala da Eq. (3) ficam coincidentes com aqueles de um canal toroidal de seção retangular, Ghia (1977).

Uma das manifestações da falta de ortogonalidade do sistema centrado no corpo é o decrescimento linear da inclinação com a horizontal do canal a partir da parede interna em direção a parede externa. Este fato em mostra que não é possível encontrar um plano com inclinação constante em toda seção transversal de tal modo que sua normal seja sempre coincidente com o vetor tangente da curva que passa pela sua interseção. O plano definido por ' s ' constante, obtido por meio da transformação de Germano, define esta superfície ortogonal. Uma representação esquemática deste plano é dada na Fig. (2) num sistema cartesiano (x,y,z) onde o próprio canal helicoidal está representado e em duas vistas laterais. Devido a rotação dos eixos x' e y' com relação aos vetores N e B , a representação das vistas laterais aplica-se somente para os planos onde o produto $\tau \cdot s$ é um múltiplo de 2π .

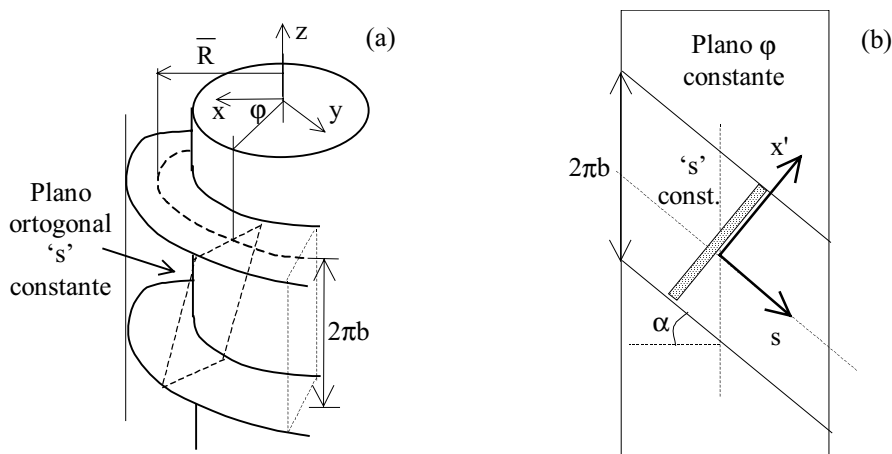


Figura 2. Representação esquemática do plano ortogonal a seção do canal helicoidal.

Dependendo das propriedades geométricas do canal helicoidal, o plano ortogonal pode ser razoavelmente aproximado pela projeção da seção transversal do canal com o coseno da inclinação média, α , como sugerido pela Fig. (2b). Este procedimento é exato para canais toroidais. Utilizando a transformação de Germano pode-se mapear os pontos do plano projetado no sistema de coordenadas centrado no espaço. A Figura (3) mostra esta transformação. Observa-se que a seção retangular mapeada é 'distorcida' de tal modo que as fronteiras do domínio não coincidem, de forma natural, com o sistema ortogonal (x',y') . Isto é, no contorno tanto x' quanto y' variam simultaneamente.

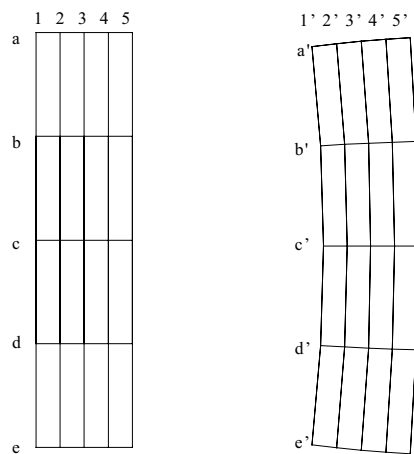


Figura 3 – Transformação de uma seção retangular do canal helicoidal do sistema (x,y,z) para o sistema (x',y',s)

A distorção introduzida pela transformação impõe uma das limitações da formulação pois dificulta a definição do contorno no plano (x',y'). Uma das formas de superar esta limitação é aproximar a seção ortogonal por uma seção retangular equivalente aquela projetada pela inclinação média, α . A diferença relativa entre as áreas transversais da seção projetada e da seção ortogonal é mostrada na Fig. (4) e auxilia a aferir a precisão desta aproximação, Alves (2000). Na Figura (4) é avaliado o desvio em % para três canais com razão de aspecto, H^* , 1:3, 1:1 e 2:1 em função da torção τ^* e parametrizado pela curvatura κ^* . A razão de aspecto H^* é definida como sendo a razão entre a altura pela diferença entre o raio externo e interno do canal. A torção e a curvatura são adimensionais e definidas como o produto de τ e κ , respectivamente, pela diferença entre o raio externo e interno do canal. Para os três casos estudados observa-se um crescimento do desvio entre áreas com o aumento de τ^* , como era de se esperar no entanto, para todos os casos analisados a diferença entre áreas é menor que 2%. Os maiores desvios ocorrem para canais com H^* igual a 1/3, isto é, a diferença entre raio externo e interno é três vezes maior que sua altura. Neste caso os desvios se mostraram independente dos valores de curvatura. O mesmo acontece para canais de seção quadrada, H^* igual a um porém os desvios são menores. Para canais com H^* igual a dois, surge uma dependência do desvio entre as áreas com a curvatura porém este caso mostrou-se com os menores desvios para uma dada torção.

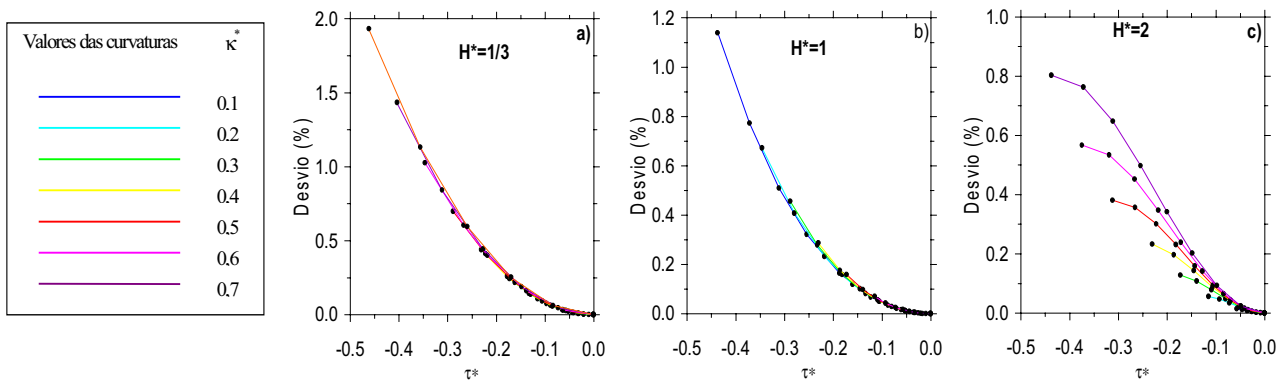


Figura 4. Diferença percentual entre a área projetada pelo coseno da inclinação média e a área ortogonal em função da torção adimensional, Alves (2000).

Outro aspecto não menos importante da transformação de Germano é o mapeamento de sucessivos planos ortogonais no sistema (x',y',s). A Figura (5) mostra uma representação de cinco planos transversais do canal helicoidal onde a variável 's' é constante. Na Figura (5a) são mostrados os planos 's' constante a partir do referencial (x,y,z) dado na Fig. (2a). A Figura (5b) contém os mesmos planos de 's' constante porém no plano transformado (x',y',s). Devido a rotação dos eixos (x',y') o canal é mapeado num canal com curvatura zero, porém, torção não nula (twisted pipe).

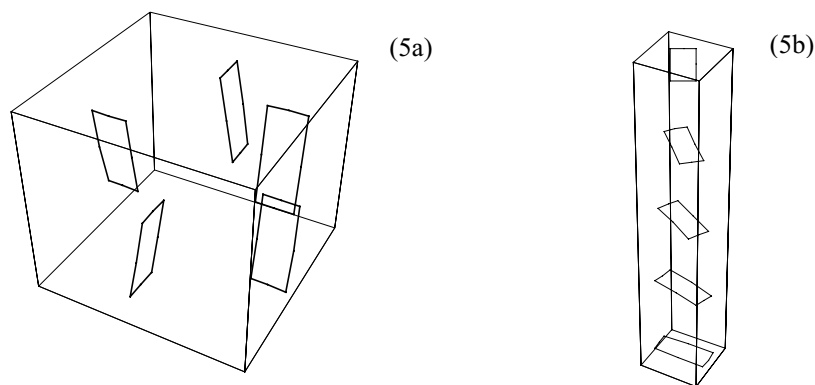


Figura 5. Mapeamento da transformação de Germano faz com que planos transversais do canal helicoidal (a) sejam transformados em um canal com torção pura (b).

Esta questão tem consequências diretas na hipótese de escoamento hidrodinamicamente desenvolvido. Como apontado por Tuttle (1990), não se pode assumir que as componentes u' , v' e w' das velocidades ao longo dos eixos x' , y' e 's' sejam independente de 's' uma vez que os eixos x' e y' possuem diferentes orientações relativa a seção transversal do canal para diferentes posições 's'. No entanto, uma comparação direta entre o comprimento 's' necessário para seção transversal girar 2π e o diâmetro hidráulico da seção dá uma estimativa entre a taxa de variação axial e

transversal do escoamento. Esta razão é avaliada por $2\pi/(\tau.d_h)$ onde d_h é o diâmetro hidráulico da seção. Considerando casos em que $2\pi/(\tau.d_h) \gg 1$, pode-se impor à formulação a condição de escoamento desenvolvido como uma aproximação de primeira ordem. Nesta condição, o valor absoluto das variáveis dependentes na direção “s” não mais se modifica, $\partial/\partial s = 0$, a exceção do gradiente de pressão, $\partial p/\partial s$, que se torna uma constante. A imposição da aproximação de escoamento desenvolvido na formulação permite que a análise possa ser feita em qualquer plano transversal ao escoamento, isto porque as variáveis independem da direção axial (s). Considerando o escoamento invariante na direção “s”, e centrando o análise em seções transversais onde $s = (2\pi/\tau).n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) os fatores de escala tomam a forma,

$$h_s = 1 + \kappa y'; \quad h_{x'} = h_{y'} = 1.0, \tag{4}$$

e as derivadas de h_s apresentam os valores:

$$\frac{\partial h_s}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial h_s}{\partial y'} = \kappa; \quad \frac{\partial h_s}{\partial s} = -x' \tau \kappa; \tag{5a}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial h_s}{\partial x'} \right) = -\tau \kappa; \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial h_s}{\partial y'} \right) = 0 \tag{5b}$$

As equações de transporte de massa e quantidade de movimento são escritas na forma conservativa por meio de operadores tensoriais e representadas de forma genérica por:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{h_x h_y h_s} \left[\frac{\partial}{\partial x'} (h_y h_s J_{x'}^\phi) + \frac{\partial}{\partial y'} (h_x h_s J_{y'}^\phi) \right] = S^\phi + P^\phi \tag{6}$$

onde ϕ é uma variável genérica, h os fatores de escala, S^ϕ o termo fonte, J_j^ϕ e P^ϕ representam ao tensor de transporte e termo fonte de pressão respectivamente,

$$J_j^\phi = \rho V_j \phi - \frac{\Gamma}{h_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad P^\phi = \frac{1}{h_j} \frac{\partial P}{\partial x_j}, \tag{7}$$

onde Γ representa ao coeficiente de difusão.

Equação da Massa – é obtida a partir das equações (5) e (6) fazendo-se $\phi = 1$, $\Gamma = 0$, $S = 0$ e $P = 0$, sua representação está na Tabela 1.

Equação de Transporte de Quantidade de Movimento – associa-se às direções x' , y' e s as velocidades u , v e w , respectivamente. As componentes da quantidade de movimento são obtidas a partir das equações (5) e (6) fazendo-se $\phi = u$, v e w , $\Gamma = \mu$, e S e P assumindo as representações dadas na Tabela 1. Observa-se que se a torção é nula, a formulação se reduz para a formulação do escoamento em uma curva plana (Ghia, 1977). A formulação para o canal helicoidal difere daquela de um canal toroidal pela inserção de quatro novos termos fontes nas equações de u , v e w que trazem, explicitamente, a influência da torção no modelo.

3. Método Numérico

A discretização das equações mostradas na Tabela (1) foi realizada por meio do método numérico dos volumes finitos (Patankar, 1980) com uma malha deslocada e com o esquema híbrido de interpolação para os termos convectivos. O domínio computacional é cartesiano e as distorções da malha são incorporadas aos termos de fluxo por meio de um multiplicador das áreas das faces das células da grade numérica aqui denominado por porosidade assim como pela inserção de termos fontes. Isto traz o atrativo de poder trabalhar com as equações de transporte em uma malha cartesiana que é bem estabelecida e relativamente simples além da redução do tempo e da capacidade de armazenamento computacionais, quando comparada à utilização de coordenadas curvilíneas generalizadas. Esta proposição é similar à utilizada por Rosa *et al.* (1999).

Para simular numericamente o escoamento completamente desenvolvido, seguindo o procedimento do modelo parabólico é necessário realizar os cálculos, plano a plano, na direção principal do escoamento até atingir o regime de escoamento completamente desenvolvido. Claramente, este procedimento é ineficiente se o interesse principal está na solução hidrodinamicamente desenvolvida e não na solução intermediária do desenvolvimento. Porém, o grande

atrativo de se resolver um problema hidrodinamicamente desenvolvido é que sua solução pode ser obtida a partir de um único plano cuja normal é paralela à direção principal do escoamento. Isto traz uma substancial redução de tempo e armazenamento computacional no problema em questão. Para o escoamento completamente desenvolvido a convecção e a difusão na direção do escoamento são nulas; de maneira que se a vazão mássica ou o gradiente de pressão médio na direção axial são especificados, a solução pode realizar-se em um simples plano transversal ao escoamento.

Tabela 1. Equações de transporte para o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido em um canal helicoidal de seção retangular, $h_s = 1 + \kappa y'$.

ϕ	Γ	J_x^ϕ	J_y^ϕ	S^ϕ	P^ϕ
1	0	ρu	ρv	0	0
u	μ	$\rho u u - \Gamma \frac{\partial u}{\partial x'}$	$\rho v u - \Gamma \frac{\partial u}{\partial y'}$	$\frac{\mu}{h_s^2} \cdot \tau \cdot \kappa \cdot w$	$-\frac{\partial}{\partial x'}(P)$
v	μ	$\rho u v - \Gamma \frac{\partial v}{\partial x'}$	$\rho v v - \Gamma \frac{\partial v}{\partial y'}$	$\frac{\rho \kappa w^2}{h_s} - \mu \frac{\tau \kappa}{h_s^3} x' w - \mu \left[\frac{\kappa}{h_s} \right]^2 v$	$-\frac{\partial}{\partial y'}(P)$
w	μ	$\rho u w - \Gamma \frac{\partial w}{\partial x'}$	$\rho v w - \Gamma \frac{\partial w}{\partial y'}$	$-\frac{\rho \kappa v w}{h_s} - \mu \frac{\tau \kappa}{h_s^2} u + \mu \frac{\tau \kappa}{h_s^3} x' v - \mu \left[\frac{\kappa}{h_s} \right]^2 w$	$-\frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s}(P)$

No presente trabalho os gradientes na direção axial são desprezados para o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido a exceção do gradiente de pressão, o domínio computacional é reduzido ao plano (x', y') . O gradiente de pressão na direção axial foi utilizado como dado de entrada computacional, e o número de Reynolds é calculado a partir da solução convergida. As equações governantes nas direções transversais $(x'$ e $y')$ são elípticas e resolvidas pelo algoritmo SIMPLEST (Spalding, 1994), enquanto que a equação de conservação na direção “s” é resolvida a partir do balanço global de massa (condições de fluxo impostas). A solução é obtida iterativamente no mesmo plano transversal bidimensional, detalhes sobre este procedimento de cálculo podem ser encontradas em Madhav (1992) e Morales (2000). O sistema de equações lineares foi resolvido utilizando o PHOENICS-CFD.

O domínio computacional foi discretizado utilizando uma malha uniforme de 41 x 41 nas direções x' e y' respectivamente. Para monitorar a convergência da solução foi utilizado um controle de convergência de iteração para iteração (local) e um controle da convergência global a partir dos valores médios do problema. A solução é considerada convergida para as equações de momento quando a soma dos resíduos locais para cada variável (R_{ij}) é da ordem de 1.0E-07. A conservação da massa tem-se considerado satisfeita quando a soma dos resíduos de massa é menor que 1.0E-09.

4. Resultados

Os resultados numéricos da formulação são comparados com resultados prévios em canais toroidais para verificar a consistência do método e depois contra dados experimentais em canais helicoidais para uma direta comparação das aproximações realizadas. Em ambos os casos os resultados são apresentados em função de dois parâmetros adimensionais: número de Dean, De , e número de Reynolds, Re , além do diâmetro hidráulico, d_h . Por questões de conveniência eles são aqui definidos:

$$Re = \frac{\bar{w} \cdot d_h}{\nu} \quad Dn = Re \sqrt{(\kappa \cdot d_h \cdot \cdot)} \quad d_h = \frac{4 \cdot \text{área}}{\text{perímetro}} \tag{8}$$

onde \bar{w} é a velocidade axial média no canal e ν é a viscosidade cinemática.

Em canais toroidais a formulação foi comparada contra a solução numérica de Ghia (1977). Ela aplica-se para escoamento hidrodinamicamente desenvolvido de um canal de seção transversal quadrada de lado ‘a’ com raio de curvatura \bar{R} . A Figura (6) mostra o domínio computacional com o referencial posicionado no canto inferior e interno da seção transversal, as isolinhas de velocidade axial constante e as linhas de corrente do campo de velocidades secundário para um canal onde a curvatura da linha de centro $\kappa \cdot d_h = 0.071$, a torção é nula e $Dn = 55$. O campo de velocidades axial é assimétrico apresentando um ponto de máximo próximo da parede externa. O campo de velocidades secundárias é caracterizado por duas células simétricas de recirculação conforme previsto por Bara (1992). A Figura (7), mostra uma comparação entre a velocidade axial determinada pela formulação e aquela obtida por Ghia (1977) para dois planos transversais: $y/a = 0.5$ e $x/a = 0.5$. O eixo y apresenta a razão entre a velocidade axial local e a velocidade axial média na seção enquanto que o eixo x é a posição y' ou x' no canal. Estima-se uma diferença menor que 2% entre

as duas soluções e portanto considera-se satisfatório o desempenho do modelo nesta configuração. A próxima etapa foi testar a mesma formulação para um regime de Dn mais elevado onde há a existência de quatro células de recirculação. A simulação foi realizada para um canal de seção quadrada com a curvatura da linha de centro $\kappa \cdot d_h = 0.066$, torção nula e $Dn = 150$.

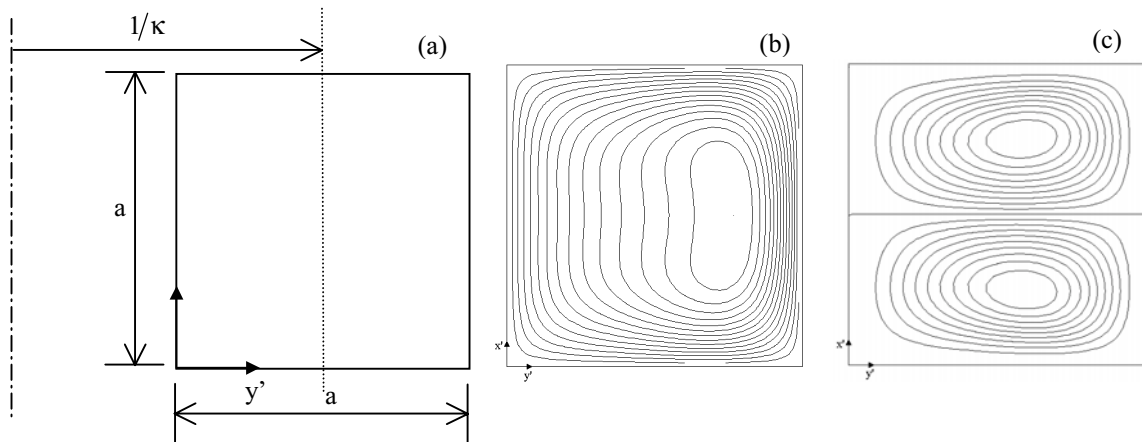


Figura 6. Escoamento desenvolvido em um canal curvo plano de seção quadrada; $Dn=55$, $\kappa \cdot d_h = 0.071$; (a) domínio computacional, (b) Velocidade axial; (c) Escoamento secundário.

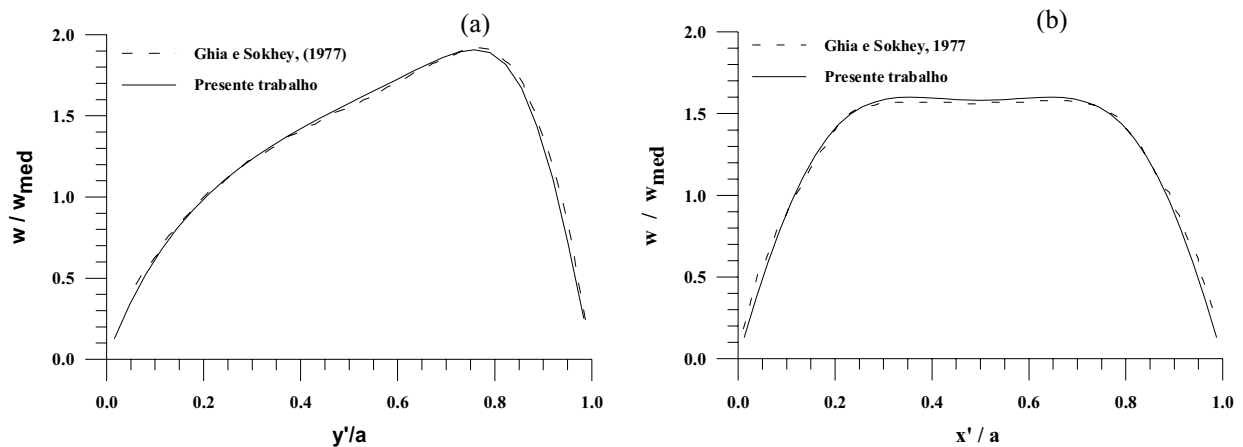


Figura 7. Perfis da velocidade axial do escoamento um canal curvo plano de seção quadrada; $Dn = 55$; e $\kappa \cdot d_h = 0.071$; (a) no plano $x'/a = 0.5$; (b) no plano $y'/a = 0.5$.

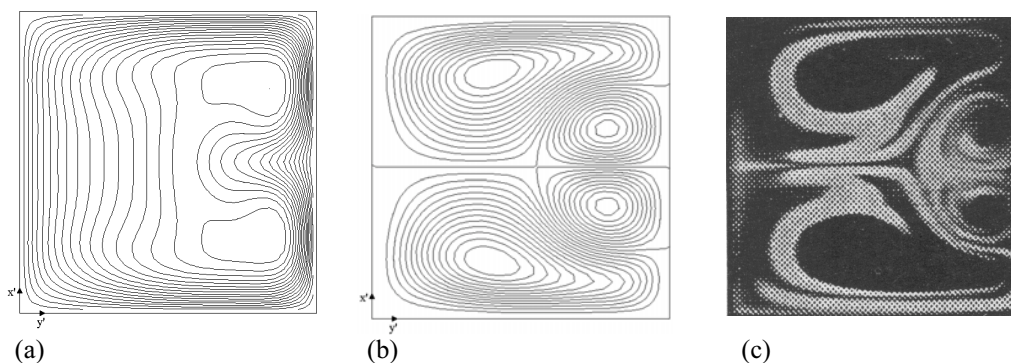


Figura 8. Escoamento em um canal curvo plano de seção quadrada no plano; $Dn = 150$, $\kappa \cdot d_h = 0.066$; (a) campo da velocidade axial; (b) escoamento secundário; (c) fotografia do escoamento secundário obtido por Bara *et al.* 1992.

A Figura (8) mostra as isolinhas de velocidade axial, (8a), as linhas de corrente do escoamento secundário, (8b) e uma visualização das correntes secundárias na seção transversal obtida por Bara *et al.* (1992). A presente formulação mostra um campo de velocidades axial não simétrico com um máximo deslocado para a parede externa da curva, como

reportado por diversos autores. Além disto ela também captura quatro células simétricas relativas ao campo de velocidades secundária. A Figura (8c) mostra uma visualização das correntes secundárias nas mesmas condições da simulação e pode-se observar uma boa concordância qualitativa entre a simulação e o campo visualizado. Em vista das favoráveis comparações contra resultados experimentais considerou-se que a formulação e malha são consistentes e confiáveis para implementar mais quatro termos fonte e simular o campo de velocidades num canal helicoidal.

A formulação é aplicada para um canal helicoidal de seção quadrada com $\kappa.d_h = 0.471$ e $\tau.d_h = 0.187$ e analisada contra os dados experimentais de Bolinder e Sundén (1995). A Figura (9) mostra o campo de velocidades axial (9a), as correntes secundárias (9b) e uma visualização das correntes secundárias do canal (9c) para $Re = 144$. A formulação foi capaz de capturar a não-simetria introduzida pelo efeito da torção no campo de velocidades axial e de correntes secundárias. Uma observação visual mostra uma boa concordância qualitativa entre o campo secundário simulado e aquele observado experimentalmente. Um segundo teste foi conduzido no mesmo canal helicoidal porém para $Re = 501$. A Figura (10a) mostra o campo de isovelocidades axiais enquanto que as linhas de corrente do escoamento no plano transversal são mostradas na Fig. (10b).

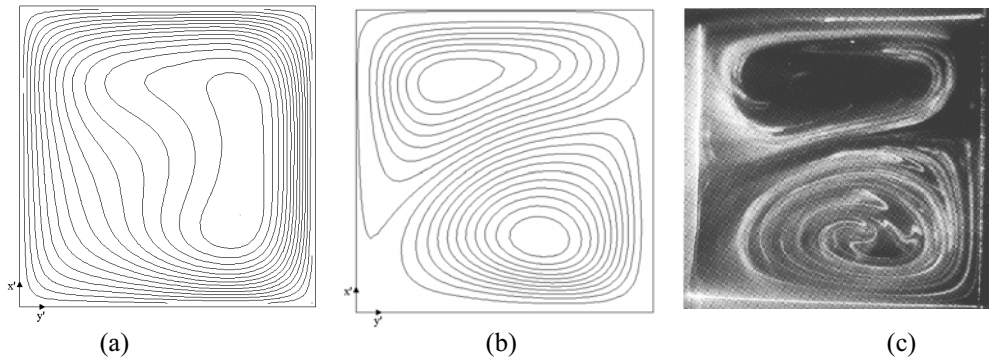


Figura 9. Escoamento desenvolvido em um canal helicoidal de seção quadrada; $\kappa.d_h = 0.471$ e $\tau.d_h = 0.187$ e $Re = 144$; (a) Velocidade axial; (b) Escoamento secundário; (c) Fotografia de escoamento secundário obtido por Bolinder e Sundén (1995).

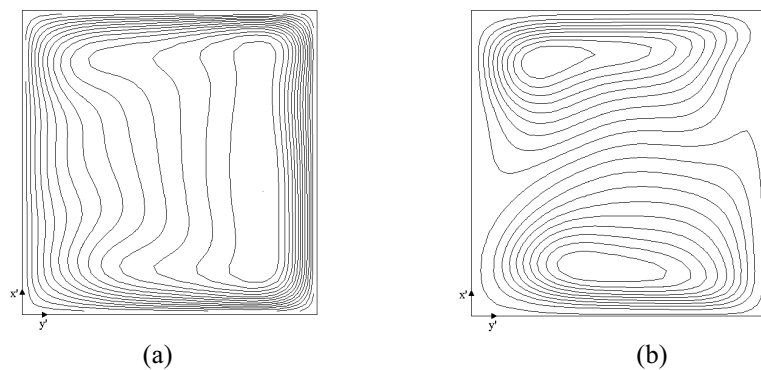


Figura 10 - Escoamento em um canal helicoidal de seção quadrada; $\kappa.d_h = 0.471$ e $\tau.d_h = 0.187$ e $Re = 501$; (a) Velocidade axial; (b) Escoamento Secundário.

Considerando a seção transversal de lado a , os perfis de velocidade axial (w) e transversal (u) determinados em três planos na direção radial: $y'/a = 0.21$; 0.50 e 0.78 e mostrados nas Figuras (11) e (12) contra os dados experimentais de Bolinder e Sundén (1995). Tomando-se como referência a velocidade axial média no canal, \bar{w} , o eixo y' da Fig. (11) apresenta a razão entre a velocidade axial local e a média, w/\bar{w} , e na Fig. (12) a razão entre a velocidade transversal u e a axial média, u/\bar{w} . O eixo x' em ambas figuras é adimensionalizado com o comprimento do canal, de maneira que $x'/a = 0$ e $x'/a = 1$ representam a parte inferior e a superior do canal, respectivamente. O comportamento da solução numérica acompanha a mesma tendência dos dados experimentais. Considerando que uma divisão do eixo y' da Fig. (11) significa um erro relativo de 5% pode-se observar que para $y'/a = 0.78$ a simulação numérica e os dados experimentais apresentam um desvio de 2.5%; o mesmo ocorre para o plano $y'/a = 0.50$ no entanto, para o plano $y'/a = 0.21$ três pontos apresentam um desvio de 7% em relação aos dados experimentais. Considerando que . Levando-se em conta que a incerteza relativa dos dados experimentais para w é de 3% para os pontos interiores e de 9% para os pontos vizinhos as paredes, pode-se dizer que a presente formulação está em concordância com os dados experimentais a exceção de três pontos relativos ao plano $y'/a = 0.21$. A mesma análise pode ser feita para a Fig. (12) porém, uma divisão do eixo y nela representa um erro relativo de 2%. Pode-se observar que o erro máximo ocorrido é de 3% e

corresponde a dois pontos no plano $y'/a = 0.21$, os restantes apresentam um erro sempre menor que 1%. Considerando que a incerteza experimental das medidas da velocidade transversal u é de 1% para os pontos interiores e de 2% para os pontos vizinhos das paredes considera-se satisfatória a concordância entre o modelo e os dados experimentais.

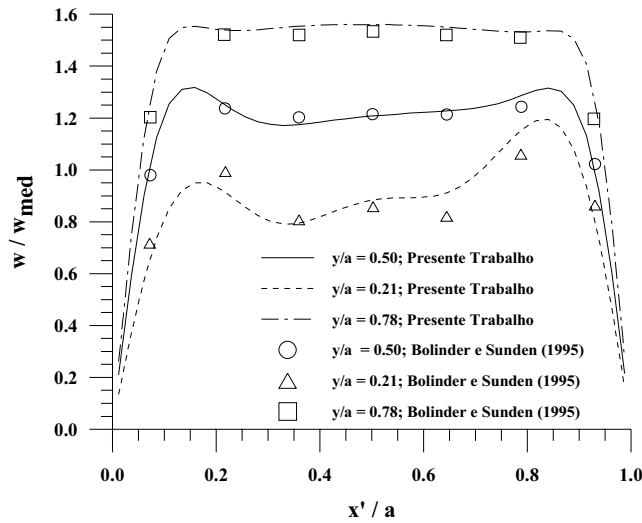


Figura 11. Comparação dos perfis da velocidade axial do escoamento em um canal helicoidal seção quadrada obtidos no presente trabalho e os resultados experimentais reportados por Bolinder e Sunden (1995); $\kappa.d_h = 0.471$ e $\tau.d_h = 0.187$ e $Re = 501$.

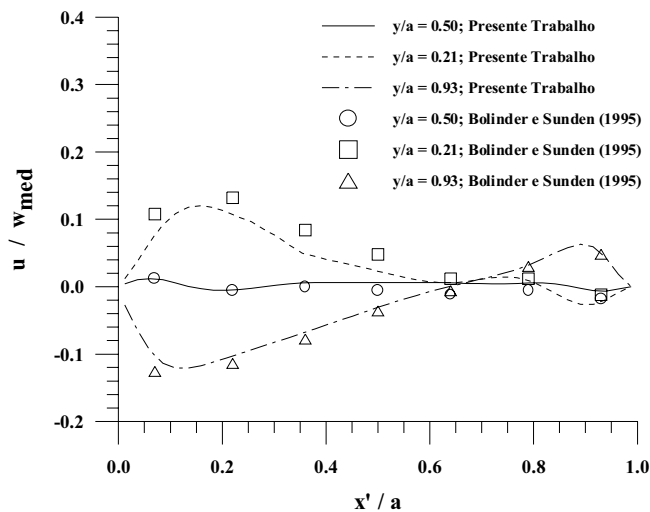


Figura 12. Comparação dos perfis da velocidade transversal “ u ” do escoamento em um canal helicoidal seção quadrada obtidos no presente trabalho e os resultados experimentais reportados por Bolinder e Sunden (1995); $\kappa.d_h = 0.471$, $\tau.d_h = 0.187$ e $Re = 501$.

5. Conclusões

Apesar das inerentes aproximações realizadas para se chegar a forma final desta formulação ela se provou satisfatória em representar os campos de velocidade axial e secundária gerados em canais helicoidais de passo finito. Mantendo as simplicidade inerente dos modelos que utilizam sistemas ortogonais pode-se chegar a uma representação de primeira ordem para canais helicoidais com passo finito com a inserção de quatro novos termos fonte que contêm explicitamente o parâmetro de torção na formulação conhecida para dutos toroidais. Estes novos termos se mostraram capazes de capturar os principais efeitos da torção no escoamento axial e secundário revelando campos não simétricos. Uma comparação direta entre os resultados experimentais e do modelo mostraram desvios da ordem da incerteza dos dados experimentais. Os resultados não podem ser generalizados pois uma completa investigação dos limites desta solução aproximada não puderam ser investigados em vista das soluções exatas deste problema ou dados experimentais serem escassos. No entanto pode-se afirmar que para dutos helicoidais de seção quadrada onde $\tau.d_h < 0.181$ e $\kappa.d_h < 0.471$ a formulação produz resultados satisfatório. Por fim deve-se destacar que a vantagem deste modelo aproximado para este problema não reside apenas numa formulação menos complexa, mas também ele a possibilidade de se

investigar numericamente fenômenos mais complexos em canais helicoidais tais como turbulência ou segmento de interfaces em escoamentos bifásicos.

6. Bibliografia

- Alves, L. G., 2000, “Escoamento em Canais Helicoidais com Interface Livre: Determinação da Interface e Fator de Atrito”, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.
- Bara, K., Nandakumar, K. and Masliyah, J. H., 1992, “An Experimental and Numerical Study of the Dean Problem: Flow Development Towards Two-Dimensional Multiple Solutions”, *J. Fluid Mechanics*, vol. 244, pp. 339-376.
- Berger, S. A., Talbot, L. and Yao, L. S., 1983, “Flow in Curved Ducts”, *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, vol. 15, pp. 461-512.
- Bolinder, C. J., 1996, “First-and Higher-Order Effects of Curvature and Torsion on the Flow in a Rectangular Duct”, *J. Fluid Mechanics*, vol.314, pp. 113-138.
- Bolinder, C. J. e Sunden, B., 1995, “Flow Visualization and LDV Measurements of Laminar Flow in a Helical Square Duct With Finite Pitch”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 11, pp. 348-363.
- Chen, W. H. e Jan, R., 1993, “The Torsion Effect on Fully Developed Laminar Flow in Helical Square Ducts”, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 115, pp. 292-301.
- Dean, W. R., 1927, “Note on the Motion of Fluid in a Curved Pipe”, *Phil. Mag.*, vol. 4, pp. 208-223.
- Eason, R. M., Bayazitoglu, Y. and Meade, A., 1994, “Enhancement of Heat Transfer in Square Helical Ducts”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 37, pp. 2077-2087.
- Germano, M., 1982, “On the Effect of Torsion on a Helical Pipe Flow”, *J. Fluid Mechanics*, vol. 125, pp. 1-8.
- Ghia, K. N. and Sokhey, J. S., 1977, “Laminar Incompressible Viscous Flow in Curved Ducts of Regular Cross-Sections”, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 99, pp. 640-648.
- Madhav, M. T., 1992, “A Numerical Algorithm for the Simulation of Full-Developed Flows”, Msc. Thesis, University of Greenwich, UK.
- Mees, P. A. J., Nandakumar, K. and Masliyah, J. H., 1996, “Secondary Instability of Flow in a Curved Duct of Square Cross-Section”, *J. Fluid Mechanics*, vol. 323, pp. 387-409.
- Morales, R. E. M., 2000, “Simulação Numérica do Escoamento Livre em um Canal Helicoidal de Seção Retangular”, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, Campinas, Brasil.
- Murata, S., Miyake, Y. and Inaba, T. and Ogawa, H., 1981, “Laminar Flow in a Helically Coiled Pipe”, *Bull. JSME*, vol. 24, pp. 355-362.
- Patankar, S.V., 1980, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere, 1980.
- Patel, V. C and Sotiropoulos, F., 1997, “Longitudinal Curvature Effects in Turbulent Boundary Layers”, *Prog. Aerospace Sci.* Vol. 33, pp. 1-70.
- Rosa E.S, Morales, R. E., Matos, A. e França, F. A., 1999, “Desempenho do Modelo RNG κ - ϵ para um Escoamento 3D em uma Curva de Seção Retangular”, CD do XV COBEM, Águas de Lindóia, SP, Brasil.
- Shah, R. K and Joshi, S. D., 1987, “Convective Heat Transfer in a Curved Duct”, Em *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer* (Editado por S. Kakaç, R. K. Shah e W. Aung), John Wiley, NY.
- Spalding, D. B., 1994, “The PHOENICS Encyclopedia”, CHAM Ltda., London, UK.
- Thangam, S. and Hur, N., 1990, “Laminar Secondary Flows in Curved Rectangular Ducts”, *J. Fluid Mechanics*, vol. 217, pp. 421-440.
- Truesdell Jr., L. C. and Adler, R. J., 1970, “Numerical Treatment of Fully Developed Laminar Flow in Helically Coiled Tubes”, *AIChE Journal*, vol. 16, pp. 1010-1015.
- Tuttle, E. R., 1990, “Laminar Flow in Twisted Pipes”, *J. Fluid Mechanics*, vol. 219, pp. 545-570.
- Wang, C. Y., 1981, “On the Low-Reynolds-Number Flow in a Helical Pipe”, *J. Fluid Mechanics*, vol. 108, pp. 185-194.

NUMERICAL SIMULATION OF A FULLY DEVELOPED LAMINAR FLOW IN A HELICAL CHANNEL OF SQUARE CROSS SECTION WITH FINITE PITCH

Rigoberto E. M. Morales

Eugênio S. Rosa

Laboratório de Fenômenos Multifásicos – MULTLAB, FEM/DE/UNICAMP
CP 6122, 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

Abstract. Numerical simulation of laminar, isothermal and fully developed flow in helical channel with finite pitch and square cross section is performed. The conservation equations were written for a local orthogonal system using Germano transformation and solved using the finite volume method. A direct comparison between the present numerical solution against experimental data is drawn.

Keywords: helical channel, curvature, torsion, finite volume, fully developed.

THE EVOLUTION OF HORIZONTAL SLUG FLOW

Eugênio S. Rosa

Rigoberto E. M. Morales

Artur I. Melo

Rafael Freire

Fernando A. França

Multiphase Flow Laboratory–MULTLAB, DE / FEM / UNICAMP

CP 6122, 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

Abstract – A succession of long gas bubbles and liquid slugs form the so-called slug pattern in a gas-liquid flow. In this flow pattern the time-averaged quantities characterizing its structure, such as slug length, cell intermittence factor, bubble velocity, among others, have been experimentally determined and reasonably predicted by mechanistic models. However, measurements on the evolution of the slug flow unit cell, i.e., how the structures forming the unit cell evolve along the pipe, remain quite unknown. This work focuses on this lack and presents an extensive database of measurements on the evolution of the slug flow structures in a horizontal pipe carrying air and water. The experimental apparatus consists of a transparent Plexiglas pipe, 26mm ID with a total length of 926 free pipe diameters. Air and water were mixed at the inlet of the test section and discharged into a collecting tank was open to atmosphere. The instantaneous measurements of the flow structure were made with eight double-wire conductive probes. These probes were installed in four measuring stations; each station had two sensors 1.9 pipe diameters apart. The measuring stations were located at 80D, 273D, 506D e 840D from the mixer. One expects these data constitute a fundamental basis for the development of more elaborate models directed toward the prediction of the instantaneous slug flow structure in a pipeline.

Keywords: slug, horizontal, velocity, statistical, two-phase flow.

1. Introduction

Still today the “unit cell model” is the most used mechanistic representation of the gas-liquid slug flow. The concept, originally proposed by Dukler (1975), divides the flow in two structures. One is the liquid slug, which carries primarily liquid and some dispersed gas in a typical dispersed bubbly flow pattern; the other is an elongated gas bubble surrounded by a liquid film. These two structures alternate in the pipe cross section, as the gas-liquid mixture flows, and forming the so called “unit cell” of slug flows, as suggested by Fig. (1). Models based on this concept use time averaged and one-dimensional equations. They predict the averaged lengths, translational velocities, pressure drop, liquid holdup and heat transfer rate among other physical parameters of interest. The key feature of this approach is to consider the flow as sequence of identical slug units travelling at constant translational velocity. The unit cell model has been used since 1975 and further developments are being made still nowadays, for example Bendiksen (1984), Barnea and Brauner (1985), Dukler *et al.* (1985) Andreussi and Bendiksen (1989), Barnea and Taitel (1993) among others.

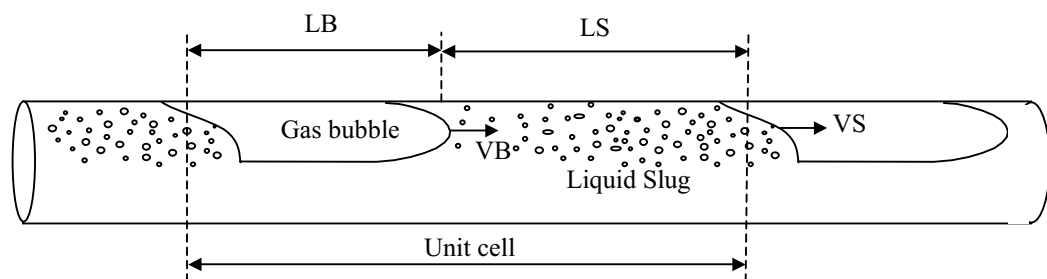


Figure 1. The unit cell

These models are relatively easy to implement but rely on experimentally determined constitutive equations for closure of the one-dimensional mass and momentum equations. Furthermore, they require fully developed flow condition and independence of the initial conditions. Despite of these restrictive conditions, certainly, the major model's drawback is the fact that the intermittency and irregularity of the slug flow are not accounted. The knowledge of the averaged values is not always sufficient and information regarding the length and velocity distributions is often necessary. They are of particular importance to the design of slug catcher vessels and on gas-liquid separators, which have to be able to handle the maximum possible slug length and not necessarily the average one. Moreover, transients are rather frequent and the development of liquid slug length from undeveloped to developed slug flow should be considered.

To overcome these restrictive conditions and extend its usage to broader class of flow velocities, pipe diameters and fluid properties is necessary more understanding on the formation and control of the slug structures. These matters are approached in several fronts, but there is still a lack of experimental work regarding the evolution of the slug flow structures along pipelines. Stochastic analysis of the slug flow variables is presented in Nydal et al. (1991) and in Grenier (1997). The tests were conducted using air/water flows in horizontal pipelines with 53 mm and 90 mm ID with 312 free diameters long for Nydal's data and 53 mm ID with 1698 free diameters long for Grenier's data.

The present work investigate the evolution of the statistical properties of the air/water slug flow in a 25 mm ID horizontal pipeline 900 free diameters long. It complements the previous work disclosing experimental data for different pipe length and diameter as well as showing how the structures evolves along the pipe. The results include the unit cell frequency, the velocity and length distributions pertaining to the bubble and slug and finally the coalescence rate at four spatial positions along the pipeline.

2. Experimental Set Up

The experimental set-up is sketched in Figure (2). It consists of a horizontal rack 26 m long. The rack supports the gas-liquid mixer, the test and return pipes, the control valves, the instrumentation and the 500 liters storage tank. The gas-liquid mixer is connected to the left end of the test section. The gas and the liquid were supplied by a high capacity compressor and by a centrifugal pump. To damp low amplitude oscillations of the gas supply line there is a pressure-control valve and a small size orifice to generate a high-pressure drop before the gas is supplied to the mixer. The mixer is made of two concentric tubes. The inner one delivers the air and the water flows in the annular space. The test section is of a 26 mm ID straight horizontal transparent Plexiglas tube with 900 free diameters long. Four measuring stations are used to determine the slug properties. They are identified by S1 to S4 in Fig. (2) and are distant from the mixer by 79D, 267D, 494D and 821D, respectively. The right end of test section is connected to the storage tank in such a way that the mixture discharged freely to the atmosphere. The experiments were performed with tap water and air at ambient temperature. Orifice plates calibrated at 1 1/2% of uncertainty monitored the water flow rate. The air flow rate were measured with laminar flow elements with 1% of uncertainty. The discharge is at ambient pressure and temperature conditions of 940 mBar and 25°C, respectively. These values are taken as the test site pressure and temperature standard conditions. For notation convenience, the letter S in front of the unit specifies this condition otherwise it refers to the 'in situ' conditions. The system allowed air superficial velocities ranging from 30 Scm/s to 600 Scm/s and water superficial velocities of 20 cm/s to 200 cm/s.

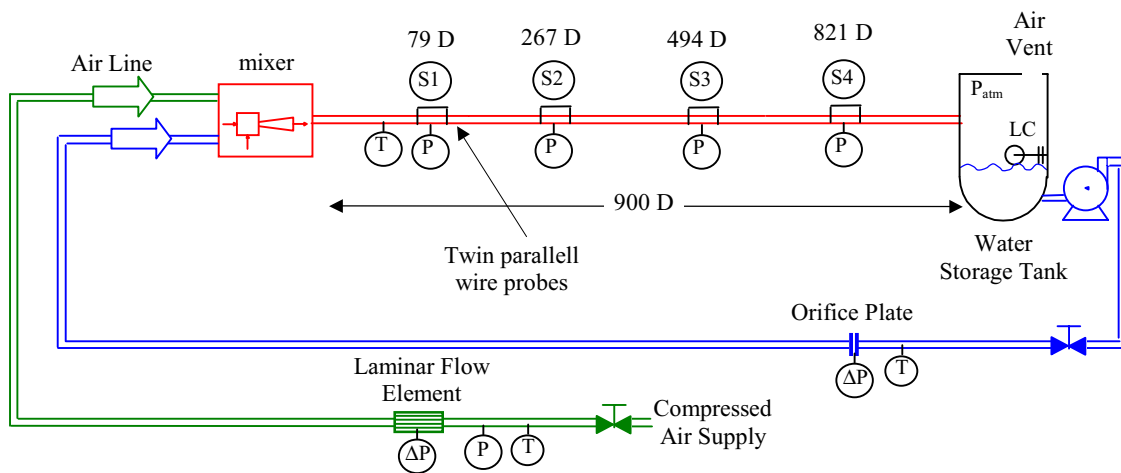


Figure 2. Schematic of the experimental set up.

2.1. The Measuring Technique

The spatial evolution of the gas bubble and of the liquid slug structures is determined by the measurements in stations S1 to S4. Each station has an absolute pressure transducer and a twin set of double wire conductive probes. The pressure data is helpful to correct the actual gas flow rate. The twin set of double wire conductive probes enables to obtain velocities, lengths and frequencies of the units. These tasks are accomplished simultaneously on the four measuring stations.

The double wire probe measures the electrical conductance of the medium staying between the two parallel wires crossing the pipe diameter, see Koskie et al. (1989). Since the liquid height between the wires is inversely proportional to the electrical conductance, a relationship of the succeeding liquid and gas occurrences is established by means of the conductance variations. The arrangement used in this work is depicted in Fig. (3). The probe, i.e., two parallels bare copper wires with 0.2 mm in diameter and spaced of 2 mm from each other were stretched across the test section

diameter. The wire size did not bring significant intrusive effects, while the copper exhibited good mechanical resistance without showing any drift on the calibration curve during the period of the experiments. A twin probe is set up 50 mm (1.9 D) downstream the front probe.

The probe is driven by a 12 KHz oscillator and the response signal is amplified and filtered with a cutoff frequency of 8 KHz to remove the carrier frequency. The media conductivity, so does the probe, is sensitive to changes in the temperature or in the water ph. To exclude these undesirable changes a slave probe is used to measure only the conductance changes due to temperature or water ph changes. It consists of a flush electrode working in a constant level vessel filled with water subject to the same changes.

The signals were recorded in a Pentium PC driven by a National Instruments acquisition board. The sampling frequency was of 3 KHz to enhance the signal time resolution. The acquisition period varied during the test to ensure samples with 60 to 500 slug units.

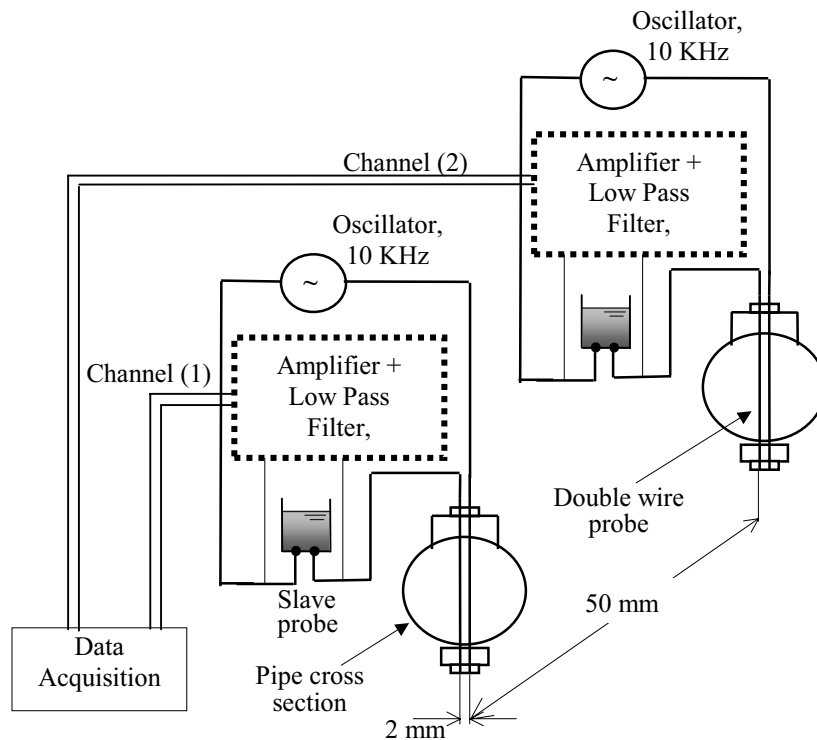


Figure 3. Double wire probe driving circuit and sampling signal.

Typical time shifted signals, taken simultaneously by the two probes, is shown in Fig. (4) as a function of time. The liquid film surrounding the bubble creates the low-level signal while the liquid slug produces the high level signal. In order to discriminate the structures one had to set a threshold level to transform the continuous signal in a square wave exhibiting two levels: (0) and (1) which identify the occurrence of gas or liquid respectively. Signals above the threshold level are accounted as the liquid occurrence (1) otherwise the bubble (0). The total number of bubbles during the test period exhibits a bimodal distribution as a function of the threshold level. The best threshold value results from the distribution region where number of bubbles is nearly constant.

A typical sample of the square wave signals delivered by the front and rear sensors is shown in Fig. (5). The time of occurrence of the i^{th} slug or bubble front is specified by $B(i)$ or $S(i)$ where the subscripts (F) or (R) refers to the front or rear sensor. The i^{th} unit cell is composed by the i^{th} bubble trailed by the i^{th} slug. The velocities of the i^{th} bubble and slug, V_S and V_B , are determined by:

$$V_S(i) = \frac{s}{[S_R(i) - S_F(i)]} \quad V_B(i) = \frac{s}{[B_R(i) - B_F(i)]}, \quad (1)$$

where s is the probe spacing, 50 mm. The length of the i^{th} bubble and slug, L_S and L_B , are determined by:

$$L_S(i) = V_S(i) \cdot [B_F(i) - S_F(i-1)] \quad L_B(i) = V_B(i) \cdot [S_F(i) - B_F(i)]. \quad (2)$$

Finally, the period of the i^{th} unit, T , is given by:

$$T(i) = S_F(i) - S_F(i-1) \quad (3)$$

The array describing the velocities, lengths and period of each individual bubble and slug is treated statistically to give rise to histograms and sample average and standard deviation. For a generic discrete variable x its average is represented by the symbol, $\langle x \rangle$, and its standard deviation by, S_x . They are evaluated accordingly to the equations:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [\langle x \rangle - x_i]^2} \quad (4)$$

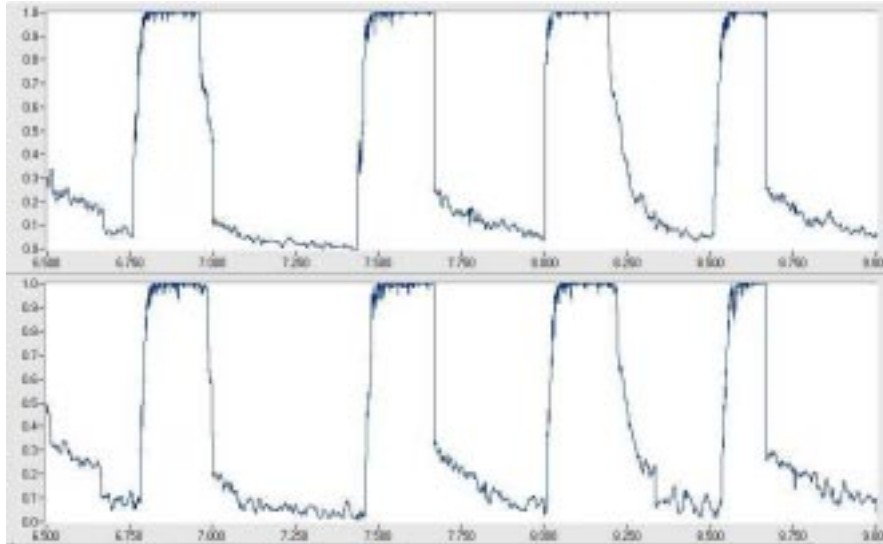


Figure 4. Sample of the twin signals delivered by the double wire conductive probes from run #9. Y axis is the dimensionless and X axis is timed in seconds. Top and bottom corresponds to the front and rear double wire probe.

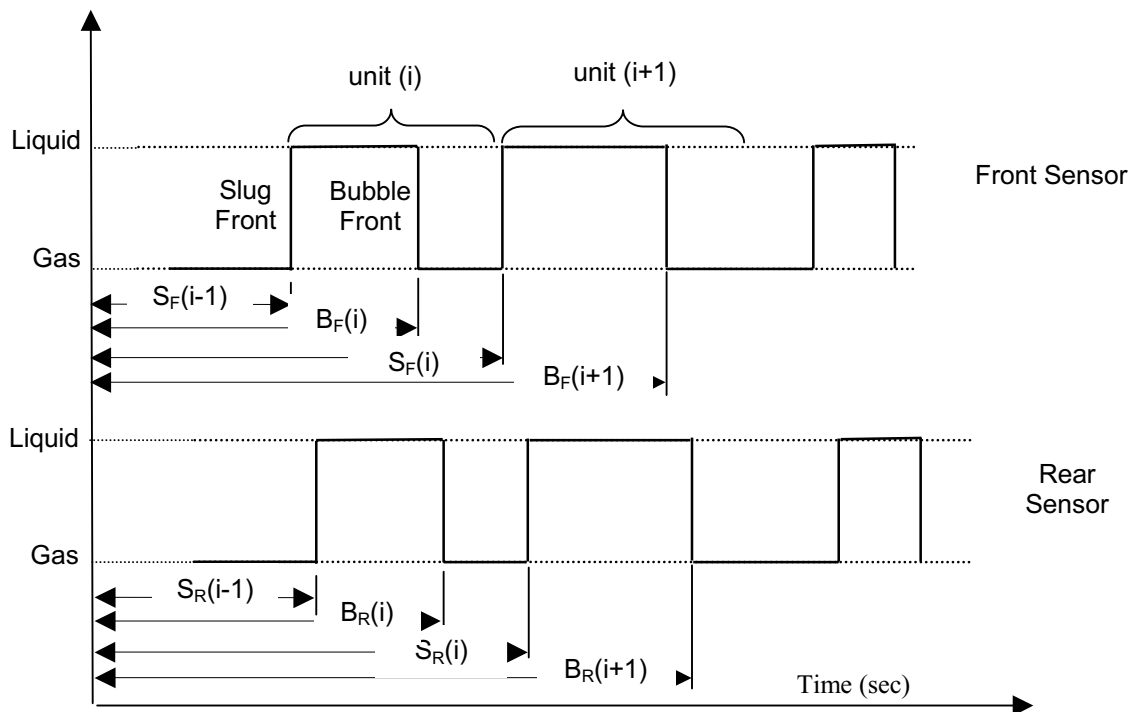


Figure 5. Front and Rear sensor square wave signal and nomenclature.

3. Experimental Results

The experimental data regarding the slug flow structure evolution along the test section for from seven pairs of liquid and gas flow rates are presented. The superficial liquid and gas velocities span from 0.25 m/s to 1.33 m/s and

0.33 Sm/s to 1.67 Sm/s respectively. Table (1) describes the operational conditions of each run, the accepted number of units to the analysis and the total acquisition time. As a reference the experimental points are also shown on the flow map in Fig. (6) accordingly to the Taitel and Duckler (1977) transition criteria.

Table 1. Grid test

Run #	JL (m/s)	JG (Sm/s)	Number of Units	Acquisition Time (s)
2	0.244	0.395	87,5	255
3	0.865	0.371	605	131
4	0.655	0.342	159	126
5	0.342	0.633	60	127
8	1.312	0.655	539	126
9	0.67	1.342	123	126
10	0.333	1.679	82	252

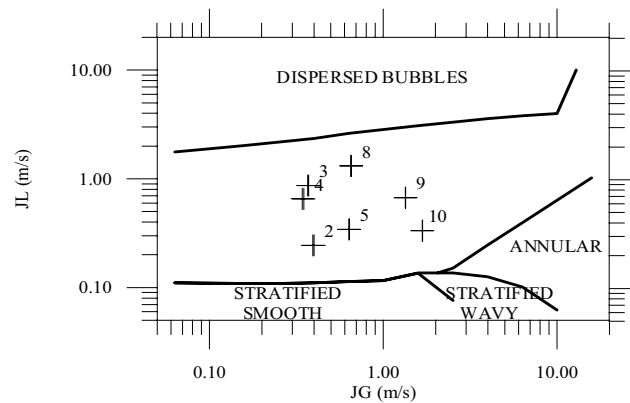


Figure 6. Flow map.

3.1. The slug and bubble velocities

The averaged slug and bubble velocities are shown in Figure (7) as they evolve from S1 to S4. They exhibit the highest values near the mixer and then decrease to approximately constant values as they move downstream. In fact the experimental data reveals little changes on at the slug velocity after S2 (267D downstream the mixer). On the other hand, the bubble velocity has a tendency to grow due to the pressure decrease as it moves from S(2) to S(4). As expected, experimentally determined bubble velocity depends on the total superficial velocity, J, and is fitted by a linear relationship:

$$\langle VB \rangle = C_0 \cdot J + C_1 \tag{5}$$

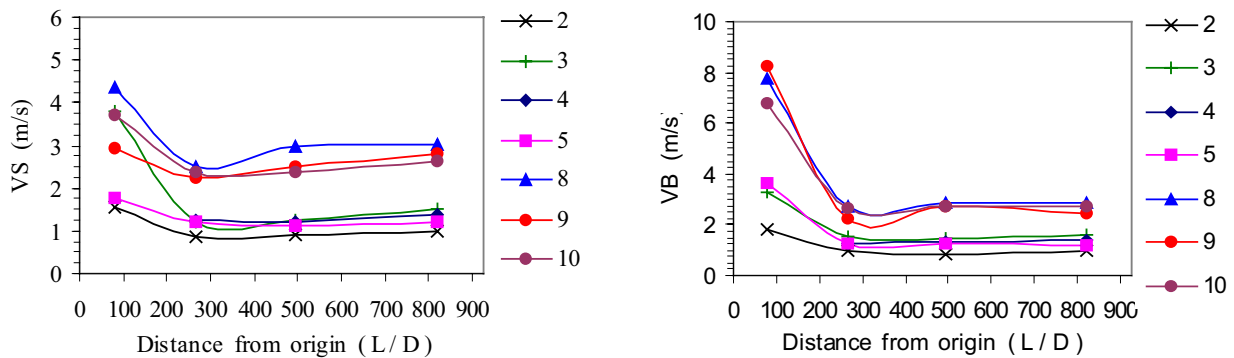


Figure 7. Slug and bubble averaged velocities with the distance from the origin.

where J is: $J=J_L+J_G$; C_0 and C_1 are fitting parameters which in turn may depend on J and other dimensionless parameters such as Weber, Reynolds and Froude numbers. A linear regression on $\langle VB \rangle$ and J at the whole data set is shown in Fig. (8). The constants C_0 and C_1 are of 1.19 and 0.16, which are within the range of the reported values, Fabre and Liné (1992).

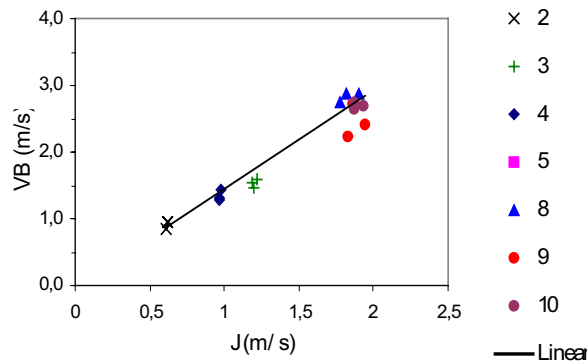


Figure 8. Average bubble velocity against the total volumetric flux.

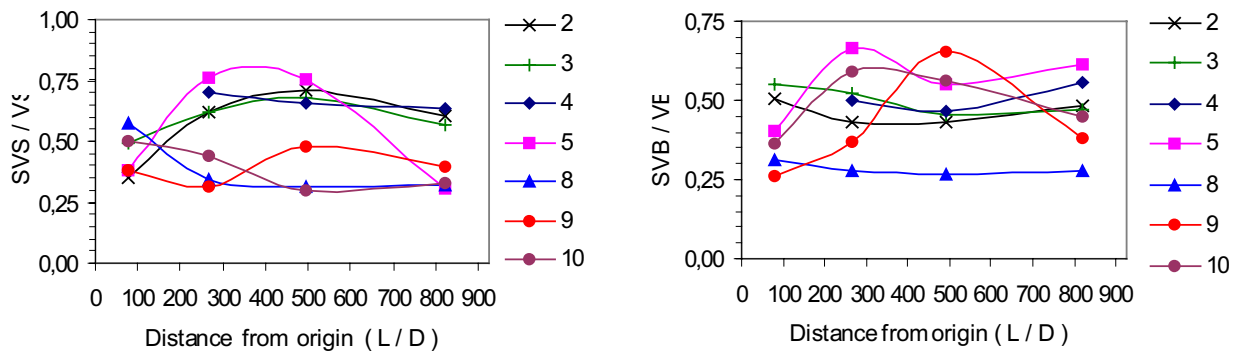


Figure 9. Ratio of standard deviation to mean slug and bubble velocity against the distance from the origin.

The ratio of the velocities standard deviation to the averaged velocities, S_V/V is presented in Fig. (9) as a function of the axial distance from the mixer. The ratios exhibit the tendency to decrease and attain a constant value as they develop along the test section for the slug and bubble, S_{VS}/V_S and S_{VB}/V_B . In general, the ratio S_{VS}/V_S has a greater value than the ratio S_{VB}/V_B at station 2 but the differences tend to decrease as they evolve downstream.

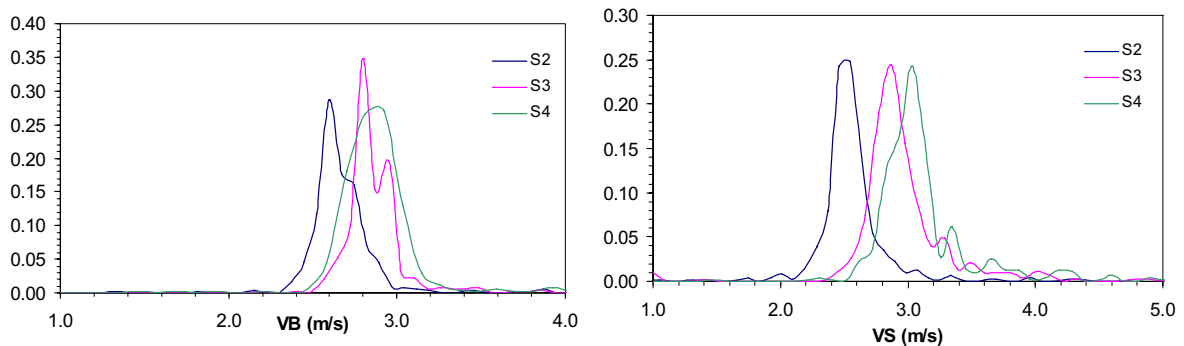


Figure 10. Slug and bubble velocity histograms for run #8 on stations S2, S3 and S4.

Detailed information regarding the bubble and slug velocities distributions is given by the histograms in Fig. (10) for run #8 at stations 2 to 4. The x-axis represents the velocity while the y-axis is the relative frequency. The bubble velocity histograms shows an increasing mode value as one visit station 2 to 4. The increase on the velocity mode is

expected due to the gas expansion from S2 to S4. As the flow develops from S2 to S3, the bubble velocity distribution becomes bimodal. Further downstream, at S4, the bimodal behavior disappears and the bubble velocity distribution looks like a symmetric gaussian type as reported in Nydal (1992). The second peak on the bubble velocity distribution is an identification that the flow is not fully developed at S2 and S3. The slug velocities histograms have also the mode value increasing as the distance from the mixer increases and are nearly symmetric and gaussian. The distributions along S2 to S4 show that the slower moving slugs disappear while faster slugs are created. This behavior is expected because the faster moving bubble catches the slower moving slug and coalesces.

3.2. Slug and bubble length

The averaged slug length is found within 7D to 18D. It is nearly insensitive for all range of liquid and gas velocities as also observed by Nydal, 1992 and Grenier, 1997 among other investigators. The spatial evolution slug length is shown in Fig. (11). It exhibits a tendency to grow with the distance from the origin. Since the slug length is still increasing, even at S4, one may expect that the flow is not fully developed even at a distance of 821D from the origin. Figure (11) also displays the averaged bubble length for the seven runs as a function of the distance from the mixer. The bubble length increases as the distance from the origin increases. This growing tendency is due to the gas expansion and to the coalescence process occurring along the test section. Interesting though, is the strong dependence of the bubble length with the ratio of air to water flow rates. The increase on the air to water ratio causes an increase on the bubble length. The length distributions are more spread around the mean than the velocity distributions. The ratio of the standard deviation to the averaged length, S_L/L is shown in Fig. (12) for the slug and bubble. The ratio may get values as high as 100% of the averaged length in contrast to the nearly 50% seen on Fig. (9). Within the 824D the dispersion slug ratio, S_{LS}/LS , decreases with the distance from the origin while the bubble ratio, S_{LB}/LB , stays approximately constant.

The distributions of the ratios LS/D or LB/D for run #8, taken at S2, S3 and S4, are shown in Fig. (13). The x-axis represents either LS/D or LB/D while the y-axis is the relative frequency. The slug length histograms show that slugs with small lengths tend to disappear as the flow moves downstream. For example, at S2 it is found nearly 30% of the slug population with lengths smaller than 8D while at S4 it reduces to 15%. This is a clear manifestation of the coalescence process. The smallest slugs vanish to give rise to lengthier slugs as shown by the distributions.

During the coalescence, the trailing bubble takes over the leading slug and the liquid volume of the slug is transferred to the following slug thus increasing its size, Fagundes Netto (1999). The evidence of this mechanism is seen at the top tail of the histogram. The slug population over 30D in length is near 1% at S2 while it is about 6% in S4. Regarding the distribution shape it is not symmetric and are better adjusted by log-normal distributions as reported by Nydal et al. (1992). Due to the non-symmetric shape, it is worthwhile to point out that the averaged value does not coincide with the most probable value (mode). This aspect should be considered when used as input values on mechanistic models. The bubble length histograms follow the same trend of the slug length histograms.

The bubble population with size smaller than the average decreases with the distance from the origin while the bubble population with size greater than the average increases. Again, this trend is due to the bubble coalescence along the test section. When two bubbles merge, the length of the resulting bubble increases but is smaller than the sum of their lengths (Fagundes Netto, 1999). The bubble length reduction is due to the drainage of the liquid film near the trailing bubble nose. The bubble length distributions are better fitted by log-normal distributions, similarly to the slug length distributions.

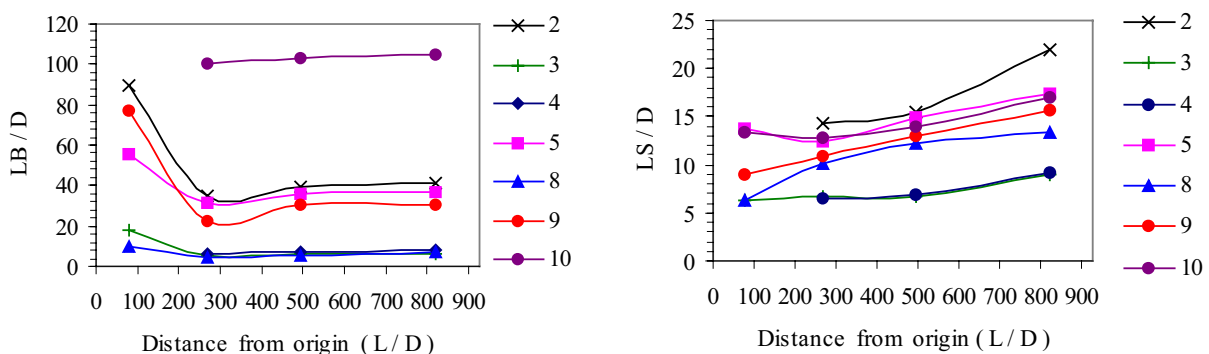


Figure 11. Slug and bubble averaged lengths with the distance from the origin.

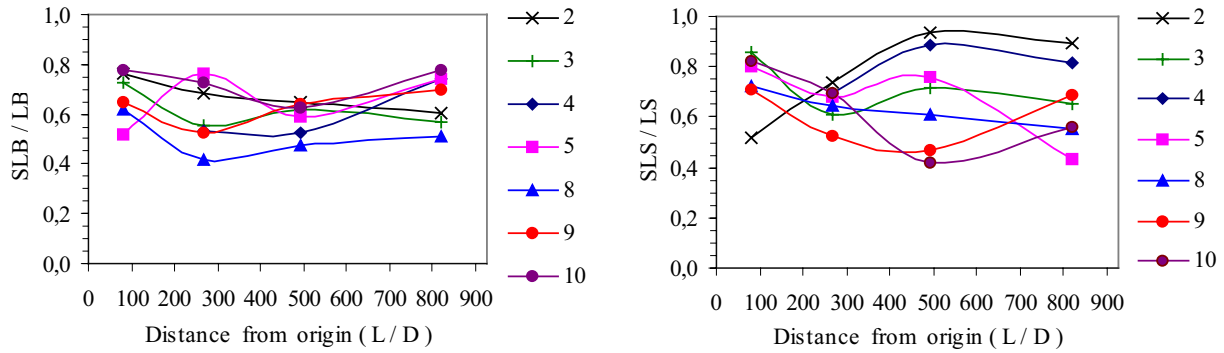


Figure 12. Ratio of standard deviation to mean slug and bubble length against the distance from the origin.

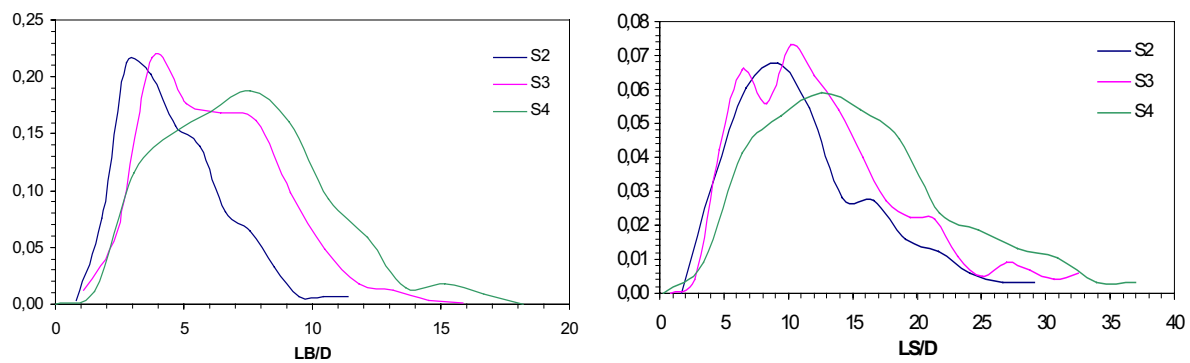


Figure 13. Slug and Bubble length histograms for run #8 on stations S2, S3 and S4

3.3. Unit frequency and coalescence rate

The unit frequency is taken as the reciprocal of the unit period defined in equation (3). The averaged unit frequencies for runs 2 to 10 are shown in Fig. (14a) as a function of the distance from the origin. The averaged unit frequency is increased as JL grows and is almost insensitive to JG. As expected the highest frequencies occur at S1, then decreases, and eventually reach a constant value. The frequency peaking at S1 may be attributed to the gas-liquid mixer. The concentric air jet is quickly broken into several small diameter bubbles, which don't have enough space to coalesce and start developing bubble-slug like structures within the 79D comprised between the mixer and S1. With the exception of run #8, the unit frequency evolves to a nearly constant value at S4. For run #8, which has the highest water flow rate, the unit frequency is still decreasing signaling the flow is not fully developed at S4.

The coalescence rate, R, is defined as the relative number of bubbles which disappear per unit length:

$$R(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \text{Limit}_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \right] = \frac{1}{f} \frac{df}{dx}, \tag{6}$$

where f(x) is the unit frequency at the axial position 'x'. The definition of coalescence rate, Eq. (6), is estimated using:

$$\bar{R}(L + \Delta L/2) = \frac{1}{\Delta L} \text{Ln} \left[\frac{f(L + \Delta L)}{f(L)} \right], \tag{7}$$

where L is the distance from the origin of one measuring station and ΔL is the distance between one measuring station and the following; furthermore, \bar{R} represents the average value between stations. The coalescence rate, as a percentage of the number of bubble per pipe diameter, is shown in Fig. (14b) as a function of the distance from de origin. The coalescence rate decreases with the distance from de origin proportional to a power of the distance. One may observe that 0.2 to 0.8 % of the total number of bubbles coalesce between S1 and S2. This number then decreases to 0.03% to 0.01% for the measurements in S3 and S4. The data on Figure (14b) shows no clear dependence of the coalescence rate with the mixture volumetric flux or the volumetric fluxes of each phase.

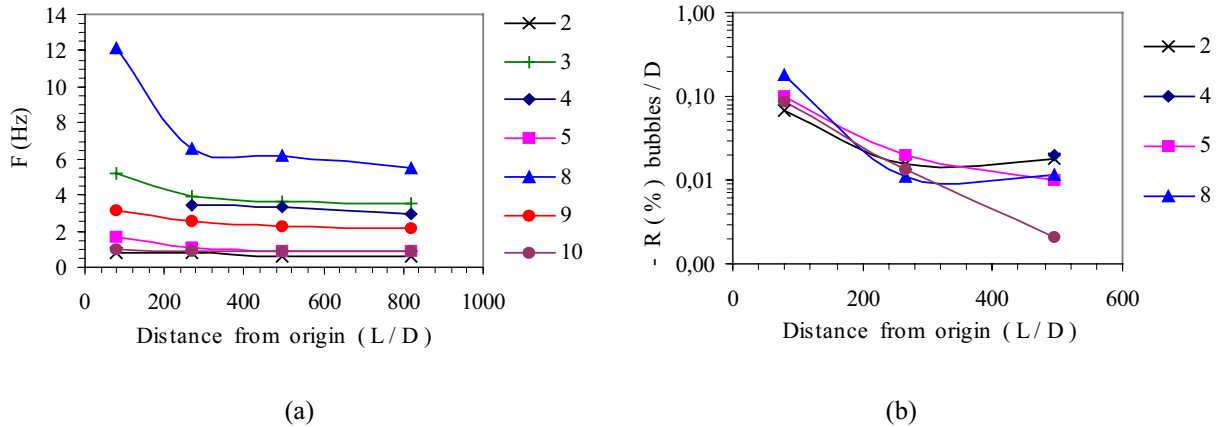


Figure 14. (a) Unit cell frequency with the distance from the origin; (b) coalescence rate per pipe diameter in (%) with the distance from the origin.

4. Conclusions

The statistical properties of the slug flow structure at four spatial locations along the horizontal pipeline were taken for seven distinct pairs of gas and liquid velocities. The axial evolution of the averaged values, the standard deviations and some statistical distributions related to the velocities and lengths pertaining to the liquid slug and to the gas bubble are presented. In addition, the unit cell frequency and the coalescence rate were determined.

The averaged velocities exhibits the highest values at a distance from the origin comprised between S1 and S2 (80 D to 273 D), with peaks at the highest air flow velocities. Downstream S2 the changes are smooth with a tendency to a constant value for each run. The averaged bubble velocity, 1.19 times greater than the mixture velocity, is in agreement with reported values. The drift velocity results from measurements along S1 to S4 for all data set. The bubble velocity histograms show that the slower bubbles disappear while faster bubbles are created as the flow evolves axially. The same applies to the slug velocity histograms. The shift toward higher velocities range on the histogram is a footprint of coalescence since the slower bubbles are caught by faster slugs. Considering the studied case, the slug velocity distribution can be reasonable fitted by a normal distribution the same does not apply to the bubble velocity histogram due to the bimodal behavior presented.

The measured slug lengths are quite independent of flow rates. The averaged slug length is not stable but grows steady with the distance from the origin, except of runs #2 and #3. The bubble length is dependent on the ratio of air to water flow rate. The bigger the ratio the lengthier is the bubble. The slug and the bubble length are quite spread around the mean value. The ratio of the standard deviation to the average length may get even 100% of the average value. It decreases downstream and at S4 it is, in average, 50% of the average length. The histograms of the slug and bubble lengths show a displacement toward the higher lengths and a extinguishing the lower lengths as the flow evolves along the test section. The slug length can be reasonably represented by a log normal distribution.

The unit frequency and the coalescence rate decrease with the distance from the origin. The unit frequency showed a strong dependence on the liquid flow rate. The coalescence rate did not show any clear dependence on a specific flow parameter but show a decaying rate proportional to a power of the distance from the origin.

The experimental data disclosed that none of the experimental data achieved a fully developed flow condition, even at distances of 824D from the origin. The coalescence process was not over during the whole test section. The slugs and bubbles did not propagate at the same velocity and the fluctuations were quite intense at the end of the test section. If the fully developed state was not achieve at least the experimental data show a tendency toward this condition. The question if this condition is achieved or not is still open. Also future studies with viscous liquids and different type of mixers is necessary to better understand the development of the slug structures.

4. Acknowledgements

This work is supported by the FINEP-CTPETRO under the grant no. 65.2000.0043.00, sub-projeto 7, and by Petrobras under the grant 6504010007. The authors are also grateful to Dr. Fagundes from Petrobras for the useful suggestions and the constant encouraging.

5. References

- Andreussi, P. and Bendiksen, K., 1989, "An investigation of void fraction in liquid slugs for horizontal and inclined gas-liquid pipe flow", *Int. J. Multiphase Flow*, vol.15, pp. 937-946.
- Barnea, D. and Taitel, Y., 1993, "A model for length distribution in gas-liquid flow", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 19, pp. 829-837.
- Barnea, D. and Brauner, N., 1985, "Holdup of the liquid flow in two-phase intermittent flow", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 11, pp. 43-49.
- Bendiksen, K.H., 1984, "An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 10, pp. 467-483.
- Dukler, E. and Hubbard, M.G., 1975, "A model for gas-liquid slug flow in horizontal and near horizontal tubes", *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, vol. 14, n.4, pp.377-347.
- Dukler, A.E., Moalem M.D. and Brauner, N., 1985, "A physical model for predicting the minimum stable slug length", *Chem. Eng. Science*, vol. 40, pp. 1379-1385.
- Fabre, J. and Liné, A., 1992, "Modeling of two-phase slug flow", *Annual Review of Fluid Mech.*, 24:21-46.
- Fagundes Netto, J.R., 1999, "Dynamique de poches de gas isolees en ecoulement permanent et non permanent horizontal", Ph.D thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France.
- Grenier, P., 1997, "Evolution des longuers de bouchons écoulement intermittent horizontal", Ph.D thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France.
- Nydal, O.J., Pintus, S. and Andreussi, P., 1992, "Statistical Characterization of slug flow in horizontal pipes", *Int. J. Multiphase Flow*, 18,3,pp. 439-453.
- Taitel, Y., Dukler, A.E. , 1977, "A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow", *AIChE Journal* 22:47-54.

PADRÕES DE FLUXO E CRITÉRIOS DE TRANSIÇÃO EM ESCOAMENTO BIFÁSICO ÁGUA-ÓLEO PESADO CRÚ

Oscar M. Hernandez Rodriguez

Isabela S. Wang

Antonio C. Bannwart

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – Depto. de Energia - FEM/DE

Cx. P. 6122, 13083-970 – Campinas, SP – Brasil, Fone: (+55) (19) 9116-1561, Fax: (+55) (19) 289-4916

email: oscarmh@fem.unicamp.br

Resumo. O escoamento em tubulação de uma mistura bifásica óleo-água usualmente forma várias configurações espaciais ou padrões de escoamento das duas fases. Os padrões podem ser agrupados em três categorias: escoamento disperso, de fases separadas e intermitente. O escoamento disperso inclui bolhas de óleo em água, gotas de água em óleo e também emulsões de água em óleo e de óleo em água. Escoamentos de fases separadas incluem o padrão anular conhecido como “core-flow” (óleo no centro e água no anel) e padrões de escoamento estratificado. O escoamento intermitente consiste de longas bolhas de óleo separadas por pistões de água. Este trabalho apresenta um estudo experimental sobre os padrões de escoamento bifásicos formados por um petróleo pesado (500 mPa.s, 925,5 kg/m³ a 20 °C) e água em tubulação vertical e horizontal de diâmetro 2,84 cm. A tensão interfacial óleo-água é de 29 dinas/cm. As semelhanças com os padrões de escoamento gás-líquido são exploradas e os resultados são expressos em mapas de escoamento das velocidades superficiais. O padrão de escoamento anular (“core-flow”) foi observado tanto na seção vertical quanto na seção horizontal e devido à importância prática do “core-flow” para a viabilização da produção e transporte de petróleo pesado, são discutidos os critérios que podem explicar a ocorrência do “core-flow”. É proposto um critério de transição para o padrão anular (“core-flow”) baseado na teoria da estabilidade linear. O critério de estabilidade hidrodinâmica foi deduzido a partir de uma análise unidimensional e apresentou resultados satisfatórios frente aos dados experimentais obtidos.

Palavras Chave: Escoamento Líquido-Líquido, Escoamento Óleo-Água, Padrões de Fluxo, Estabilidade Hidrodinâmica, Core-flow

1. Introdução

O escoamento em um tubo de dois líquidos imiscíveis tem importantes aplicações em engenharia de petróleo, entre as quais o transporte hidráulico de líquidos viscosos, como óleos pesados, usando um segundo líquido muito menos viscoso (usualmente água) a fim de formar uma configuração anular conhecida como *core flow*. Recentemente, o uso dessa tecnologia foi proposta como uma atrativa alternativa para a produção de petróleo pesado em tubos verticais pela adição de uma quantidade de água relativamente pequena, apenas para lubrificar o escoamento (Vanegas Prada e Bannwart, 2000).

O escoamento de uma mistura bifásica óleo-água pode formar várias configurações espaciais ou padrões de escoamento das duas fases. Por analogia com as misturas gás-líquido, os padrões de escoamento podem ser agrupados em três categorias: escoamento disperso, de fases separadas e intermitente. O escoamento disperso inclui bolhas de óleo em água, gotas de água em óleo e também emulsões de água em óleo e de óleo em água. Escoamentos de fases separadas incluem o padrão anular *core-flow* (óleo no centro e água no anel) e padrões de escoamento estratificado. O escoamento intermitente consiste de longas bolhas de óleo separadas por pistões de água.

As observações de todos esses padrões de escoamento em um aparato simples depende das propriedades do fluido, tamanho do tubo e geometria envolvida. Por exemplo, Charles et al. (1961) realizaram experimentos com óleo e água em um tubo de 2,54 cm DI e observaram a maioria dos padrões relatados acima, exceto o escoamento estratificado. Flores et al. (1997) utilizaram óleo mineral e água em um tubo horizontal de 5 cm DI, e não observaram o escoamento anular. Brauner e Maron (1998) propuseram uma classificação para os padrões de escoamento líquido-líquido em tubos horizontais baseada no número de Eötvos. Para baixos Eo os efeitos da tensão interfacial são dominantes e o *core-flow* tende a ocorrer, enquanto que para altos Eo o escoamento tende ao padrão estratificado. Bannwart (1999, 2000) propôs um critério baseado no número de Eötvos para a ocorrência do *core-flow* em tubo horizontal.

A utilização da teoria da estabilidade linear para a obtenção de critérios de transição baseados em uma modelagem unidimensional das equações foi abordada por Trallero (1995) para escoamento estratificado em tubulação horizontal. O autor obteve excelentes resultados na previsão do escoamento estratificado e estratificado com mistura na interface.

Este artigo reporta os padrões de escoamento observados visualmente para escoamento água-óleo crú pesado em tubulação de teste em vidro vertical e horizontal de 2,84 cm DI. As propriedades do petróleo são 500 mPa.s e 925,5 kg/m³ a 20 °C. A tensão interfacial óleo-água é 29 dinas/cm. Os diferentes padrões de escoamento observados são descritos e é explorada a analogia com o escoamento gás-líquido. A configuração anular (ou *core-flow*) foi enfatizada tendo em vista sua importância prática para óleos pesados.

É também apresentado o desenvolvimento de um critério de transição baseado na teoria da estabilidade linear para o *core-flow* vertical ascendente. As equações foram obtidas através de um tratamento unidimensional, o que permite a inclusão de todos os termos pertinentes ao escoamento. Numa primeira etapa foi modelado o escoamento laminar e

turbulento para escoamento invíscido (análise de Kelvin-Helmholtz). Posteriormente, é proposto um critério geral para o escoamento viscoso laminar. Para ambos os casos a interface óleo-água foi considerada lisa. Os resultados obtidos através da teoria da estabilidade linear são comparados com os dados experimentais adquiridos.

2. Montagem e procedimento experimental

A montagem experimental utilizada para os experimentos em escoamento bifásico óleo-água foi instalada no Laboratório de *Core Flow* do MultLab da Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, sendo composta de segmentos vertical e horizontal, como mostrado na Fig. 1.

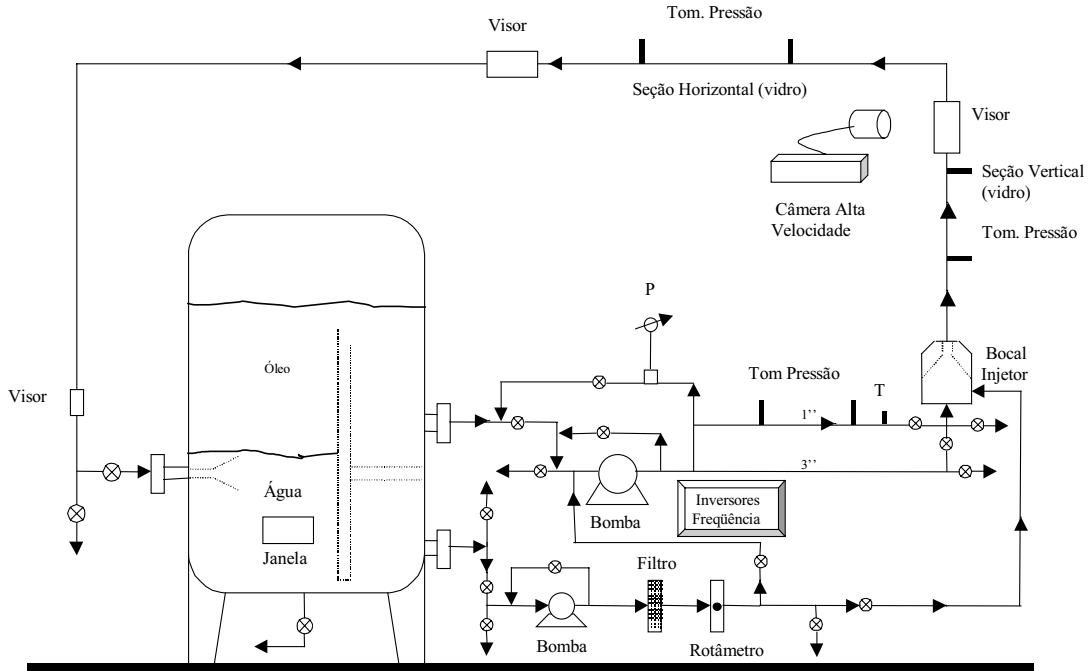


Fig. 1 – Vista esquemática da montagem para escoamento óleo-água

O óleo foi impulsionado do tanque separador por uma bomba de deslocamento positivo tipo parafuso para o bocal de injeção através de tubos de PVC de 7,46 ou 2,66 cm DI, para altas e baixas vazões, respectivamente. Da parte inferior do tanque separador a água foi impulsionada através de uma bomba de engrenagens para o bocal injetor. O motor de cada bomba foi controlado pelo seu próprio inversor de frequência. Ambas as vazões puderam ser independentemente variadas utilizando válvulas de *by-pass* ou inversor de frequência. A vazão de óleo foi medida através da rotação da bomba (altas vazões), previamente calibrada por balança e cronômetro. Para baixas vazões foi utilizada a própria perda de pressão através do tubo de 2,66 cm. As medidas da vazão de água foram realizadas através de rotâmetro.

Devido à alta viscosidade do óleo, não foi possível observar o padrão de escoamento contínuo de óleo em nosso aparato. Entretanto, nosso interesse era precisamente viabilizar o escoamento de óleo pesado através de padrões de escoamento que viabilizassem seu bombeamento. Assim, foi utilizado um bocal especialmente construído para a injeção lateral de água e injeção de óleo pelo centro, visando evitar o contato do óleo com a parede do tubo. O bocal reduz o diâmetro do tubo para escoamento de óleo de 7,46 para 2,5 cm, o que é o suficiente para penetrar na seção de teste vertical em vidro, a qual tem 2,84 cm DI e 2,5 m de comprimento. Tomadas de pressão distanciadas em 0,8 m conectadas a transdutores de pressão diferenciais (Validyne) foram montados com diafragmas apropriados. Após a seção de teste vertical a mistura óleo-água se dirige para a seção de teste horizontal em vidro (2,84 cm DI, 5,43 m de comprimento) e posteriormente para um segmento vertical descendente, retornando ao tanque separador. Ambas seções de visualização estão distantes no mínimo 60 diâmetros do bocal injetor e do ângulo reto (seção de teste horizontal).

Cada teste foi iniciado pelo escoamento de água somente pela seção de teste. Após a checagem feita tendo a perda de pressão da água como referência (medida pelo transdutor de pressão diferencial) o óleo era progressivamente inserido. As vazões eram então ajustadas até os valores desejados, utilizando os inversores de frequência. Após a checagem do regime permanente, os padrões de escoamento em ambas seções vertical e horizontal eram inicialmente definidos e os filmes correspondentes eram gravados através de uma câmera digital de alta velocidade (Olympus, 1000 frames/s). Perdas de pressão e temperaturas eram também medidas. A classificação final dos padrões de escoamento foi determinada pela observação dos filmes gravados em câmera lenta (30 frames/s). As faixas de velocidades superficiais cobertas em nossos experimentos foram: $0,007 < J_1 < 3$ m/s (óleo) e $0,05 < J_2 < 0,6$ m/s (água).

3. Padrões de escoamento observados

Devido à grande variedade de classificações de padrões de escoamento encontradas na literatura, decidimos propor uma classificação simples, a qual foi baseada numa analogia com os padrões de escoamento gás-líquido.

3.1. Escoamento vertical ascendente

Os padrões de escoamento observados no escoamento vertical ascendente foram: bolhas (B), bolhas dispersas (BD), intermitente (I) e anular (A).

O padrões de escoamento são muito similares aos padrões de escoamento gás-líquido em tubos verticais (Taitel, Barnea & Dukler, 1980). Para baixas vazões de óleo e moderadas vazões de água o padrão consiste de bolhas de óleo em água (B), mas para altas vazões de água uma dispersão de bolhas é observada. Escoamento intermitente (I) consiste de uma longa bolha “cap” de óleo em água. É bastante surpreendente que o escoamento intermitente também comece como um padrão de transição na entrada do tubo, similarmente ao escoamento gás-líquido. O escoamento anular (A) consiste de óleo no centro e água no anel (*core-flow*). Cada padrão de escoamento pode conter uma dispersão de bolhas de óleo na fase água.

Na Fig. 2 estão apresentados os padrões básicos observados através da câmera digital para escoamento óleo-água vertical ascendente.

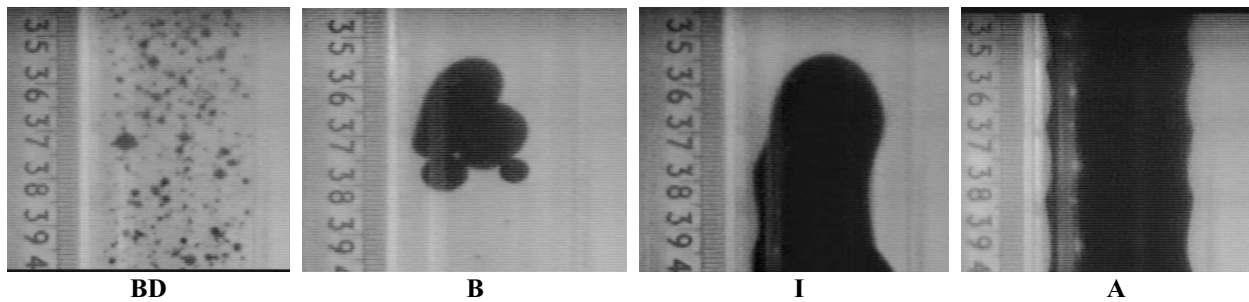


Fig. 2 – Padrões observados para escoamento óleo-água vertical ascendente.

Todos os padrões de escoamento estão indicados no mapa de fluxo da Fig. 3, utilizando as velocidades superficiais do óleo e da água. Para altas vazões de óleo ($J_1 \approx 3$ m/s) ocorreu o início da transição do padrão anular para o padrão emulsão de água em óleo, caracterizado por altas perdas de pressão decorrentes do enorme aumento da viscosidade da mistura óleo-água. As linhas contínuas desenhadas no diagrama (Fig. 3) são para propósitos de visualização das fronteiras somente. Nota-se uma grande semelhança com o mapa de escoamento de Taitel e o domínio do padrão anular em ampla faixa.

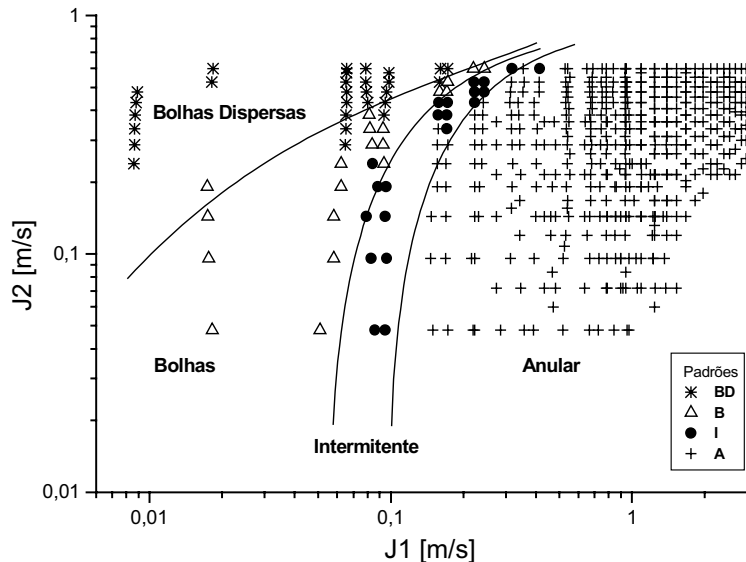


Fig. 3 – Padrões de fluxo observados em escoamento óleo pesado-água vertical ascendente em tubo de 2,84 cm.

3.2 Escoamento horizontal

Os padrões de escoamento, também observados na seção horizontal, porém não filmados com a câmera rápida, foram: estratificado (E), bolhas estratificada (B), bolhas dispersas (BD) e Anular (A). Os padrões descritos acima são mostrados no mapa de fluxo da Fig. 4. As linhas contínuas são para propósitos de visualização das fronteiras somente.

Aqui, novamente a semelhança com o escoamento gás-líquido é observada (Taitel & Dukler, 1976). Porém, algumas diferenças são notadas: a) no escoamento estratificado (E) a parede superior do tubo permanece lubrificada

pela água, fato que pode ser atribuído ao fenômeno interfacial e a efeitos de molhabilidade (a parede de vidro é óleo-fóbica e hidrofílica); b) o regime de bolhas em baixas vazões (B) é caracterizado pelo empacotamento de bolhas coalescentes, as quais mantêm sua forma individual, mas formam uma fase contínua segregada de óleo; c) o regime de bolhas dispersas (BD) é caracterizado por bolhas dispersas na fase água e essas bolhas podem estar tanto estratificadas quanto homogeneamente dispersas na fase água; e d) escoamento intermitente não foi observado, o que indica a importância do fenômeno interfacial e coalescência. O padrão anular (A) pode ser tanto suave e centrado quanto ondulado e excêntrico.

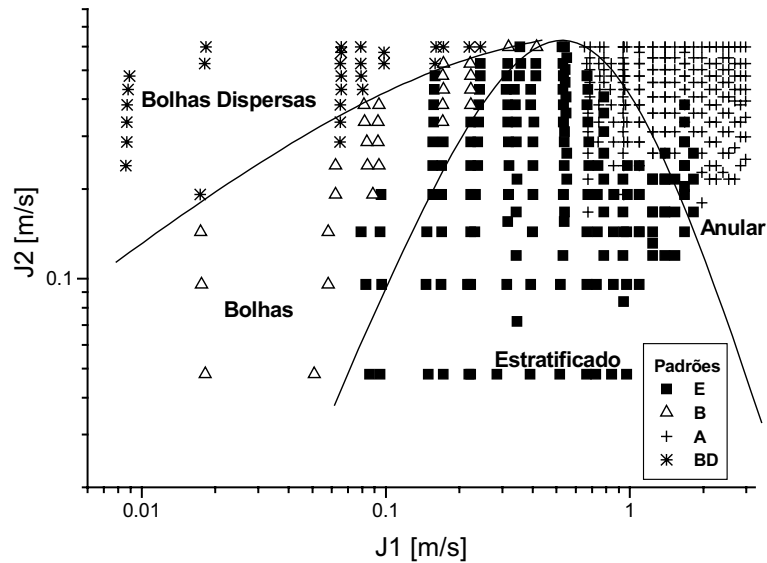


Fig. 4 - Padrões de fluxo observados em escoamento óleo pesado-água em tubo horizontal de 2,84 cm.

4. Critério de transição baseado na teoria da estabilidade linear

A Fig. 5 apresenta a geometria do problema em estudo. A análise do escoamento anular foi baseada no modelo de dois fluidos, onde as equações diferenciais transitientes unidimensionais da quantidade de movimento e continuidade foram aplicadas para a água e para o óleo e estas foram acopladas através de relações constitutivas apropriadas. Os fluidos foram considerados incompressíveis e o escoamento isotérmico e sem mudança de fase. Será utilizado o índice 1 para a fase óleo (núcleo) e o índice 2 para a fase água (anel).

As equações da quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas foram acopladas diretamente através da equação de Laplace-Young, pois para o escoamento vertical as pressões atuantes na interface óleo-água podem ser iguadas às pressões atuantes no seio de cada fase, ou seja: $P_{1i} = P_1$ e $P_{2i} = P_2$.

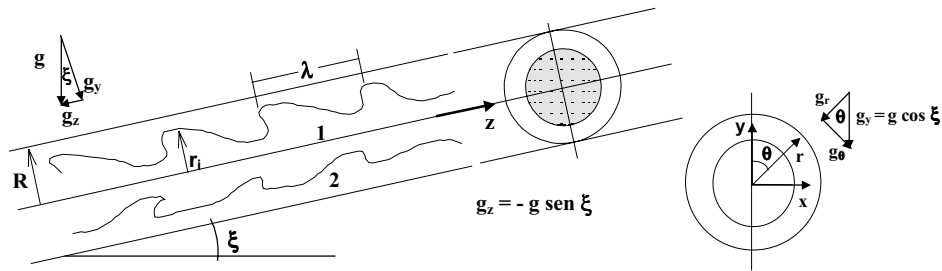


Fig. 5 – Geometria do Problema

As pressões foram eliminadas subtraindo a equação da quantidade de movimento para a água da equação da quantidade de movimento para o óleo. As Equações da continuidade e quantidade de movimento ficaram sendo, respectivamente:

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} + \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} + V_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad - \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} + (1 - \epsilon_1) \frac{\partial V_2}{\partial z} - V_2 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z} = 0 \quad e \quad (1),(2)$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\varepsilon_1)\rho_1 \left[\frac{\partial(\varepsilon_1 V_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon_1 k_1 V_1^2)}{\partial z} \right] - \varepsilon_1 \rho_2 \left\{ \frac{\partial[(1-\varepsilon_1)V_2]}{\partial t} + \frac{\partial[(1-\varepsilon_1)k_2 V_2^2]}{\partial z} \right\} + \\
 & \varepsilon_1(1-\varepsilon_1) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2\sigma}{D\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{D\sigma}{16\varepsilon_1^{3/2}} \left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z} \right)^2 - \frac{D\sigma}{4\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial z^2} \right] = \\
 & -(1-\varepsilon_1) \frac{S_i}{A} \tau_i - \varepsilon_1 \frac{S_i}{A} \tau_i + \varepsilon_1 \frac{4}{D} \tau_w + \varepsilon_1(1-\varepsilon_1)g_z(\rho_1 - \rho_2)
 \end{aligned} \quad (3)$$

onde V corresponde às velocidades médias na seção, ρ corresponde às densidades, D é o diâmetro interno do tubo, g_z é a componente gravitacional ($g_z = -9.81$ para escoamento vertical ascendente), σ é a tensão interfacial, ε_1 é a fração volumétrica da fase óleo, τ_i e τ_w as tensões de cisalhamento na interface e na parede do tubo, respectivamente e ainda: $\varepsilon_2 = (1 - \varepsilon_1)$, $S_i = \pi D(\varepsilon_1)^{0.5}$, $A = \pi D^2/4$ e $k = \langle V^2 \rangle / \langle V \rangle^2$, lembrando que: $\langle f_n \rangle = 1/A_n \int f_n dA$, sendo f uma função qualquer para a fase e n o índice que indica a fase.

A estabilidade hidrodinâmica estuda o eventual crescimento de uma perturbação na configuração inicial, ou seja:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_1^o + w_1 \\
 V_2 &= V_2^o + w_2 \\
 \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^o + \eta
 \end{aligned} \quad (4)$$

onde o sobrescrito “o” indica condição de equilíbrio, sem perturbação e w_1 , w_2 e η representam as perturbações impostas nas velocidades e na fração volumétrica da fase 1, respectivamente. Deve-se ressaltar que V_1^o , V_2^o e ε_1^o são constantes e w_1 , w_2 e $\eta = f(z,t)$.

Na teoria da estabilidade linear as perturbações w_1 , w_2 e η são consideradas pequenas e, portanto, podem ser desprezados os termos de segunda ordem ou ordens mais altas. Tal simplificação parece ser bastante coerente em se tratando do escoamento anular óleo-água (*core flow*), pois as ondas interfaciais observadas são relativamente longas e não apresentam grande turbulência. Substituindo (4) nas Eqs. (1), (2) e (3) e operando, chegou-se às seguintes equações para a continuidade e quantidade de movimento, respectivamente:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon_1^o \frac{\partial w_1}{\partial z} + V_1^o \frac{\partial\eta}{\partial z} = 0 \quad , \quad -\frac{\partial\eta}{\partial t} + (1-\varepsilon_1^o) \frac{\partial w_2}{\partial z} - V_2^o \frac{\partial\eta}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad (5),(6)$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_1^o(1-\varepsilon_1^o) \left(\rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \left[\rho_1 V_1^o(1-\varepsilon_1^o)(1-2k_1^o) + \rho_2 V_2^o \varepsilon_1^o(1-2k_2^o) \right] \frac{\partial\eta}{\partial t} + \\
 & - \left\{ \rho_1 V_1^{o2}(1-\varepsilon_1^o) \left(k_1^o - \varepsilon_1^o \frac{dk_1}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right) + \rho_2 V_2^{o2} \varepsilon_1^o \left(k_2^o - (1-\varepsilon_1^o) \frac{dk_2}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right) + \frac{(1-\varepsilon_1^o)\sigma}{D\sqrt{\varepsilon_1^o}} \right\} \frac{\partial\eta}{\partial z} + \\
 & - \frac{(1-\varepsilon_1^o)\sqrt{\varepsilon_1^o} D\sigma}{4} \frac{\partial^3\eta}{\partial z^3} = \frac{\partial f_e}{\partial V_1} \Big|_o w_1 + \frac{\partial f_e}{\partial V_2} \Big|_o w_2 + \frac{\partial f_e}{\partial \varepsilon_1} \Big|_o \eta
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{onde: } f_e = f(V_1, V_2, \varepsilon_1) = -\frac{S_i \tau_i}{A} + \varepsilon_1(1-\varepsilon_1)g_z(\rho_1 - \rho_2) + \frac{4\varepsilon_1 \tau_w}{D} \quad (8)$$

Buscou-se, neste ponto, a eliminação dos termos de perturbação da velocidade, w_1 e w_2 . Para a eliminação foram utilizadas as Eqs. (5) e (6) e foi realizada a derivação em z da Eq. (7), restando a equação da onda interfacial:

$$M \frac{\partial^4\eta}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + 2E \frac{\partial^2\eta}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + H \frac{\partial\eta}{\partial z} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\text{cujos coeficientes são: } M = \frac{\sigma D \sqrt{\varepsilon_1^o} (1-\varepsilon_1^o)}{4} \quad ; \quad N = \rho_1(1-\varepsilon_1^o) + \rho_2 \varepsilon_1^o \quad ; \quad E = \rho_1 V_1^o(1-\varepsilon_1^o)k_1^o + \rho_2 V_2^o \varepsilon_1^o k_2^o \quad ;$$

$$F = \rho_1 V_1^{o2} \left(1 - \varepsilon_1^o \left(k_1^o - \varepsilon_1^o \frac{dk_1}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right) \right) + \rho_2 V_2^{o2} \varepsilon_1^o \left[k_2^o + (1 - \varepsilon_1^o) \frac{dk_2}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right] + \frac{(1 - \varepsilon_1^o) \sigma}{D \sqrt{\varepsilon_1^o}} ;$$

$$G = - \frac{1}{\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{1}{1 - \varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_2} \Big|_o \quad \text{e} \quad H = \frac{- \frac{V_1^o}{\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{V_2^o}{1 - \varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_2} \Big|_o + \frac{\partial fe}{\partial \varepsilon_1} \Big|_o}{- \frac{1}{\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{1}{1 - \varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_2} \Big|_o} = c_o$$

onde c_o é a velocidade da onda cinemática, como deduzido por Wallis (1969).

A solução exata do problema linearizado foi desenvolvida segundo a metodologia de solução apresentada por Whitham, (1974). Com o intuito de analisar o caráter ondulatório da Eq. (9), foi utilizado o modo normal, ou seja:

$$\eta(z, t) = \eta_{\max} e^{i\mathbf{k}(z - ct)} \tag{10}$$

onde \mathbf{k} é o número de onda e c a velocidade da onda.

Substituindo a Eq. (10) na Eq. (9), chegou-se à seguinte equação:

$$\mathbf{k} \frac{N}{G} \left(c^2 - 2 \frac{E}{N} c + \frac{F - M \mathbf{k}^2}{N} \right) + i(c - H) = 0 \tag{11}$$

Rearranjando a Eq. (11) e utilizando o teorema de Viète, chegou-se à seguinte equação:

$$\mathbf{k} \frac{N}{G} (c - c_1)(c - c_2) + i(c - c_o) = 0 \tag{12}$$

onde H foi substituído por c_o . Próximo de $c = c_1$ e próximo de $c = c_2$ a Eq. (12) fornece, respectivamente:

$$w \cong \mathbf{k} c_1 - i \frac{G}{N} \frac{c_1 - c_o}{c_1 - c_2} \quad \text{e} \quad w \cong \mathbf{k} c_2 - i \frac{G}{N} \frac{c_2 - c_o}{c_2 - c_1} \tag{13,14}$$

Seguindo uma análise temporal, para a estabilidade ocorrer a parte imaginária de w (Eqs. 13 e 14) deve ser negativa, onde w é a frequência angular. Rearranjando as Eqs. (13) e (14) e assumindo que $c_1 > c_2$, foram obtidos os seguintes critérios de transição:

$$\begin{cases} 1 - G > 0 \\ 2 - c_1 \text{ e } c_2 \text{ devem ser reais (Kelvin - Helmholtz)} \\ 3 - c_2 < c_o < c_1 \end{cases}$$

Resolvendo a Eq. (11) para c (parte real) e aplicando os critérios de transição chegou-se ao seguinte critério geral, onde: V_o corresponde a E/N e foi denominada como a velocidade média ponderada, conforme definido por Wallis (1969), e λ é o comprimento da onda interfacial:

$$0 \leq \frac{\left(\frac{c_o}{V_o} - 1 \right)^2}{1 + \frac{M \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - F}{N V_o^2}} \leq 1 \tag{15}$$

Uma importante observação a respeito do critério geral apresentado pela Eq. (15) diz respeito ao seu denominador, que é justamente o critério de Kelvin-Helmholtz, aplicável apenas para escoamentos inviscidos. O critério de Kelvin-Helmholtz pode ser representado, portanto, pela seguinte equação:

$$V_o^2 - \frac{F}{N} \geq 0 \tag{16}$$

onde o termo vinculado à derivada de quarta ordem (M) na Eq. (9) é desprezado, buscando com isso a representação de uma onda hiperbólica (Drazin e Reid, 1981).

5. Aplicação dos critérios de transição e comparação frente aos dados experimentais obtidos

Os critérios de transição propostos foram aplicados para escoamento com interface lisa. Inicialmente, foi analisado o critério de Kelvin-Helmholtz para escoamento laminar e turbulento. Posteriormente, foi analisado o critério geral para escoamento laminar para densidades iguais e densidades diferentes. O perfil de velocidades utilizado no critério geral para densidades diferentes foi ajustado através dos dados experimentais obtidos.

5.1. Estabilidade de Kelvin-Helmholtz

O desenvolvimento do critério de Kelvin-Helmholtz, aplicável apenas para escoamento invíscido, levou à seguinte equação:

$$\left(V_1^o - V_2^o\right)^2 < \left(\frac{1 - \varepsilon_1^o}{\rho_2} + \frac{\varepsilon_1^o}{\rho_1}\right) \left(\frac{Dk^2\sigma}{4\sqrt{\varepsilon_1^o}} - \frac{\sigma}{D\varepsilon_1^{o3/2}}\right) \tag{17}$$

onde percebe-se que o termo da esquerda é desestabilizador do padrão, o primeiro termo do segundo parênteses do lado direito é estabilizador e o segundo termo do segundo parênteses do lado direito é desestabilizador. Analisando a Eq. (17) percebe-se que a existência da tensão interfacial é imprescindível para a existência do padrão anular, pois a diferença entre a velocidade do óleo (V_1) e a velocidade da água (V_2) sempre terá um valor maior do que zero. A Fig. 6 mostra a seguir a aplicação do critério de Kelvin-Helmholtz para um dos casos estudados, onde $\sigma = 0.029$ mN/m, $J_1 = 0,27$ m/s, $J_2 = 0,07$ m/s, $\lambda = 0,038$ m e $D = 0,0284$ m, $\rho_1 = 925$ kg/m³, $\rho_2 = 1000$ kg/m³. O critério apresentado na Fig. 6 refere-se a um perfil de velocidades quase linear para o óleo, sendo que o óleo seria praticamente um pistão, o que foi considerado coerente levando em conta a grande viscosidade do óleo ($\mu_1 = 0,5$ Pa.s).

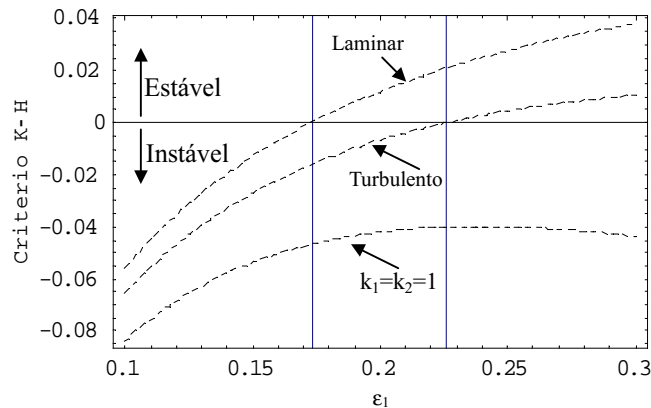


Fig. 6 - Critério de estabilidade de Kelvin-Helmholtz para escoamento óleo-água core-flow vetical ascendente.

Para o anel de água, foram analisados tanto o perfil laminar quanto o perfil turbulento médio, sendo que o último foi ajustado através dos dados experimentais. A influência do perfil de velocidades no critério de transição pode ser verificada através do parâmetro k , que representa a relação entre a média do quadrado da velocidade pelo quadrado da média da velocidade. Como pode ser observado na Fig. 6, o critério de Kelvin-Helmholtz (Eq. 16) prevê a estabilidade do padrão anular para frações volumétricas de óleo maiores do que 0.17 para o caso laminar e maiores do que 0.23 para o caso turbulento, o que esta de acordo com o observado experimentalmente e leva à conclusão de que a turbulência é um fator de desestabilização. Nos trabalhos clássicos (Drazin e Reid, 1981) o parâmetro k é sempre assumido como sendo igual à unidade. Fazendo o parâmetro k igual à unidade verificou-se que o caso testado sempre seria instável, o que não condiz com as observações. Os resultados demonstram a grande influência do perfil de velocidades (k) no critério de estabilidade de Kelvin-Helmholtz.

5.2. Critério geral para densidades iguais

Para a aplicação do critério de estabilidade geral são necessárias equações que descrevem a tensão cisalhante na interface óleo-água, (τ_i), e na parede da tubulação, (τ_w). As equações foram deduzidas para escoamento laminar.

$$\text{Cisalhamento na interface: } \tau_i = \frac{8\mu_1}{D\sqrt{\varepsilon_1}} \left\{ V_1 - \left[s_o V_2 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)g_z D^2}{16\mu_2} \varepsilon_1 \left(2 + \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \text{Ln}\varepsilon_1 \right) \right] \right\} \tag{18}$$

Cisalhamento na parede:
$$\tau_w = \frac{8}{D(1-\varepsilon_1)} \left[V_2 - \frac{1}{4}(\rho_1 - \rho_2)g_z D\varepsilon_1 \left(1 + \varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 \ln \varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right) \right] \quad (19)$$

O critério geral foi aplicado para o caso onde a densidade dos fluidos era a mesma e para escoamento laminar. A Fig. 7 apresenta as regiões onde ocorre a estabilidade do padrão core flow vertical ascendente em função da fração volumétrica do óleo (ε_1) e da relação de viscosidades ($m = \mu_2/\mu_1$). Analisando a Fig. 7 percebe-se que a estabilidade ocorre para frações volumétricas da fase central inferiores a 0,50, quando o fluido no anel é mais viscoso do que o fluido no centro, e superiores a 0,50, quando o fluido no centro é mais viscoso do que o fluido no anel.

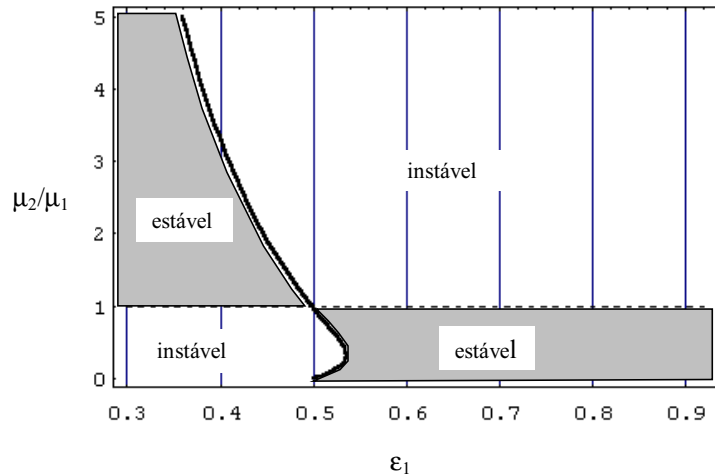


Fig. 7 - Critério geral para padrão anular em função da fração volumétrica e da relação de viscosidade.

A segunda constatação está coerente com o observado experimentalmente para o core flow, onde o fluido no centro, no caso óleo, é muito mais viscoso do que o fluido no anel, no caso a água. Porém, foi observada experimentalmente a existência do padrão anular para frações volumétricas acima de 0,40, o que indica que o critério proposto não é capaz de prever a existência do padrão anular para frações volumétricas inferiores a 0,50. A Fig. 8 apresenta as fronteiras para o padrão anular obtidas através do critério de Kelvin-Helmholtz e através do critério geral para densidades iguais.

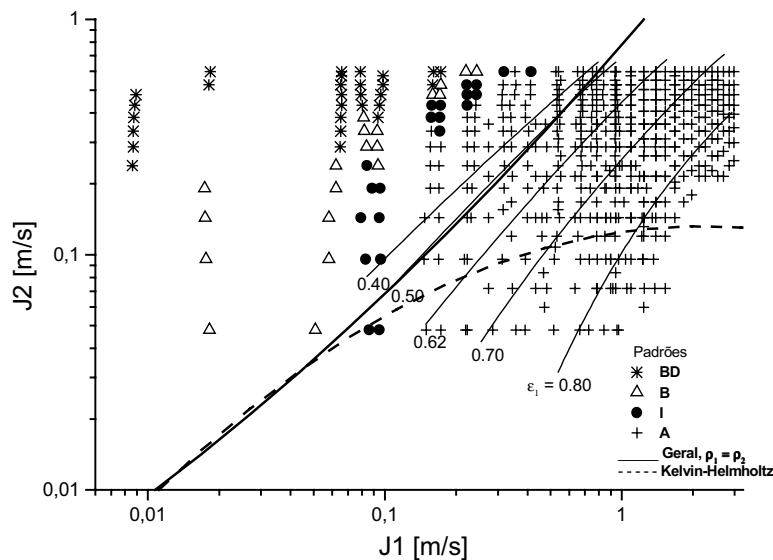


Fig. 8 - Transições previstas pelo critério geral e Kelvin-Helmholtz em comparação com os dados experimentais.

Analisando a Fig. 8 percebe-se claramente que o critério geral para densidades iguais representa muito melhor a transição do padrão intermitente para o anular, em comparação com o critério de Kelvin-Helmholtz. Tal resultado era de se esperar, uma vez que o critério de Kelvin-Helmholtz é válido somente para escoamentos invíscidos, o que está longe de ser verdade num escoamento óleo-água core flow, onde a viscosidade do óleo é bastante elevada. Além disso, observando as curvas de fração volumétrica constante apresentadas na Fig. 8, percebe-se que a estabilidade de Kelvin-Helmholtz gerou uma transição entre o padrão intermitente e anular para frações volumétricas sempre acima de 0,6, enquanto que o critério geral para densidades iguais chegou a prever pontos com frações volumétricas próximas a 0,5, o que esteve mais próximo dos resultados experimentais obtidos. Apesar de Kelvin-Helmholtz prever a estabilidade para

frações volumétricas acima de 0,23 (caso turbulento), ele gera uma fronteira menos abrangente quando testado frente aos dados experimentais.

Apesar do critério geral para densidades iguais ter apresentado resultados melhores, como pode ser observado na Fig. 8, ele ainda previu como instáveis uma razoável quantidade de pontos obtidos para baixas velocidades superficiais de óleo e altas velocidades superficiais de água, onde ainda foi observado experimentalmente o padrão anular. Porém, nessa região a fase central (óleo) tinha um comportamento diferente das “ondas bambu” observadas por Bai (1996), sendo um “core” distorcido, o que poderia significar o início da transição do padrão anular para o padrão intermitente. Assim, o critério geral estaria sendo eficiente apenas na previsão do padrão anular totalmente estável.

5.3. Critério geral para densidades diferentes

Para a aplicação do critério geral para densidades diferentes foi utilizado o um perfil de escoamento turbulento ajustado através dos resultados experimentais. Valores obtidos experimentalmente para velocidades superficiais, comprimentos de onda, velocidades de onda e frações volumétricas foram utilizados para ajustar o perfil médio de velocidade da água para cada ponto experimental. Para cada ponto foi obtido o expoente “*p*” que definiu o perfil de velocidade médio, segundo uma expressão do tipo: $w_2(r) = w_c (y/R)^{1/p}$, onde: $y=R-r$, $w_2(r)$ é a velocidade da água em função do raio, w_c é a velocidade do centro do tubo (o que por aproximação é a própria velocidade da fase óleo) e R é o raio do tubo. Posteriormente, foi obtido o parâmetro de distribuição *k* (relação entre a média do quadrado da velocidade pelo quadrado da média da velocidade) para cada ponto. As operações descritas forneceram resultados médios ajustados experimentalmente e através dos quais foi possível avaliar a eficiência do critério geral proposto. Os pontos experimentais utilizados varrem significativamente toda a faixa onde o padrão anular foi verificado. A Fig. 9 apresenta o critério geral em função da fração volumétrica do óleo.

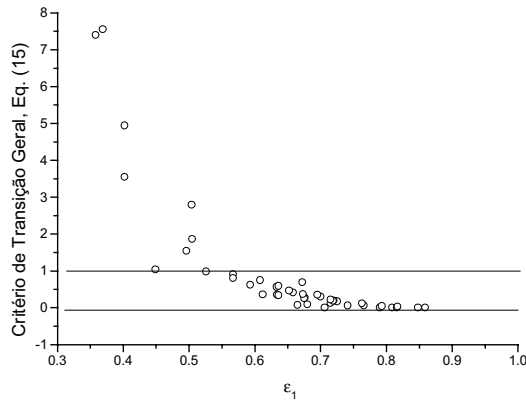


Fig. 9 – Critério geral em função da fração volumétrica, testado frente aos dados experimentais.

Como pode ser observado na Fig. 9, o critério geral falha para frações volumétricas inferiores a 0,5. Como já relatado, pontos com frações volumétricas inferiores a 0,50 estariam relacionados com a transição do padrão anular para o padrão intermitente. Não foi observada nenhuma melhoria com relação ao critério para densidades iguais, o que demonstra que a diferença de densidades não é parâmetro relevante para o critério proposto. O critério geral foi capaz de prever a estabilidade em mais de 80 % dos pontos experimentais testados.

6. Conclusões

Este artigo reporta os padrões de fluxo observados no escoamento bifásico de óleo pesado e água em tubos vertical e horizontal de 2,84 cm DI. Através de um sistema de injeção especial, foi possível observar vários diferentes padrões. Entretanto, não foi possível observar uma fase contínua de óleo em nosso aparato devido à alta viscosidade do óleo.

Em escoamento vertical ascendente, os padrões de escoamento incluem basicamente os padrões bolhas, bolhas dispersas, intermitente e anular, os quais são totalmente análogos ao escoamento gás-líquido. Em escoamento horizontal, os padrões de escoamento incluem estratificado, bolhas, bolhas dispersas e anular, mas não foi observado o padrão intermitente. Um resultado significativo foi a observação do escoamento anular em ambos os tubos, devido à sua importância na produção e transporte de óleo pesado. O escoamento *core-flow* tende a ocorrer em um tubo quando os fluidos possuem viscosidades muito diferentes, mas densidades relativamente próximas. Essa situação é sempre satisfeita para óleos pesados, crus ou refinados, desde que sua viscosidades seja maior de que 100 cP e densidade próxima à da água.

Foi proposto um critério de transição geral baseado na teoria da estabilidade linear, cuja principal contribuição consiste na simplicidade da modelagem unidimensional. O critério geral inclui o critério de Kelvin-Helmholtz que foi comparado com os dados experimentais obtidos para escoamento óleo-água vertical ascendente e foi demonstrado que a tensão interfacial tem um importante papel na manutenção da estabilidade hidrodinâmica do padrão bifásico anular. A modelagem mostrou que a turbulência no escoamento da água no anel também exerce um papel fundamental tornando o escoamento mais instável. O parâmetro de distribuição *k* (relação entre a média do quadrado da velocidade pelo

quadrado da média da velocidade) exerce um importante papel no critério de Kelvin-Helmholtz. A aplicação do critério geral para escoamento laminar com densidades iguais e diferentes foi comparado com os dados experimentais obtidos e mostrou-se melhor em comparação com o critério de Kelvin-Helmholtz. Porém, foi observada uma imprecisão para regiões de baixas vazões de óleo e altas vazões de água, onde, de acordo com os experimentos, seria uma região de transição do padrão anular para o padrão intermitente.

Analisando os resultados experimentais para escoamento óleo-água anular vertical ascendente verificou-se que o escoamento da água no anel tende a ser turbulento e a interface é sempre ondulada, tendo um formato semelhante às “ondas bambu” observadas por Bai (1996). Ainda assim, considerou-se que a análise unidimensional proposta foi capaz de fornecer informações qualitativas relevantes para a verificação dos parâmetros influentes na estabilidade hidrodinâmica do padrão analisado e foi ainda capaz de prever a estabilidade do padrão anular em mais de 80% dos pontos experimentais testados.

Agradecimentos

Os autores agradecem a PETROBRAS, FINEP, FAPESP e CNPq, pelo suporte financeiro em diferentes partes deste projeto.

7. REFERÊNCIAS

- Bai, R. 1995 Traveling waves in a high viscosity ratio and axisymmetric core annular flow. PhD thesis, University of Minnesota.
- Bannwart, A.C., 2000, Bubble analogy and stabilization of core-annular flow, *ETCE2000 & OMAE2000 Joint Conference*, CD-ROM, February 14-17, New Orleans, LA.
- Bannwart, A.C., 1999, The role of surface tension in core-annular flow, *2nd International Symposium on Two-Phase Flow Modeling and Experimentation - ISTEP'99*, vol. 2, pp.1297-1302, Pisa, Italy.
- Bannwart, A.C. 1998, Wavespeed and Volumetric Fraction in Core Annular Flow, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 24, pp. 961-974.
- Brauner, N. & Moalem Maron, D., 1998, Classification of liquid-liquid two-phase flow systems and the prediction of flow pattern maps, *2nd International Symposium on Two-Phase Flow Modeling and Experimentation - ISTEP'99*, vol. 2, pp.747-754, Pisa, Italy.
- Charles, M. E., Govier, G. W. and Hodgson, G. W., 1961, The horizontal pipeline flow of equal density oil-water mixtures, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol.39, n.1, pp.27-36.
- Drazin, P.G. and Reid, W.H., 1981, “Hydrodynamic Stability”, Cambridge University Press, Cambridge, 525p.
- Flores, J.G., Chen, X.T., Sarica, C. and Brill, J.P., 1997, Characterization of oil-water flow patterns in vertical and deviated wells, paper SPE 38810, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, San Antonio, Texas, 5-8 October.
- Taitel, Y. & Dukler, A. E. 1976 A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow, *AIChE Journal*, vol. 22, pp. 47-55.
- Taitel, Y., Barnea, D. & Dukler, A. E. 1980 Modeling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes, *AIChE Journal*, vol. 26, pp. 345-354.
- Trallero, J.L., 1995 Oil-Water Flow Patterns in Horizontal Pipes. PhD thesis, University of Tulsa.
- Vanegas Prada, J.W. & Bannwart, A.C., 2000, Modeling of vertical core annular flows and application to heavy oil production, *ETCE2000 & OMAE2000 Joint Conference*, CD-ROM, February 14-17, New Orleans, LA.
- Wallis, G.B., 1969, “One-Dimensional Two-Phase Flow”, MacGraw-Hill, New York, 408p.
- Whitham, G.B., 1974, “Linear and Nonlinear Waves”, John Wiley & Sons, New York, 636 p.

FLOW PATTERNS AND TRANSITION CRITERIA IN HEAVY CRUDE OIL-WATER FLOW

Abstract. The pipe flow of two-phase oil-water mixtures usually forms several spatial configurations or flow patterns of the two phases. These can be grouped into three categories: dispersed flow, separated flow and intermittent flow. Dispersed flow includes oil bubbles in water, water drops in oil, and also water-in-oil and oil-in-water emulsions. Separated flows comprise core-annular flow (oil in the core, water in the annulus) and stratified flow patterns. Intermittent flows consist of large oil bubbles separated by water slugs. This paper is aimed to an experimental study on the flow patterns formed by heavy crude oil (500 mPa.s, 925.5 kg/m³ at 20 °C) and water inside vertical and horizontal 1 in. pipes. The interfacial tension was 29 dynes/cm. The similarities with gas-liquid flow patterns are explored and the results are expressed in flow maps of the superficial velocities. The annular flow pattern ('core annular flow') was observed in both horizontal and vertical test sections and because of the practical importance of the core flow in providing an effective means for heavy oil production and transportation, this paper discusses criteria that may explain the occurrence of core flow in pipes. Transition mechanisms are discussed and some transition mechanisms are proposed.

Keywords: Liquid-liquid flow, Oil-water flow, Flow patterns, Hydrodynamic Stability, Core-flow.

ANÁLISE DOS EFEITOS DA CURVATURA DO DIAFRAGMA SOBRE O ESCOAMENTO DENTRO DE UM TUBO DE CHOQUE

Manuel Nascimento Dias Barcelos Júnior, Alessandro Borges de Sousa Oliveira e João Nildo de Souza Vianna

Universidade de Brasília – UnB, Brasília – Distrito Federal, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Faculdade de Tecnologia – Departamento de Engenharia Mecânica, Laboratório de Termociências e Metrologia Dinâmica, CEP: 70910-900. manuel@unb.br, borges@enm.unb.br e vianna@enm.unb.br

Jean-Pierre Damion e Virginie Daru

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris, Laboratoire de Métrologie Dynamique et Laboratoire de Simulation Numérique en Mécanique des Fluides, 151, Boulevard de l'Hôpital 75013 PARIS. damion@paris.ensam.fr e daru@paris.ensam.fr

Resumo. O objetivo do trabalho é analisar a influência da deformação do diafragma sobre os degraus de pressão gerados pelo escoamento dentro de um tubo de choque. O trabalho foi dividido em duas partes, uma numérica e outra experimental. Na parte numérica foi feita a adaptação de um programa que modela o escoamento dentro de um tubo de choque utilizando as equações de Euler e que considera a condição inicial de diafragma deformado. A parte experimental foi realizada em duas etapas; na primeira foi feito um estudo para avaliar a deformação de alguns tipos de diafragmas sob várias condições de operação. Já na segunda etapa foram preparados e executados ensaios empregando-se diversas razões de pressão para se fazer à medição de degraus de pressão ao longo de tubos de choque de diferentes diâmetros. Os resultados experimentais foram comparados com os obtidos pelo programa de forma a validá-lo. Analisando-se a performance do programa observa-se que este obtém excelentes resultados, bem próximos aos experimentais, em configurações de pequenas razões de pressão iniciais. De modo geral foi observado que a condição inicial de diafragma deformado é responsável em grande parte pelas oscilações presentes sobre os degraus de pressão em um tubo de choque.

Palavras chave: tubo de choque, metrologia, calibração, diafragma, simulação numérica.

1. Introdução

A evolução do conhecimento técnico-científico tem requerido métodos confiáveis de medição de pressão dinâmica em diversos valores de frequências. O conhecimento amplo do comportamento dinâmico dos transdutores de pressão é de grande importância. Entretanto a caracterização destes sensores é limitada pelos dispositivos de calibração dinâmica existentes. A calibração dinâmica de um instrumento de medição visa a determinação de seu sinal de saída no tempo por meio de um sinal de entrada conhecido. O nível de confiabilidade da calibração depende do profundo conhecimento do sinal de referência e do conjunto de aparelhos utilizados em sua aquisição. Atualmente, dentro da bibliografia especializada (Carvalho, 1995 e Damion, 1997), o tubo de choque é reconhecido como o instrumento mais indicado para a calibração dinâmica de transdutores de pressão que operam em alta frequência.

A qualidade metrológica do degrau de pressão gerado pelo tubo de choque depende do controle de diversas variáveis tais como: geometria e técnicas de construção do tubo, diferença de massa molecular dos gases utilizados e fatores que afastam os processos reais dos ideais. O degrau de pressão gerado para a calibração deve possuir um nível de interferência minimizado, sendo o mais plano possível. Um estudo desenvolvido por Daru e Damion (1993) mostra que grande parte da interferência sobre o degrau de pressão, além da gerada pela vibração do transdutor de pressão e do tubo de choque que é ocasionada pela interação fluido-estrutura, ocorre devido a um ruído de origem pneumática provocado pela curvatura do diafragma quando da condição inicial de diferença de pressão.

Esse trabalho tem como objetivo analisar a influência da curvatura do diafragma sobre o escoamento dentro do tubo de choque. O trabalho foi dividido em duas partes, uma numérica e uma experimental. Na parte numérica foi feita a adaptação de um programa, que considera a condição inicial de diafragma deformado, desenvolvendo um código numérico mais preciso para resolver as equações de Euler aplicadas ao tubo de choque. Já na parte experimental foram realizados dois trabalhos. Primeiramente foi feito um estudo da deformação de diafragmas de espessuras variadas e em diferentes condições de operação. Depois foram preparados e executados ensaios para validar o programa, comparando os resultados numéricos e os experimentais. A validação do programa é de grande importância para os estudos em metrologia dinâmica. Com a simulação numérica do escoamento dentro do tubo de choque, pode-se avaliar seu funcionamento em diferentes configurações de trabalho sem ter a necessidade de fazer experimentos, o que representa uma grande economia de tempo e de recursos.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Tubo de Choque

O Tubo de Choque é um dispositivo clássico no estudo de escoamentos compressíveis. Sua principal característica é a geração de uma onda de choque com padrões metrológicos bem definidos, sendo provavelmente um dos mais antigos dispositivos geradores de onda de choque (Vianna e Carvalho, 1993). A criação do tubo de choque ocorreu em

1899, por Vieille, mas foi em 1940, com os trabalhos experimentais realizados por Payman e Shepherd, que teve sua grande difusão como instrumento de investigação em mecânica dos fluidos (Glass e al., 1954). O Tubo de Choque é um longo tubo dividido em duas câmaras por um diafragma. Na primeira câmara existe um gás estagnado que está à alta pressão e na segunda um outro que está a uma pressão mais baixa que o da primeira. A câmara de alta pressão é geralmente denominada de tubo indutor a de baixa pressão de tubo induzido. A diferença de pressão inicial entre os dois tubos é mantida unicamente em virtude da presença de um diafragma, e os processos no interior do tubo de choque somente terão início após o rompimento deste.

As regiões 1 e 3, apresentadas na Fig. (1), tratam da diferença inicial de pressão entre as câmaras. Essas regiões representam a condição inicial do tubo de choque antes do rompimento da membrana. Com a ruptura da membrana uma onda de choque propaga com velocidade supersônica em direção à extremidade fechada do tubo induzido e, neste mesmo instante um leque de expansão segue em sentido oposto, ou seja, em direção ao tubo indutor. O leque de expansão é um conjunto de ondas de rarefação que representam uma expansão isentrópica. Pode-se observar, ainda, o surgimento de um superfície de contato que separa as regiões 2 e 4 formadas com o rompimento da membrana. Essa superfície propaga-se com a velocidade do escoamento atrás da onda de choque. Através dessa superfície não ocorre fluxo de massa, e a pressão da região 2 é igual a da região 4, mas a massa específica e a temperatura são diferentes. Outro fato que se observa são as reflexões das ondas. A onda de choque reflete muitas vezes dentro do tubo, seja no fundo do tubo induzido ou na superfície de contato. Essas reflexões dão origem a regiões com propriedades distintas.

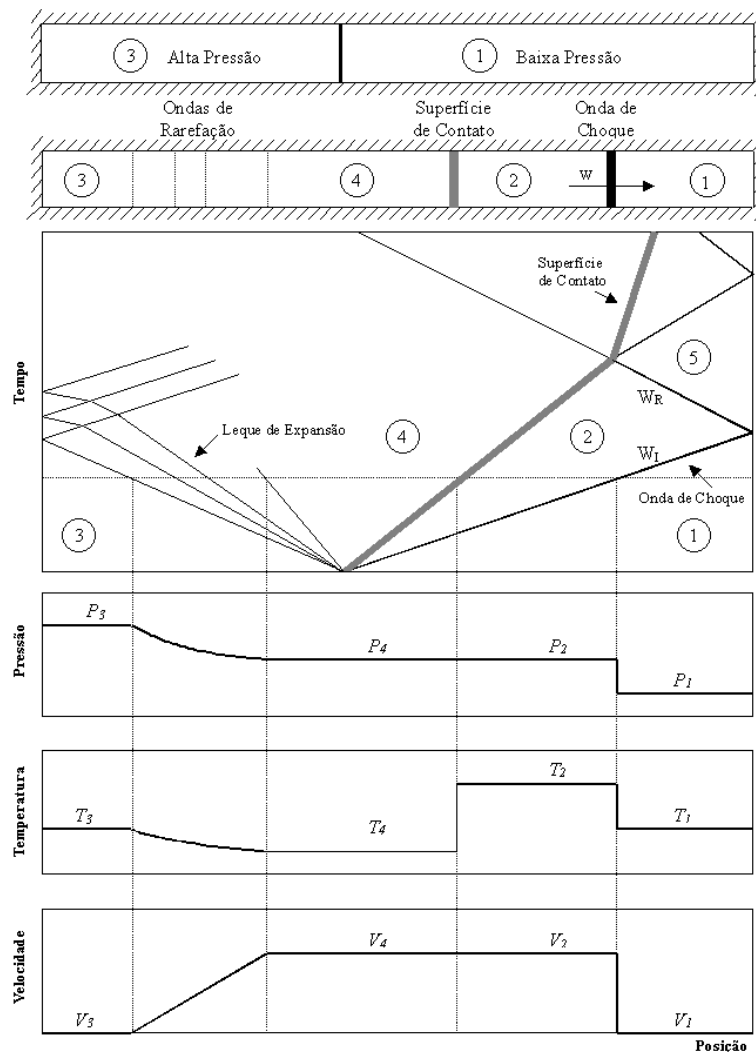


Figura 1. Diagrama geral das regiões formadas com a ruptura do diafragma e de suas propriedades.

Um fenômeno que influencia de forma muito importante os processos que ocorrem em um tubo de choque é a deformação do diafragma (Daru e Damion, 1993). A configuração oblíqua das condições iniciais provoca o surgimento de ondas de choque transversais que se refletem na parede do tubo e se encontram sobre o eixo central formando uma onda de pressão concentrada de estrutura esférica. Essa onda esférica repete-se periodicamente refletindo-se na parede do tubo e propaga-se aproximadamente com a mesma velocidade do escoamento atrás da onda de choque plana. Esse movimento gera um micro-escoamento em ambos os lados da onda que é captado pelos transdutores de pressão sendo responsável pelas oscilações periódicas observadas nos degraus de pressão.

A formação de uma onda de choque ocorre por meio da superposição de sucessivos pulsos de pressão, isto é, pequenas variações de pressão que se superpõem gerando uma descontinuidade finita. Análises teóricas e experimentais indicam que a espessura da onda de choque é da ordem molecular, comparado ao livre caminho médio entre as moléculas. Para efeito de cálculo assume-se que a onda de choque pelo fato de ter uma espessura muito pequena pode ser substituída por um modelo simples em que todas propriedades do fluido mudam descontinuamente através de uma linha matemática. Esta linha pode ser entendida como sendo a própria onda de choque. O cálculo realizado de acordo com este modelo só precisa levar em consideração as condições antes e depois da onda.

Em virtude da pequena distância em que se dá a variação dos parâmetros numa onda de choque, os gradientes dentro da mesma são elevados e, portanto os efeitos viscosos e de transferência de calor têm influência determinante no processo. Como a variação da entropia é função dos gradientes de velocidade e temperatura, o escoamento será dito não-isentrópico dentro da onda de choque mesmo para fluidos de baixa viscosidade e condutibilidade térmica como o caso do Ar. As formulações que descrevem matematicamente as propriedades de cada região formada com a passagem das ondas de expansão e de choque são obtidas a partir das equações da onda de choque normal. Equações das propriedades através de uma onda choque normal (Shapiro, 1953 e Schewpe e al., 1963):

$$p_2 = p_3 \left[1 - c_1 \frac{\gamma_3 - 1}{2c_3\gamma_1} \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right)}} \right]^{\frac{2\gamma_3}{\gamma_3 - 1}} \quad (1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[\left(\frac{W}{c_1} \right)^2 - 1 \right] \quad (2)$$

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{\left(1 + 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \frac{p_2}{p_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_2}{p_1} + 1} \quad (3)$$

2.2 Modelamento numérico do escoamento em um tubo de choque

O modelamento do escoamento dentro do tubo de choque é feito a partir da lei de conservação de energia que é representada pelo sistema de equações de Euler que não leva em consideração os efeitos viscosos da camada limite, sendo obtido por uma simplificação do sistema de equações de Navier-Stokes (Yang e al., 1987). A aplicação das equações é feita sobre um problema com condições iniciais constantes e uma descontinuidade, que é o caso do tubo de choque, também chamado de problema de Riemann (Hirsch, 1990 e Karimian e al., 1993). Sistema de equações de Euler em coordenadas cilíndricas e com condições de contorno de parede adiabática (Planes & Potin, 1998):

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0, \text{ conservação da massa} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r(\rho u_r^2 + p))}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_r u_z)}{\partial z} = \frac{p}{r}, \text{ conservação do momento sobre o eixo r} \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z^2 + p)}{\partial z} = 0, \text{ conservação do momento sobre o eixo z} \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho H u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho H u_z)}{\partial z} = 0, \text{ conservação da energia} \quad (7)$$

Ou sobe a forma matricial: $\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F + \frac{\partial}{\partial z} G = Q$, onde

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_z \\ \rho E \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_r u_z \\ \rho H u_r \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_r u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ \rho H u_z \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{p}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

O método escolhido para a resolução do sistema foi o de Mac Cormack, pois possui uma precisão de mesma ordem que o método de Lax-Wendroff (Hirsch, 1990), sendo também de fácil escrita para o cálculo computacional. O método de Mac Cormack foi adaptado a utilização de uma malha axissimétrica, Fig. (2).

Primeiro predictor: $U_{ij}^* = U_{ij}^n - \frac{\delta t}{\delta r} \frac{1}{r_i} [r_{i+1/2} (F)_{i+1,k}^n - r_{i-1/2} (F)_{i,k}^n] - \frac{\delta t}{\delta z} [(G)_{i,k+1}^n - (G)_{i,k}^n] + \frac{\delta t Q_{i,k}^n}{r_i}$ (9)

Segundo predictor: $U_{ij}^{**} = U_{ij}^* - \frac{\delta t}{\delta r} \frac{1}{r_i} [r_{i+1/2} (F)_{i,k}^* - r_{i-1/2} (F)_{i-1,k}^*] - \frac{\delta t}{\delta z} [(G)_{i,k}^* - (G)_{i,k-1}^*] + \frac{\delta t Q_{i,k}^*}{r_i}$ (10)

Corretor: $U_{i,k}^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{i,k}^n + U_{i,k}^{**})$ (11)

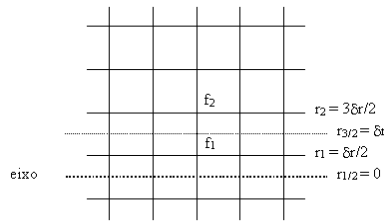


Figura 2. Malha axissimétrica.

O cálculo do passo de tempo tem como base a condição CFL (Courant, Friedrichs e Lewy). Essa condição é necessária para a estabilidade da solução do sistema de equações de Euler. A condição CFL assegura que o domínio de dependência do método de diferenças finitas inclui o domínio de dependência do sistema de equações diferenciais parciais (LeVeque, 1992). O domínio de dependência é o conjunto de pontos iniciais que pode influenciar a solução numérica.

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} (|u| + c)_{\max} \leq 0,5 \quad \therefore \quad dt = \frac{dx CFL}{(|u| + c)_{\max}} \tag{12}$$

A fim de evitar o surgimento de oscilações numéricas, o método de Mac Cormack é limitado em regiões de fortes gradientes utilizando o limitador de fluxo de van Leer (LeVeque, 1992). O fluxo numérico é escrito como:

$$F(U; j) = F_A(U; j) - (1 - \Phi)[F_A(U; j) - F_B(U; j)] \tag{13}$$

Onde F_B é o fluxo de Roe de ordem 1 e Φ é uma matriz que permite limitar o fluxo F_H em regiões de fortes gradientes (Roe, 1982).

3. Metodologia

O trabalho experimental foi dividido em duas partes uma que estudou a deformação de membranas e outra que fez a medição de degraus de pressão gerados em tubos de choque de diâmetros diferentes. O objetivo do estudo de deformação de membranas visou descobrir a influência de diferentes variáveis sobre sua forma e definir uma equação para descrever sua curvatura. As variáveis avaliadas foram: o diâmetro do tubo, a espessura da membrana, a diferença de pressão e a quantidade de membranas. As membranas são feitas de material plástico de diferentes espessuras e especialmente tratado e analisado para utilização como diafragmas em ensaios de calibração de transdutores de pressão dinâmica (Vianna e al., 1999).

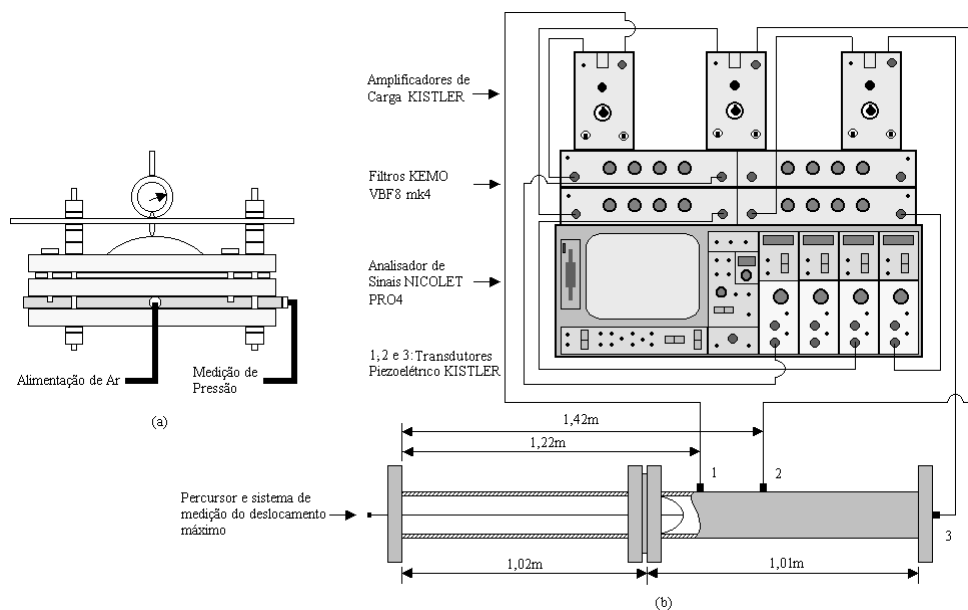


Figura 3 : Esquemas de montagem: (a) dispositivo de medição de deslocamento e (b) sistema de aquisição.

A avaliação da forma da membrana foi feita a partir da medição de seu deslocamento quando da aplicação de uma pressão. Para se realizar os ensaios foi adaptado um dispositivo, Fig. (3a), que consiste em uma placa de plástico com canais para a alimentação de ar montada junto com as extremidades do tubo de choque, onde são colocadas as

membranas, e fixada por meio do uso de parafusos. Sobre toda essa estrutura foi colocada uma placa de acrílico e instalado um relógio comparador para medir o deslocamento vertical da membrana percorrendo todo o diâmetro. As configurações dos ensaios realizados são apresentadas na legenda da Fig. (5). Os valores das diferenças de pressão utilizadas nos ensaios foram determinados calculando-se a diferença de pressão a um quarto, um meio e três quartos da diferença medida no momento de ruptura da membrana.

O objetivo da segunda parte do trabalho experimental foi obter sinais de pressão para comparar com os resultados calculados pela simulação numérica, e assim fazer uma avaliação do funcionamento do programa. As configurações de variáveis empregadas em cada ensaio podem ser encontrados na Tab. (1). Os níveis de pressão dos ensaios foram escolhidos a partir de uma análise do comportamento do escoamento em diversas configurações de trabalho do tubo que foram simuladas pelo programa. Quatro razões iniciais de pressão foram escolhidas para a realização dos ensaios, proporcionando assim, uma avaliação do programa em um grande intervalo de razões de pressão. Os ensaios que utilizaram elevadas razões iniciais de pressão foram realizados aplicando-se uma pressão inferior à atmosférica no tubo induzido de modo a evitar problemas de vedação.

Todos os ensaios foram feitos utilizando-se transdutores de pressão piezelétricos com incerteza de medição de 5% e trabalhando com uma frequência de amostragem de 500kHz e com a aquisição de 5000 pontos. Para reduzir a interferência de ruídos foram filtradas partes do sinal com frequência superior a 10kHz. O sistema utilizado para medir a flecha máxima e romper a membrana foi um percussor metálico. A flecha máxima era determinada pela medição, usando-se um escala, do deslocamento do percussor com relação à extremidade fechada do tubo indutor. As membranas receberam um tratamento de controle de umidade em um forno a 50°C durante 15 minutos antes da realização de cada ensaio.

4. Resultados e Discussões

4.1. Validação numérica do programa

O modo utilizado para verificar se o programa apresentava um bom funcionamento inicialmente foi fazer uma comparação deste com uma versão desenvolvida por Daru (Daru e Damion, 1993). Os dois programas foram lançados com as mesmas condições iniciais e utilizando a equação do arco de círculo para simular a interface entre as propriedades das câmaras de alta e baixa pressão. Observando-se a Fig. (4) pode-se notar que o programa novo mostrou-se mais estável, as curvas isobáricas apresentam uma forma mais contínua.

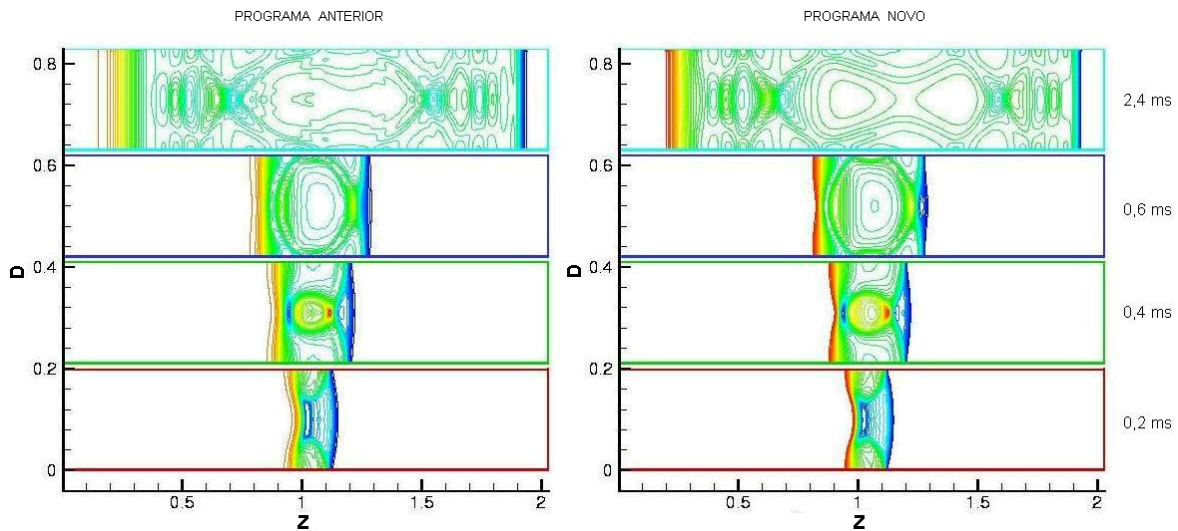


Figura 4. Gráfico de isobáricas para uma razão de pressão inicial $p_3/p_1 = 1,3$ e flecha = 45mm.

A diferença observada entre os dois programas é devido aos diferentes códigos numéricos utilizados por cada um. O programa novo tem um código que usa um limitador que ajusta o fluxo numérico de modo a obter uma melhor convergência. Esse limitador faz uma mistura dos fluxos de ordem 2 (Lax Wendroff) e 1, empregando o primeiro em regiões contínuas e o último em regiões de grandes discontinuidades (Arora & Roe, 1995). O programa novo é mais preciso e eficiente que o anterior, seus resultados são menos difusivos.

4.2. Análise experimental da deformação da membrana

Os resultados experimentais, obtidos no estudo da deformação da membrana, depois de passarem por uma adimensionalização com relação aos valores de flecha máxima e de diâmetro, mostram que a forma da membrana modifica muito pouco com a variação das configurações dos ensaios. Isto leva a conclusão de que se pode utilizar esses dados adimensionalizados para se determinar uma equação matemática, que modele o deslocamento devido à

deformação dessas membranas dentro do intervalo de valores de variáveis das configurações empregadas nos ensaios. Uma regressão linear foi feita para determinar o polinômio que melhor aproximasse esses dados adimensionalizados. Esse polinômio foi colocado dentro do programa para representar a condição inicial de membrana deformada a partir de um valor de flecha máxima medido no respectivo experimento, que o programa simula o escoamento.

A decisão de utilizar os dados experimentais para obter uma equação que descreva de modo empírico a forma da membrana ocorre devido à dificuldade de se encontrar uma equação analítica que modele o problema dentro das condições reais de operação do tubo de choque. Os dados experimentais foram obtidos utilizando-se configurações de variáveis que são normalmente aplicadas nas operações com o tubo de choque, principalmente no que diz respeito ao tempo necessário para se realizar o ensaio. O ensaio em um tubo de choque demora em média 15 minutos para a sua preparação, e durante esse tempo a membrana sofre uma deformação plástica intensa na direção axial. O tempo tem grande influência na forma final da membrana, o que pode ser observado por meio do polinômio determinado pela regressão, Eq. (14), que é semelhante à equação obtida analiticamente (Courbon, 1971), mas esta não considera a influência da variável tempo.

$$P(x) = 0,9949 - 0,0181x - 0,8516x^2 + 0,0168x^3 - 0,1429x^4 \tag{14}$$

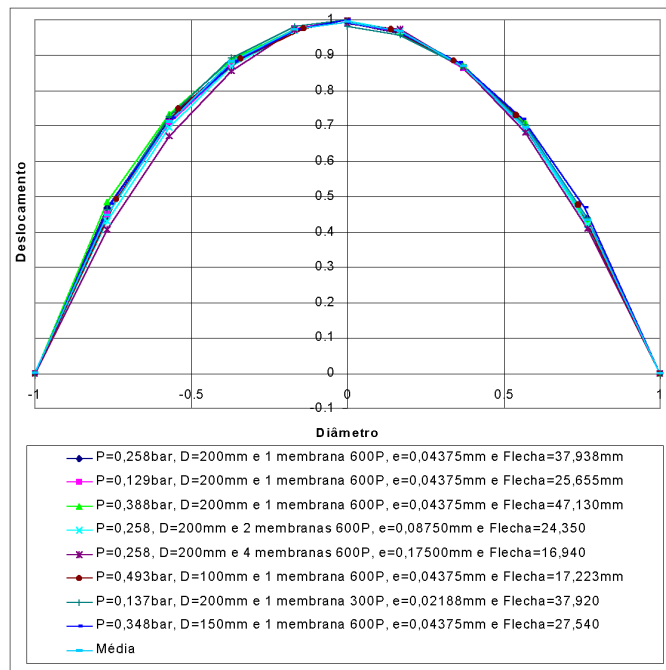


Figura 5: Representação gráfica da forma da membrana a partir dos dados obtidos nos ensaios realizados.

4.3. Validação experimental do programa

Existem muitos aspectos a serem analisados quando se comparam os resultados numéricos e experimentais. Pode-se observar que quando as razões iniciais de pressão são pequenas, os resultados numéricos são muito próximos dos experimentais, Fig. (6a). Isso quer dizer que o modelo físico utilizado para fazer a simulação numérica do escoamento, as equações d'Euler, não é adequado para cálculos com grandes razões de pressão entre as câmaras dos tubos. Quando se trabalha com grandes razões de pressão a influência da camada limite é maior sobre o escoamento no tubo de choque. A diferença de nível de pressão observada, Fig. (6a), no segundo degrau de pressão medido na parede do tubo pode ser causada devido à influência da camada limite. Outro fato importante a se observar é que a diferença de nível de pressão apresentada nos resultados próximo à membrana é mais acentuada, sendo mais visível também quando a razão inicial de pressão aumenta. Isso ocorre provavelmente devido à influência do rompimento da membrana.

Observando as amplitudes das oscilações sobre os degraus de pressão em pequenas razões iniciais de pressão p_3/p_1 pode-se notar que os resultados experimental e numérico apresentam valores muito próximos. A diferença que se pode ainda verificar ocorre devido à filtragem que foi feita sobre o sinal experimental. A filtragem diminuiu um pouco as amplitudes sobre o degrau de pressão. Outro fato que pode ser observado também é que as amplitudes das oscilações são maiores no fundo que na parede do tubo induzido. Isto pode ocorrer devido o surgimento de perturbações causadas pela vibração da estrutura do tubo ou pela a interação da onda de choque refletida com a camada limite presente no escoamento (Weber, 1995 e Daru et al., 1997).

Existe também uma defasagem das oscilações de pressão dos resultados numéricos com relação aos experimentais. Isso provem dos erros de aproximação de origem numérica. Entretanto essa defasagem não é um grande problema, pois o que é verdadeiramente importante para a metrologia dinâmica é comparar as amplitudes e as frequências. Como já foi visto nas configurações de pequenas razões iniciais de pressão as amplitudes dos resultados experimentais e numéricos

não possuem muita diferença, o que acontece também com os valores de frequência, ver Fig. (6b). Quando se observa os valores de pressão calculados analiticamente e os dados numéricos e experimentais, nota-se que as diferenças entre esses não são grandes, exceto para as configurações de grandes razões iniciais de pressão. As diferenças existentes são ocasionadas pelas limitações das equações analíticas. As fórmulas analíticas (Eq. (1), Eq. (2) e Eq. (3)) não levam em conta efeitos viscosos, de interação com a camada limite, de vibração da estrutura do tubo e da deformação do diafragma.

Tabela 1 - Dados das configurações dos ensaios de medição de pressão.

Diâmetro [m]	Pressão Tubo Indutor [bar]	Pressão Tubo Induzido [bar]	p3/p1	Temperatura [°C]	Umidade Relativa [%]	Flecha [mm]	Tipo de Membrana	Quantidade de Membrana	Espessura [mm]
0,100	1,312	1,006	1,3	22	65	13,5	500P	1	0,03750
	1,61	1,006	1,6	22	65	21	500P	1	0,03750
	1,006	0,3962	2,5	22	65	21	500P	1	0,03750
	1,006	0,2026	5,0	22	65	14,5	600P	1	0,04375
0,150	1,3261	1,022	1,3	21,5	61	30	400P	1	0,02813
	1,6279	1,022	1,6	21,5	61	34	400P	1	0,02813
	0,977	0,3761	2,6	22	60	24	500P	2	0,07500
	1,022	0,222	4,6	21	63	24	500P	2	0,07500
0,200	1,3184	1,012	1,3	22	62	42,5	400P	1	0,02813
	1,6068	0,998	1,6	22	57	32	400P	2	0,05626
	0,998	0,3926	2,5	22	57	17	500P	2	0,07500
	0,998	0,2225	4,5	22	57	36,5	500P	2	0,07500

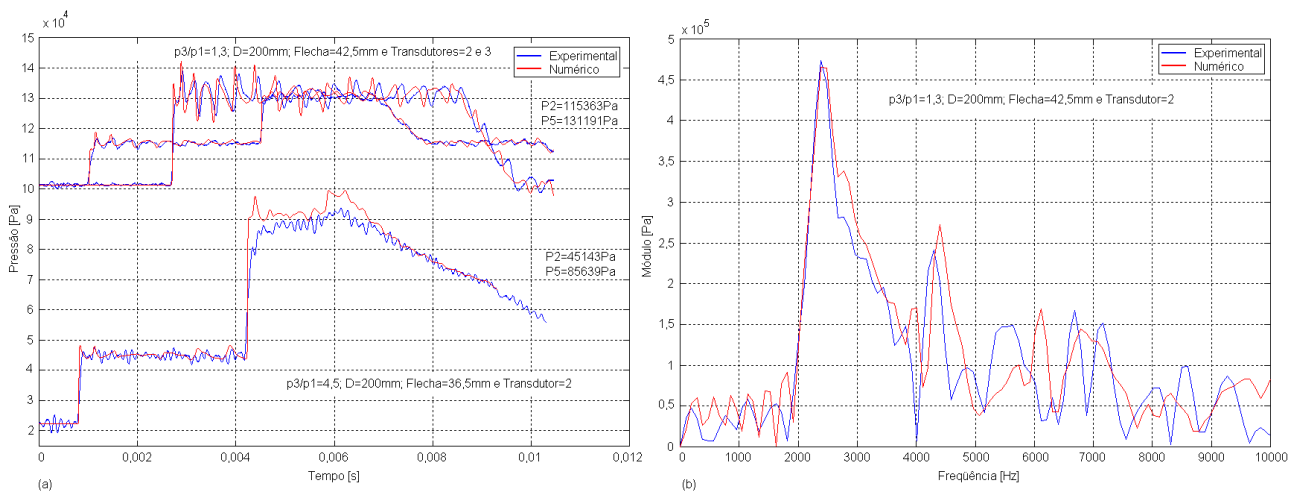


Figura 6. Gráficos: (a) degraus de pressão e (b) espectro de frequência.

4.4. Análise dos níveis de frequência das oscilações sobre os degraus de pressão

A deformação do diafragma tem muita influência sobre a frequência de oscilação do degrau de pressão. A curvatura do diafragma provoca a formação de uma onda de choque transversal que dá origem a uma onda de pressão esférica que se propaga com a mesma velocidade do escoamento atrás da onda de choque plana totalmente desenvolvida. A velocidade resultante das moléculas de ar dentro da onda esférica provém de uma combinação da velocidade do som no meio e da velocidade do escoamento atrás da onda de choque plana. As sucessivas reflexões das moléculas de ar com níveis de energia diferentes sobre a parede do tubo ocasionam as oscilações sobre o degrau de pressão. À medida que o diâmetro aumenta, o espaço que as moléculas de ar dentro da onda percorrem até à reflexão na parede lateral também aumenta. Em consequência disso o tempo que essas gastam para chegar à parede também aumenta. Como a frequência é o inverso do período, então se conclui que a frequência diminui com o aumento do diâmetro. Os gráficos da Fig. (7a) e Fig. (7b) mostram bem essa relação entre a frequência e o diâmetro. Os valores de frequência máxima apresentados neste trabalho foram obtidos por meio da aplicação do espectro de frequência sobre o primeiro degrau de pressão dos sinais gerados numericamente. A preferência de trabalhar com dados numéricos deve-se ao fato deste estarem totalmente livres de interferências externas como vibrações resultantes da interação fluido-estrutura e devido à rigidez dos materiais do tubo de choque e dos transdutores de pressão.

A análise da variação da frequência em função da razão de pressão é um pouco mais complexa. Quando se aumenta a razão de pressão, aumenta-se também a velocidade resultante de propagação das moléculas de ar da onda esférica

dentro do escoamento. Então o período de deslocamento das moléculas de ar até as paredes do tubo diminuiria, o que aumentaria em consequência o valor da frequência das oscilações de pressão. Porém isso não ocorre dessa forma com relação à parede do tubo na direção radial, pois a passagem da onda de choque provoca o surgimento de uma camada limite que é tanto mais espessa quanto maior a razão inicial de pressão inicial. As forças de origem viscosa dentro da camada limite tendem a retardar o movimento da molécula de ar o que aumenta o tempo que esta leva para chegar à parede, diminuindo consequentemente a frequência de oscilação sobre o degrau de pressão. Quanto ao movimento das moléculas de ar com relação à parede do fundo do tubo induzido, este não sofre nenhuma influência, pois ali não existe formação de camada limite, ocorrendo assim, o aumento da frequência com o aumento da razão de pressão inicial. Quando se observa a Fig. (7c) nota-se que a frequência diminui com o aumento da razão inicial de pressão para os transdutores situados na parede lateral e aumenta para o transdutor da parede do fundo, confirmando o que se esperava.

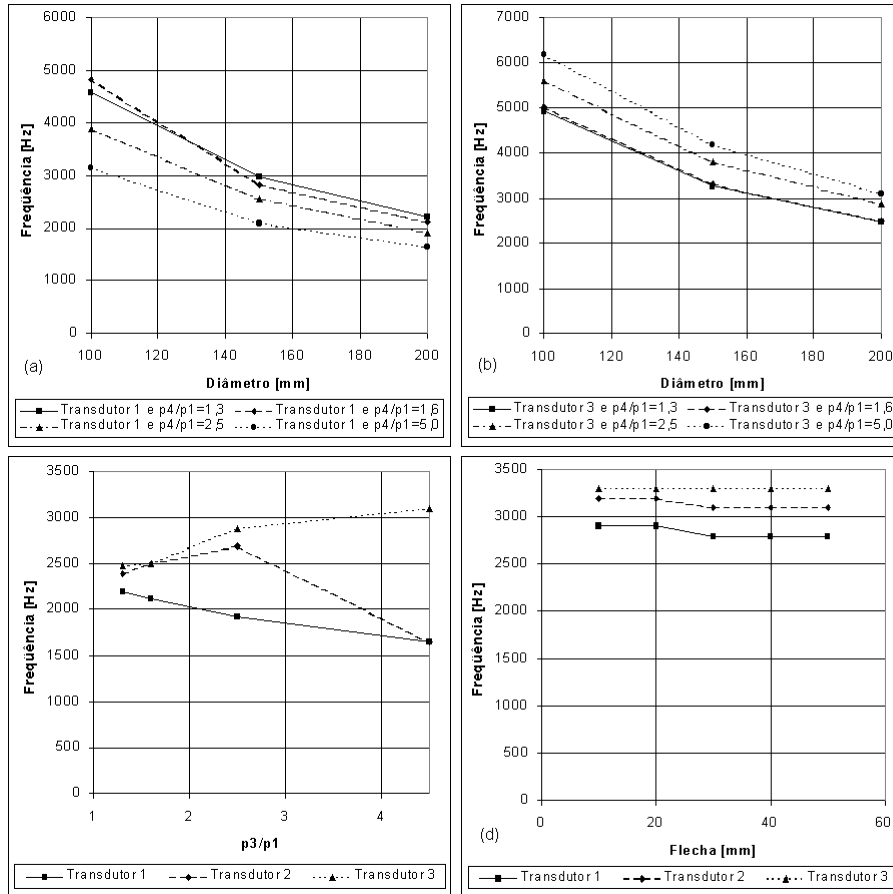


Figure 7. Gráficos do comportamento da frequência com relação as variáveis: diâmetro, razão de pressão e flecha.

Analisando o comportamento da frequência em relação à variação da flecha observa-se que a mudança do valor da flecha não tem quase nenhuma influência sobre os valores de frequência, Fig. (7d). Isso pode ser explicado de modo simples, pois o aumento do valor da flecha não muda muito a velocidade resultante das moléculas de ar da onda de pressão esférica. O aumento da flecha provoca apenas o aumento da inclinação da onda transversal originada logo após o rompimento da membrana e que dá origem à onda de pressão esférica. Esse aumento da inclinação da onda de choque transversal provoca uma pequena diminuição da velocidade do escoamento atrás da onda de choque plana que se propaga e está em vias de total desenvolvimento, reduzindo um pouco a velocidade resultante das moléculas de ar. O aumento da flecha produz uma onda choque transversal com maior intensidade e uma onda de choque plana com menor intensidade. Em conclusão, a velocidade resultante das moléculas de ar diminui um pouco com aumento da flecha, sendo este efeito mais acentuado para os transdutores situados na parede lateral do tubo.

4.5. Análise das flutuações de amplitude das oscilações sobre o degrau de pressão

A calibração dinâmica de transdutores de pressão é normalmente feita utilizando pequenos valores de razão inicial de pressão. Essa configuração de trabalho é muito empregada porque se obtém degraus de pressão com pequenos valores de amplitudes de oscilação, próximo ao degrau de pressão ideal. Como o programa mostrou bons resultados utilizando-se pequenas razões iniciais de pressão, então se decidiu aprofundar o estudo das amplitudes das oscilações do degrau de pressão nessa configuração.

Em um primeiro momento fez-se um teste para saber se os valores de flecha tinham muita influência sobre valores de flutuação das amplitudes do primeiro degrau dos sinais de pressão, normalmente usado para calibração dinâmica. Para realizar esse teste foi feita a média dos valores de amplitudes e aplicando-se sobre esses o cálculo do desvio padrão para assim se ter uma boa noção do nível de flutuação. A análise dos desvios calculados mostra que quanto maior o valor da flecha máxima, maior também é o valor das amplitudes de oscilação. Essa influência pode ser explicada porque a intensidade da flecha máxima define a geometria da membrana deformada. O aumento da flecha provoca um aumento direto na inclinação da onda de choque transversal gerada com o rompimento da membrana. Esse aumento da inclinação ocasiona a formação de uma onda de pressão esférica com uma intensidade mais elevada, o que por consequência aumenta o valor das amplitudes de oscilação sobre o degrau de pressão, ver Fig. (8a) e Fig. (8b). A intensidade do desvio e a variação deste com relação à flecha são mais acentuados para o transdutor que está situado no fundo do tubo induzido. Isto ocorre devido a perturbações causadas por fatores como a interação da onda de choque refletida com a camada limite a sua frente.

O diâmetro do tubo de choque tem também uma influência direta sobre o valor do desvio padrão das amplitudes de oscilação, o que pode ser explicado de forma semelhante à influência da flecha máxima. Quando se aumenta o diâmetro do tubo, maior se torna a deformação da membrana para uma mesma razão inicial de pressão. Então conseqüentemente maiores são as amplitudes de oscilação. Observando-se a Fig. (8c), nota-se que existe uma diferença entre os desvios dos dados numéricos e experimentais. Essa diferença é causada devido à filtragem do sinal experimental, sendo mais acentuada no fundo do tubo induzido, onde ocorre interferência de ruídos de alta frequência originados da interação da camada limite com a onda de choque refletida.

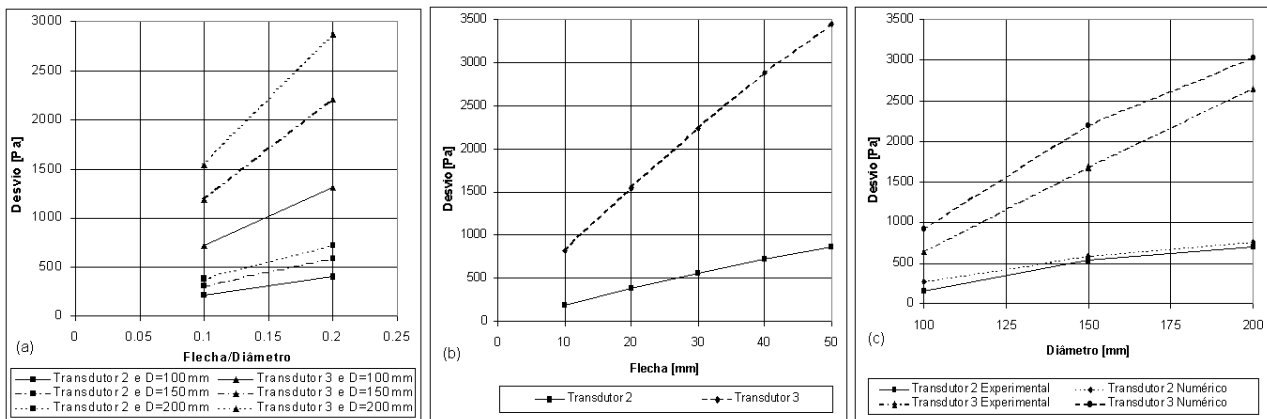


Figure 8. Gráficos do desvio padrão das amplitudes de oscilação dos degraus de pressão.

5. Conclusão

Esse trabalho foi dividido em duas partes, uma numérica e outra experimental. Na parte numérica foi feita a adaptação de um programa que simula o escoamento dentro de um tubo de choque e que leva em conta a condição inicial de diafragma deformado. Para avaliar numericamente o programa foram comparados seus resultados com os de um programa feito anteriormente por Daru e Damion (1993) e se observou que o novo programa forneceu resultados mais precisos. Na parte experimental trabalhou-se sobre dois temas. Primeiramente fez-se um estudo da deformação de diafragmas de diferentes espessuras e diâmetros, trabalhando sob diversos valores de diferença de pressão. Observou-se pouca diferença entre os dados adimensionalizados de deslocamento da membrana deformada nas configurações de variáveis ensaiadas. Depois foi feita uma regressão sobre esses dados e o polinômio determinado foi adaptado ao programa para simular a condição inicial de membrana deformada. Na segunda parte do trabalho foi feita a preparação e a realização de ensaios para a validação experimental do programa. Em um primeiro momento trabalhou-se sobre a montagem dos tubos de choque e do sistema de aquisição de dados, depois se realizou os ensaios para a coleta das curvas de pressão.

A comparação entre os dados numéricos e experimentais permitiu observar que os resultados são muito próximos quando se trabalha com pequenas razões iniciais de pressão. As diferenças observadas em casos de elevada razão de pressão podem ser provavelmente explicadas pela interação do escoamento com a camada limite, processo este que o modelo físico empregado nos cálculos do programa não leva em consideração. Quando se analisam os níveis de frequência e a flutuação de amplitudes das oscilações sobre o degrau de pressão com relação à variação do diâmetro do tubo de choque e da flecha máxima da membrana deformada, nota-se que estes possuem diferentes comportamentos. A frequência diminui com o aumento do diâmetro e permanece quase constante com o aumento da flecha. Mas a flutuação de amplitude das oscilações aumenta sempre com o aumento do diâmetro e da flecha. Já a influência da razão inicial de pressão se dá de forma diferenciada com relação à posição dos transdutores. Para os transdutores situados na parede lateral do tubo induzido a frequência diminui com o aumento da razão e para o transdutor localizado na parede do fundo do tubo a frequência aumenta com o aumento da razão. Esses comportamentos são provocados devido à interação da onda de pressão esférica, gerada após o rompimento da membrana, com o escoamento.

Por fim pode-se concluir que o programa apresenta bons resultados em configurações com pequenas razões iniciais de pressão, normalmente utilizadas em calibrações dinâmicas de transdutores de pressão. Essas configurações permitem a obtenção de degraus de pressão próximos ao degrau ideal. O programa no ponto em que se encontra, é um importante instrumento de estudo para melhor compreender o funcionamento do tubo de choque, possibilitando a vantagem de não haver necessidade de se realizar ensaios.

6. Referências

- ARORA, M. and ROE, P. L., 1995, "A Well-Behaved TVD Limiter for High-Resolution Calculations of Unsteady Flow", *Journal of Computational Physics*, 132, pp. 3-11.
- CARVALHO, Marco A. M. de, 1995, "Estudo e Aplicação Metrológica do Tubo de Choque para a Calibração Dinâmica de Sensores de Pressão – Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica", UnB, Brasília - DF.
- COURBON, J., 1971, "Résistance des Matériaux Tome II", Dunod, Paris.
- DARU, V. and DAMION, J.P., 1993, "Analysis of the Flow Perturbations in a Shock Tube Due to the Curvature of the Diaphragm", 19th International Symposium on Shock Waves, Springer – Verlag, Marseille – France.
- DARU, V.; FERNANDEZ, G. and TENAUD, C., 1997, "On CFD to Investigate Bifurcated Shock Wave Pattern", 21st International Symposium on Shock Waves, Great Keppel Island-Australia.
- GLASS, I. I., MARTIN, W. A. and PATTERSON, G. N., 1954, "A Theoretical and Experimental Study of the Shock Tube", Institute for Aerospace Studies, University of Toronto, Canada.
- HIRSCH, Charles, 1990, "Numerical Computation of Internal and External Flows", John Wiley & Sons, Chichester.
- VIANNA, J. N. S.; OLIVEIRA, A. B. S. and DAMION, J. P., 1999, "Influence of the Diaphragm on the Metrological Characteristics of a Shock Tube", *Metrologia*, 36, pp. 599-603.
- VIANNA, J. N. S. and CARVALHO, M. A. M., 1993, "Estudo Teórico e Experimental da Propagação de Ondas em Tubos Fechados", XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília-Brasil, pp. 893-896.
- KARIMIAN, S. M. H. and SCHNEIDER, G. E., 1993, "Application of a Control-Volume-Based Finite-Element Formulation to the Shock Tube Problem", *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 1, pp. 165-167.
- LEVEQUE, Randall J., 1992, "Numerical Methods for Conservation Laws", Birkhäuser Verlag, Basel.
- PLANES, Xavier and POTIN, David, 1998, "Simulation Numérique de jets de Protection de Saudage", PFE ENG/71 et Mémoire de DEA, ENSAM, Paris.
- ROE, P. L., 1982, "Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics", Academic Press, London.
- SCHWEPPE, J.L.; EICHBERGER, L. C.; MUSTER, D. F.; MICHAELS, E. L and PASKUSZ, G. F., 1963, "Methods for the Dynamic Calibration of Pressure Transducers - National Bureau of Standards Monograph 67", U.S. Government Printing Office, Washington - D.C..
- SHAPIRO, Ascher H., 1953, "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow - Volume II", The Ronald Press Company, New York.
- WEBER, Y. S.; ORAN, E. S.; BORIS, J. P. and ANDERSON, J. D., 1995, "The Numerical Simulation of Shock Bifurcation Near the End Wall of a Shock Tube", *Phys. Fluids*, Vol. 7, No. 10, pp. 2475-2488.
- YANG, J. Y.; LOMBARD, C. K. and BERSHADER, D., 1987, "Numerical Simulation of Transient Inviscid Shock Tube Flows", *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 2, pp. 245-251.

ANALYSIS OF THE EFFECTS OF THE DIAPHRAGM CURVATURE ON THE FLOW INSIDE A SHOCK TUBE

Manuel Nascimento Dias Barcelos Júnior, Alessandro Borges de Sousa Oliveira and João Nildo de Souza Vianna
 Universidade de Brasília – UnB, Brasília – Distrito Federal, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Faculdade de Tecnologia – Departamento de Engenharia Mecânica, Laboratório de Termociências e Metrologia Dinâmica, CEP: 70910-900. manuel@unb.br, borges@enm.unb.br and vianna@enm.unb.br

Jean-Pierre Damion and Virginie Daru

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris, Laboratoire de Métrologie Dynamique et Laboratoire de Simulation Numérique en Mécanique des Fluides, 151, Boulevard de l'Hôpital 75013 PARIS. damion@paris.ensam.fr and daru@paris.ensam.fr

Abstract. The objective of the work is to analyze the influence of the diaphragm deformation on the pressure steps generated by the flow into a shock tube. The work was divided in two parts, one numerical and other experimental. On the numerical part was done an adaptation of a program that model the flow into a shock tube using the Euler equations and that consider the initial condition of deformed diaphragm. The part experimental was carried out in two stages; at first was done a study to evaluate the deformation of some types of diaphragms under several conditions of operation. On the second stage were prepared and executed tests using various initial pressure ratios to make the measurement of pressure steps along shock tubes of different diameters. The experimental results were compared with those gotten by the program in the intention of validate it. Analyzing the program performance we note that it get excellent results, very close to those experimental, in little initial pressure ratios. In a general way of view it was observed that the initial condition of deformed diaphragm is responsible in great part by oscillations present on the pressure steps into a shock tube.

Keywords. shock tube, metrology, calibration, diaphragm, numerical simulation.

HYBRID NUMERICAL-ANALYTICAL APPROACH IN TURBULENT CHANNEL FLOW: ALGEBRAIC TURBULENCE MODELS

Lima, J.A.

Laboratório de Energia Solar - LES/CPGEM/CT
Universidade Federal da Paraíba - UFPB
58059-900 - João Pessoa, PB - Brasil
jalima@funape.ufpb.br

Santos, C.A.C.

Laboratório de Energia Solar - LES/DTM/CT
Universidade Federal da Paraíba - UFPB
58059-900 - João Pessoa, PB - Brasil
cabral@les.ufpb.br

Pimentel, L.C.G.

Laboratório de Tecnologia e Transmissão de Calor - LTTC/PEM/COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
21945-970 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil
pimentel@lttc.ufjf.br

Abstract. *In the present work the so-called Generalized Integral Transform Technique (GITT) is employed in the analysis of the simultaneously thermal and hydrodynamic developing turbulent flow inside a parallel plates channel through three well-established algebraic turbulence models. The purpose is two-fold: Firstly, to demonstrate the versatility of the GITT in handling problems where strong nonlinearities in both convective and diffusive terms are present. Secondly, to provide final results in turbulent channel flow obtained by this hybrid method in conjunction with algebraic turbulence models. Therefore, through the streamfunction-only formulation, a critical comparison between experimental and theoretical results for parameters of practical interest is performed and convergence behavior of the main potentials is illustrated.*

Keywords. *Turbulent Channel Flow, Algebraic Turbulence Models, Integral Transform*

1. Introduction

Turbulent channel flows are of immense technological importance, as they occur frequently under normal operating conditions for a variety of heating and cooling devices in such diverse fields as nuclear, naval, aerospace, materials, chemical, and mechanical engineering. Despite the quite recent and progressive developments on the direct simulation of such flows, the concept of Reynolds averaging, and associated turbulence modeling for closure, remains a more practical tool in engineering simulations (Launder and Spalding, 1972 and Wilcox, 1994). On the other hand, the development of numerical techniques for the solution of the partial differential equations that govern this highly nonlinear diffusion-convection phenomena is a quite well-defined field of research, being of major interest in both the contexts of applied mathematics and physical sciences, continuously providing interesting feedback for both areas.

The literature that concerns these matters (modeling and solution) is in continuous development and various purely numerical techniques are employed to solve the nonlinear equations that govern this class of flows. More recently, with the quite successful development of the so-called Generalized Integral Transform Technique (Cotta, 1993; Cotta and Mikhailov, 1997 and Cotta, 1998), a new optional methodology for the treatment of this nonlinear problem has been established. The Generalized Integral Transform Technique (GITT) is a spectral-type approach, based on eigenfunction expansions that incorporate some ingredients of a classical analytical approach with the aid of symbolic algebraic manipulation packages. Due to its inherently hybrid nature, this technique presents some interesting features such as the automatic and straightforward global error control procedure, which make it particularly suitable for benchmarking purposes; as well as only requests a mild increase in overall computational effort with an increase in the number of independent variables.

Within this context, and following the successful implementations of this approach in the solution of the equations for laminar flow situations, the present work progresses towards the integral transform solution of simultaneously developing turbulent flow between two parallel-plates, represented by the Reynolds-averaged boundary layer equations, through some turbulence models that employ the eddy viscosity concept: three very simple algebraic turbulence models, whose turbulent viscosity and/or length scale are algebraically described (Richman and Azad, 1973; Emery and Gessner, 1976 and Cebeci and Chang, 1978). Application of different zero-equation turbulence models guarantees that the accuracy obtained with the integral transform method was intimately related to efficiency of the models to predict the characteristics experimentally obtained, and not only to own efficiency of the method.

The goals are to demonstrate the versatility of the Generalized Integral Transform Technique in handling problems where strong nonlinearities in both convective and diffusive terms are present and to present final results in turbulent

channel flow obtained by this hybrid method in conjunction with the zero equation turbulence models employed until the present time (Pimentel *et al.*, 1997; Pimentel and Cotta, 1998; Lima *et al.*, 1997, 1999, 2000 and Lima, 2000). Therefore, experimental and numerical results for centerline velocity, friction factor and Nusselt number are critically compared and convergence behavior of the main potentials is illustrated for all algebraic models considered.

2. Analysis

We consider steady state, simultaneously developing turbulent flow of an incompressible fluid inside a smooth, parallel-plate channel, maintained at a prescribed constant wall temperature, T_w . The fluid enters the channel under an uniform and parallel flow, u_0 , and constant temperature, T_0 . Axial heat conduction and body forces are neglected, and the laminar-turbulent transition is assumed to occur right at the duct inlet.

The streamfunction-only formulation is employed, since previous contributions on the integral transform method for laminar and turbulent flow (Figueira da Silva, 1994; Figueira da Silva *et al.*, 1996; Pimentel *et al.*, 1997; Pimentel and Cotta, 1998; Pimentel and Figueira da Silva, 1998; Lima *et al.*, 1997, 1999, 2000 and Lima, 2000) have demonstrated his great advantages in comparison with the more usual primitive variables formulation, including the automatic satisfaction of the continuity equation and elimination of the pressure gradients.

Therefore, the mathematical description for this heat and fluid flow problem is given, after application of the Boussinesq hypothesis, in dimensionless form and streamfunction formulation, as:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{d^3 \Psi_\infty}{dy^3} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \nu_t) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{d^2 \Psi_\infty}{dy^2} \right) \right] \right\}; \quad \text{in } 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{Pr}{\sigma_t} \nu_t \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]; \quad \text{in } 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (2)$$

subject to the inlet conditions:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(0, y) &= y - \Psi_\infty(y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\ \theta(0, y) &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad \text{at } x = 0, \quad 0 < y < 1 \quad (3-5)$$

and the boundary conditions:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{y=1} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{at } y = 0, \quad x > 0; \quad (6-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, 1) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=1} &= 0 \\ \theta(x, 1) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{at } y = 1, \quad x > 0 \quad (9-11)$$

The non-usual form presented above is obtained after following the analytical ideas in the GITT approach, where the boundary conditions in the direction to be integral transformed are, first of all, made homogeneous. For this purpose, a filtering solution was proposed, in this case the fully developed flow profile, $\Psi_\infty(y)$, which also analytically recovers the original solution for large x . In this way the streamfunction was written as:

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) + \Psi_\infty(y) \quad (12)$$

The velocity components are related to the streamfunction potential through the definitions:

$$u(x, y) = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}; \quad v(x, y) = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \quad (13,14)$$

In the above formulation the following dimensionless groups were employed:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x^*}{b} \frac{1}{Re} ; & y &= \frac{y^*}{b} ; & u &= \frac{u^*}{u_0} ; & v &= \frac{v^*}{u_0} Re ; & P &= \frac{P^*}{\rho u_0^2} ; \\
 Re &= \frac{u_0 b}{\nu} ; & \theta &= \frac{T^* - T_w}{T_0 - T_w} ; & v_t &= \frac{v_t^*}{\nu} ; & Pr &= \frac{\mu c_p}{\lambda} ; & \sigma_t &= \frac{\mu_t^* c_p}{\lambda_t^*}
 \end{aligned} \tag{15}$$

where b is the half distance between the parallel-plates channel, x is the longitudinal coordinate, y is the transversal coordinate, u is the longitudinal velocity component, v is the transversal velocity component, P is the pressure, θ is the temperature field, ρ is the density, μ and ν are the kinematic and dynamic molecular viscosities, v_t is the turbulent viscosity, λ is the thermal conductivity and c_p is the specific heat at constant pressure of the fluid. The others important parameters are the Reynolds number, Re , and the molecular and turbulent Prandtl numbers, Pr and σ_t , respectively.

The filtered system, Eqs. (1) to (11), is already in the appropriate form for integral transformation in the transversal direction, y , after extraction of the fully developed solution. The eigenvalue problems, employed as auxiliary problems for integral transformation, are obtained of the homogeneous versions of the original problems, Eqs. (1) and (2). They are presented in details in Figueira da Silva (1994) and Lima (2000). The eigenvalue problems allows the definition of the following integral transform pair, for the streamfunction:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{\Phi}_i(x) ; \quad \text{Inverse} \tag{16}$$

$$\bar{\Phi}_i(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \Phi(x, y) dy ; \quad \text{Transform} \tag{17}$$

and, in a similar way, for the temperature:

$$\theta(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{T}_i(y) \bar{\theta}_i(x) ; \quad \text{Inverse} \tag{18}$$

$$\bar{\theta}_i(x) = \int_0^1 \tilde{T}_i(y) \theta(x, y) dy ; \quad \text{Transform} \tag{19}$$

The proposed eigenfunction expansions for the streamfunction and temperature appear in the inversion formulae, in terms of the eigenfunctions, $\tilde{Y}_i(y)$ and $\tilde{T}_i(y)$, and of the transformed potentials, $\bar{\Phi}_i(x)$ and $\bar{\theta}_i(x)$, respectively.

To perform the integral transform, Eq. (1) is now operated on with $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$, and Eq. (2) with $\int_0^1 \tilde{T}_i(y) dy$ to yield, after employing the inversion formulae, Eqs. (16) and (18), and the boundary conditions, Eqs. (6) to (11):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \tilde{Y}_i \frac{d^2 \tilde{Y}_k}{dy^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d\Psi_{\infty}}{dy} \right) dy - \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_k \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{d^3 \Psi_{\infty}}{dy^3} \right) dy \right] \frac{d\bar{\Phi}_k}{dx} = \int_0^1 \frac{d^2 \tilde{Y}_i}{dy^2} (1 + v_t) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{d^2 \Psi_{\infty}}{dy^2} \right) dy \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \tilde{T}_i \tilde{T}_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d\Psi_{\infty}}{dy} \right) dy \right] \frac{d\bar{\theta}_k}{dx} - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \tilde{T}_i \tilde{Y}_j \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \right] \frac{d\bar{\Phi}_j}{dx} dy = -\frac{1}{Pr} \int_0^1 \frac{d\tilde{T}_i}{dy} \left(1 + Pr \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \tag{21}$$

In a compact form, the above equations can be rewritten as:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \frac{d\bar{\Phi}_k}{dx} = B_{i\Phi} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{ik} \frac{d\bar{\theta}_k}{dx} - \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij} \frac{d\bar{\Phi}_j}{dx} = B_{i\theta} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty \tag{23}$$

where the various coefficients are defined, for the streamfunction equation, as:

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} AB_{ijk} \cdot \bar{\Phi}_j + CD_{ikF} ; \quad B_{i\Phi} = \mu_i^4 \cdot \bar{\Phi}_i + EB_{iF} \quad (24,25)$$

$$AB_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \left(\frac{d\tilde{Y}_j}{dy} \frac{d^2\tilde{Y}_k}{dy^2} - \frac{d^3\tilde{Y}_j}{dy^3} \tilde{Y}_k \right) dy \quad (26)$$

$$CD_{ikF} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \left(\frac{d^2\tilde{Y}_k}{dy^2} \frac{d\Psi_{\infty}}{dy} - \tilde{Y}_k \frac{d^3\Psi_{\infty}}{dy^3} \right) dy \quad (27)$$

$$EB_{iF} = \int_0^1 \frac{d^2\tilde{Y}_i}{dy^2} \left(\frac{d^2\Psi_{\infty}}{dy^2} + v_t \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{d^2\Psi_{\infty}}{dy^2} \right] \right) dy \quad (28)$$

and for the energy equation, as:

$$U_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} U_{ijk} \cdot \bar{\Phi}_j + V_{ikF} ; \quad W_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} W_{ijk} \cdot \bar{\theta}_k ; \quad B_{i\theta} = - \frac{\alpha_i^2}{Pr} \bar{\theta}_i - \frac{1}{\sigma_t} B_{iv\theta} \quad (29-31)$$

$$U_{ijk} = \int_0^1 \tilde{T}_i \frac{d\tilde{Y}_j}{dy} \tilde{T}_k dy \quad (32)$$

$$V_{ikF} = \int_0^1 \tilde{T}_i \tilde{T}_k \frac{d\Psi_{\infty}}{dy} dy \quad (33)$$

$$W_{ijk} = \int_0^1 \tilde{T}_i \tilde{Y}_j \frac{d\tilde{T}_k}{dy} dy \quad (34)$$

$$B_{iv\theta} = \int_0^1 \frac{d\tilde{T}_i}{dy} v_t \frac{\partial\theta}{\partial y} dy \quad (35)$$

It should be noticed that the inlet condition given by Eq. (4) is not necessary for the solution of the ordinary differential system above, since it is a first order one. Thus, only the inlet conditions given by Eqs. (3) and (5) are needed for obtaining the streamfunction and temperature potentials, respectively, and should similarly be integral transformed, to yield:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_i(0) &= \int_0^1 \tilde{Y}_i [y - \Psi_{\infty}(y)] dy \\ \bar{\theta}_i(0) &= \bar{f}_i = \int_0^1 \tilde{T}_i dy \end{aligned} \right\} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (36,37)$$

Coefficients that contain only eigenfunctions in their integrands, Eqs. (26), (32), (34) and (37), are analytically obtained through the symbolic manipulation package "Mathematica" (Wolfram, 1991). Coefficients that contain fully developed flow profile, Eqs. (27), (33) and (36), are evaluated through the subroutine for numerical integration, DQDAG (IMSL, 1987) with an user prescribed tolerance of 10^{-11} (i.e., eleven significant digits). Non-linear coefficients containing the turbulent viscosity expression, Eqs. (28) and (35), are evaluated through quadrature rules whose points and weights are obtained through subroutine DFQRUL (IMSL, 1987). For all models studied, 300 points of quadrature are sufficient to guarantee the necessary accuracy.

The integral transformation process shall then eliminate the transversal coordinate, y , and offers an ordinary differential system for the transformed potentials. The infinity system, represented by Eqs. (22) and (23) subjected to the inlet conditions (36) and (37), should be truncated to sufficiently large finite orders, $N\Phi$ and $N\theta$, in order to achieve numerical results to within an user prescribed accuracy target, through well-established subroutines for initial value problems, such as DIVPAG (IMSL, 1987). Once these transformed potentials have been numerically evaluated for any axial position, x , the related potentials for the streamfunction and temperature such as, longitudinal and transversal velocity components, friction factor, mean bulk temperature and Nusselt number, are recovered analytically, by recalling their definitions and the inversion formulae, Eqs. (16) and (18).

3. Results and Discussion

A Fortran code was built and implemented on Pentium III/500 MHz computer being imposed a relative error criterion of 10^{-5} for subroutine DIVPAG (IMSL, 1987), i.e., for all studied situations, an error control in the fifth significant digit for the transformed potentials is searched.

Results for the main potentials are now illustrated and critically compared against experimental and previously reported numerical results for $Re = 3.5 \times 10^4$, $Pr = 0.7$ and $\sigma_t = 0.9$. All figures presented are illustrate for the case $N = N\Phi = N\theta = 200$ in the eigenfunction expansions. Convergence behavior for the main potentials related to eigenfunction expansions of the streamfunction and temperature is showed for different positions along the channel length and transversal coordinate. Similar results for $Re = 4.8 \times 10^4$ and $Re = 5.0 \times 10^4$ are found in Pimentel and Figueira da Siva (1998) and Lima (2000).

Table (1) illustrates the convergence behavior of the longitudinal velocity component at axial positions $x^*/D_h = 5.0$, representative of a position near the entrance of the duct, where a larger requirement of number of terms is waited in the eigenfunction expansion for a complete convergence for this potential, and $x^*/D_h = 20.0$, an intermediary position along the channel where non-asymptotic characteristics of the developing channel flow are experimentally evidenced.

Table 1. Convergence behavior of the longitudinal velocity component, $u(x,y)$, at axial positions $x^*/D_h = 5.0$ and $x^*/D_h = 20.0$ for different transversal coordinate ($Re = 3.5 \times 10^4$).

u(x*/D _h = 5.0, y)									
y	Richman and Azad model			Emery and Gessner model			Cebeci and Chang model		
	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200
0.0	1.067	1.069	1.070	1.058	1.060	1.060	1.063	1.064	1.064
0.1	1.066	1.069	1.069	1.058	1.060	1.060	1.063	1.064	1.064
0.2	1.065	1.067	1.067	1.058	1.060	1.060	1.063	1.064	1.064
0.3	1.061	1.063	1.063	1.058	1.060	1.060	1.063	1.064	1.064
0.4	1.055	1.056	1.056	1.058	1.060	1.060	1.063	1.064	1.064
0.5	1.043	1.043	1.043	1.058	1.060	1.060	1.062	1.062	1.063
0.6	1.024	1.023	1.023	1.058	1.060	1.060	1.055	1.055	1.055
0.7	0.9942	0.9923	0.9920	1.043	1.038	1.038	1.029	1.028	1.028
0.8	0.9520	0.9494	0.9490	0.9629	0.9585	0.9582	0.9573	0.9562	0.9560
0.9	0.8865	0.8838	0.8834	0.8331	0.8337	0.8332	0.8250	0.8243	0.8242
0.99	0.5637	0.5650	0.5650	0.4829	0.4850	0.4844	0.4956	0.4953	0.4953
u(x*/D _h = 20.0, y)									
y	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200
	0.0	1.125	1.125	1.126	1.164	1.161	1.162	1.143	1.143
0.1	1.122	1.122	1.122	1.152	1.152	1.152	1.139	1.139	1.139
0.2	1.112	1.112	1.112	1.132	1.132	1.132	1.127	1.127	1.127
0.3	1.095	1.096	1.096	1.106	1.105	1.105	1.107	1.107	1.107
0.4	1.072	1.072	1.072	1.074	1.074	1.073	1.080	1.080	1.080
0.5	1.041	1.041	1.041	1.037	1.037	1.037	1.045	1.045	1.045
0.6	1.003	1.003	1.003	0.9951	0.9953	0.9953	1.002	1.002	1.002
0.7	0.9575	0.9573	0.9573	0.9475	0.9479	0.9479	0.9509	0.9509	0.9507
0.8	0.9040	0.9037	0.9037	0.8896	0.8902	0.8901	0.8888	0.8889	0.8886
0.9	0.8334	0.8332	0.8331	0.8045	0.8053	0.8053	0.8069	0.8070	0.8068
0.99	0.5187	0.5189	0.5189	0.4895	0.4892	0.4891	0.4871	0.4871	0.4869

The convergence behavior, in both axial positions, for the longitudinal component velocity is excellent. For three significant digits the results is already converged for $N < 100$, mainly for the axial position $x^*/D_h = 20.0$. As one can see, in regions near the entrance and near the wall of the channel the convergence rate is lower. However, four digits converged is reached for $N = 200$ in all transversal coordinates for all turbulence models employed.

Figure (1) complements Tab. (1) bringing a comparison, at various logitudinal locations, between the integral transform results for the three turbulence models employed here and the experimental data provided by Byrne *et al.* (1969-1970). The agreement between experimental and numerical results is quite reasonable especially for situations where the Emery and Gessner model and the Cebeci and Chang model were utilized. However, a further look in Fig. (1) reveals that some reasonable deviations of the present results from the experimental findings are present mostly in the region near the centerline of the channel, with less intensity for the Emery and Gessner model. In this region all turbulence models underpredict the centerline velocity, which might be an indication of the turbulence models limitations. The Richman and Azad model only presents good concordance between results in regions near the fully developed channel flow, as can be see in the curve for $x^*/D_h = 30.0$, indicating that this model might not be appropriate for the situation of developing turbulent flow.

Tables (2) and (3) illustrate the development characteristics of the flow and show the convergence behavior for the centerline velocity and friction factor, respectively, at various longitudinal positions along the channel.

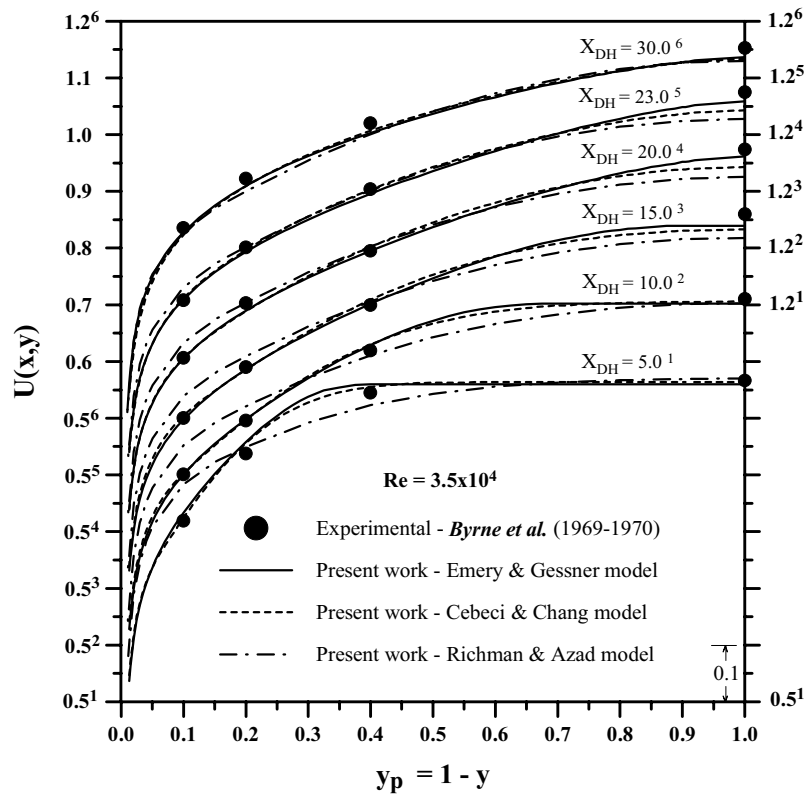


Figure 1. Comparison between present results and experimental findings for the longitudinal velocity component profile, at various longitudinal positions for $Re = 3.5 \times 10^4$.

Table 2. Convergence behavior of the centerline velocity, $u_c(x^*/D_h)$, at different axial positions for $Re = 3.5 \times 10^4$.

$u_c(x^*/D_h) - Re = 3.5 \times 10^4$									
	Richman and Azad model			Emery and Gessner model			Cebeci and Chang model		
x^*/D_h	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200
0.1	1.004	1.005	1.005	1.002	1.005	1.005	1.004	1.005	1.005
1.0	1.020	1.022	1.022	1.017	1.019	1.019	1.021	1.021	1.021
5.0	1.067	1.069	1.070	1.058	1.060	1.060	1.063	1.064	1.064
10.0	1.101	1.103	1.103	1.100	1.102	1.102	1.105	1.106	1.106
15.0	1.118	1.118	1.118	1.138	1.139	1.139	1.133	1.133	1.133
20.0	1.125	1.125	1.126	1.164	1.161	1.162	1.143	1.143	1.143
25.0	1.129	1.129	1.129	1.154	1.153	1.153	1.141	1.141	1.141
30.0	1.130	1.130	1.130	1.137	1.137	1.137	1.134	1.134	1.134
40.0	1.131	1.131	1.131	1.128	1.128	1.127	1.127	1.127	1.127
60.0	1.132	1.132	1.132	1.127	1.127	1.127	1.124	1.124	1.124
100.0	1.132	1.132	1.132	1.127	1.127	1.127	1.124	1.124	1.124

Table 3. Convergence behavior of the friction factor, $f_x(x^*/D_h)$, at different axial positions for $Re = 3.5 \times 10^4$.

$f_x(x^*/D_h) \times 10^3 - Re = 3.5 \times 10^4$									
	Richman and Azad model			Emery and Gessner model			Cebeci and Chang model		
x^*/D_h	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200
0.1	9.248	11.67	12.26	9.927	8.118	7.652	9.344	11.08	11.16
1.0	6.054	6.907	7.02	4.645	4.706	4.716	5.114	5.425	5.448
5.0	5.025	5.320	5.352	4.103	3.961	3.939	4.212	4.204	4.202
10.0	4.718	4.845	4.859	4.043	3.839	3.858	4.114	4.068	4.066
15.0	4.594	4.653	4.656	4.108	3.928	3.924	4.127	4.086	4.084
20.0	4.538	4.566	4.568	4.210	4.078	4.067	4.125	4.099	4.097
25.0	4.512	4.525	4.526	4.315	4.231	4.220	4.156	4.144	4.144
30.0	4.499	4.506	4.507	4.441	4.409	4.408	4.194	4.189	4.190
40.0	4.491	4.493	4.493	4.505	4.505	4.503	4.232	4.231	4.231
60.0	4.488	4.488	4.488	4.509	4.509	4.509	4.244	4.244	4.244
100.0	4.488	4.488	4.488	4.509	4.509	4.509	4.245	4.245	4.245

According to Tab. (2) the convergence rates for the centerline velocity are relatively high, since, as concluded from the previous analysis, the considered transversal coordinate ($y=0$) is far from the wall (where the convergence rates are clearly slower). In the other side, as expected, the worst convergence rate is observed for the friction factor in Tab. (3), once this potential is related to the gradient velocity at the wall. Thus, for a complete convergence of this potential in the region near the entrance of the channel, more than 200 terms in the streamfunction eigenfunction expansion are necessary. It should be noticed, however, that far from the entrance region faster convergence for both potentials is observed, an characteristic due to the filtering strategy, that naturally recovers the original solution for large x .

Extending the data provided by Tabs. (2) and (3) and to better evidence the prediction capabilities and limitations on the turbulence models employed here, Figs. (2) and (3) illustrate, respectively, the evolution of the centerline longitudinal velocity component and the friction factor (based on the centerline velocity) along the channel dimensionless coordinate, x^*/D_h , for $Re = 3.5 \times 10^4$. These figures also bring a comparison among the integral transform results, previously numerical findings reported by Stephenson (1976), who used the finite difference method in association with a two-equation turbulence model ($k-\epsilon$ model), and the experimental results of Byrne *et al.* (1969-1970) for the centerline velocity, and Marriot (1969) for the friction factor. The numerical results of Stephenson (1976) is included to show how difficult is to predict the centerline velocity, even with a more elaborate turbulence model.

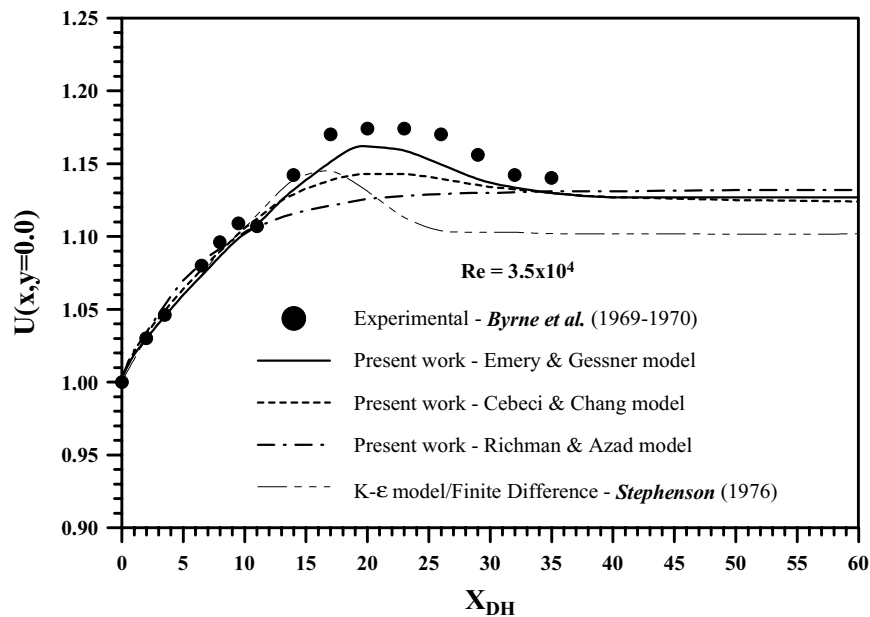


Figure 2. Comparison between present results and previous experimental and theoretical findings for the centerline longitudinal velocity component for $Re = 3.5 \times 10^4$.

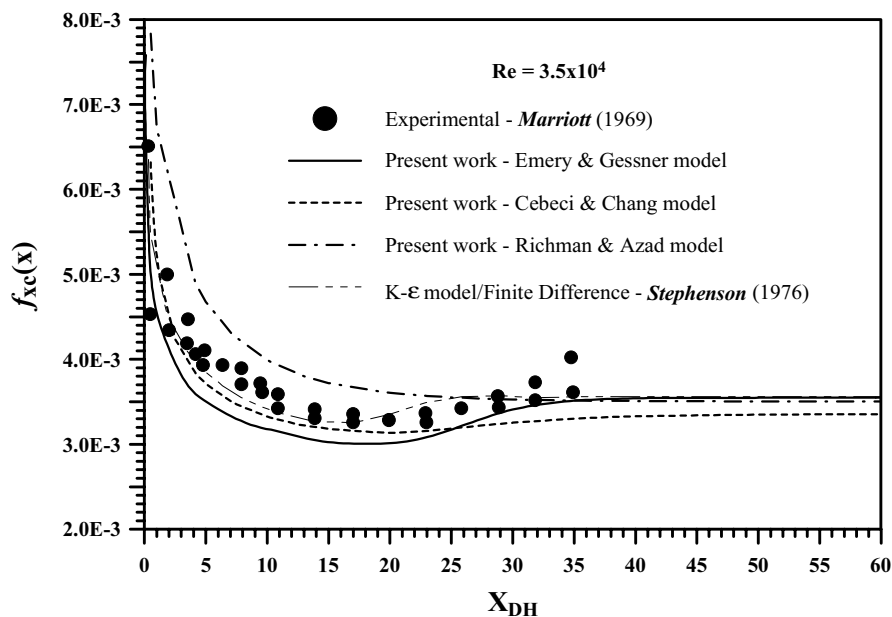


Figure 3. Comparison between present results and previous experimental and theoretical findings for the local friction factor for $Re = 3.5 \times 10^4$.

According to Figs. (2) and (3) the simple algebraic turbulence models utilized here can adequately reproduce the centerline velocity at regions close to the channel inlet and as the fully developed region is approached. However, they lead to an underestimation in the region of the boundary layers interaction, mainly for the Richman and Azad model, since it does neither introduce any empirical correction within this region, such as proposed by Cebeci and Chang model nor employs an improved length scale as proposed in the Emery and Gessner model. For these reasons, the non-asymptotic behavior of the centerline longitudinal velocity is not appropriately reproduced through the Richman and Azad model, being better approximate by the Emery and Gessner model and by the Cebeci and Chang model. To show this trend, an additional result for the centerline velocity is illustrated in Fig. (4) for $Re = 5.0 \times 10^4$. The present results are compared with experimental findings from Dean (1974) and numerical results provided by purely numerical solution obtained by Emery and Gessner (1976) making use of the algebraic turbulence model developed by himself.

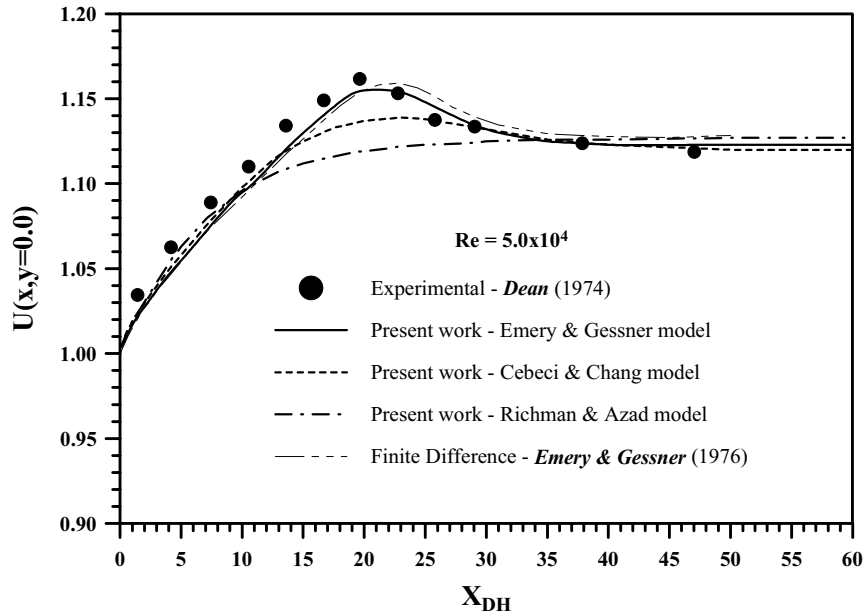


Figure 4. Comparison between present results and previous experimental and theoretical findings for the centerline longitudinal velocity component for $Re = 5.0 \times 10^4$.

Quantities of interest in heat transfer calculations were also examined and compared with the experimental data of Marriot (1969) and the finite difference simulations of Stephenson (1976) that use the $k-\epsilon$ turbulence model. Tables (4), (5) and (6) illustrate the convergence behavior of the bulk mean temperature, centerline temperature and local Nusselt number, respectively, at different longitudinal positions along the channel for $Re = 3.5 \times 10^4$.

In a similar manner as for the hydrodynamic results, these potentials presents good convergence rates for all longitudinal coordinates considered, with exception of the local Nusselt number that presents only two or three digits completely converged for $N = 200$ terms in the eigenfunction expansions. Unlike the bulk mean temperature and the centerline temperature that not present a fully developed region, the local Nusselt number shows that, considering three significant digits in the results, this region is reached at the longitudinal position around $x^*/D_h = 100.0$.

Table 4. Convergence behavior of the bulk mean temperature, $\theta_b(x^*/D_h)$, at different axial positions for $Re = 3.5 \times 10^4$.

$\theta_b(x^*/D_h) - Re = 3.5 \times 10^4$									
	Richman and Azad model			Emery and Gessner model			Cebeci and Chang model		
x^*/D_h	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200
0.1	0.9957	0.9958	0.9958	0.9971	0.9969	0.9969	0.9962	0.9963	0.9963
1.0	0.9792	0.9791	0.9790	0.9865	0.9861	0.9860	0.9826	0.9831	0.9831
5.0	0.9276	0.9272	0.9269	0.9484	0.9478	0.9477	0.9420	0.9429	0.9429
10.0	0.8746	0.8746	0.8743	0.9060	0.9058	0.9055	0.8981	0.8994	0.8994
15.0	0.8273	0.8279	0.8276	0.8654	0.8659	0.8655	0.8566	0.8584	0.8584
20.0	0.7837	0.7849	0.7846	0.8256	0.8266	0.8261	0.8168	0.8190	0.8190
25.0	0.7429	0.7446	0.7443	0.7862	0.7878	0.7874	0.7784	0.7810	0.7810
30.0	0.7044	0.7067	0.7064	0.7469	0.7491	0.7486	0.7412	0.7442	0.7442
40.0	0.6334	0.6366	0.6364	0.6715	0.6748	0.6743	0.6710	0.6747	0.6747
60.0	0.5124	0.5168	0.5167	0.5418	0.5465	0.5461	0.5492	0.5537	0.5537
100.0	0.3353	0.3407	0.3407	0.3528	0.3585	0.3580	0.3676	0.3727	0.3727

Table 5. Convergence behavior of the centerline temperature, $\theta_c(x^*/D_h)$, at different axial positions for $Re = 3.5 \times 10^4$.

$\theta_c(x^*/D_h) - Re = 3.5 \times 10^4$									
x^*/D_h	Richman and Azad model			Emery and Gessner model			Cebeci and Chang model		
	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200
0.1	0.9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.9997	0.9999	0.9999
1.0	0.9999	1.000	1.000	0.9997	1.000	1.000	0.9998	1.000	1.000
5.0	0.9975	0.9971	0.9970	0.9996	1.000	1.000	0.9999	1.000	1.000
10.0	0.9741	0.9727	0.9725	0.9997	1.000	1.000	0.9988	0.9988	0.9988
15.0	0.9352	0.9338	0.9335	0.9997	1.000	1.000	0.9814	0.9816	0.9815
20.0	0.8914	0.8906	0.8903	0.9826	0.9797	0.9782	0.9447	0.9453	0.9454
25.0	0.8473	0.8472	0.8469	0.9214	0.9212	0.9184	0.8969	0.8982	0.8983
30.0	0.8043	0.8049	0.8046	0.8587	0.8598	0.8530	0.8480	0.8499	0.8499
40.0	0.7238	0.7257	0.7254	0.7647	0.7667	0.7571	0.7619	0.7647	0.7647
60.0	0.5856	0.5892	0.5891	0.6169	0.6209	0.6198	0.6220	0.6261	0.6261
100.0	0.3833	0.3884	0.3885	0.4017	0.4073	0.4067	0.4163	0.4214	0.4214

Table 6. Convergence behavior of the local Nusselt number, $Nu(x^*/D_h)$, at different axial positions for $Re = 3.5 \times 10^4$.

$Nu(x^*/D_h) - Re = 3.5 \times 10^4$									
x^*/D_h	Richman and Azad model			Emery and Gessner model			Cebeci and Chang model		
	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200	N=100	N=180	N=200
0.1	101.9	145.4	154.3	104.0	106.2	103.3	97.72	130.7	135.3
1.0	72.72	96.02	98.79	58.43	68.98	69.65	61.62	76.05	77.13
5.0	60.66	76.13	77.41	50.33	58.62	58.72	51.40	60.78	61.19
10.0	56.71	69.77	70.69	48.77	56.42	57.08	49.97	58.77	59.13
15.0	55.12	67.20	67.93	49.16	57.34	57.74	50.05	58.95	59.31
20.0	54.42	66.06	66.75	50.35	59.41	59.75	50.08	59.13	59.49
25.0	54.11	65.54	66.20	51.83	61.72	62.13	50.86	60.17	60.58
30.0	53.97	65.30	65.95	53.67	64.41	65.05	51.61	61.10	61.53
40.0	53.88	65.14	65.78	54.55	65.83	66.45	52.27	61.89	62.33
60.0	53.86	65.09	65.73	54.58	65.88	66.53	52.46	62.11	62.56
100.0	53.86	65.09	65.73	54.57	65.87	66.52	52.47	62.12	62.57

Figure (5) illustrates, as well as Tabs. (4) to (6), that the minimum for the Stanton number experimentally obtained in the work of Marriot (1969) is not numerically observed for the Richman and Azad model. This behavior is predicted by the Emery and Gessner model and the Cebeci and Chang model, although the values obtained for the region near the inlet of the channel are below of the experimental findings, and by the k-ε model in the finite difference simulation of Stephenson (1976).

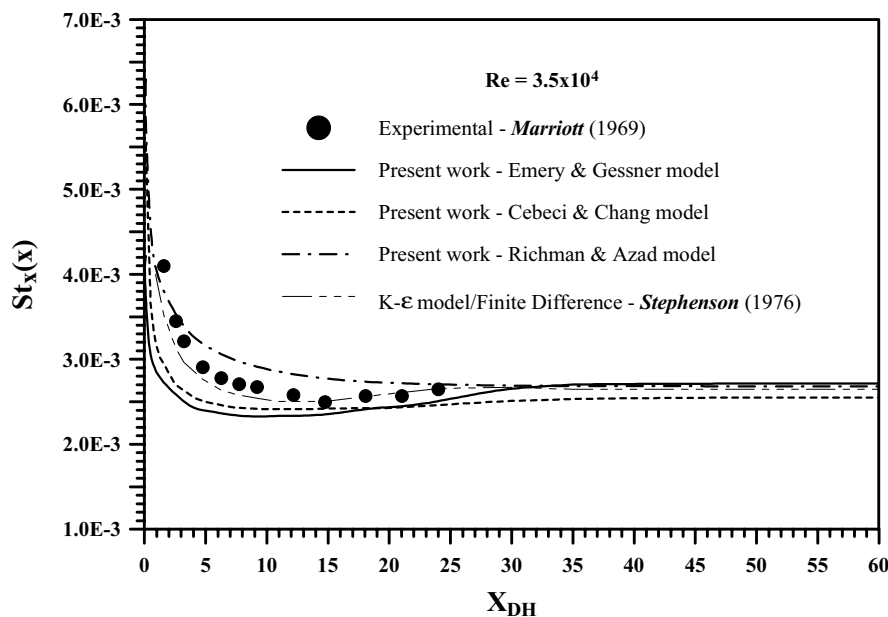


Figure 5. Comparison between present results and previous experimental and theoretical findings for the local Stanton number for $Re = 3.5 \times 10^4$.

4. Conclusion

The Generalized Integral Transform Technique has proved to be an optional good approach in the analysis of the simultaneously developing turbulent channel flow, providing a hybrid numerical-analytical solution, with the attractive feature of automatic global error control, of the related potentials for velocity and temperature. Moreover, through use of three very simple eddy viscosity algebraic (or zero-equation) turbulence models, the present progress shall allow for the extension of the GITT towards more involved differential turbulence models, following the trends of the literature in this field of research.

5. References

- Byrne, J., Hatton, A.P. and Marriot, P.G., 1969-1970, "Turbulent Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of a Parallel Wall Passage", Proceedings of the Institution Mechanical Engineers, Vol.184, Pt.1, No 39, pp. 697-712.
- Cebeci, T. and Chang, K.C., 1978, "A General Method for Calculating Momentum and Heat Transfer in Laminar and Turbulent Duct Flows", Numerical Heat Transfer, Vol. 1, pp. 39-68.
- Cotta, R.M. and Mikhailov, M.D., 1997, "Heat Conduction - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation", John Wiley & Sons, Chichester, England.
- Cotta, R.M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Boca Raton, FL, USA.
- Cotta, R.M., 1998, "The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering", Begell House Inc., NY, USA.
- Dean, R.B., 1974, "An Investigation of Shear Layer in Ducts and Diffusers", Ph.D. Thesis, Aero Rept. 74-12, Imperial College, London.
- Emery, A.F. and Gessner, F.B., 1976, "The Numerical Prediction of Turbulent Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of a Parallel Plate Duct", Journal of Heat Transfer, Transactions of ASME, November, pp. 594-600.
- Figueira da Silva, E., 1994, "Integral Transformation of the Boundary Layer Equations for Internal Convection in the Primitive Variables and Streamfunction-only Formulations", PEM/COPPE/UFRJ, M.Sc. Thesis (in Portuguese), Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Figueira da Silva, E., Perez-Guerrero, J.S. and Cotta, R.M., 1996, "A Comparison of Integral Transform Strategies for Solving Boundary Layer Equations", Proceedings of the 6th National Thermal Sciences Meeting, ENCIT-96, Novembro, Florianópolis, SC, Brazil.
- IMSL Library, 1987, "Math/Lib", Houston, Texas, USA.
- Lauder, B.E. and Spalding, D.B., 1972, "Lectures in Mathematical Models of Turbulence", Academic Press, London, England.
- Lima, J.A., 2000, "Turbulent Flow between Parallel-Plates Channels: Analysis via Integral Transforms and Algebraic and K-L Turbulence Models", CPGEM/UFPB, D.Sc. Thesis (in Portuguese), João Pessoa, PB, Brazil.
- Lima, J.A., Pérez Guerrero, J.S. and Cotta, R.M.C., 1997, "Hybrid Solution of the Averaged Navier-Stokes Equations for Turbulent Flow", Computational Mechanics, Vol. 19, No 4, March, pp. 297-307.
- Lima, J.A., Santos, C.A.C. and Pimentel, L.C.G., 1999, "Solution of the Reynolds-Averaged Equations for Turbulent Flow via Integral Transform and Algebraic Turbulence Model", XV Brazilian Congress of Mechanical Engineering, XV COBEM/99, Águas de Lindóia, SP, Brazil. Also Hybrid Methods in Engineering, Vol. 2, No 4, 2001 (in press).
- Lima, J.A., Santos, C.A.C. e Pimentel, L.C.G., 2000, "Analysis of the Primitive Variables and StreamFunction Formulations for Turbulent Flow via Integral Transform, (in portuguese), Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, CONEM/2000, Natal, RN, Brazil.
- Marriot, P.G., 1969, "Heat Transfer in the Entrance Region of a Parallel Wall Passage", M.Sc. Thesis, University Manchester.
- Pimentel, L.C.G. and Cotta, R.M., 1998, "Developing Turbulent Duct Flow: Hybrid Solution via Integral Transforms and Algebraic Models", International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, Vol. 8, No 1, pp. 10-26.
- Pimentel, L.C.G. and Figueira da Silva, E., 1998, "Laminar and Turbulent Channel Flow", in Cotta, R.M. (ed.), 1998, "The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering", Begell House Inc., NY, USA.
- Pimentel, L.C.G., Cotta, R.M. and Kakaç, S., 1997, "Integral Transform Solution of the Turbulent Boundary Layer Equations in Streamfunction-only Formulation", Proceedings of the ICHMT International Symposium on Computational Heat Transfer, May, Turkey, pp. 224-231
- Richman, J.W. and Azad, R.S., 1973, "Developing Turbulent Flow in Smooth Pipes", Applied Science Research, Vol. 28, pp. 419-441.
- Stephenson, P.L., 1976, "A Theoretical Study of Heat Transfer in Two-Dimensional Turbulent Flow in a Circular Pipe and Between Parallel and Diverging Ducts", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 19, pp. 413-423.
- Wilcox, D.C., 1994, "Turbulence Modeling for CFD", DCW Industries Inc., La Canada, California, USA.
- Wolfram, S., 1991, "MATHEMATICA - A System for Doing Mathematics by Computer", Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City, California, USA.

FLOWFIELD AND FLOW PARAMETERS FOR FLOW INSIDE A LOW SPEED WIND TUNNEL CONTRACTION WITH CIRCULAR CROSS-SECTION

João Batista Aparecido (*)

(*) Unesp – Campus de Ilha Solteira, Depto de Eng. Mecânica, Av. Brasil 56, 15385-000, Ilha Solteira – SP, Brasil
jbaparec@dem.feis.unesp.br

Edson Del Rio Vieira (*)

delrio@dem.feis.unesp.br

João Batista Campos Silva (*)

jbcampos@dem.feis.unesp.br

Abstract. Investigation of flows inside wind or water tunnel contractions is of interest for designing of this kind of equipment. The goal in such investigation is to guarantee some flow characteristics such as: low turbulence, small thickness of boundary layer and uniform velocity profile at inlet of the test section. Approximate methods have been proposed in the literature to obtain two-dimensional flow fields inside axis-symmetric wind tunnel contraction. The purpose of this work is to apply the generalized integral transform technique (GITT) to analyze a low speed wind or water tunnel contraction with circular cross section by solving the streamline equation for the flow in a proposed axially symmetric contraction geometry. In this theoretical work, results are obtained for some contraction and slenderness ratios with a wall of contraction prescribed by a polynomial function. The results obtained have not been compared with any experimental results.

Keywords: Contraction, Generalized integral transform technique, Hydrodynamic tunnel.

1. Introduction

The design of contractions is of interest in several fluid flow applications, both in industry and laboratories. Experimental flow equipment used in jet flow research and flow transducer calibrations are fitted with a contracting nozzle. Contractions are also found in aerodynamic and hydrodynamic tunnels before the test section, in order to homogenize the flow in that section. The flow acceleration achieved in the contraction, basically, reduces the non-uniformity in the mean-flow and produces a uniform velocity profile at the inlet of the test section by flattening the boundary layer. A contraction also produces a strong reduction in the relative turbulence level of the flow field in the test section. In an aerodynamic tunnel, a uniform free-stream flow with low turbulence is frequently required. To reduce the turbulence level, eliminate swirl and lateral mean velocity variations and undesirable pressure pulsation, originated from upstream blowers, many apparatus employ honeycombs and screens, usually upstream of the test section. The use of a contraction permits the installation of screens and honeycombs in a very large dimension cross-section, usually named stagnation section. In this section, the velocity is very low, causing low pressure-loss and small dynamic loads in honeycombs and screens. Other information about contractions utilized in aerodynamic tunnels can be obtained in (Bradshaw & Pankhurst, 1964) and (Gorecki, 1989).

Many analytical solutions have been proposed for designing of contraction shapes in different cross-section geometry. Generally, they are solutions of the Stokes–Beltrami equation using stream function for irrotational flow in a two-dimensional axis-symmetric geometry – only Tulapurkara & Bhalla (1988) relate fifteen different methods for axis-symmetric contraction shape design. These solutions produce an infinite set of stream surfaces and one of that, with tolerable pressure gradients, can be used as the contraction wall contour. However, many problems are related with this procedure, the main of these having relations with the infinite stream function that produces a contraction of infinite length. In practice, actual contractions need a truncation process. Another problem is related to a contraction cross-section where axis-symmetric calculus, depicted in literature, should be adapted to other geometry such as rectangular and irregular octagonal cross-section, because this requires an empirical process. Flows in three-dimensional wind tunnel contractions were by investigated Su (1991).

In a former work, Aparecido, Vieira & Campos-Silva (2000) presented the solution for a 2D rectangular non-symmetric contraction. In this work, the Generalized Integral Transform Technique - GITT has been applied for calculating the flow field of an ideal fluid in axially symmetric contraction. This procedure using a known contraction contours shape permits to determine the flow field behavior. Physically, the problem consists of a flow that is incoming in the face r_1 and outgoing in the face r_2 . The face L is the centerline of the contraction; $p(z)$ is a prescribed shape function that gives the position of the solid wall. Figure 1 shows the geometry for the problem.

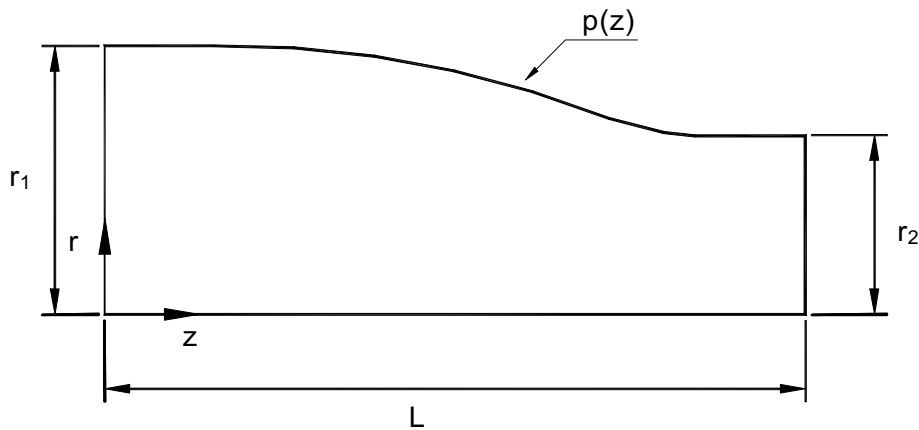


Figure 1. Geometry of the contraction.

2. Mathematical Model

It is supposed in this flow that inertial forces prevail over the viscous ones. As is well-known this model fails near the solid walls but in this case we are interested just in the main stream, so this approximation is fairly good. Such kind of two-dimensional flow can be modelled as inviscid irrotational flow using the concept of streamline, so the governing formula for the axially symmetric flow is

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, r)}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial r} \right) = 0. \tag{1}$$

The boundary conditions are

$$\Psi(0, r) = u_o \frac{r^2}{2}, \quad \left. \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0; \tag{2a,b}$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \Psi(z, p(z)) = u_o \frac{r_1^2}{2}. \tag{2c,d}$$

The velocity components u and v can be calculated as

$$u(z, r) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial r}, \quad \text{and} \quad v(z, r) \equiv -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial z}. \tag{3a,b}$$

Defining the following dimensionless variables

$$Z \equiv \frac{z}{L}, \quad R_s \equiv \frac{r}{r_1}, \quad R \equiv \frac{r}{r_1}, \quad R_c \equiv \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2, \quad P(Z) \equiv \frac{p(z)}{r_1} \quad \text{and} \quad \Psi^*(Z, R) \equiv \frac{\Psi(z, r)}{u_o r_1^2} \tag{4a-e}$$

Equations (1, 2) become

$$\frac{\partial^2 \Psi^*(Z, R)}{\partial Z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R} \right) = 0, \tag{5}$$

$$\Psi^*(0, R) = \frac{R^2}{2} \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial Z} \right|_{Z=R_s} = 0, \tag{6a, b.}$$

$$\left. \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0 \quad \text{and} \quad \Psi^*(Z, P(Z)) = \frac{1}{2}. \tag{6c, d.}$$

In Eqs. (4a-e), R_c and R_s are the contraction and the slenderness ratios. As a consequence of that dimensionless parameters we can also put the velocity components u and v in dimensionless form as follow

$$U(Z, R) \equiv \frac{u(z, r)}{u_o} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R}, \quad \text{and} \quad V(Z, R) \equiv \frac{v(z, r)}{u_o} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial Z}. \quad (7a, b)$$

The boundary conditions (6) are not homogeneous, so in order to homogenize them, the following change in the dependent variable $\Psi^*(X, Y)$ is done

$$\Psi^*(Z, R) = \Psi^+(Z, R) + \frac{R^2}{2P^2(Z)} \quad (8)$$

Then equations (5,6) become

$$\frac{\partial^2 \Psi^+(Z, R)}{\partial Z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+(Z, R)}{\partial R} \right) = G(Z, R) = R^2 \left[\frac{1}{P^3} \frac{d^2 P}{dZ^2} - \frac{3}{P^4} \left(\frac{dP}{dZ} \right)^2 \right], \quad (9a, b)$$

$$\frac{\partial \Psi^+(Z, 0)}{\partial R} = 0 \quad \text{and} \quad \Psi^+[Z, P(Z)] = 0, \quad (10a, b)$$

$$\Psi^+(0, R) = 0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial \Psi^+(Z, R)}{\partial Z} \right|_{Z=R_s} = 0. \quad (10c, d)$$

2.1 About the Wall Function $P(Z)$

$P(Z)$ is a function that must have some special features. As one can see there are in the above formulation derivatives until the second order, so $P(Z)$ must be at least a function of class C^2 within the interval $[0, R_s]$, meaning that it and its first and second derivatives must be continuous in that domain. Additionally $P(Z)$ must have a soft transition from the contraction to the straight part of the tunnel. To fit the contraction geometry, at least, the following geometric restrictions must be satisfied

$$P(0) = 1, \quad P(R_s) = R_c^{1/2}, \quad \dot{P}(Z)|_{Z=0} = 0, \quad \dot{P}(Z)|_{Z=R_s} = 0 \quad (10e)$$

In this work the analysis about $P(Z)$ is quite general, but at the end it was used a third-order polynomial that obeys the above restrictions and is expressed by the formula

$$P(Z) = 1 + (R_c^{1/2} - 1) \left(3 - 2 \frac{Z}{R_s} \right) \left(\frac{Z}{R_s} \right)^2. \quad (10f)$$

Note that $P(Z)$ depends only on parameters R_s (slenderness ratio) and R_c (contraction ratio).

3. Generalized Integral Transform Analysis

The Generalized Integral Transform Technique (GITT) has been used to solve several kinds of problems in fluid flow and heat and mass transfer inside irregular domains. Some works concerning the application of GITT, in irregular shaped domains, were published by Aparecido *et al.* (1989) and by Aparecido & Cotta (1990a,b, 1992).

3.1. Application of GITT for transforming the problem in the R -direction

In order to transform the equations governing the problem, presented above, we choose, according to Aparecido (1997) the following eigenvalue problem

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \psi(Z, R)}{\partial R} \right] + \lambda^2(Z) \psi(Z, R) = 0, \quad 0 < R < P(Z) \quad (11a)$$

with the following boundary conditions

$$\frac{\partial \psi(Z,0)}{\partial R} = 0 \quad \text{and} \quad \psi[Z, P(Z)] = 0. \tag{11b,c}$$

The solution for the problem (11) is

$$\psi_i(Z, R) = \frac{\sqrt{2}}{P(Z)J_0(\lambda_i P(Z))} RJ_1(\lambda_i R) ; \tag{12a}$$

$$J_1(\lambda_i P(Z)) = 0 \Rightarrow \lambda_i(Z) = \frac{i^{\text{th}} \text{ positive root of Bessel function } J_1}{P(Z)}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{12b}$$

Using such complete set of eigenfunctions $\psi_i(Z,R)$ we can define an integral transform regarding the R-axis and its respective inverse as follow

$$\text{Transform: } \tilde{\Psi}_i^+(Z) = \int_0^{P(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \Psi^+(Z, R) dR, \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{13a}$$

$$\text{Inverse: } \Psi^+(Z, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(Z, R) \tilde{\Psi}_i^+(Z). \tag{13b}$$

In order to transform the original partial differential equation (9), it is multiplied by the eigenfunctions $\frac{\psi_i(Z, R)}{R}$; the auxiliary eigenvalue equation is multiplied by $\frac{\Psi^+(Z, R)}{R}$, the resulting equations are subtracted and then integrated over the domain $[0, P(Z)]$. The final equation is

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}_i^+(Z)}{dZ^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{ij}(Z) \frac{d \tilde{\Psi}_j^+(Z)}{dZ} + b_{ij}(Z) \tilde{\Psi}_j^+(Z) \right] - \lambda_i^2(Z) \tilde{\Psi}_i^+(Z) = \tilde{g}_i, \quad i = 1, 2, \dots \tag{14}$$

where

$$a_{ij}(Z) = 2 \int_0^{P(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \frac{\partial \psi_j(Z, R)}{\partial Z} dR \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ii}(Z) = 0 \\ a_{ij}(Z) = \frac{4\lambda_i^*}{\lambda_i^{*2} - \lambda_j^{*2}} \frac{1}{P} \frac{dP}{dZ} \end{cases} \tag{15a}$$

$$b_{ij}(Z) = \int_0^{P(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \frac{\partial^2 \psi_j(Z, R)}{\partial Z^2} dR \tag{15b}$$

$$\text{then } \begin{cases} b_{ii}(Z) = -\frac{\lambda_i^*}{3} \frac{1}{P^2} \left(\frac{dP}{dZ} \right)^2 \\ b_{ij}(Z) = \frac{-2\lambda_i^* \lambda_j^*}{\lambda_i^{*2} - \lambda_j^{*2}} \left[\left(3 + \frac{4\lambda_i^*}{\lambda_i^{*2} - \lambda_j^{*2}} \right) \frac{1}{P^2} \left(\frac{dP}{dZ} \right)^2 - \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dZ^2} \right] \end{cases} \tag{15c}$$

$$\tilde{g}_i(Z) = \int_0^{P(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) G(Z, R) dR = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda_i^*} \left[\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dZ^2} - \frac{3}{P^2} \left(\frac{dP}{dZ} \right)^2 \right] \tag{15d}$$

The equation (14) is a system of second order ordinary differential equations having variable coefficients. To provide boundary conditions to such system is necessary to transform the primitive boundary conditions regarding the Z-direction (10c,d). To accomplish that it is necessary to multiply those equations by $\psi_i(Z, R)/R$ and integrate over the interval $[0, P(Z)]$, the resulting equations are

$$\int_0^{P(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \Psi^+(0, R) dR = 0 \Rightarrow \tilde{\Psi}_i^+(0) = 0, \tag{16a}$$

$$\int_0^{P(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \frac{\partial \Psi^+(Z, R)}{\partial Z} dR \Big|_{Z=R_s} = 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{\Psi}_i^+(Z)}{dZ} \Big|_{Z=R_s} = 0 \tag{16b}$$

3.2 Transforming the problem in the Z-direction

Now to transform the system of ordinary differential equations (14) subjected to the boundary conditions (16a,b) we choose (Aparecido, 1997) an eigenvalue problem regarding the Z-axis, stated as follow

$$\frac{d^2 \phi(Z)}{dZ^2} + \mu^2 \phi(Z) = 0, \quad 0 < Z < R_s \tag{17a}$$

subjected to the boundary conditions

$$\phi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d\phi(Z)}{dZ} \Big|_{Z=R_s} = 0. \tag{17b,c}$$

The solution for the problem (17) is

$$\phi_m(Z) = \sqrt{\frac{2}{R_s}} \sin(\mu_m Z) \quad ; \quad \mu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2R_s}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{18a,b}$$

Using such complete set of eigenfunctions we can define an integral transform regarding the Z-axis and its respective inverse as follow

$$\text{Transform: } \tilde{\Psi}_{im}^+ = \int_0^{R_s} \phi_m(Z) \tilde{\Psi}_i^+(Z) dZ, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{19a}$$

$$\text{Inverse: } \tilde{\Psi}_i^+(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(Z) \tilde{\Psi}_{im}^+. \tag{19b}$$

In order to transform the system of ordinary differential equations (14), it is multiplied by the eigenfunctions $\phi_i(Z)$; the auxiliary eigenvalue equation is multiplied by $\tilde{\Psi}_i^+(Z)$, the resulting equations are subtracted and then integrated over the domain $[0, R_s]$. The final equation is

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{ijmn} + B_{ijmn} - C_{ijmn} \delta_{ij} - \mu_m^2 \delta_{ij} \delta_{mn}) \tilde{\Psi}_{jn}^+ = \tilde{g}_{im}, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots \tag{20}$$

where

$$\tilde{\Psi}_{jn}^+ = \int_0^{R_s} \phi_n(Z) \tilde{\Psi}_j^+(Z) dZ \tag{21a}$$

$$A_{ijmn} = \int_0^{R_s} a_{ij}(Z) \phi_m(Z) \frac{d\phi_n(Z)}{dZ} dZ, \quad B_{ijmn} = \int_0^{R_s} b_{ij}(Z) \phi_m(Z) \phi_n(Z) dZ \tag{21b,c}$$

$$D_{ijmn} = (i^{\text{th}} \text{ positive root of Bessel function } J_1)^2 \int_0^{R_s} \frac{\phi_m(Z) \phi_n(Z)}{P^2(Z)} dZ, \quad \tilde{g}_{im} = \int_0^{R_s} \phi_m(Z) \tilde{g}_i(Z) dZ \tag{21d,e}$$

The equation (20) is a linear algebraic system and can be written in a matrix form as

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{g}, \tag{22a}$$

where \mathbf{A} is a square matrix, a proper representation of the coefficients $B_{ijmn}, C_{ijmn}, D_{ijmn}\delta_{ij}, \mu_m^2\delta_{ij}\delta_{mn}$. The δ 's are the Kronecker delta and the vectors Φ and \mathbf{g} are defined as follow

$$\Phi \equiv [\widetilde{\Psi}_{11}, \widetilde{\Psi}_{12}, \dots, \widetilde{\Psi}_{1N}, \widetilde{\Psi}_{21}, \widetilde{\Psi}_{22}, \dots, \widetilde{\Psi}_{2N}, \dots, \widetilde{\Psi}_{N1}, \widetilde{\Psi}_{N2}, \dots, \widetilde{\Psi}_{NN}]^T, \quad (22b)$$

$$\mathbf{g} \equiv [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}, g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}, \dots, g_{N1}, g_{N2}, \dots, g_{NN}]^T, \quad (22c)$$

where N is the truncation order in each summation in the infinite series.

The solution of the algebraic linear system (22a) is

$$\Phi = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}. \quad (22d)$$

After obtaining Φ in equation (22d) we have its elements $\widetilde{\Psi}_{im}^+$ and then we can invoke the two inversion formulae to get the streamline closed form profile given by

$$\Psi^*(Z, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_i(Z, R) \phi_m(Z) \widetilde{\Psi}_{im}^+ + \frac{R^2}{2P^2(Z)} \quad (23)$$

4. Velocity Field

Once we got the streamline profile (23) we are able to calculate some derived quantities of engineering interest such as velocity components u, v and pressure for different values of the contraction and slenderness ratios. Using the velocity components definition (3a,b) and the streamline profile (23) we obtain its formulae

$$U(Z, R) = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R} = P^{-2}(Z) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_i(Z, R)}{R \partial R} \phi_m(Z) \widetilde{\Psi}_{im}^+ \quad (24a)$$

$$V(Z, R) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial Z} = R \frac{\dot{P}(Z)}{P^3(Z)} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \psi_i(Z, R)}{R \partial Z} \phi_m(Z) + \psi_i(Z, R) \frac{d\phi_m(Z)}{R dZ} \right] \widetilde{\Psi}_{im}^+ \quad (24b)$$

Other quantities of interest are the velocity components $U_w(Z), V_w(Z)$ and the pressure coefficient $Cp_w(Z)$ from Bernoulli's equation at the curved wall given by

$$U_w(Z) \equiv U(Z, P(Z)) = P^{-2}(Z) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_i(Z, R)}{\partial R} \Big|_{R=P(Z)} \phi_m(Z) \widetilde{\Psi}_{im}^+ \quad (24c)$$

$$V_w(Z) \equiv V(Z, P(Z)) = \frac{\dot{P}(Z)}{P^2(Z)} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_i(Z, R)}{R \partial Z} \Big|_{R=P(Z)} \phi_m(Z) \widetilde{\Psi}_{im}^+ \quad (24d)$$

$$Cp_w(Z) \equiv \frac{2(p_w - p_o)}{\rho u_0^2} = 1 - U_w^2(Z) - V_w^2(Z) \quad (24e)$$

p_0 is the pressure at the inlet, $Z=0$.

5. Results

Some results of interest are presented. In Figures 2 and 3 the vector velocity fields are presented for different slenderness and contraction ratios. Figure 2 shows that the velocity at entrance of the test section is more uniform for low contraction ratio and high slenderness ratio compared with Figure 3. Figure 4 shows U-velocity in different Z-positions near the entrance region and exit region of the contraction respectively. Notice the opposite behavior of the flow near the wall for entrance region (retarded) and exit region (accelerated). Figures 5 e 6 show the velocity components U and V at the curved wall, for different contraction and slenderness ratios along the contraction axis Z . The U_w is strongly affected by the contraction ratio R_c as the contraction decreases the velocity at the outlet increases.

The slenderness ratio also has an important role as it decreases the region where the U_w has a negative derivative growth, as in Figure 5. For short contractions with small contraction ratio the transversal velocity at the contour V_w are in the worst situation as seen in Figure 6.

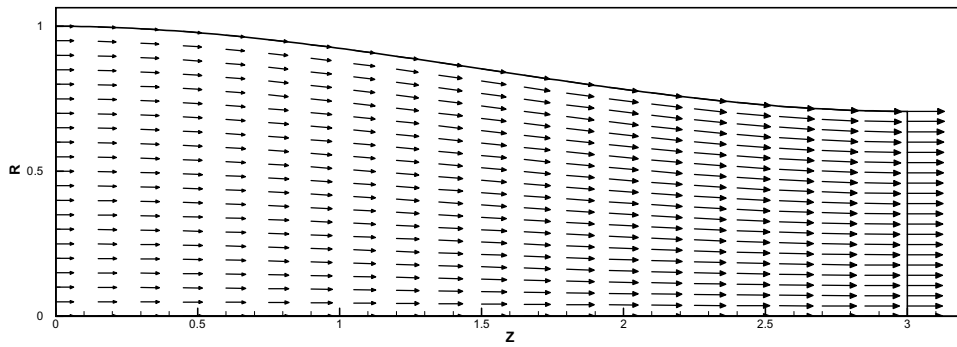


Figure 2. Vector velocity field for contraction ratio, $R_c=1/2$ and slenderness ratio, $R_s=3$.

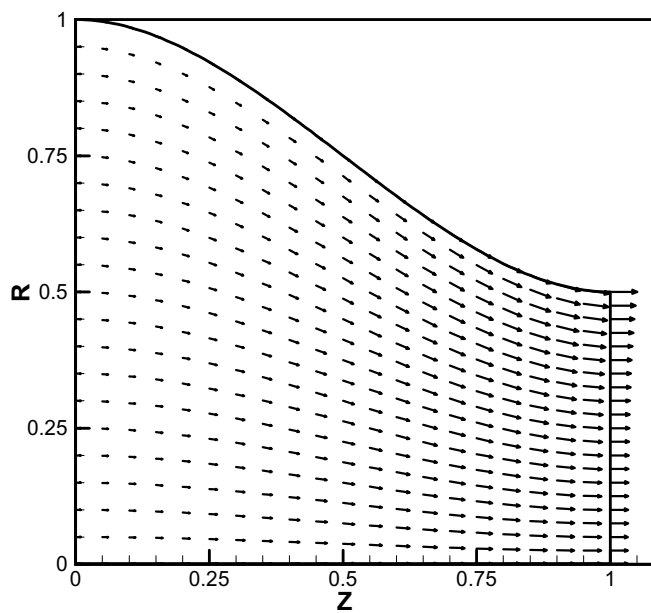


Figure 3. Vector velocity field for contraction ratio, $R_c=1/4$ and slenderness ratio, $R_s=1$.

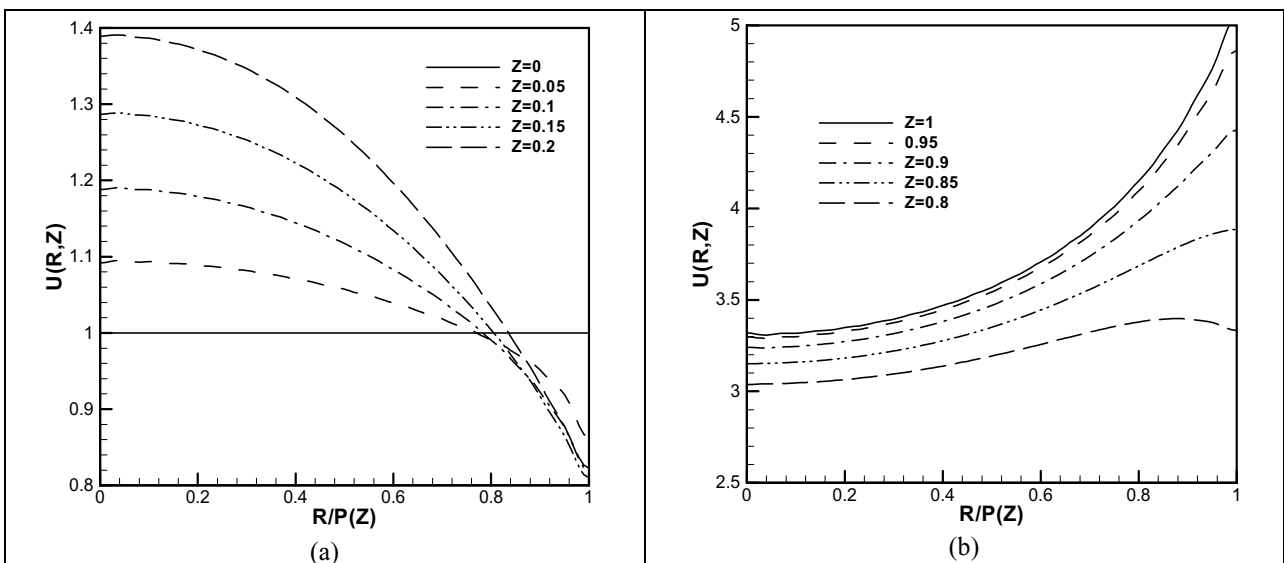


Figure 4. U-velocity at different Z-position for contraction, $R_c=1/4$ and slenderness ratio, $R_s=1$.

Figure 7(a) presents the pressure coefficient at the curved wall. C_{pw} decreases strongly as the contraction ratio decreases. As the slenderness ratio decreases, the adverse pressure gradient near the inlet increases, and flow detachment may occur in this region. For this reason, low slenderness ratio geometries must be avoided. A zoomed view of the pressure coefficient curve is showed in Figure 7 (b).

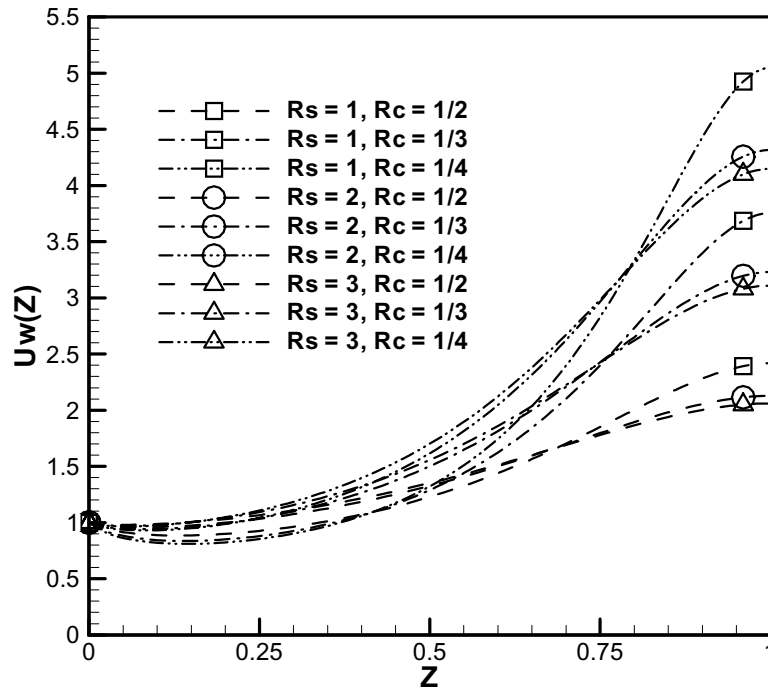


Figure 5. U-velocity at the curved wall for different contraction and slenderness ratios

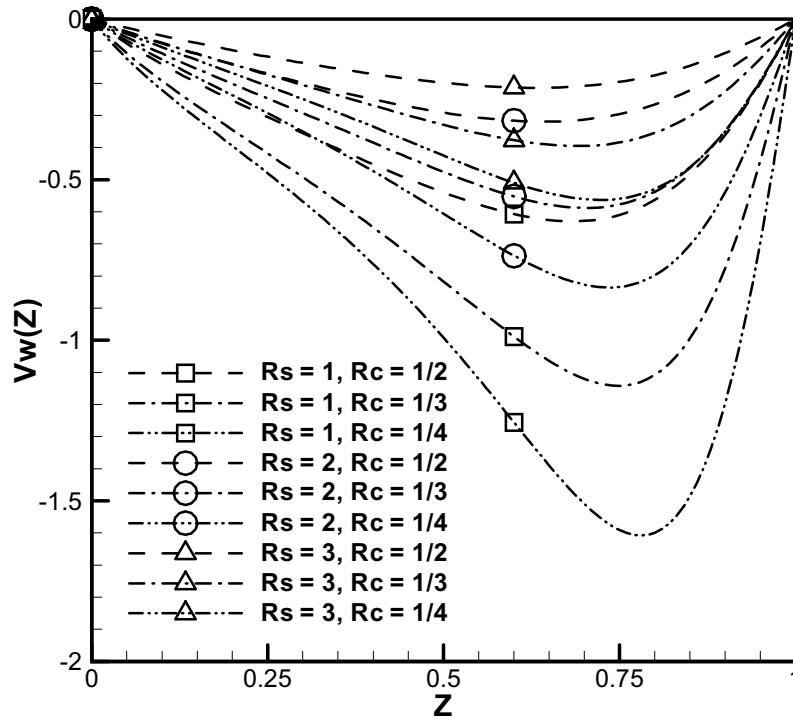


Figure 6. V-velocity at the curved wall for different contraction and slenderness ratios

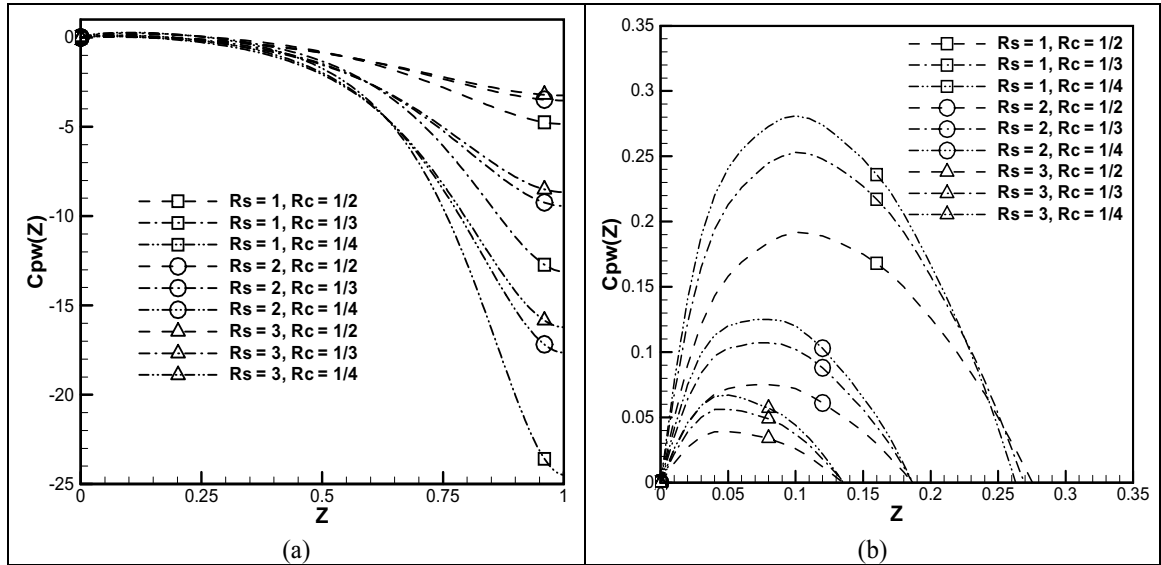


Figure 7. (a) Pressure coefficient C_{pw} at the curved wall for different contraction and slenderness ratios. (b) Zoom of pressure coefficient near the entrance region.

Figure 8 shows the locations of the isovalues of the velocities components U and V , obtained in the present work, in the whole contraction for the length $R_s = 2$ and contraction ratio $R_c = 1/3$. These locations are compared with the locations in the case of a rectangular contraction from Aparecido *et al.* (2000). A desirable feature for a contraction is that the axial velocity U at the exhaust section be as uniform as possible and that the transversal velocity V be as close to null as possible. The proposed third-order polynomial contour geometry achieved such goals fairly well, as can be seen in Figure 8. On one hand, when the slenderness and contraction ratios decrease those goals are not achieved so satisfactorily. On the other hand, when the slenderness and contraction ratios increase the flow features will improve, from a hydrodynamic point of view.

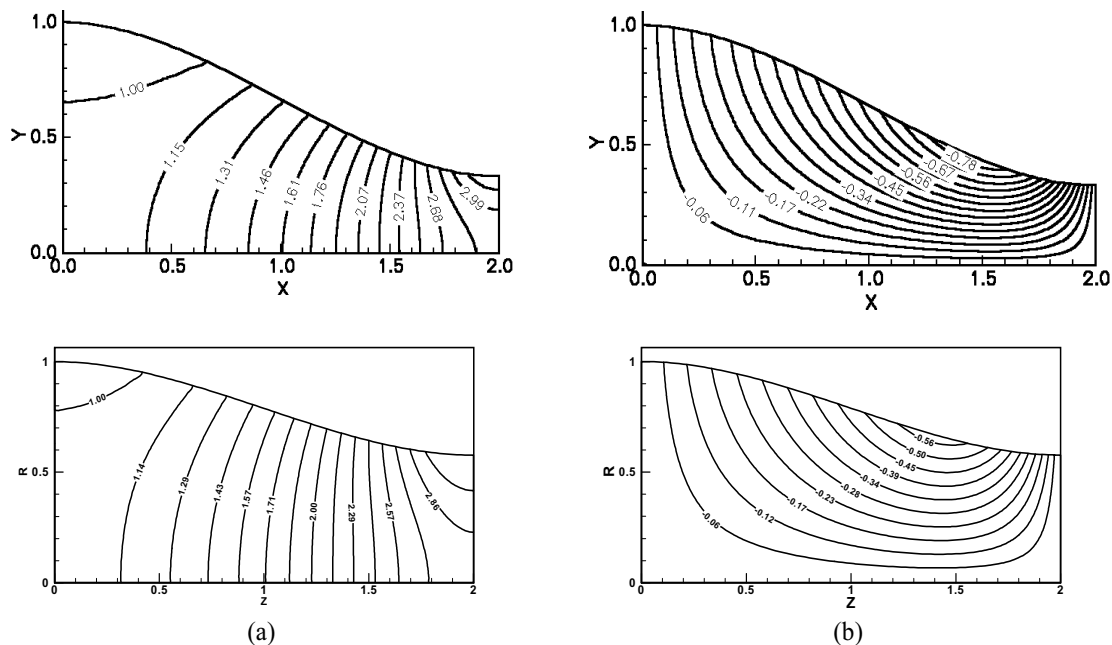


Figure 8. Isovalues for (a) U and (b) V inside the contraction for $R_s = 2$ and $R_c = 1/3$. Above, for a rectangular non-symmetric contraction. Below, for an axis-symmetric contraction.

6. Conclusions

Contraction shapes in tunnels and flow visualization equipments vary widely. Many of them have been projected based only on the designer judgment or analytical solutions that present no suitable behavior for the stream function. A detailed knowledge of the flow velocity behavior becomes necessary in all these projects. In this work an analytical

method for determining the flow characteristics for a given contraction geometry has been achieved. This method is based on Generalized Integral Transform Technique. An application of this proposed method of solution has been done successfully for a family of third-order polynomial contraction shapes. This procedure permits a fast calculation of the flow field, giving parameters for the effective analysis of contractions. In spite of the simple geometry used for the contraction the results turned be quite good.

7. Acknowledgement

The authors acknowledge Fapesp (Proc. 00/06513-0) for the partial support and Fundunesp (Proc. 043/2000-DFP) grants.

8. References

- Aparecido, J. B., 1997, "How to Choose Eigenvalue Problems when Using Generalized Integral Transforms to Solve Thermal Convection-diffusion Problems", Proc. of Proc. of 14th Brazilian Congress of Mech. Eng., Bauru, SP, Brasil.
- Aparecido, J. B., Cotta, R. M. Ozisik, M. N., 1989, "Analytical Solutions to Two-Dimensional Diffusion Problems within Irregular Domains", Journal of Franklin Institute, vol. 326, pp. 421-434.
- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M., 1990a, "Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts", Computational Mechanics, vol. 6, n.2, pp. 93-100.
- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M., 1990b, "Analytical Solutions to Parabolic Multi-Dimensional Diffusion Problems within Irregularly Shaped Domains", Proc. of: Wrobel, L. C., Brebia, C. A., Nowac, A. J., (Eds.), Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Berlin: Springer-Verlag, vol. 1, pp. 27-38.
- Aparecido, J. B. & Cotta, R. M., 1992, "Laminar Thermally Developing Flow Inside Right-Angularly Triangular Ducts", Applied Scientific Research, 49, pp. 355-368.
- Aparecido, J.B., Vieira, E.D.R & Campos-Silva, J.B. (2000), "Analysis of a Low Speed Wind Tunnel by Generalized Integral Transform Technique", In: Proceedings of 8th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences in CDROOM, S01P10, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Bradshaw, P. & Pankhurst, R.C., 1964, "The Design of Low-Speed Wind Tunnels", Progress in Aeronautical Science, vol.5, Pergamon Press.
- Gorecki, J.P., 1989, "Túneis Aerodinâmicos", Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, São José dos Campos.
- Su, Y.-Xi, 1991, "Flow Investigation and Design of Three-Dimensional Wind Tunnel Contraction", AIAA Journal, vol. 29 n11, pp 1912-1920.
- Tulapurkara, E.G. & Bhalla, V.V.K, 1988, "Experimental Investigation of Morel's Method for Wind Tunnel Contraction", Journal of Fluids Engineering, vol.110, pp.45-47.

ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM CAVIDADES IRREGULARES

Viviana Cocco Mariani

Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, 88040-900 Florianópolis, SC – BRASIL
mariani@nrva.ufsc.br

Alvaro Toubes Prata

Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, 88040-900 Florianópolis, SC – BRASIL
prata@nrva.ufsc.br

Resumo. Neste trabalho o escoamento em cavidades irregulares é simulado para diferentes números de Reynolds. As equações governantes são escritas em coordenadas cartesianas e resolvidas usando o método dos volumes finitos. Para acompanhar a base irregular da cavidade um algoritmo de tratamento de fronteiras irregulares é empregado. São exploradas cavidades triangular, semicircular, com base inclinada e cosenoidal. As linhas de corrente, as isobáricas e o perfil das velocidades na linha central das cavidades são apresentados e comparados com resultados disponíveis na literatura para validar a metodologia numérica e os resultados obtidos.

Palavras chave: cavidade quadrada, algoritmo de tratamento de fronteiras, equações de Navier-Stokes, método dos volumes finitos.

1. Introdução

Muitos problemas de dinâmica dos fluidos de interesse prático envolvem fronteiras com formato irregular. Em alguns casos as fronteiras também se movem e mudam de forma. Na discretização de domínios com contornos irregulares pode-se usar malhas não-estruturadas que facilitam a inserção de pontos em locais específicos do domínio, contudo é difícil estabelecer uma regra de ordenação dos pontos nodais. Nestas malhas o algoritmo numérico é mais elaborado e conseqüentemente o tempo de processamento é elevado (Mariani, 1997). Outra abordagem usada em domínios com contornos irregulares é a geração de malhas estruturadas ajustadas a fronteira, envolvendo a transformação de coordenadas, que mapeam o domínio físico com formato irregular em um domínio computacional regular (coordenadas generalizadas). A geometria irregular definida no plano físico pode mudar de forma, sem mudar a sua representação no plano transformado (Maliska, 1995). Dessa forma, o domínio físico pode se deformar ou permanecer fixo sem que haja uma alteração no número de volumes na malha computacional. Para tanto as equações de conservação são escritas no plano transformado e as informações sobre a geometria física são fornecidas ao programa computacional, através das métricas da transformação (Lopes, 1996). Segundo Shyy *et al.* (1996) este procedimento é apropriado às interfaces com movimentos lentos e cujos contornos não são altamente irregulares. Já o uso de malhas cartesianas para solução de tais problemas exige um procedimento especial para os volumes cortados pelos contornos irregulares, mas evitam as dificuldades na geração de malhas ajustadas aos contornos e o longo tempo computacional que o uso de aproximações em malhas não-estruturadas causam.

No presente trabalho faz-se uso do método *Eulerian Lagrangian Algorithm For Interface Tracking* (ELAFINT), para tratar os volumes cortados que estão na fronteira irregular, devido a malha cartesiana ser estruturada (não estruturada apenas nos volumes interfaciais) e fixa (não precisando ser gerada novamente quando os contornos se movem). Nesse método a interface é representada adequadamente por marcadores de partículas, obtidos pela interseção com as faces dos volumes de controle na malha cartesiana fixa. O uso de marcadores de partículas originou-se a mais de três décadas (Peskin, 1977) sendo atrativo devido a sua habilidade para modelar interfaces com topologia arbitrariamente complexas. A abordagem básica não é nova ou única e a discussão detalhada das simplificações, implementação e discretização do ELAFINT, já vem sendo restaurada em diversos trabalhos disponíveis na literatura. A representação de uma fronteira sólida em uma malha cartesiana fixa requer um tratamento especial, pois os volumes de controle, que são cortados pela fronteira irregular tornam-se fragmentados em frações de sólido e fluido (Udaykumar *et al.*, 1997). Neste trabalho descreve-se a metodologia numérica em malha cartesiana para a resolução do escoamento incompressível em regime permanente em cavidades irregulares. A metodologia numérica apresenta semelhanças com a metodologia de Udaykumar *et al.* (1996) e Ye *et al.* (1999). A cavidade quadrada foi escolhida neste trabalho para validação da metodologia numérica e por ser um problema clássico da literatura.

2. Equações Governantes e Procedimento Numérico

A equação governante é discretizada primeiro nos volumes cheios, volumes que não são cortados pela interface, e em seguida apresenta-se a discretização para os volumes interfaciais, que são cortados pela fronteira irregular.

2.1. Discretização para os volumes cheios

A equação da quantidade de movimento em coordenadas cartesianas, para uma variável genérica ϕ é expressa por,

$$\partial(\rho u \phi) / \partial x + \partial(\rho v \phi) / \partial y = \Gamma^\phi (\partial^2 \phi / \partial x^2) + (\partial^2 \phi / \partial y^2) + \bar{S} \quad (1)$$

Integrando a Eq. (1) para um volume cheio conforme Fig. (1) obtém-se,

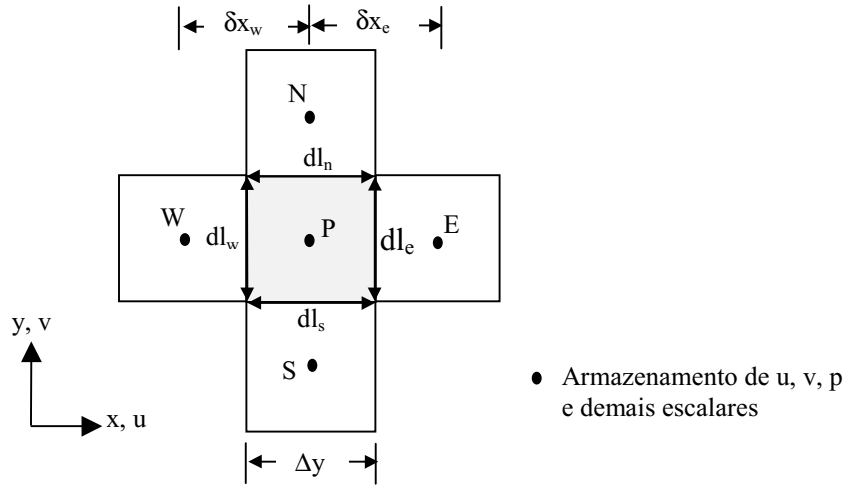


Figura 1. Volume de controle cheio.

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} dx dy + \int_w^e \int_s^e \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} dy dx = \int_s^e \int_w^e \Gamma^\phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy + \int_w^e \int_s^e \Gamma^\phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy dx + \bar{S} \quad (2)$$

$$(\rho u \phi dl)_e - (\rho u \phi dl)_w + (\rho v \phi dl)_n - (\rho v \phi dl)_s = \bar{S} + \Gamma_e^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e dl_e - \Gamma_w^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w dl_w + \Gamma_n^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n dl_n - \Gamma_s^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s dl_s \quad (3)$$

Substituindo na Eq. (3) os fluxos convectivos, difusivos e total por $F=(\rho u dl)$; $D=(\Gamma dl/\delta)$ e $J=[\rho u \phi - \Gamma(\partial \phi / \partial n)] dl$, respectivamente, e subtraindo do lado esquerdo da equação a conservação da massa discretizada multiplicada por ϕ_P tem-se,

$$(J_e - F_e \phi_P) - (J_w - F_w \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) - (J_s - F_s \phi_P) = \bar{S} \quad (4)$$

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (5)$$

$$a_E = D_e A |P_e| + \langle -F_e, 0 \rangle \quad (6)$$

$$a_W = D_w A |P_w| + \langle F_w, 0 \rangle \quad (7)$$

$$a_N = D_n A |P_n| + \langle -F_n, 0 \rangle \quad (8)$$

$$a_S = D_s A |P_s| + \langle F_s, 0 \rangle \quad (9)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (10)$$

$$b = \begin{cases} -p_e dl_e + p_w dl_w, & \text{se } \phi = u \\ -p_n dl_n + p_s dl_s, & \text{se } \phi = v \end{cases} \quad (11)$$

onde $\langle a, b \rangle$ é uma função que retorna o máximo entre a e b, e $A|P| = \langle 0, (1-0,1|P|)^5 \rangle$ é a função de interpolação Lei da Potência (Patankar, 1980).

2.2. Discretização para os volumes interfaciais

Adotando diversas cavidades para resolver o escoamento, observou-se dez tipos distintos de volumes interfaciais, conforme indicado na Fig. 2.

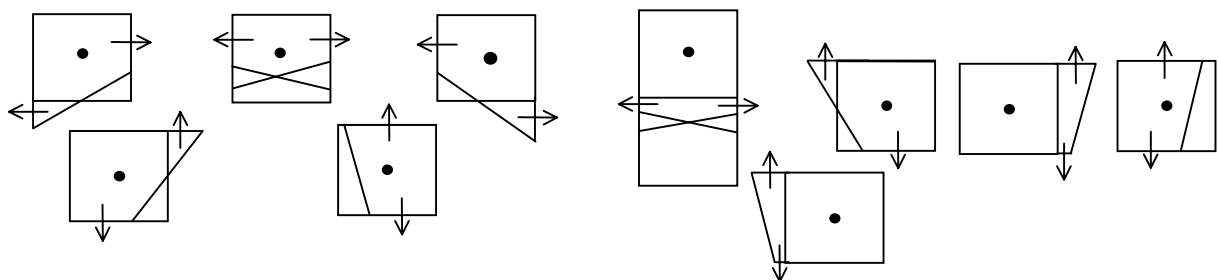


Figura 2. Volumes de controle interfaciais.

Neste artigo apresenta-se apenas a discretização para o primeiro volume. A metodologia utilizada segue os trabalhos de Udaykumar *et al.* (1996) e Ye *et al.* (1999). Na Fig. (3) observa-se o volume interfacial no qual será feita a discretização.

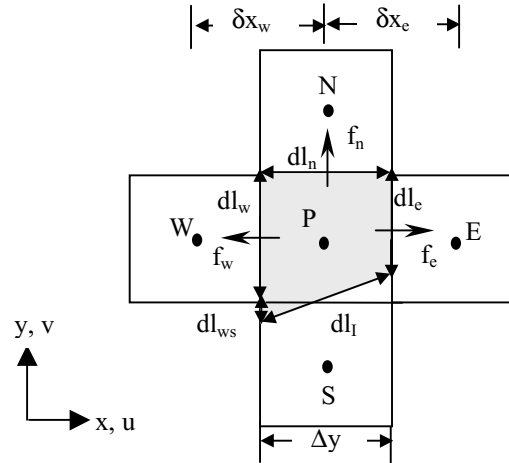


Figura 3. Volume de controle interfacial do primeiro tipo.

Integrando a Eq. (1) para o volume interfacial da Fig. (3) obtém-se via teorema da divergência a seguinte equação,

$$\begin{aligned}
 (\rho u \phi)_e dl_e - (\rho u \phi)_{ws} dl_{ws} - (\rho u \phi)_w dl_w + (\rho v \phi)_n dl_n - (\rho u_n \phi)_I dl_I = \bar{S} + \Gamma_e^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e dl_e - \Gamma_{ws}^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{ws} dl_{ws} + \\
 - \Gamma_w^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w dl_w + \Gamma_n^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n dl_n - \Gamma_I^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_I dl_I
 \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\bar{S} = -p_e dl_e + p_w dl_w + p_{ws} dl_{ws} + p_I dl_I n_x$ se $\phi = u$, ou $\bar{S} = -p_n dl_n + p_I dl_I n_y$ se $\phi = v$.

Subtraindo a equação da conservação da massa discretizada multiplicada por ϕ_P no lado esquerdo da Eq. (12) tem-se,

$$\begin{aligned}
 (\rho u dl)_e (\phi_e - \phi_P) - (\rho u dl)_{ws} (\phi_{ws} - \phi_P) - (\rho u dl)_w (\phi_w - \phi_P) + (\rho v dl)_n (\phi_n - \phi_P) - (\rho u_n dl)_I (\phi_I - \phi_P) = \\
 \bar{S} + \Gamma_e^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e dl_e - \Gamma_{ws}^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{ws} dl_{ws} - \Gamma_w^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w dl_w + \Gamma_n^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n dl_n - \Gamma_I^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_I dl_I
 \end{aligned} \quad (13)$$

onde $u_{nI} = u_I n_x$ para a velocidade u , $u_{nI} = u_I n_y$ para a velocidade v e $\phi_I = 0$; substituindo os fluxos convectivos, difusivos e total por F , D e J , respectivamente, tem-se

$$(J_e - F_e \phi_P) - (J_w - F_w \phi_P) - (J_{ws} - F_{ws} \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) = \bar{S} - \Gamma_I^\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_I dl_I \quad (14)$$

onde $\bar{S} + (J_{ws} - F_{ws} \phi_P) - \Gamma_I^\phi (\partial \phi / \partial n)_I dl_I$ é o termo fonte. Ainda, $(\partial \phi / \partial n)_I = (\partial \phi / \partial x)_I n_x + (\partial \phi / \partial y)_I n_y$, sendo que $(\partial \phi / \partial y)_I$ é calculado a partir de uma função polinomial quadrática em y . Os demais elementos $u_{ws}, \phi_{ws}, (\partial \phi / \partial x)_{ws}, (\partial \phi / \partial x)_I$ são calculados a partir de uma função polinomial bidimensional, linear em x e quadrática em y , assim como $u_e, \phi_e, (\partial \phi / \partial x)_e$ são calculados pela mesma função polinomial se o ponto leste for sólido. Deste modo a Eq. (14) fica:

$$\begin{aligned}
 a_P \phi_P &= a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \\
 a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \\
 a_W &= D_w A(|P_w|) + \langle F_w, 0 \rangle \\
 a_N &= D_n A(|P_n|) + \langle -F_n, 0 \rangle \\
 a_S &= 0
 \end{aligned} \quad (15)$$

O coeficiente leste é calculado de acordo com o ponto nodal leste, e o mesmo é definido na Tab. (1).

Tabela 1. Coeficiente leste para o volume interfacial do primeiro tipo.

Se o ponto nodal leste é sólido	Se o ponto nodal leste é fluido
$a_E = 0$	$a_E = D_e A(P_e) + \langle -F_e, 0 \rangle$
$b = \bar{S} + (J_{ws} - F_{ws} \phi_P) - (J_e - F_e \phi_P) - \Gamma_I^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_I dl_I$	$b = \bar{S} + (J_{ws} - F_{ws} \phi_P) - \Gamma_I^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_I dl_I$

Assim, $f_{ws} = F_{ws} (\phi_{ws} - \phi_P) - \Gamma_{ws}^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{ws} dl_{ws}$, por exemplo, é aproximado expressando ϕ em termos de uma função que é linear em x e quadrática em y, conforme equação a seguir.

$$\phi_{ws} = c_1 x_{ws} y_{ws}^2 + c_2 y_{ws}^2 + c_3 x_{ws} y_{ws} + c_4 y_{ws} + c_5 x_{ws} + c_6 \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{ws} = c_1 y_{ws}^2 + c_3 y_{ws} + c_5 \tag{17}$$

Os seis coeficientes desconhecidos na Eq. (16) são expressos em termos da variável ϕ nos seis pontos apresentados na Fig. (4b), isto é, c_n contém os valores de ϕ_j para $j = 1, \dots, 6$. Calcula-se os valores de c_n usando, por exemplo, um método direto, como eliminação de Gauss.

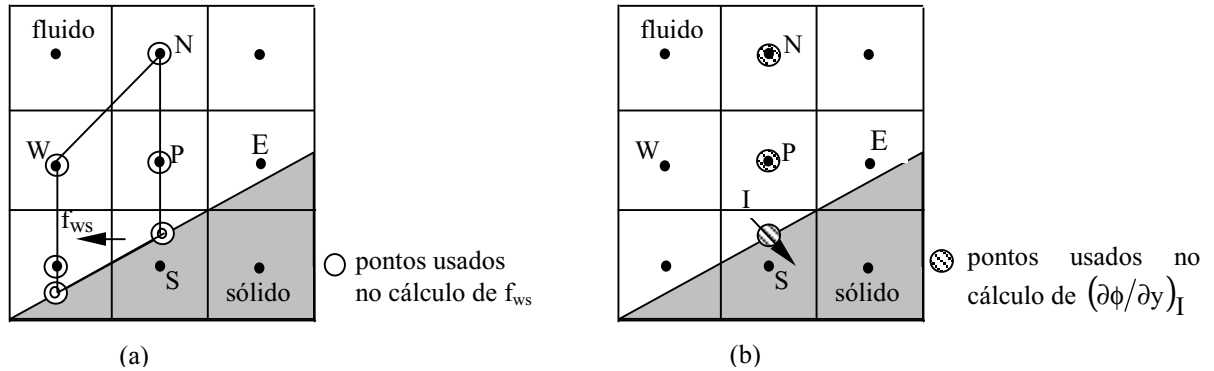


Figura 4. Interpolação usada para avaliar os fluxos nas faces dos volumes de fronteira, (a) região trapezoidal e extensão usada no cálculo do fluxo f_{ws} na face ws; (b) extensão para o cálculo de $(\partial \phi / \partial y)_I$.

Um procedimento similar é usado para aproximar f_e , na face leste do volume ilustrado na Fig. (3), quando o volume de controle leste é sólido. Os fluxos f_n e f_w , do mesmo volume interfacial não precisam de tratamento especial pois os valores de ϕ e das derivadas no centro das faces podem ser calculados com precisão de segunda ordem usando-se uma aproximação linear. Contudo, podem existir volumes interfaciais que têm as faces sul ou norte cortadas. Nestes volumes a função de interpolação linear em y e quadrática em x é usada para avaliar os fluxos nas faces.

Em geral ambos os fluxos convectivo e difusivo estão na interface, I, de um volume de fronteira, requerendo a aproximação do valor das variáveis e da derivada normal no centro da face. O valor da variável é obtido das condições de contorno do tipo Dirichlet, não sendo necessário uma função de interpolação. A derivada normal na face I do volume mostrado na Fig. (3), pode ser decomposta como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}_I = \frac{\partial \phi}{\partial x}_I n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}_I n_y \tag{18}$$

onde n_x e n_y são as componentes do vetor normal unitário, na interface. Como a forma da fronteira irregular é conhecida, n_x e n_y são conhecidos. Contudo, o cálculo do fluxo normal requer a estimativa de $(\partial \phi / \partial x)_I$ e $(\partial \phi / \partial y)_I$ no centro da interface. Assim, $(\partial \phi / \partial y)_I$ é calculado com precisão de segunda ordem utilizando a variação de ϕ ao longo da linha vertical, Fig. (4a), em termos de uma função quadrática em y, de acordo com a expressão a seguir,

$$\phi = b_1 y^2 + b_2 y + b_3 \tag{19}$$

Os coeficientes na função quadrática são expressos em termos dos valores de ϕ nos três pontos indicados na Fig. (4a). A derivada normal no centro da interface é avaliada como

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_I = 2b_1 y + b_2 \tag{20}$$

O cálculo de $(\partial\phi/\partial x)_I$ não é simples, uma aproximação semelhante ao cálculo de f_{ws} e f_c pode ser usada. Considere o trapezóide mostrado na Fig. (5), expressa-se a variável ϕ neste volume trapezoidal em termos de uma função que é linear em x e quadrática em y . O procedimento é similar ao realizado para obter $(\partial\phi/\partial x)_{ws}$.

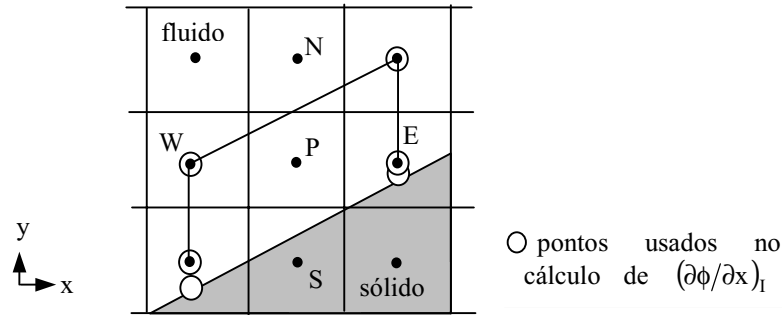


Figura 5. Extensão para o cálculo de $(\partial\phi/\partial x)_I$.

3. Resultados e Discussões

As diferentes cavidades adotadas na simulação numérica são apresentadas na Fig. (6). Em cada cavidade é indicada a direção da velocidade u imposta na parede superior deslizante.

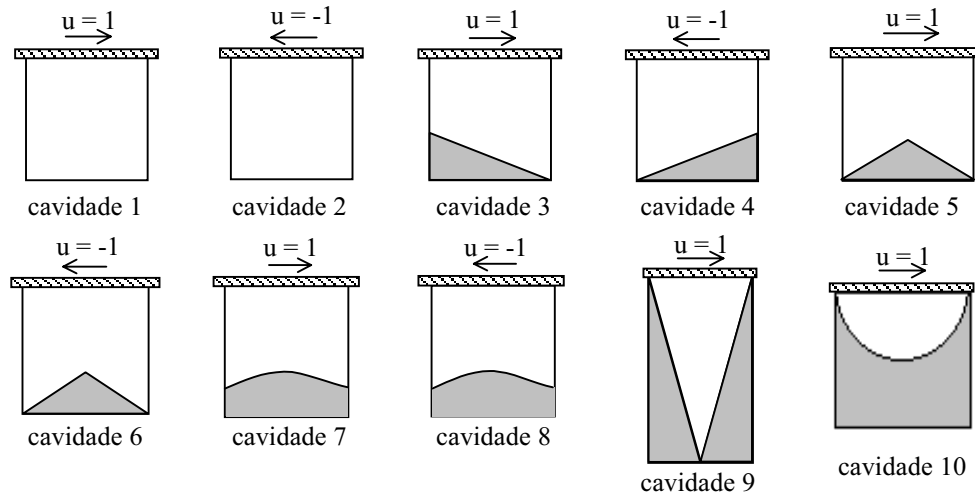


Figura 6. Cavidades utilizadas.

Na Fig. (6) as bases das cavidades 7 e 8 são formadas por uma curva cossenoidal $f(x) = 0,275 + 0,05(1-\cos(2\pi x))$ Shhy *et al.* (1996). Alguns resultados obtidos nas cavidades da Fig. (6) são apresentados a seguir. As Fig. (7-11) apresentam os perfis de velocidade u e v . Os resultados obtidos são bastante satisfatórios.

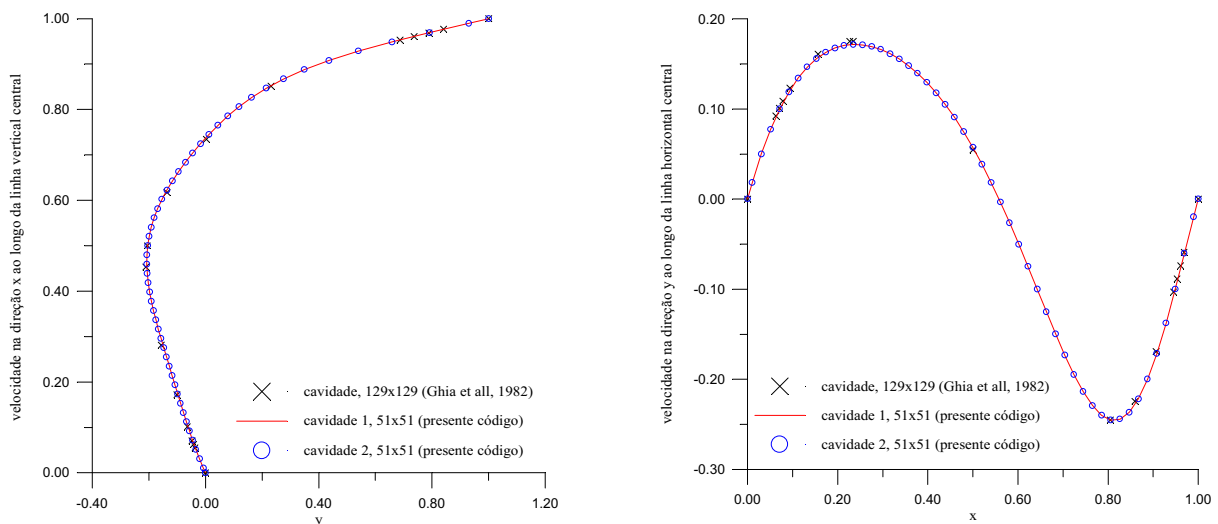


Figura 7. Perfil das velocidades u e v através do centro geométrico das cavidades 1 e 2, para Reynolds 100.

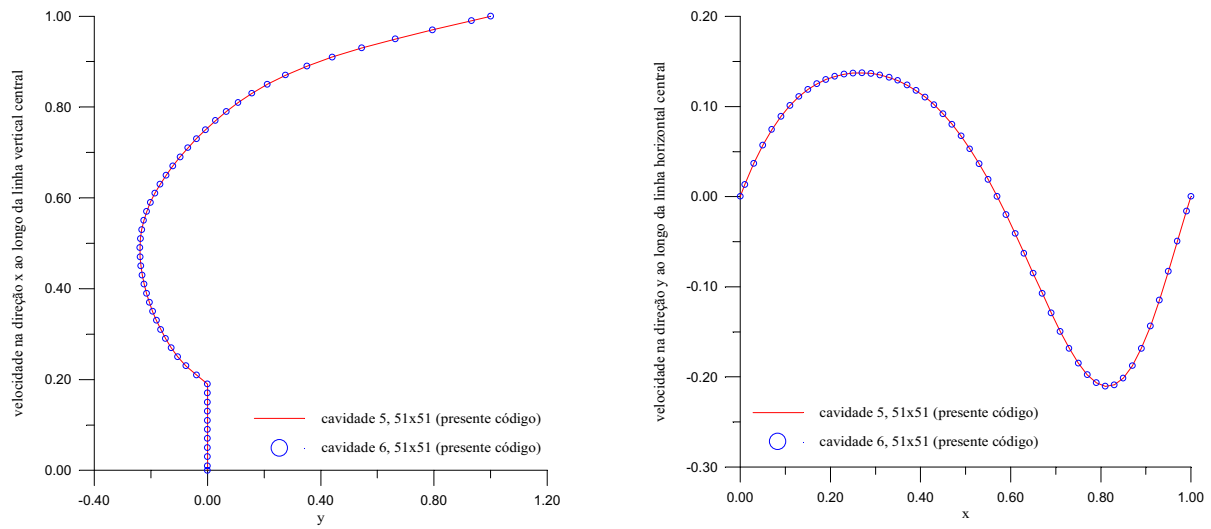


Figura 8. Perfil das velocidades u e v através do centro geométrico das cavidades 5 e 6, para Reynolds 100.

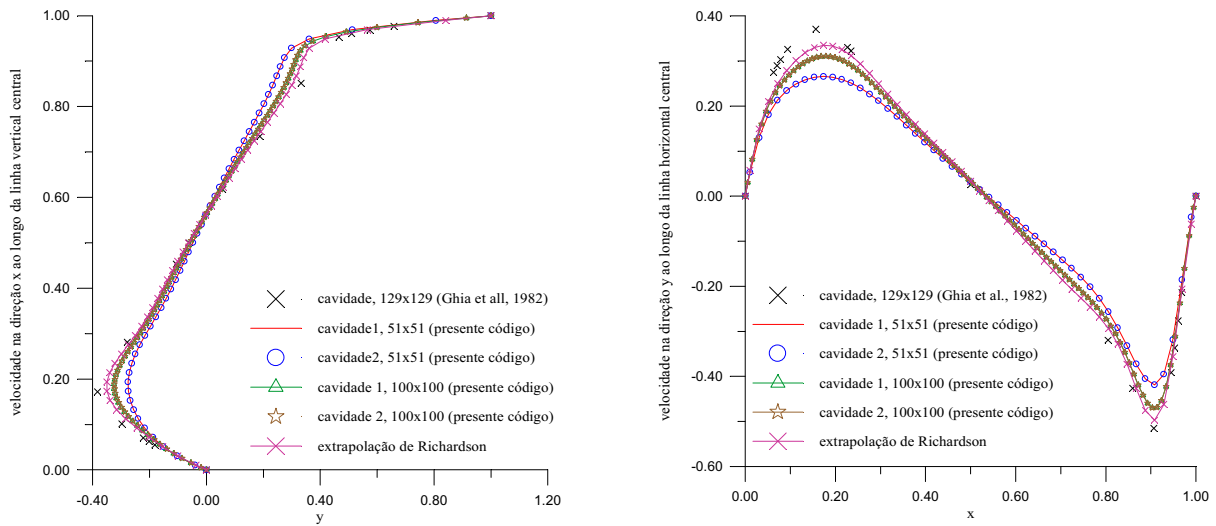


Figura 9. Perfil das velocidades u e v através do centro geométrico das cavidades 1 e 2, para Reynolds 1000.

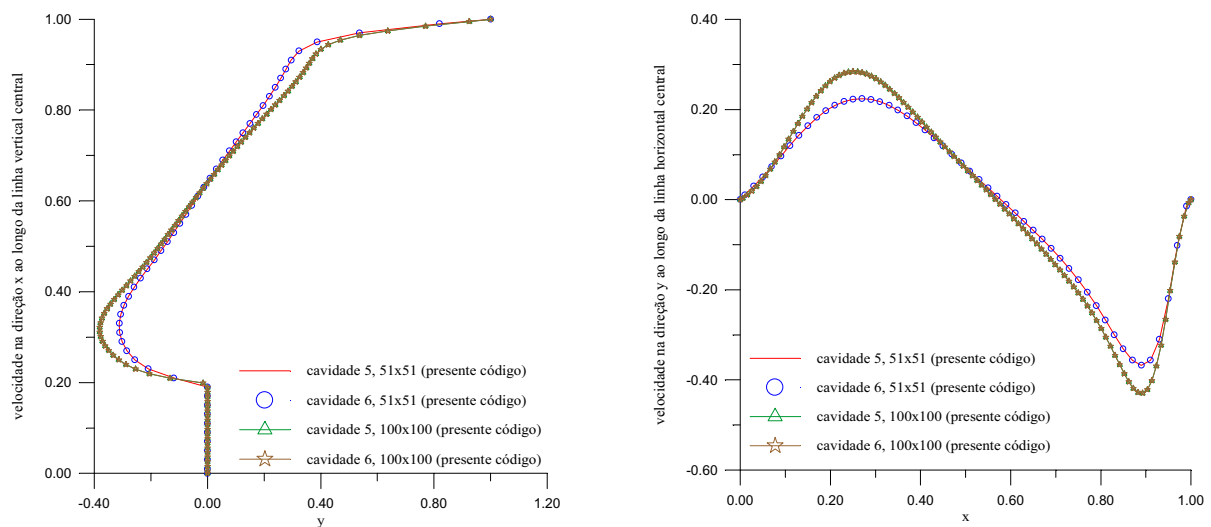


Figura 10. Perfil das velocidades u e v através do centro geométrico das cavidades 5 e 6, para Reynolds 1000.

A extrapolação de Richardson foi empregada para obter o perfil das velocidades u e v nas cavidades 1 e 2 para Reynolds igual a 1000. Com o emprego da extrapolação evita-se fazer um refinamento maior da malha. Os resultados obtidos

com a extrapolação estão na Fig. (9) os quais se aproximaram dos de Ghia *et al.* (1982). O perfil de velocidade u na Fig. (11) é semelhante ao obtido por Shyy *et al.* (1996).

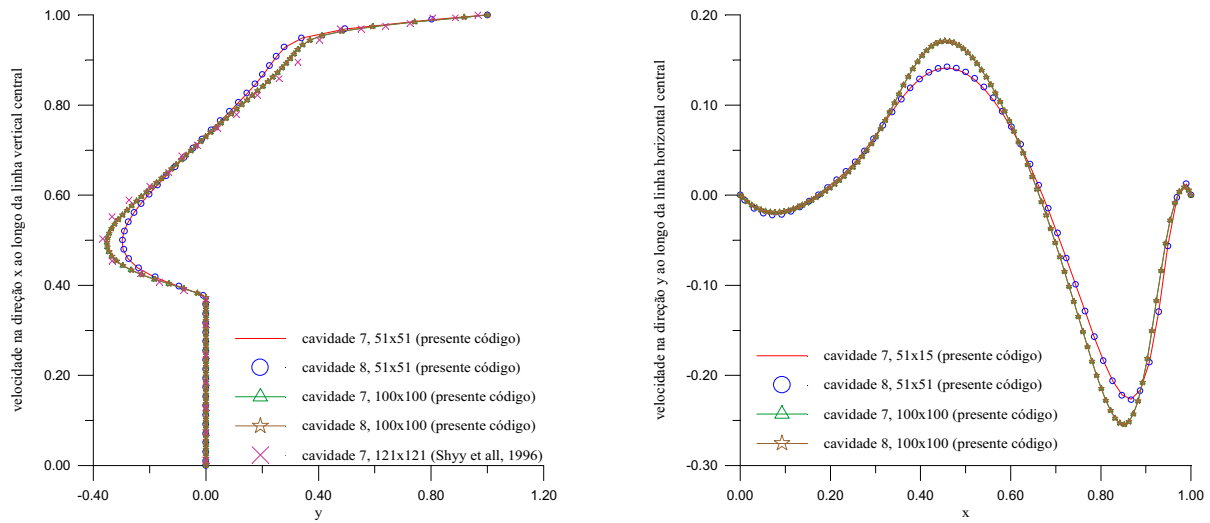


Figura 11. Perfil das velocidades u e v através do centro geométrico das cavidades 7 e 8, para Reynolds 1000.

As linhas de corrente são apresentadas a seguir, para Reynolds 100 e 1000. Observa-se que as linhas de corrente nas Fig. (12-16) são simétricas, o que já era esperado. Na Fig. (12), por exemplo, da cavidade 3 para a cavidade 4 muda-se a inclinação da base deformada e a direção da velocidade, o que resulta em linhas de corrente iguais se comparadas em valor absoluto. Na Fig. (14) os resultados coincidem com os de Ghia *et al.* (1982), o mesmo ocorre na Fig. (16) comparando os resultados com Shyy *et al.* (1996). As linhas de corrente da Fig. (17) também concordam com as obtidas por Migeon *et al.* (2000), contudo naquele trabalho resolve-se o escoamento transiente só para Reynolds 1000. A Fig. (18) apresenta as isobáricas para Reynolds igual a 1000 nas cavidades 3 e 4, nota-se que são simétricas, o mesmo ocorre na Fig. (19) para as cavidades 5 e 6.

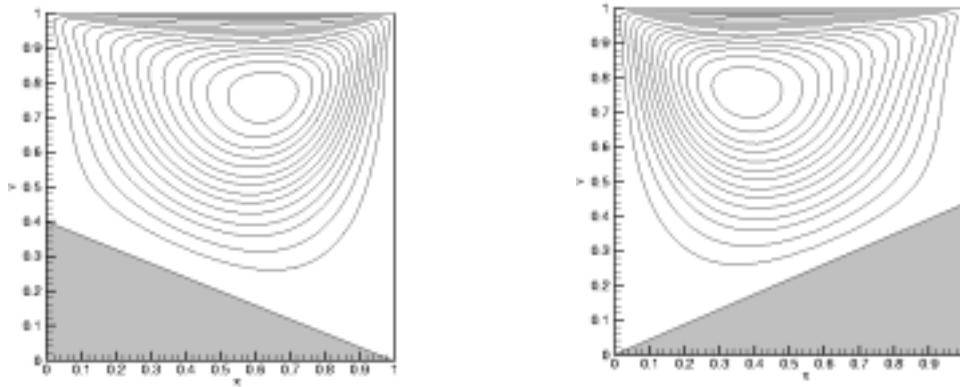


Figura 12. Linhas de corrente para as cavidades 3 e 4, com Reynolds 100.

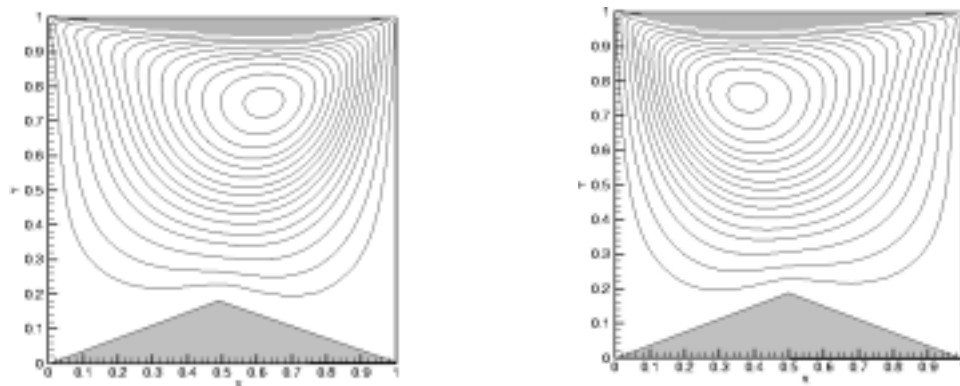


Figura 13. Linhas de corrente para as cavidades 5 e 6, com Reynolds 100.

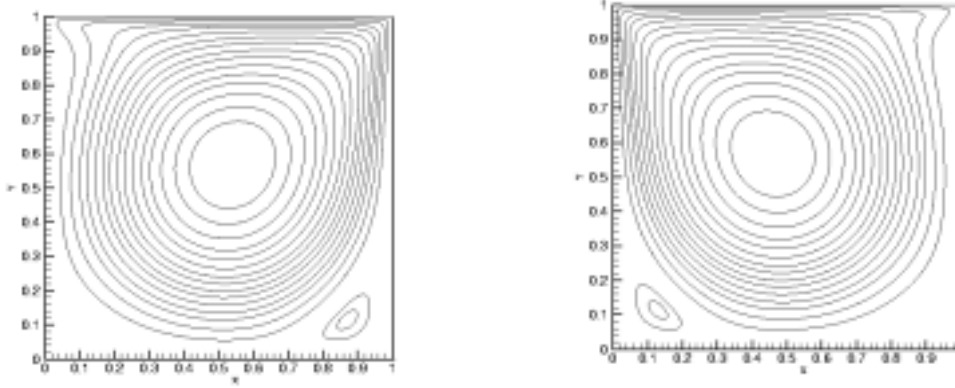


Figura 14. Linhas de corrente para as cavidades 1 e 2, com Reynolds 1000.

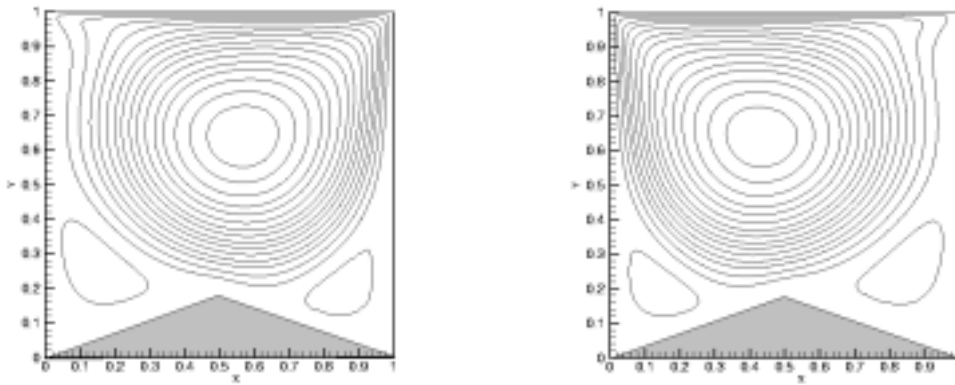


Figura 15. Linhas de corrente para as cavidades 5 e 6, com Reynolds 1000.

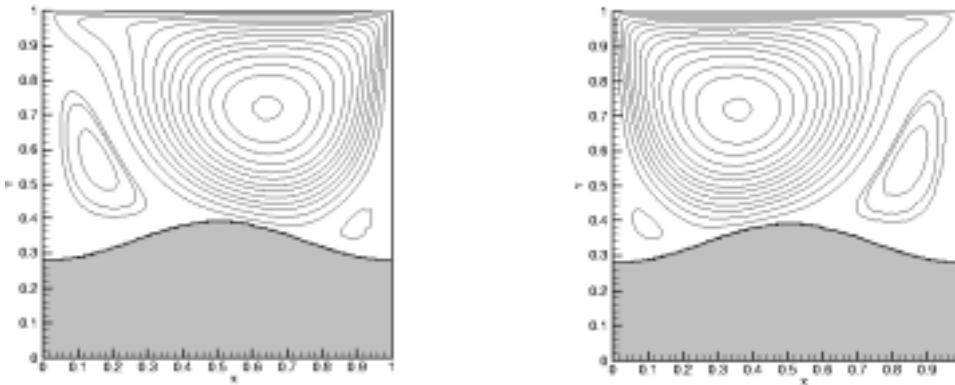


Figura 16. Linhas de corrente para as cavidades 7 e 8, com Reynolds 1000.

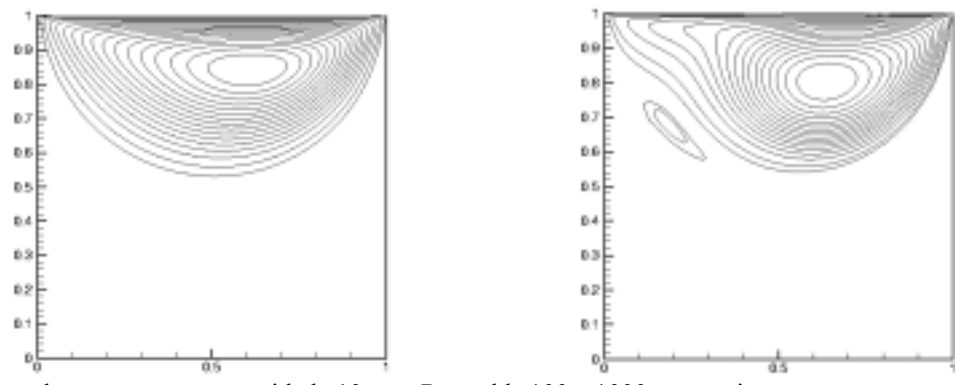


Figura 17. Linhas de corrente para a cavidade 10 com Reynolds 100 e 1000, respectivamente.

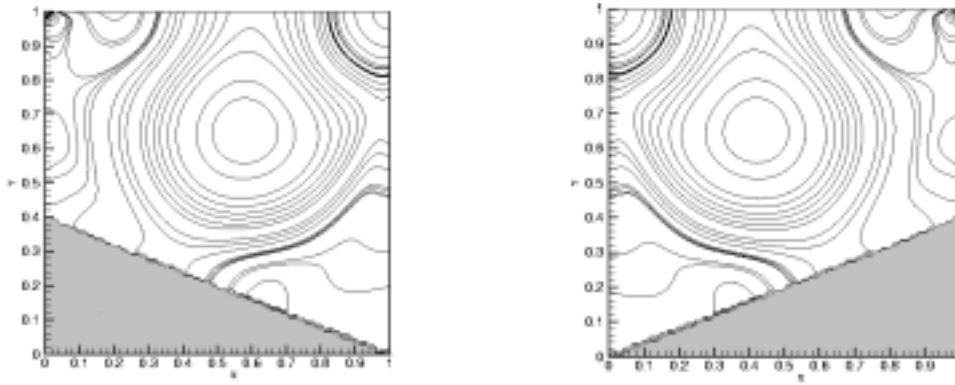


Figura 18. Isobáricas para as cavidades 3 e 4, com Reynolds 1000.

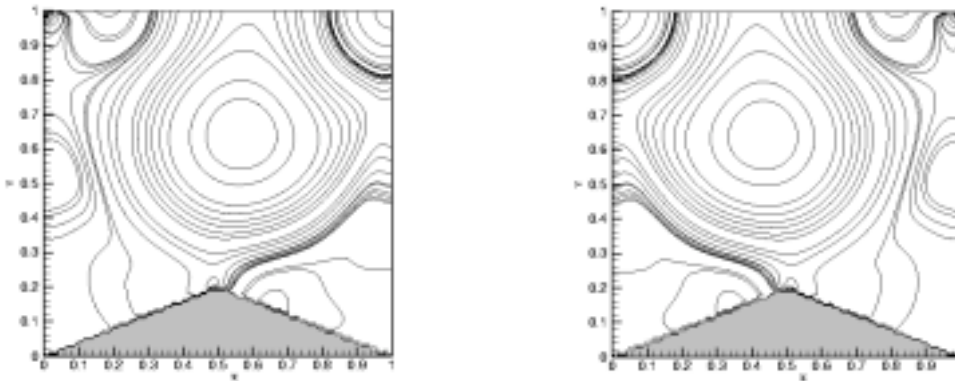


Figura 19. Isobáricas para as cavidades 5 e 6, com Reynolds 1000.

O escoamento na cavidade 9 foi simulado para Reynolds 50, 100, 400 e 800 com o objetivo de comparar os resultados com Jyotsna and Vanka (1995). A Fig. (20a) mostra a velocidade u na linha vertical central da cavidade triangular, esta se anula ao longo de grande parte da linha vertical central exceto próximo ao topo. Já a Fig. (20b) mostra o comportamento da pressão ao longo da mesma linha. A pressão varia próxima a parede superior deslizante da cavidade. Na Fig. (21) observa-se que o tamanho dos vórtices decresce a medida que aproxima-se do vértice inferior da cavidade. O primeiro vórtice se move para a direita, já o segundo se move para a esquerda, para captar os demais vórtices é necessário um maior refino da malha computacional. Os resultados obtidos são semelhantes aos de Jyotsna and Vanka (1995).

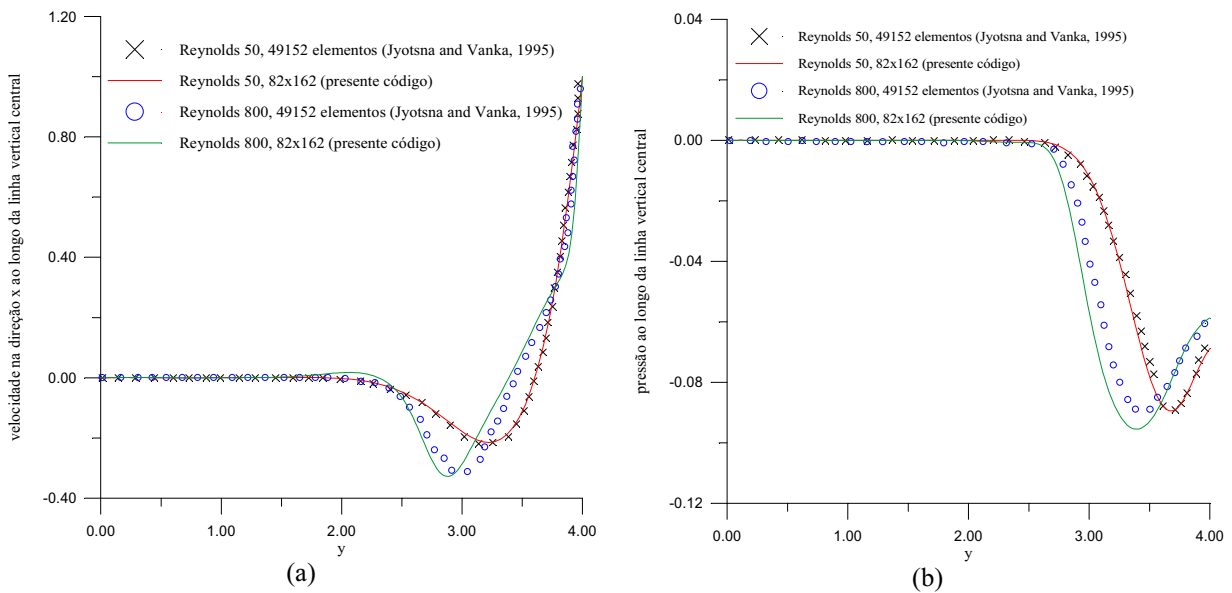


Figura 20. Velocidade na direção x e pressão na linha vertical central da cavidade 9 para Reynolds 50 e 800.

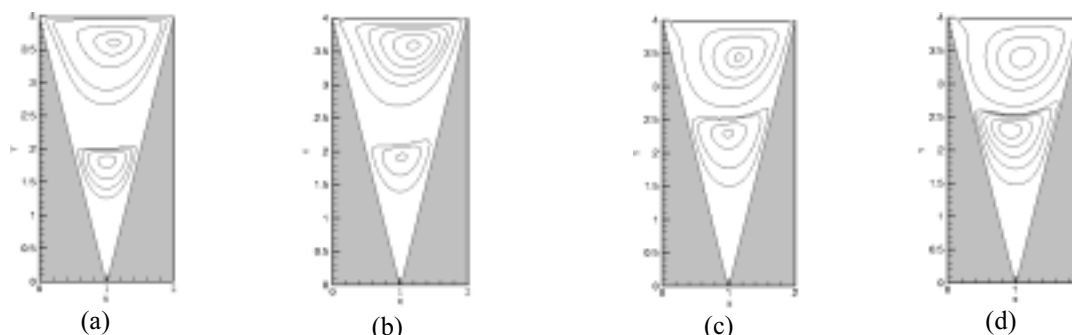


Figura 21. Linhas de corrente na cavidade 9, para Reynolds (a) 50, (b) 100, (c) 400 e (d) 800.

4. Conclusões

No presente artigo foram apresentados os resultados da simulação do escoamento em cavidades triangular, semicircular e com bases irregulares. As simulações foram realizadas com o intuito de validar o algoritmo Euleriano-Lagrangeano para o acompanhamento da interface, ELAFINT. O ELAFINT utiliza uma malha cartesiana estruturada, sendo não estruturada apenas na fronteira entre fluido-fluido ou fluido-sólido, e fixa, isto é, para resolver o escoamento em um domínio com diferentes bases deformadas basta alterar a função interfacial que forma estas bases. Os volumes interfaciais exigem tratamento diferenciado, o qual foi exposto no corpo deste trabalho para um volume específico. O surgimento de volumes interfaciais com três lados exige cuidado extra a fim de que os fluxos nas faces dos volumes sejam conservados. Os resultados obtidos para o escoamento nas diferentes cavidades foram considerados satisfatórios quando comparados com os trabalhos disponíveis na literatura

5. Referências

- Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid Method", *Journal Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387-411.
- Jyotsna, R. and Vanka, P., 1995, "Multigrid Calculation of Steady, Viscous Flow in a Triangular Cavity", *Journal of Computational Physics*, 122, pp. 107-117.
- Lopes, M. N., 1996, "Uma Metodologia Numérica para a Análise do Comportamento Dinâmico de Válvulas Tipo Palheta em Escoamentos Periódicos", Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Maliska, C. R., 1995, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro.
- Mariani, V. C., 1997, "Resolução de Sistemas Lineares Gerados na Discretização das Equações de Navier-Stokes em Malhas de Voronoi", Dissertação de Mestrado, Ciência da Computação, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Migeon, C., Texier, A. and Pineau, G., 2000, "Effects of Lid-Driven Cavity Shape on the Flow Establishment Phase", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 14, pp. 469-488.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill.
- Peskin, C. S., 1977, "Numerical-Analysis of Blood-Flow in Heart", *Journal Computational Physics*, Vol. 25, No. 3, pp. 220-252.
- Shyy, W., Udaykumar, H. S., Rao, M. M. and Smith, R. W., 1996, "Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries", Taylor e Francis, Bristol, PA.
- Udaykumar, H. S., Kan, H-C., Shyy, W. and Tay-Son-Tran, R., 1997, "Multiphase Dynamics in Arbitrary Geometries on Fixed Cartesian Grids", *Journal Computational Physics*, Vol. 137, pp. 366-405.
- Udaykumar, H. S., Shyy, W. and Rao, 1996, "ELAFINT: A Mixed Eulerian-Lagrangian Method for Fluid Flows with Complex and Moving Boundaries", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, pp. 691-712.
- Ye, T., Mittal R., Udaykumar, H. S. and Shyy, W., 1999, "A Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries", 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, jan. 11-14, Reno, NV.

NUMERICAL ANALYSIS OF FLOW IN THE IRREGULAR CAVITIES

Viviana Cocco Mariani

Federal University of Santa Catarina, Department of Mechanical Engineering, 88040-900 Florianópolis, SC – BRAZIL
 mariani@nrva.ufsc.br

Alvaro Toubes Prata

Federal University of Santa Catarina, Department of Mechanical Engineering, 88040-900 Florianópolis, SC – BRAZIL
 prata@nrva.ufsc.br

Abstract. In this work the lid-driven recirculation flow in irregular cavities for different Reynolds number is simulated. The governing equations are written in cartesian coordinates and solved using a finite volume methodology. To deal with the irregular bottom surface of the cavity a front tracking algorithm is employed. The cavities triangular, half-circular, with inclined and function cosine base are explored. The streamline contours, pressure line contours, and plots of pressure and centerline velocity are presented. Comparisons with results available in the literature are performed to validate the numerical methodology and procedure.

Keywords. : lid-driven cavity, front tracking technique, Navier-Stokes equations, finite volume methodology.

MODELAGEM DE CAMADA LIMITE TRIDIMENSIONAL, COMPRESSÍVEL E TURBULENTA EM CORPOS AERODINÂMICOS

Mauro Jorge Pisani dos Santos

Universidade Severino Sombra – Av. Exp. Oswaldo A. Ramos, s/nº - Vassouras – RJ
mauropisani@uss.br

José Carlos Cesar Amorim

Instituto Militar de Engenharia – Pça. General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha – Rio de Janeiro – RJ
jcamorim@ime.br

Resumo. *O presente trabalho consiste em uma modelagem numérica de camada limite tridimensional, compressível, laminar e turbulenta no qual as equações de governo são discretizadas pela utilização do esquema de diferenças finitas de Matsuno. Tal esquema é eficiente quando comparado com outros de uso corrente, possui precisão de segunda ordem e é caracterizado pela independência do sentido da velocidade transversal. O modelo de turbulência empregado é o modelo algébrico de comprimento de mistura de Cebeci e Smith adaptado para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas. Os resultados obtidos são validados com dados numéricos e experimentais para um elipsóide de revolução em diversos ângulos de ataque. Os parâmetros do escoamento não-viscoso que se constituem nas condições de contorno para o problema de camada limite são obtidos analiticamente da teoria do escoamento potencial e a malha também gerada analiticamente no sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.*

Palavras chave: *Camada limite, Aerodinâmica, Turbulência.*

1. Introdução

1.1. Considerações iniciais

A resolução das equações de camada limite constitui-se hoje como uma opção altamente viável no que tange à simulação de escoamentos sobre corpos aerodinâmicos. Os resultados são obtidos a uma fração do custo computacional necessário para a resolução das equações de Navier-Stokes e, embora não sejam adequadas na simulação de escoamentos complexos, para propósitos de projeto, os resultados obtidos possuem a precisão necessária.

Em detrimento da maior facilidade de resolução numérica das equações de camada limite tridimensional quando comparadas às equações de Navier-Stokes. Tais equações, no caso tridimensional, apresentam propriedades e dificuldades adicionais quando comparadas às equações para o caso bidimensional. Uma atenção especial deve ser dirigida ao princípio de zona de influência - zona de dependência no sentido de não se violar o critério de estabilidade imposto pela natureza matemática das equações de camada limite 3D.

Para o caso laminar e compressível, o sistema formado pelas equações de camada limite associado à equação de estado de um gás perfeito e à lei de viscosidade de Sutherland é fechado, contudo, no caso de escoamentos turbulentos, faz-se necessária a inserção de um modelo de turbulência capaz de calcular os termos do tensor de Reynolds oriundos do modelo representativo da natureza do escoamento.

1.2. Histórico

Escoamentos em camada limite tridimensional tem sido estudados sob um ponto de vista numérico nas últimas quatro décadas. Os pioneiros trabalhos de Raetz (1957) e de Der e Raetz (1962) ainda hoje permanecem como as principais referências no que tange à estabilidade do sistema misto elíptico-hiperbólico associado às equações de governo, isto é, o princípio de zona de influência-dependência. Blottner (1975) apresentou uma revisão dos procedimentos numéricos aplicados à análise de camada limite tridimensional, trabalho este que, mesmo com os recentes desenvolvimentos, ainda é bastante profícuo. Wang (1970) apresentou ao fim da década de 1960 um trabalho onde é mostrada uma vasta gama de resultados para escoamento laminar sobre um elipsóide de revolução a variados ângulos de ataque. Patel e Choi (1982) e Cousteix (1987) apresentam resultados para escoamentos turbulentos sobre elipsóides de revolução. Durante as duas últimas décadas, a maior ênfase em mecânica dos fluidos computacional foi dirigida à resolução das equações de Euler e de Navier-Stokes para geometrias cada vez mais complexas. Azevedo et al. (1998) apresentam ao início da década de 1990 resultados para o escoamento turbulento sobre o veículo lançador de satélites (VLS) brasileiro. Tais resultados são obtidos pela resolução das equações de Navier-Stokes parabolizadas com o auxílio da técnica de multiblocos. Sem dúvida, em muitas situações, a resolução das equações de Navier-Stokes se tornam o único procedimento numérico viável, como por exemplo escoamentos que possuam forte interação ou escoamentos com separação, contudo, em virtude do refinamento da malha gerada, tal solução possui ainda hoje um custo computacional elevado, além do mais, para propósitos iniciais de análise e projeto, a resolução de tais equações não é essencial.

Redução de arrasto, controle de escoamento laminar e predição da transição em corpos aerodinâmicos são exemplos de casos em que a aplicação das equações de camada limite se prestam com precisão adequada a uma fração do custo computacional exigido para a resolução das equações de Navier-Stokes.

1.3. Objetivos

O presente trabalho, tem como objetivo fornecer dados sobre o escoamento compressível, laminar e/ou turbulento ao redor de corpos aerodinâmicos. Tais dados se constituem em fatores de extrema importância no que tange à problemas de interesse em redução do arrasto aerodinâmico, controle do escoamento laminar e predição da transição. Os dados em questão são obtidos pela resolução numérica das equações de camada limite tridimensional, devidamente discretizadas pelo método de diferenças finitas baseando-se no esquema de Matsuno (1981) que apresenta como característica precípua a independência do sentido da velocidade do escoamento transversal além de mais eficiente quando comparado com outros métodos de uso corrente.

O modelo de turbulência empregado consiste no modelo algébrico de comprimento de mistura de Cebeci e Smith com modificações propostas para o caso 3D em sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.

Para a simulação de escoamentos que possuem inicialmente natureza laminar e em seguida turbulenta foi utilizado o modelo de transição algébrico proposto por Dhawan e Narasimha (1958).

As malhas são geradas algebricamente no sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.

Os resultados obtidos são validados para o escoamento laminar e turbulento ao redor de um elipsóide de revolução a variados ângulos de ataque.

2. Análise teórica

2.1. Conceitos fundamentais

O conceito de camada limite foi introduzido por Ludwig Prandtl em 1904. A partir de evidências experimentais Prandtl observou que, para um número de Reynolds suficientemente elevado, os efeitos viscosos em um escoamento sobre uma superfície ficam confinados a uma fina região próxima a esta superfície.

No caso de equações de camada limite tridimensional, um fator de grande importância é a escolha do sistema de coordenadas. Um sistema cartesiano pode ser utilizado para escoamentos sobre superfícies planas, porém para escoamentos sobre superfícies que possuam maior complexidade geométrica, faz-se necessária a utilização de um sistema de coordenadas curvilíneas. Alguns estudos foram desenvolvidos com um sistema de coordenadas curvilíneas coincidentes com as linhas de corrente. Wie (1991), por exemplo, se utiliza de tal sistema de coordenadas para estudar o escoamento sobre a fuselagem de uma aeronave Cessna. Apesar disso, a maioria dos estudos em camada limite tridimensional são desenvolvidos com um sistema de coordenadas ligado à geometria da superfície.

2.2. Sistemas de coordenadas

A escolha do sistema de coordenadas é particularmente importante nos casos de escoamento tridimensional sobre uma superfície arbitrária. Para um cálculo de camada limite, normalmente utiliza-se sistemas de coordenadas curvilíneas ligadas à superfície do corpo sobre o qual se desenvolve a camada limite. Este sistema pode, por exemplo, ser ligado às linhas de corrente do escoamento não-viscoso e suas ortogonais. Tal sistema apresenta como vantagens um equacionamento mais simples, associado à inexistência de singularidades geométricas, bem como independência do ângulo de ataque. Contudo, sob um ponto de vista de geração da malha o problema torna-se significativamente complexo. Em virtude de tal complexidade, na maioria dos casos, utiliza-se um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, não necessariamente ortogonal.

No presente trabalho, foi utilizado o sistema de coordenadas curvilíneas orientadas de superfície. Tal sistema apesar de apresentar um equacionamento mais complexo e de apresentar uma singularidade no nariz do corpo aerodinâmico a ser estudado ($x = 0$), torna bastante simples o procedimento de geração da malha. Além disso deve-se ressaltar, também, a dependência do ângulo de ataque.

O problema da singularidade é resolvido, iniciando-se os cálculos em um ponto ligeiramente a montante do bordo de ataque. No que diz respeito a dependência do ângulo de ataque, o problema está associado a não coincidência entre os bordos de ataque físico e geométrico. O procedimento para se remediar este problema é iniciar os cálculos em um ponto ligeiramente a jusante do bordo de ataque físico, desta forma, desconsiderando a não coincidência entre os bordos de ataque físico e geométrico. É claro que tal procedimento só é adequado para pequenos ângulos de ataque ($\leq 10^\circ$). Para ângulos de ataque mais elevados, faz-se necessária a utilização de transformações que localizem a posição correta do bordo de ataque físico.

A Figura (1) mostra a superfície de um corpo aerodinâmico e o sistema de coordenadas utilizado. Em tal sistema, as linhas de x e y constantes são definidas sobre a superfície do corpo aerodinâmico e são em geral não-ortogonais. A coordenada z (ξ) é retilínea e normal às duas outras e, por conseguinte, também normal à superfície. O sistema de coordenadas em questão é, então, dito localmente monoclinico.

O sistema de coordenadas orientadas de superfície localmente monoclinico é muito bem adaptado para representar um escoamento próximo à superfície sólida. Tal sistema pode ser utilizado sem restrições para superfícies convexas.

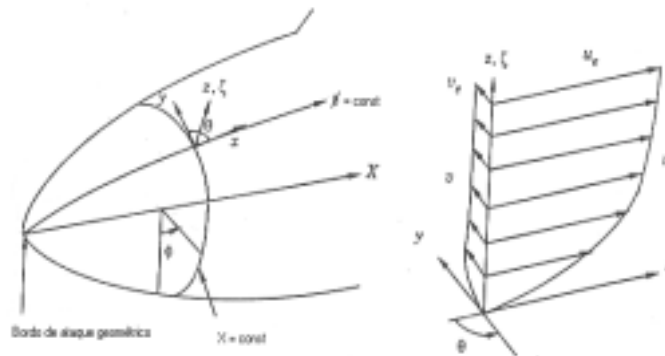


Figura 1. Sistema de coordenadas orientadas de superfície em um corpo aerodinâmico

2.3. Equações de camada limite

2.3.1. Equações de governo

As equações de camada limite num sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, vem sendo utilizado por muitos autores nas últimas décadas. Cebeci et al. (1977) em meados da década de 1970 utiliza-se de tais equações para estudar o escoamento sobre asas arbitrárias. No início da década de 1990 Wie (1991) aplica as mesmas equações para estudar o escoamento sobre a fuselagem de uma aeronave Cessna. As equações são as seguintes:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u h_2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v h_1 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w h_1 h_2 \sin \theta) = 0 \tag{1}$$

Equação da Quantidade de Movimento em x:

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} - \rho u^2 K_1 \cot \theta + \rho v^2 K_2 \csc \theta + \rho u v K_{12} = \\ - \frac{\csc^2 \theta}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\cot \theta \csc \theta}{h_2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Equação da Quantidade de Movimento em y:

$$\begin{aligned} \frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_2} \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} - \rho v^2 K_2 \cot \theta + \rho u^2 K_1 \csc \theta + \rho u v K_{21} = \\ - \frac{\csc^2 \theta}{h_2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\cot \theta \csc \theta}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Equação da Energia:

$$\frac{\rho u}{h_1} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_2} \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial z} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\} \tag{4}$$

Nas equações acima, os tensores métricos h_1 e h_2 são os responsáveis pela transformação do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, sendo dados por:

$$h_1 = \frac{\partial s}{\partial x} \tag{5}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y} \right)^2} \tag{6}$$

Os parâmetros K_1 e K_2 são as curvaturas geodésicas das curvas $y = \text{constante}$ e $x = \text{constante}$ respectivamente e são dados por:

$$K_1 = \frac{1}{h_1 h_2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \cos \theta) - \frac{\partial h_1}{\partial y} \right\} \tag{7}$$

$$K_2 = \frac{1}{h_1 h_2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (h_1 \cos \theta) - \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \tag{8}$$

$$K_{12} = \frac{1}{h_1 h_2 \sin^2 \theta} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) \frac{\partial h_1}{\partial y} - 2 \cos \theta \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \tag{9}$$

$$K_{21} = \frac{1}{h_1 h_2 \sin^2 \theta} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) \frac{\partial h_2}{\partial x} - 2 \cos \theta \frac{\partial h_1}{\partial y} \right\} \tag{10}$$

A velocidade total é dada por:

$$V = (u^2 + v^2 + 2uv \cos \theta)^{1/2} \tag{11}$$

O sistema de equações acima é fechado pela equação de estado de um gás perfeito e pela lei de viscosidade de Sutherland. Respectivamente:

$$p = \rho RT \tag{12}$$

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2} \tag{13}$$

As condições de contorno são dadas por:

$$z = \delta, \quad u = u_e(x, y), \quad v = v_e(x, y), \quad H = H_e \tag{14}$$

$$z = 0, \quad u = v = 0, \quad w = w_w, \quad H = H_w \tag{15}$$

2.3.2. Natureza matemática das equações de camada limite

As equações de camada limite tridimensional se constituem em um sistema misto elíptico-hiperbólico resultando no princípio de zona de influência – zona de dependência. A Figura 2 mostra a projeção de duas linhas de corrente tomadas num escoamento sobre uma superfície. Tais linhas de corrente se situam em duas superfícies distintas. A primeira sobre a superfície do corpo aerodinâmico e a segunda no topo da camada limite. Elas são escolhidas como as linhas de corrente que possuem o maior deslocamento angular. A projeção de tais linhas na direção normal a superfície forma duas regiões em formato de cunha. A região a jusante do ponto P é chamada de zona de influência e a região a montante do ponto P é chamada de zona de dependência.

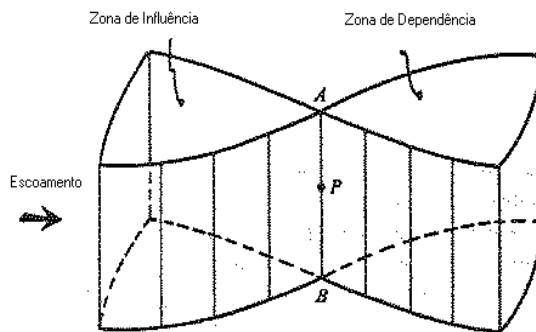


Figura 2 – Zonas de influência e de dependência

O princípio de zona de influência – zona de dependência estabelece que a influência da solução em qualquer ponto é transferida por difusão para todos os pontos numa linha normal à superfície e convectada pelas linhas de corrente ao longo do escoamento.

2.4. Condições iniciais

As equações de camada limite bidimensional possuem natureza matemática parabólica se constituindo, portanto, em problemas de marcha numérica na direção do escoamento. Ou seja, uma vez imposta as condições iniciais em um ponto, marcha-se numericamente a montante deste ponto, na direção do escoamento.

Já as equações de camada limite tridimensional, obrigam a uma marcha numérica tanto na direção longitudinal como na direção transversal à direção do escoamento não-perturbado. Em virtude destas duas direções de marcha mostradas na Fig.3, faz-se necessária a imposição de condições iniciais em dois planos que se cruzem. Estes planos são o plano de simetria, ou seja, o plano vertical que divide o corpo aerodinâmico ao meio, e o plano que passa pelo ponto de estagnação e é normal ao plano de simetria. Uma vez obtidas as condições iniciais neste dois planos pode-se iniciar o processo de marcha numérica.

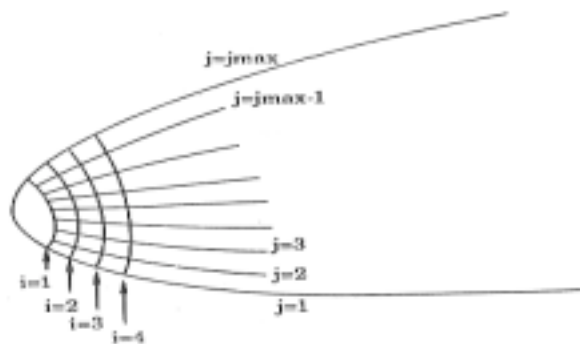


Figura 3 - Direções de marcha numérica sobre a superfície de um corpo aerodinâmico

Desta forma, para se obter tais condições iniciais, faz-se necessária a resolução de dois conjuntos de equações degeneradas, uma para o plano de simetria e outra para o ponto de estagnação.

3. Método numérico

3.1. O Método de diferenças finitas

Estudos bibliográficos sobre os métodos existentes de cálculo para escoamentos em camada limite tridimensional tem sido desenvolvidos nas últimas quatro décadas. Os métodos podem ser divididos em duas classes distintas, em função do método pelo qual as equações sejam resolvidas, seja sob a forma diferencial, seja sob a forma integral. Os métodos integrais são, do ponto de vista computacional, mais rápidos que os métodos diferenciais, uma vez que há somente duas coordenadas espaciais que intervêm. Entretanto, um certo número de relações auxiliares devem ser introduzidas para fechar o conjunto de equações diferenciais parciais. Essas relações compreendem, usualmente, a consideração de famílias de perfis de velocidade nas direções mutuamente ortogonais escolhidas mais ou menos empiricamente. A precisão de um método integral é, então, limitada pela aplicabilidade das relações empíricas consideradas para a previsão do escoamento. Contrariamente, no caso do método diferencial, nenhuma consideração é feita sob a forma dos perfis de velocidade. Por essa razão os métodos diferenciais são, potencialmente, mais gerais que os métodos integrais. Uma certa dose de empirismo é todavia introduzida pela utilização de um modelo de turbulência para o tensor de Reynolds.

No presente trabalho, o método de diferenças finitas é utilizado para a discretização das equações de camada limite tridimensional. O esquema escolhido é apresentado na seção 3.2.

3.2. Esquema de diferenças finitas de Matsuno

A partir das condições iniciais obtidas, o esquema de diferenças finitas de Matsuno é utilizado para a marcha numérica. Tal esquema consiste em uma modificação do esquema predictor-corretor de Crank-Nicolson, tendo sido originalmente proposto por Douglas e Jones (1963) para a aplicação em problemas de camada limite tridimensional. Este esquema é implícito na direção ζ , explícito na direção y , não-iterativo e possui precisão de segunda ordem. Além do que é altamente vetorizável sob o ponto de vista computacional na medida em que é independente do sentido da velocidade do escoamento transversal.

3.2.1. Estabilidade

Raetz (1957) mostrou que as equações de camada limite tridimensional possuem um caráter hiperbólico no plano $x - y$, resultando na formulação de princípio de zona de influência – zona de dependência. A influência da solução em qualquer ponto é transferida por difusão para todos os pontos em uma linha normal a superfície sólida e convectada pelas linhas de através do escoamento.

A zona de dependência determina uma quantidade mínima de dados a serem supridos; em outras palavras, a molécula de diferenças deve incluir as informações da zona de dependência. Em virtude deste princípio, os esquemas de diferenças finitas comumente utilizados para a resolução das equações de camada limite tridimensional que se utilizam de procedimentos de marcha nas direções longitudinal e transversal devem ser modificados sempre que o sinal do escoamento transversal reverte. Mais exatamente, quando a direção de qualquer linha de corrente na camada limite é oposta à direção de marcha numérica, uma modificação ao método deve ser utilizada.

Os esquemas de diferenças finitas utilizados por Shevelev (1955), Dwyer e Sanders (1974) e o esquema Box de Cebeci et al. (1977) são exemplos de esquemas que requerem modificação para a região onde o sentido da velocidade transversal é oposta ao sentido de marcha numérica. Os esquemas Zig-Zag usado por Krause et al. (1972), Zig-Zag Box usado por Cebeci et al. (1981) são exemplos de modificações usadas nesta região para os procedimentos usuais de marcha numérica.

A principal característica do esquema de Matsuno é que as derivadas com respeito a y são formadas independentemente do sentido do escoamento transversal. Portanto a molécula de diferenças finitas de Matsuno não depende do sentido da velocidade transversal.

O esquema de diferenças finitas de Matsuno é condicionalmente estável e impõe as mesmas condições de estabilidade que são estabelecidas pelo princípio de zona de dependência, ou seja:

$$\frac{u}{u_c} > 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{h_1 \Delta x v}{h_2 \Delta y u} \right| < 1.0 \quad (16)$$

3.2.2. Eficiência

O esquema de diferenças finitas de Matsuno é rápido e eficiente quando comparados com outros métodos de uso corrente. A eficiência e rapidez do esquema Box e do esquema de Matsuno pode ser diretamente comparada. O esquema Box se utiliza do método de eliminação por blocos para a resolução da matriz tridiagonal por blocos 6×6 resultante das equações de quantidade de movimento. Pelo mesmo esquema a equação da energia é transformada em uma matriz tridiagonal por blocos 2×2 . Utilizando-se o esquema de Matsuno, as equações de quantidade de movimento resultam em um sistema tridiagonal por blocos 2×2 que pode ser resolvido de forma bastante eficiente pelo algoritmo tridiagonal modificado de Davis, além do que a equação da energia é transformada em uma matriz linear tridiagonal, que pode ser então resolvida pelo algoritmo de Thomas. Outra vantagem computacional é que o esquema de Matsuno não é um processo iterativo (sendo somente um procedimento predictor-corretor) enquanto que o esquema Box é um método iterativo em virtude da linearização.

4. Resultados e discussão

4.1. Comentários iniciais

O elipsóide de revolução foi selecionado como caso teste, sendo as soluções obtidas para os casos laminar incompressível e compressível e turbulento incompressível a variados ângulos de ataque. Este corpo aerodinâmico particular foi selecionado em virtude das seguintes vantagens:

- a) Sua geometria pode ser obtida analiticamente;
- b) As condições do escoamento não-viscoso são obtidas analiticamente da teoria do escoamento potencial para qualquer ângulo de ataque e;
- c) A razoável quantidade de resultados na literatura para fins de comparação e validação.

4.2. Escoamento laminar e axissimétrico

Para o escoamento laminar e axissimétrico ao redor de um elipsóide com razão de aspecto de 0,25 (1m x 0,25m) foi gerada uma malha com 100×13 pontos sobre o mesmo. A malha em questão é mostrada na Fig. 4 A Figura 5 mostra os resultados obtidos para o coeficiente de atrito ao longo da direção longitudinal comparados com os resultados de Hirsch e Cebeci (1970). Tais resultados são obtidos para uma velocidade do escoamento não-perturbado de 1m/s e mostram boa coincidência desde o bordo de ataque até o ponto de separação.

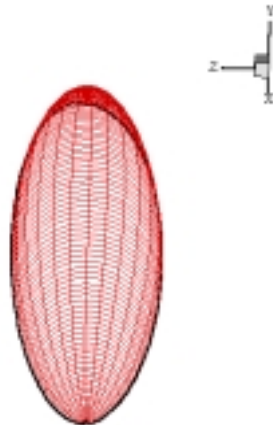


Figura 4 – Malha sobre o elipsóide de revolução

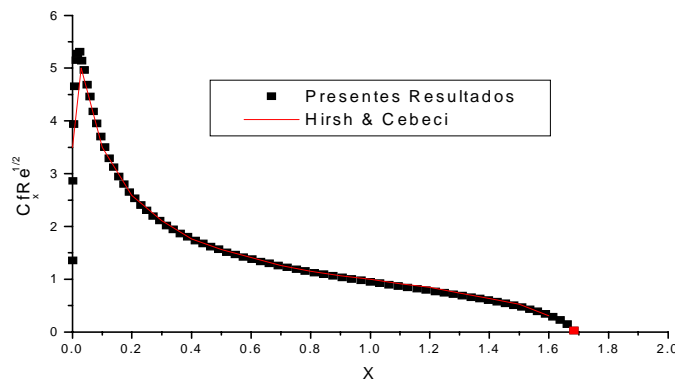


Figura 5 – Coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal

4.3. Escoamento laminar com ângulo de ataque de 6°

Escoamentos que envolvem ângulo de ataque apresentam maior dificuldade de análise no sistema de coordenadas utilizado em virtude da não coincidência entre os bordos de ataque físico e geométrico. Torna-se então necessária a utilização de um sistema de coordenadas que esteja alinhado com as linhas de corrente externas e suas ortogonais ou a identificação do bordo de ataque físico numericamente. Para o mesmo elipsóide mencionado no item anterior, as figuras 6 e 7 mostram os resultados obtidos para a espessura de deslocamento versus a coordenada azimutal devidamente adimensionalizada em duas estações longitudinais distintas, respectivamente $x = 1,2m$ e $x = 0,6m$. Além da boa coincidência com os resultados analíticos, pode-se reparar que a proximidade do ponto de separação gera um abrupto crescimento na espessura de deslocamento na região ao resguardo do vento.

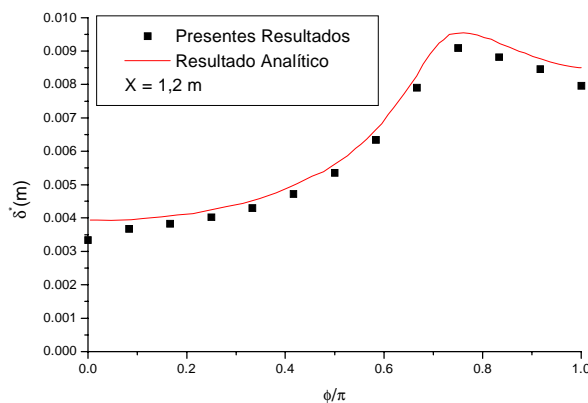


Figura 6 – Espessura de deslocamento versus a distância azimutal em $X = 1,2m$

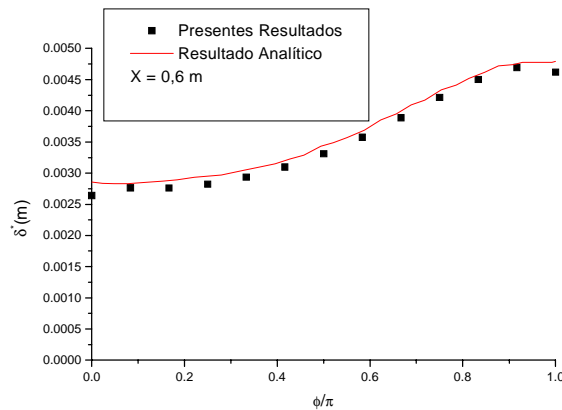


Figura 7 - Espessura de deslocamento versus a distância azimutal em $X = 0,6m$

4.4. Escoamento turbulento com ângulo de ataque de 10°

Para a simulação do escoamento turbulento sobre um elipsóide, foi considerado um ângulo de ataque de 10° com o objetivo de se comparar os resultados obtidos com dados experimentais. Pelo mesmo motivo, o elipsóide agora possui uma razão de aspecto de 0,17 (1,2m x 0,2m) e a velocidade do escoamento não perturbado é de 55m/s.

A figura 8 apresenta os resultados para o coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal para uma dada estação azimutal ($\phi = 110^\circ$). Tais resultados são obtidos sem a utilização do modelo de transição e comparados com resultados experimentais disponíveis no banco de dados europeu ERCOFTAC. A comparação evidencia a diferença entre o intervalo de transição (experimental) e o ponto de transição imposto em $x = 0,22m$ (simulação).

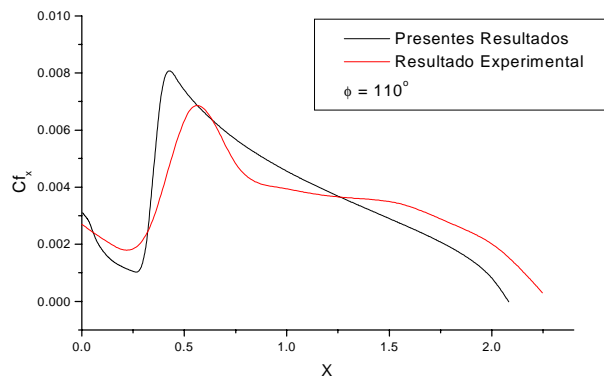


Figura 8 – Coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal em $\phi = 110^\circ$ sem a utilização do modelo de transição

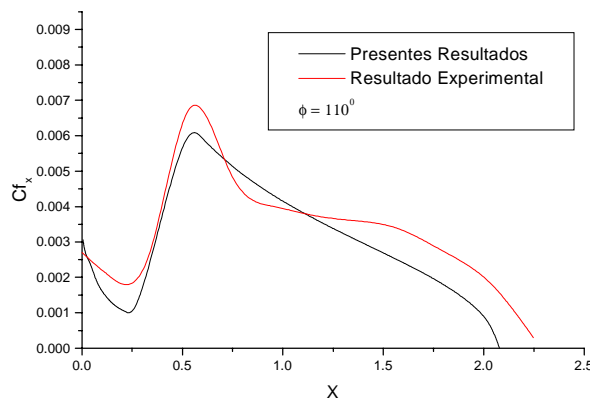


Figura 9 - Coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal em $\phi = 110^\circ$ com a utilização do modelo de transição

A figura 9 apresenta resultados para o coeficiente de atrito longitudinal versus a distância longitudinal para a mesma estação azimutal da figura 8, contudo os resultados agora apresentados são obtidos com a utilização do modelo de transição de Dhawan e Narasimha (1958), evidenciando uma significativa melhora nos resultados na região de transição.

5. Referências

- Azevedo, J. L. F., Strauss, D., Ferrari, M. A. S., 1998, "Viscous Multiblock Simulations of Axisymmetric Launch Vehicle Flows". CTA/IAE/ASE-N.
- Blottner, F. G., 1975, "Computational Techniques for Boundary Layers". AGARD Lecture Series, n. 73.
- Cebeci, T., Smith, A. M. O., 1974, "Analysis of Turbulent Boundary Layers". Academic Press, New York.
- Cebeci, T., Khattab, A. K., and Stewartson, K., 1981, "Three-Dimensional Laminar Boundary Layers and OK of Accessibility". Journal of Fluid Mechanics, v. 107, p. 57-87.
- Cebeci, T., Kaups, K., Ramsey, J., A., 1977, "A General Method for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Arbitrary Wings". NASA CR-2777.
- Cousteix, J., 1987, "Three-Dimensional Boundary Layers. Introduction to Calculation Methods". AGARD Report n. 741.
- Der, J. Jr., Raetz, G. S., 1962, "Solution of General Three-Dimensional Laminar Boundary-Layer Problems by an Exact Numerical Method". Institute of the Aerospace Sciences Paper n. 62-70.
- Dhawan, S. Narasimha, R., 1958, "Some Properties of Boundary Layer Flow During Transition from Laminar to Turbulent Motion". Journal of Fluid Mechanics, v. 3, p. 418-436.
- Douglas, J. Jr., Jones, B. F., 1963, "On predictor-Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations". J. Soc. Indust. Appl. Math., v. 11, n. 1, p. 195-204.
- Dwyer, H. A., Sanders, B. R., 1974, "A physical Optimum Difference Scheme for Three-Dimensional Boundary-Layers". Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Boulder, Colorado.
- Hirsch, R. S., Cebeci, T., 1970, "Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers with Negative Cross Flow on Bodies of Revolution". Journal of Fluid Mechanics, v. 43, p. 187-209.
- Krause, E., Hirschel, E. H., Kordulla, W., 1972, "Finite Difference Solutions for Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers". EUROMECH Colloquium 33, Berlin.
- Matsuno, K., 1981, "A Vector-Oriented Finite Difference Scheme for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Practical Wing Configurations". AIAA Paper n. 81-1020.
- Patel, V. C., Choi, D. H., 1982, "Calculation of Three-Dimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers on Bodies of Revolution at Incidence". Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Report n. 178, p. 15.14-15.23.
- Raetz, G. S., 1957, "A Method of Calculating Three-Dimensional Laminar Boundary Layers of Steady Compressible Flows". Report n. NAI-58-73 (BLC-114), Northrop Aircraft, Inc.
- Shevelev, Y. D., 1955, "Numerical Calculation of the Three-Dimensional Boundary-Layer in an Incompressible Fluid". Izv. NA SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza, v.1, n. 5, p. 112-117.
- Tassa, A., Atta, E. H., Lemmerman, L. A., 1982, "A New Three-Dimensional Boundary Layer Calculation Method". AIAA Paper n. 82-0224.
- Van Den Berg, B., Elsenaar, A., 1972, "Measurements in a Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Under Infinite Swept Wing Conditions". EUROMECH Colloquium 33, Berlin.
- Wang, K. C., 1977, "Three-Dimensional Boundary Layer Near the Plane of Symmetry of a Spheroid at Incidence". Journal of Fluid Mechanics, v. 43, p. 220-236.
- Wie, Y. S., Harris, J. E., 1991, "Numerical Solution of the Boundary-Layer Equations for a General Aviation Fuselage". J. Aircraft v. 28, n. 12.

6. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

THREE-DIMENSIONAL, COMPRESSIBLE AND TURBULENT BOUNDARY-LAYER MODELING.

Mauro Jorge Pisani dos Santos

Severino Sombra University – Av. Exp. Oswaldo A. Ramos s/nº - Centro – Vassouras – RJ
mauropisani@uss.br

José Carlos Cesar Amorim

Militar Institute of Engineering – Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha – Rio de Janeiro – RJ
jcamorim@ime.eb.br

Abstract. *The present work consists on a numerical modeling of a three-dimensional, compressible, laminar and turbulent boundary layer, in which the governing equations are solved using the Matsuno finite difference scheme. This scheme is second-order accurate, efficient and characterized by the independence of the crossflow velocity direction. The turbulence model used is the Cebeci-Smith algebraic model of mixture length adjusted to the nonorthogonal coordinate system. The results obtained are checked for the prolate spheroid for several incidences with other numerical calculations and with experiment when available. The inviscid parameters are analytically obtained from the potential flow theory and the grids also analytically generated in the nonorthogonal coordinate system.*

Keywords. *Boundary-Layer, Aerodynamics, Turbulence.*

ANÁLISE EXPERIMENTAL DO CAMPO DE TEMPERATURA NO INTERIOR DO CAPACITOR TÉRMICO

Julio Cesar Costa Campos

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

e-mail: jcampos@uber.com.br

Milton Biage

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

e-mail: mbiage@mecanica.ufu.br

Resumo. O presente trabalho consiste num estudo experimental, realizado com a finalidade de prever o comportamento dinâmico de um escoamento no interior do capacitor térmico. Utilizou-se um sistema de amplificação de microtermopares, com compensação automática da temperatura da junta fria para realização de medidas de temperaturas em vários pontos do capacitor. Este estudo foi realizado para três números de Reynolds, na direção axial, azimutal e radial. Com o objetivo de estudar a propagação de pulsos de temperatura ao longo do duto, construiu-se um gerador de pulso controlado por computador, que permite introduzir pulso com amplitudes e frequências diferentes. Na análise do escoamento foram utilizadas as funções estatísticas, tais como: Autocorrelação, Correlação Cruzada e o Espectro de Energia. Estas medidas foram obtidas utilizando-se microtermopares tipo T. Os resultados obtidos são consistentes de acordo com a literatura.

Palavra-chave. *Escoamento Turbulento, Funções Estatísticas, Temperatura.*

1. Introdução

O Capacitor Térmico é caracterizado, geometricamente, por um bojo cilíndrico ou retangular, inserido em uma instalação térmica, de forma a armazenar massa que servirá como elemento de amortecimento das flutuações de temperatura.

O capacitor térmico é utilizado em processos industriais onde se tem flutuação indesejável de temperatura, como por exemplo: em caldeiras, em fornos, em câmaras de umidificação, de secagem, de combustão e de descarga em túneis de vento supersônicos, ou mesmo em ambientes onde se deseja temperaturas absolutamente constantes, como em laboratórios de controle dados.

A utilização de um capacitor térmico provoca o amortecimento das flutuações devido ao efeito da mistura da massa que entra no cilindro com a massa já existente no mesmo. Nas regiões de recirculação resultam grandes gradientes de velocidade, e conseqüentemente, uma alta intensidade turbulenta. O processo físico no interior do capacitor térmico é caracterizado por um jato em expansão livre. As bordas do jato, da entrada até aproximadamente o centro do capacitor, apresentam vórtices pares. Após a região central, o escoamento divide-se em duas partes: uma zona envolvendo a linha do centro do capacitor, cujo escoamento contrai-se gradualmente até a saída do fluido no capacitor e uma zona secundária, situada próxima da parede, onde ocorre uma recirculação do fluido que realimenta o processo de mistura ao longo do corpo do jato livre Lesieur (1986). A representação destas zonas podem ser visualizadas na Fig.(1).

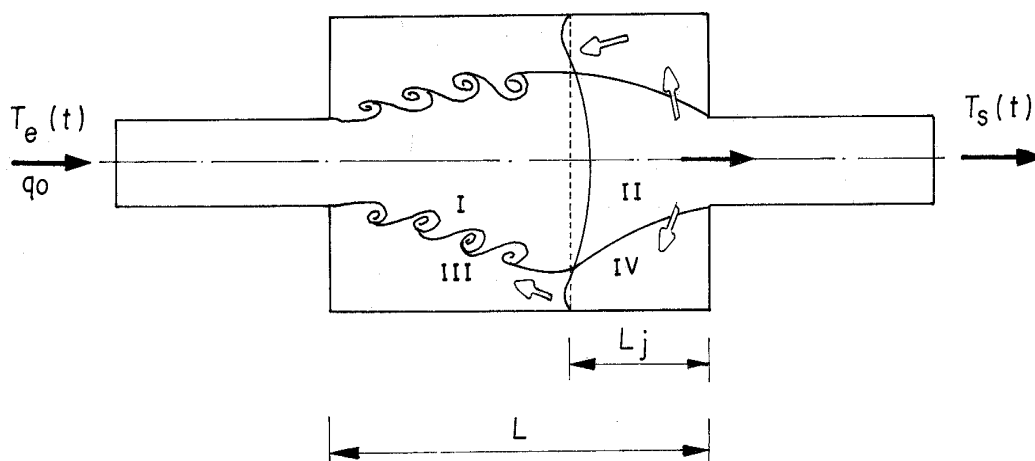


Figura 1. Comportamento físico de um jato em expansão e contração.

Escoamentos no interior de um capacitor é caracterizado por uma série de fenômenos que não são ainda totalmente compreendidos. A formação da grande estrutura coerente, presente no escoamento e a evolução destes vórtices é caracterizadas pelos mecanismos de instabilidade espaciais e temporais. A compreensão dos mecanismos de formação da estrutura deste escoamento pode fornecer várias informações que permitem compreender os aspectos de formação da turbulência tridimensional, permitindo a calibração de modelos turbulentos e verificar o comportamento de métodos numéricos na simulação deste problema. Por outro lado, também, é possível utilizar as informações adquiridas em experimentos para otimizar os projetos industriais de capacitores.

Normalmente, o escoamento no interior de um capacitor térmico é tridimensional, por este fato, procurou-se efetuar um conjunto de medidas de flutuações de temperaturas em vários planos e ao longo de todo o capacitor, de forma que permitam analisar os aspectos tridimensionais da turbulência. Contudo, devido às limitações experimentais estudou-se escoamentos, cujos números de Reynolds são compreendidos no intervalo $12000 \leq Re \leq 134000$, os quais possibilitaram estabelecer importantes conclusões sobre as características da turbulência neste escoamento.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo experimental de um escoamento turbulento em um capacitor térmico, analisando o comportamento das flutuações de temperatura, utilizando funções estatísticas. As principais funções estatísticas a serem utilizadas como ferramentas neste estudo são: autocorrelação, intercorrelação e o espectro de potência.

Autocorrelação e intercorrelação permitem verificar o grau de similaridade das oscilações em vários pontos do escoamento, possibilitando caracterizar o grau de dissipação destas no espaço. Adicionalmente, a intercorrelação permite obter a velocidade de propagação dos fenômenos oscilantes.

O espectro de potência representa decomposições de funções temporais não lineares, no espaço de Fourier, contendo diferentes modos frequências, dentro de uma banda, cuja largura depende do grau de determinismo do fenômeno. O espectro de potência fornece a distribuição de energia média das oscilações, com suas frequências características Arpacı e Larsen (1984). Contudo, a distribuição do espectro de potência, caracteriza fisicamente, a maneira pela qual oscilações de diferentes frequências trocam energia entre elas. A troca de energia entre oscilações com diferentes escalas constitui uma das análises que será apresentada neste estudo, procurando evidenciar os aspectos da turbulência, e em particular, verificar tanto o processo de alimentação de energia das pequenas escalas para as grandes, como os mecanismos de dissipação energia pelas pequenas escalas. Adicionalmente, pode-se dizer que o espectro de potência constitui um dos diagnósticos de maior sensibilidade para caracterizar o comportamento dinâmico de escoamentos. Historicamente, a análise das características do espectro de potência tem sido objeto de grande atenção, pois é possível extrair informações sobre a inclinação do espectro, o que permite estabelecer teorias e modelos de turbulência Miller e Dimotakis (1996).

2. Procedimento Experimental

Neste estudo foi construído um aparato experimental que permitissem analisar o comportamento dinâmico de um escoamento no interior do capacitor térmico.

Este dispositivo experimental é composto de uma seção de testes que constitui de um cilindro de acrílico com 200mm de diâmetro e 510mm de comprimento. Uma seção de aquecimento acoplada à seção de testes por meio de uma tubulação de ferro de 42.30mm de diâmetro e 530mm de comprimento. Um bocal de bronze com coeficiente de descarga igual a 0.98 é utilizado para determinar a vazão volumétrica através do capacitor.

O fluxo através do sistema experimental é introduzido, utilizando-se um ventilador centrífugo de alta potência, com 12.5 cv e 3510 rpm. A descarga do escoamento através do capacitor é controlada por uma válvula controladora de vazão que permite uma variação gradual, possibilitando-se estabelecer escoamentos com variados números de Reynolds.

Uma haste é introduzida no interior da seção de testes que permite mover um conjunto de microtermopares ou sondas anemométricas a fio quente, ao longo das direções axiais, radiais e azimutais, sem, entretanto, perturbar o escoamento, pois, as medidas são realizadas à jusante da haste. A Fig. (2) mostra detalhadamente o sistema experimental (todas as medidas estão em mm).

Para o aquecimento do fluido foi utilizado um sistema de resistências em forma espiraladas, distribuídas horizontalmente na tubulação de alimentação do escoamento e preenchendo todo o corpo cilíndrico da seção de aquecimento. As resistências são aquecidas, variando a tensão de alimentação dos resistores de aquecimento do ar, por meio de pulsos digitais, com amplitudes e frequências definidas em programas computacionais. Estes pulsos são convertidos em pulsos analógicos, utilizando conversores D/A, o qual é amplificado através de um circuito TRIAC. A construção deste sistema possibilita introduzir aquecimentos flutuantes ou constantes na entrada do capacitor, com intuito de verificar-se o comportamento da distribuição espacial de temperatura, em vários números de Reynolds.

No interior do capacitor térmico encontra-se localizado um suporte de microtermopares, onde estão conectados nove microtermopares do tipo T (cobre-constantan) com diâmetros de 0.1mm, os quais permitem medir oscilações características do escoamento de até 1 kHz. Esse conjunto de microtermopares permite a realização de medidas de temperaturas em várias seções ao longo do capacitor térmico. A Fig. (3), mostra com detalhes, a distribuição dos microtermopares ao longo do raio. Esse suporte de microtermopares permite movimentar o sistema ao longo do eixo axial do cilindro, posicionando o conjunto de microtermopares em qualquer posição da seção de teste. Além disso, o suporte também permite um movimento giratório, a fim de realizar medidas em várias posições azimutais, possibilitando verificar os efeitos de estratificação e observar as características tridimensionais do escoamento.

As tomadas de temperatura foram feitas através de um sistema de amplificação de microtermopares, desenvolvido

no Laboratório de Dinâmica dos Fluidos, LDM, da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, o qual constitui parte do programa de pesquisa O estudo do sinal de microtermopares foi realizado por meio de funções estatísticas como espectro e correlações.

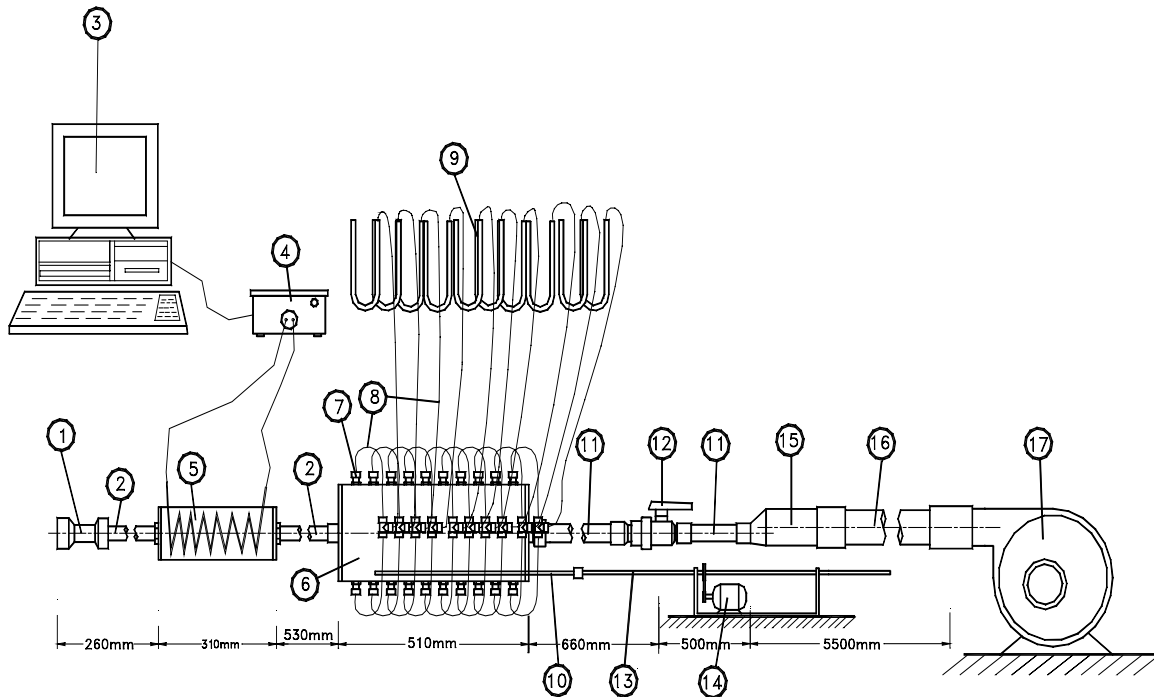


Figura 2. Representação do sistema, (1) Bocal de bronze; (2) Tubulação de ferro; (3) Computador Pentium 120MHz; (4) Gerador de pulso; (5) Cilindro recheado com resistências; (6) Capacitor térmico (secção de testes); (7) Tomadas de pressão na parte superior; (8) Mangueiras conectando a tomada de pressão superior com a inferior; (9) Manômetros tipo U; (10) Deslocador de sonda anemométrica a fio quente, com movimentos lineares e azimutais, controlados por motor de passo; (11) Tubulação de PVC; (12) Válvula de controle; (13) Fuso de deslocamento de sonda; (14) Motor de passo; (15) Tubulação de PVC de 3 polegadas; (16) Mangueira flexível de 4 polegadas; (17) Ventilador de 12.5 cv, 3510 rpm, 34A.

As flutuações de temperatura ao longo do tempo foram obtidas com uma frequência de amostragem de 1300 Hz, num total de 65536 pontos, o que corresponde um tempo total de aquisição de 50 segundos e uma frequência de excitação de 0,14 Hz. Os experimentos foram realizados para dois números de Reynolds, 12000 e 134000, os quais correspondem à menor e a maior velocidade permitida pelo sistema experimental. As propriedades físicas do ar foram obtidas de acordo com Holman (1994).

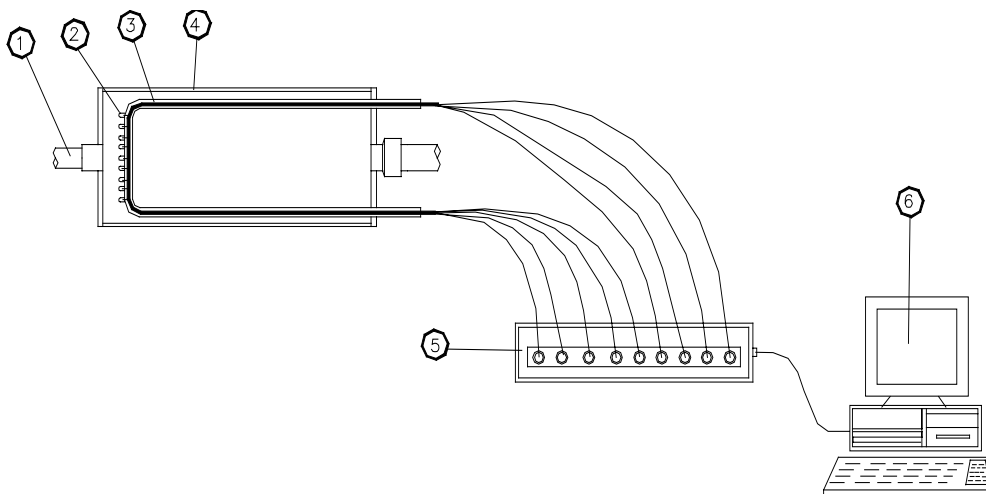


Figura 3. Representação da montagem e aquisição de temperatura no cilindro, (1) Tubulação de ferro; (2) Microtermopares tipo T (cobre-constantan) separados de 19,44 mm entre si; (3) Suporte de micro-termopares; (4) Cilindro (capacitor térmico); (5) Placa de amplificação LDM/97; (6) Microcomputador Pentium.

3. Resultados

Neste estudo pretendeu-se verificar o grau de amortecimento das flutuações de temperatura no capacitor térmico em função dos níveis de flutuações de temperatura do escoamento na entrada, caracterizados por diferentes números de Reynolds. Portanto, utilizou-se dois números de Reynolds, sendo um correspondente a uma baixa intensidade da turbulência, $Re=12000$, outro correspondente a uma elevada intensidade da turbulência, $Re=134000$.

O número de Reynolds utilizado neste estudo foi definido da seguinte forma:

$$Re = \frac{\rho Q D_2}{\mu A_2} \quad (1)$$

onde ρ é a densidade do ar, Q a vazão volumétrica, D_2 diâmetro da secção do duto de entrada do capacitor térmico igual a 42,30 mm, μ a viscosidade dinâmica do ar e A_2 a área da secção transversal circular do duto de entrada, cujo o diâmetro é 42,30 [mm].

Para cada número de Reynolds introduziu-se, através de um sistema de aquecimento um nível de flutuação térmica de baixa frequência, igual a 0,14 Hz. Utilizaram-se níveis de flutuações térmicas de baixa frequência pelo fato de os grandes vórtices térmicos serem predominantemente caracterizados pelas baixas frequências. Então, como há interesse no estudo dos grandes vórtices e suas trocas de energias no interior do capacitor térmico, aplicou-se sinal de baixa frequência. Adicionalmente, é importante ressaltar que a excitação do sistema de aquecimento com altas frequências é bastante difícil devido ao fato do tempo de resposta das trocas de calor entre a resistência e o escoamento do ar ser baixa, o que provoca a filtragem das excitações de alta frequência.

Para cada número de Reynolds, verificaram-se as características dos sinais dos termopares introduzidos na seção de aquecimento. Para tanto, obtiveram-se sinais discretos no tempo para a temperatura, respectivamente, na entrada e saída do capacitor térmico para $Re=12000$ e $Re=134000$.

As Figs. (4.a), (4.b), (4.c) e (4.d) representam, respectivamente, os sinais de temperatura na entrada e na saída do capacitor térmico para $Re=12000$ e $Re=134000$. Verifica-se nessas figuras que os períodos dos sinais dos termopares adquiridos na entrada e saída do capacitor térmico são iguais a 7 segundos, o que equivale a uma frequência de 0,14 Hz, caracterizando sinal de baixa frequência, introduzido através do sistema de aquecimento na entrada do sistema. Observa-se, ao comparar as Figs (4.a) e (4.b), que ocorre tanto um amortecimento na amplitude das flutuações, como um amortecimento na amplitude da temperatura média do sinal do termopar localizado na saída do capacitor térmico, com relação ao sinal de entrada. O amortecimento das flutuações de temperatura ocorrida entre a entrada e a saída do capacitor térmico é proporcionado pela redução do número de Reynolds do escoamento no capacitor. Ao diminuir o número de Reynolds local, conseqüentemente, aumentam os efeitos viscosos que amortecem os níveis de flutuações térmicas do escoamento. Contudo, a pequena diminuição na temperatura média do escoamento na saída do capacitor com relação à entrada do capacitor ocorre devido à perda de calor do meio para o ambiente externo ao sistema experimental.

Esse aspecto de diminuição da temperatura média do escoamento ao longo do capacitor não prejudica a qualidade do estudo, pois o que se pretende no trabalho é caracterizar o amortecimento das flutuações de temperatura em função do número de Reynolds. De um modo geral constatou-se, como mostram as Figs. (4.a), (4.b), (4.c) e (4.d), que, independente do número de Reynolds, o capacitor térmico funciona como um amortecedor de flutuações e da temperatura média.

As temperaturas médias na entrada e saída do capacitor foram calculadas, obtendo-se: para $Re=12000$ $\bar{T}_E = 75^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$ e $\bar{T}_S = 64^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$, para $Re=134000$ $\bar{T}_E = 40,49^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$ e $\bar{T}_S = 37,12^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$. Percebe-se, através desses valores, que para baixos números de Reynolds a redução da temperatura média é mais acentuada, pois o fluido encontra-se mais aquecido, o que facilita a troca de calor com o meio externo, enquanto que para elevados números de Reynolds o amortecimento é menos acentuado, pois o fluido encontra-se menos aquecido, diminuindo o efeito de troca de calor com o meio externo.

A representação esquemática da aquisição de temperatura numa dada secção transversal do capacitor térmico, ao longo da direção azimutal, pode ser vista na Fig.(5). Nessa figura encontra-se detalhada a distribuição dos termopares na direção radial adimensional, r/D , os quais foram posicionados de forma igualmente espaçadas, distanciados de 19,44 mm.

De forma semelhante, a Fig. (6) mostra representação esquemática da aquisição de temperatura numa dada secção, num plano do capacitor térmico com uma inclinação angular fixada numa das posições angulares citadas acima, com deslocamentos axiais ao longo da direção axial do capacitor térmico. Nessa Figura, a distribuição de termopares na direção radial é a mesma descrita no parágrafo anterior, ou seja, os termopares foram posicionados na direção radial adimensional, r/D , de forma igualmente espaçadas, distanciados de 19,44 mm entre si. Também são evidenciadas na Fig. (6) as posições onde foram tomados os conjuntos de medidas de temperaturas instantâneas na direção axial, z/L .

Nos diagramas esquemáticos mostrados nas Figs. (5) e (6), os termopares foram enumerados a partir do centro da sonda (posição denominada de r_0), em direção à parede do capacitor térmico. O posicionamento dos termopares na direção radial, situados à direita de r_0 , foram denominados de r_1, r_2, r_3, \dots , e os posicionamentos dos termopares na direção radial, situados à esquerda, foram denominados de $r-1, r-2, r-3, \dots$.

As medidas de temperatura instantâneas, em várias posições do capacitor térmico, possibilitaram calcular as correlações cruzadas de temperaturas entre várias posições azimutais, radiais e axiais, assim como os espectros de potência, para $Re=12000$ e $Re=134000$. Essas propriedades estatísticas possibilitaram verificar as características tridimensionais de um escoamento turbulento no interior do capacitor.

A análise da correlação cruzada de temperatura é importante, pois através dela é possível verificar o grau de similaridade das oscilações e a propagação destas em vários pontos do escoamento, possibilitando caracterizar a intensidade de dissipação das flutuações no espaço.

A função coeficiente de correlação cruzada, C_{xy} , utilizada nesta análise foi definida abaixo:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}} \tag{2}$$

Onde $R_{xy}(\tau)$ é a função correlação cruzada, R_{xx} and R_{yy} são respectivamente, a autocorrelação de duas amostras diferentes, para $\tau = 0$.

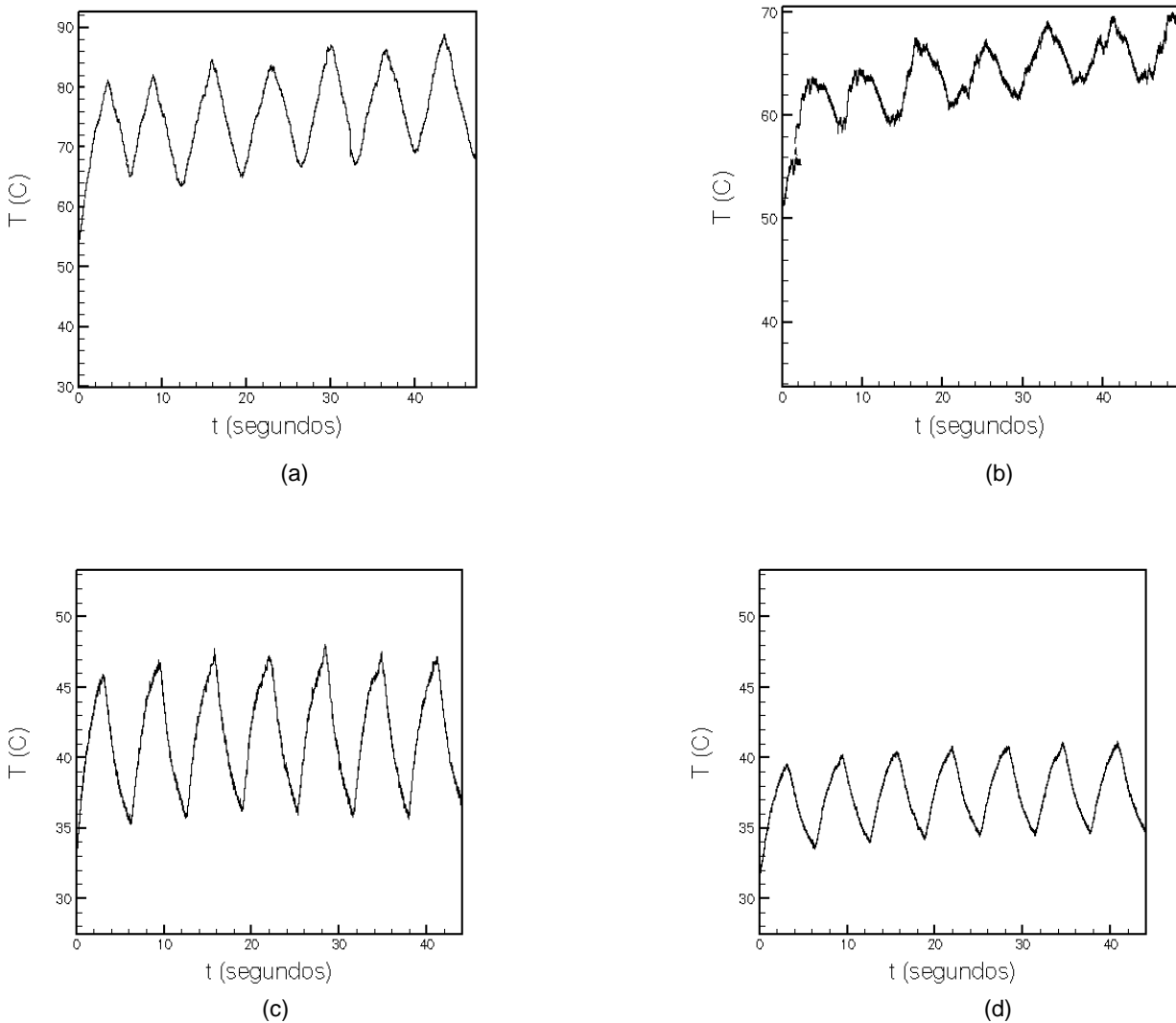


Figura 4. Representação do sinal do termopar para $Re=12000$ com uma intensidade de flutuação de temperatura na entrada e saída do capacitor térmico, respectivamente, 0,1811 e 0,1220 e $Re=134000$ com uma intensidade de flutuação de temperatura na entrada e saída do capacitor térmico, respectivamente, 0,1292 e 0,0652; (a) Temperatura na entrada para $Re=12000$; (b) Temperatura na saída para $Re=12000$; (c) Temperatura na entrada para $Re=134000$; (d) Temperatura na saída para $Re=134000$.

A função coeficiente de correlação cruzada, definida na Eq. (2), evidencia a preservação da similaridade no espaço e no tempo entre os sinais adquiridos em duas posições diferentes, nas direções axiais, radiais e azimutais. Quando um sinal é completamente determinístico e se propaga em um meio pouco dissipativo, a tendência é que haja uma grande

similaridade entre os sinais adquiridos em dois pontos distintos no espaço. O grau de similaridade no tempo é dado na função coeficiente de correlação cruzada, verificando-se os valores relativos do pico principal e dos picos secundários dessa função, os quais podem assumir valores entre -1 e 1. Se as relações entre o pico principal e os demais picos secundários assumem valores iguais a 1, os sinais adquiridos nas duas posições distintas são completamente similares. Para valores dessas relações iguais a -1, isso indica que os sinais são completamente similares em sentidos opostos, ou seja, corresponde a uma correlação em antífase. Caso contrário, se os valores das relações do pico principal e os demais picos secundários são iguais a zero, os sinais não apresentam qualquer correlação temporal, sendo completamente distintos.

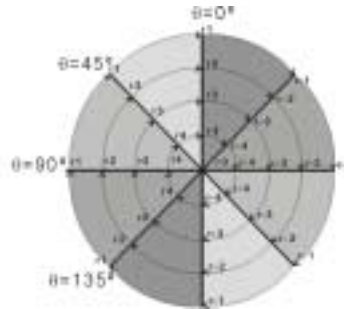


Figura 5. Representação da inclinação da sonda de termopares

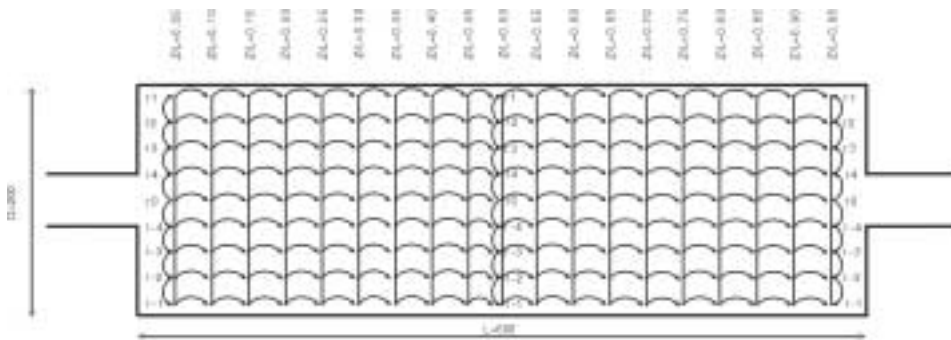


Figura 6. Representação da distribuição de termopares ao longo da direção axial e radial do capacitor térmico.

Considerando essas informações apresentadas pela função coeficiente de correlação cruzada, pode-se ter uma idéia clara da dissipação de flutuações de temperaturas no escoamento, ao longo do capacitor térmico. A diferença entre o valor do pico principal e o valor do pico secundário caracteriza o grau de dissipação do fenômeno flutuante no interior do capacitor.

A Fig. (7) evidencia o comportamento das correlações cruzadas de temperatura na direção axial do escoamento, para $Re=12000$ e $Re=134000$, respectivamente, no plano horizontal ($\theta=0^\circ$) e no plano vertical ($\theta=90^\circ$). Essas figuras foram apresentadas em posições r/D fixas, representando as correlações cruzadas entre dois pontos adjacentes, distanciados entre si de 25 mm, ao longo da direção axial (conforme ilustrado na Fig.(6)). Cada ponto da correlação cruzada foi situado no gráfico, num ponto intermediário entre os dois pontos intercorrelacionados. Assim, as correlações cruzadas ao longo do tempo de atraso, para todos os pontos intercorrelacionados, geram uma superfície, a qual é representada em cada uma das Figs. (7).

Portanto, a Fig.(7) mostra o comportamento das funções coeficiente de correlação cruzada para um conjunto de amostras de flutuações temporais de temperatura, intercorrelacionando os pontos adjacentes, ao longo da direção axial, $z/L=0.05$ a $z/L=0.95$.

No cálculo da função coeficiente de correlação cruzada, C_{xy} , na direção axial, a Eq. (2) é reescrita da seguinte forma::

$$C_{xy} = \frac{R_{x_i x_{i+1}}(\tau)}{\sqrt{R_{x_i x_i}(0) R_{x_{i+1} x_{i+1}}(0)}} \tag{3}$$

Onde $i=0,1,\dots,18$, caracterizando a posição do termopar na direção axial; $R_{x_i x_{i+1}}(\tau)$ é a correlação cruzada,

$R_{x_i x_i}(0)$ e $R_{x_{i+1} x_{i+1}}(0)$ são, respectivamente, a auto-correlação do sinal flutuante da temperatura na posição i

com um retardamento zero e auto-correlação na posição $i+1$, também com retardamento zero.

As Figs. (7.a) a (7.c), mostram o comportamento das funções coeficiente de correlação cruzada na direção axial para $Re=12000$, no plano horizontal, $\theta=0^\circ$. De uma forma geral, observa-se nessa figura que ocorre um forte amortecimento das flutuações de temperatura ao longo do tempo, em qualquer posição fixa, isto é, em qualquer valor de r/D . Observa-se de forma sistemática nas Figs. (7.a) a (7.c), correspondentes a valores de r/D diferentes, que não se verifica a presença de nenhum pico secundário nas correlações cruzadas, o que caracteriza um forte amortecimento das flutuações de temperatura, de forma quase homogênea, ao longo de todo o capacitor. Essa conclusão é extraída, observando-se que o pico principal apresenta um elevado coeficiente de correlação cruzada, $C_{xy} \approx 1$, o que evidencia a presença de uma mesma componente periódica com um certo atraso nos sinais adquiridos em posições diferentes. Por outro lado, como não se verifica a presença de picos secundários com a evolução do retardamento, τ , constata-se que não há a preservação da similaridade ao longo do espaço, para longos períodos de atraso. Deve salientar-se que as flutuações de temperaturas introduzidas neste estudo com $Re=12000$, em $\theta=0^\circ$, apresentaram as mesmas frequências de oscilações que nos estudos para $Re=134000$, em $\theta=0^\circ$, o qual apresentou comportamento diferente do caso de $Re=12000$, como pode ser verificado nas Figs.(7.d), (7.e) e (7.f). Esse fato é compreensível se considerar que, em baixo número de Reynolds, o efeito dissipativo do escoamento é muito maior, amortecendo com maior intensidade as oscilações presentes no escoamento, tanto de velocidade como de temperatura, pois esses campos são totalmente acoplados.

Adicionalmente, se comparar a Fig. (7.a), (7.b) e (7.c) com a Fig.(7.d), (7.e) e (7.f), respectivamente, para $Re=12000$ e $Re=134000$, em $\theta=0^\circ$, observa-se uma clara mudança no comportamento da estrutura térmica do escoamento quando o número de Reynolds aumenta. Como já descrito na Fig.(7.a), (7.b) e (7.c) correspondente a $Re=12000$, não se observa qualquer preservação de similaridade das flutuações térmicas no espaço, contudo, na Fig.(7.d), (7.e) e (7.f) correspondente a $Re=134000$, observa-se claramente a presença de picos secundários nas correlações cruzadas para os sinais adquiridos próximo à entrada e à saída do capacitor. Nas Figs. (7.d) a (7.f), de forma semelhante ao caso analisado para $Re=12000$, o coeficiente de correlação cruzada no pico principal é aproximadamente 1, o que indica a presença de uma mesma componente periódica com um certo atraso nos sinais adquiridos em posições diferentes. Entretanto, quando se observa a evolução da correlação cruzada ao longo da direção axial, constata-se que, nas regiões próximas à entrada e à saída do capacitor, os sinais de flutuações de temperatura mantêm um certo grau de similaridade espacial, caracterizado pela presença de picos secundários nessas regiões do capacitor, conforme Figs.(7.d) a (7.f). Contudo, esses picos secundários diminuem de forma significativa na região de entrada do capacitor, quando se desloca ao longo do raio, em direção à parede do capacitor, como mostrado nas Figs.(7.e) e (7.f).

A coerência espacial do sinal na região próxima à parede do capacitor não é afetada na região de saída do capacitor, conforme evidenciado nas Figs. (7.e) e (7.f).

Pode-se afirmar que nas regiões do capacitor onde se verifica um certo grau de similaridade do sinal, os picos secundários apresentam valores do coeficiente de correlação cruzada, variando num intervalo de $0,3 \leq C_{xy} \leq 0,7$, o que evidencia a preservação espacial do sinal, entre dois pontos distanciados de 25 mm, são da ordem de 30% a 70%, dependendo da posição radial fixa, r/D , sobre a qual foi determinada a correlação cruzada na direção axial.

Na análise apresentada no parágrafo anterior verifica-se que na região central do capacitor as correlações cruzadas na direção axial apresentam um baixo coeficiente de correlação, onde praticamente não se constata qualquer presença de picos secundários, caracterizando uma região de alta dissipação térmica, pois a velocidade média do escoamento é menor que as velocidades médias na entrada e na saída desse. Na entrada do capacitor o escoamento de fluido encontra-se em expansão, ou seja, a velocidade diminui, tornando-se menor na região central do capacitor. Na região de saída do capacitor, o escoamento encontra-se em contração, ou seja, o fluido aumenta de velocidade. Portanto, conclui-se que o número de Reynolds local atinge o menor valor na região central do capacitor e, conseqüentemente, o escoamento nessa região é mais dissipativo.

Em conclusão, na região central do capacitor o escoamento é de baixa velocidade, isto é, mais baixa que na entrada e na saída do capacitor, com um caráter altamente dissipativo, o que praticamente elimina a preservação espacial das flutuações térmicas.

De maneira geral, ao comparar as Figs.(7) e (8), respectivamente, para $Re=12000$ e $Re=134000$, em $\theta=0^\circ$, observa-se uma significativa diferença de comportamento da estrutura térmica do escoamento quando o número de Reynolds aumenta. Observa-se na Fig.(8) que as flutuações de temperatura se correlacionam por longos intervalos de tempo, conforme caracterizado pela relação entre os coeficientes de correlações dos picos secundários com o pico principal, a qual se mantém dentro de um intervalo variando de 0,5 próximo à parede do capacitor até 1 na região central do capacitor. Isso evidencia que as flutuações de temperatura apresentam uma forte similaridade ao longo do tempo e no espaço, o que indica que essas flutuações se preservam quando o tempo transcorre, indicando um grau de determinismo do fenômeno. Isso caracteriza a existência de fenômenos de grandes escalas no escoamento, características das flutuações de temperaturas introduzidas no escoamento, conforme explicado anteriormente.

A análise espectral no estudo de um escoamento turbulento no interior do capacitor térmico constitui em caracterizar, através de uma evidencia experimental, que a transferência de energia ocorre das grandes escalas para as pequenas escalas. Portanto, pretende-se analisar o espectro de energia no interior do capacitor térmico para $Re=12000$ e $Re=134000$ nos planos 0° . A função espectro de energia, $G_{xx}(f)$, utilizada nessa análise, foi escrita da seguinte forma:

$$\hat{G}_{xx}(f_k) = \frac{2}{n_d N_m \Delta t} \sum_{i=1}^{n_d} |X_i|^2, \text{ com } k = 0, 1, \dots, \frac{N_m}{2} \quad (4)$$

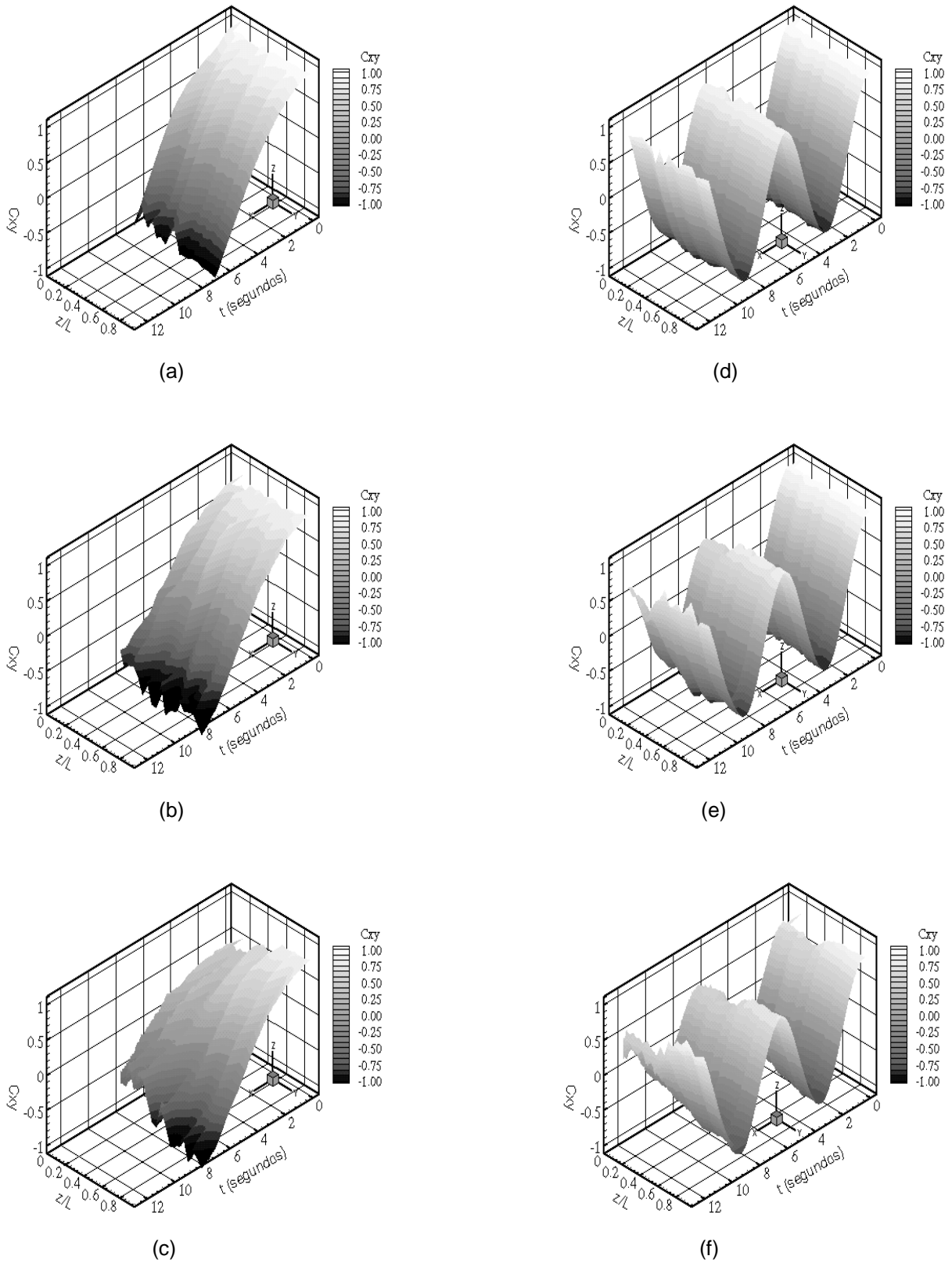


Figura 7. Representação do coeficiente de correlação cruzada na direção axial, no plano horizontal, $\theta=0^\circ$, para $Re=12000$. (a) $r/D= 0,01$ para $Re=12000$; (b) $r/D= 0,39$ para $Re=12000$; (c) $r/D= -0,39$ para $Re=12000$. (d) $r/D= 0,01$ para $Re=134000$; (e) $r/D= 0,39$ para $Re=134000$; (f) $r/D= -0,39$ para $Re=134000$.

Onde N_m é o número de pontos que compõe a amostra, n_d é um subconjunto e X_i é a transformada de Fourier.

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad \text{e} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5),(6)}$$

Onde λ é o comprimento de onda, f a frequência e K o número de onda.

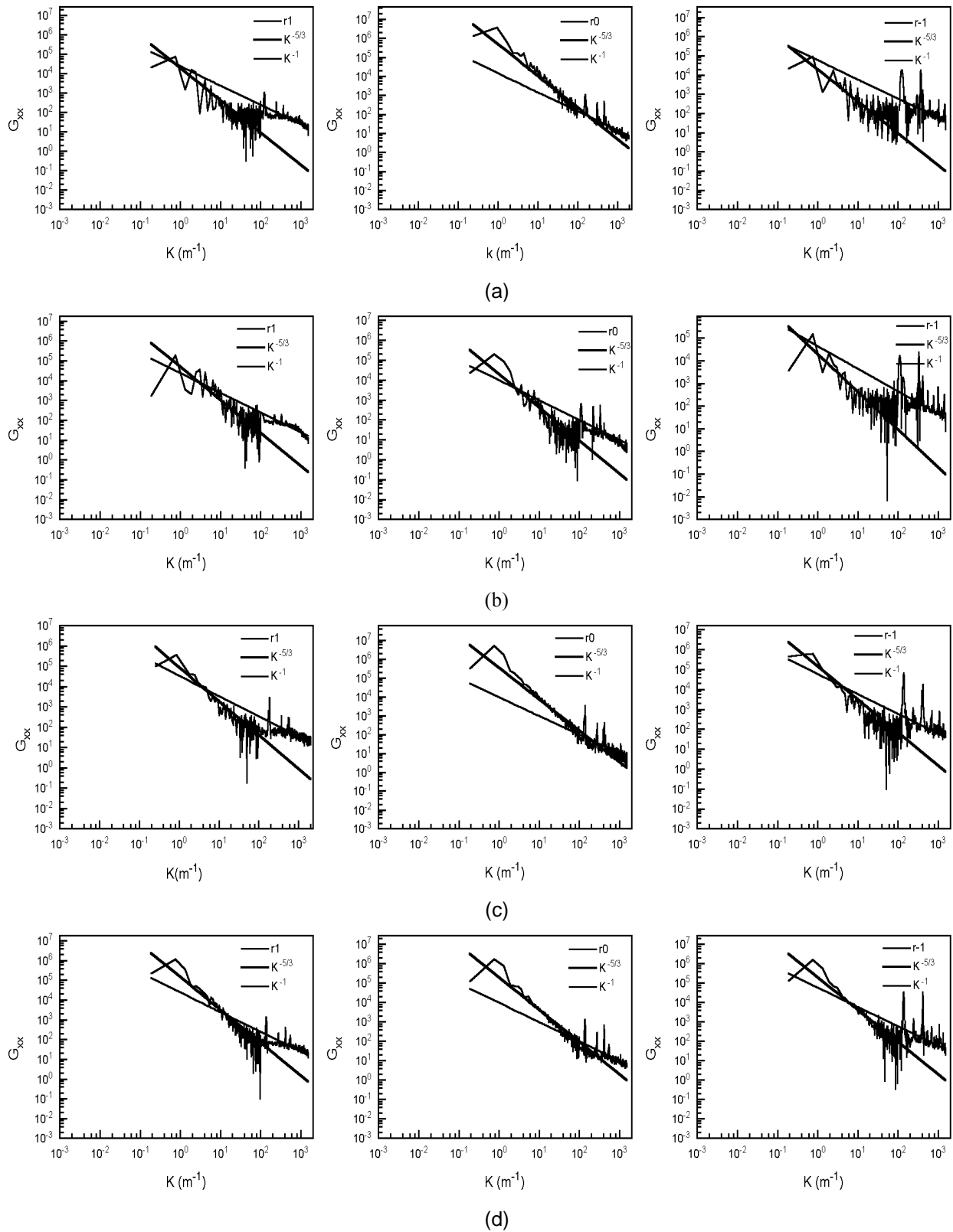


Figura 8. Representação do espectro de energia no plano 0° . (a) $z/L=0.05$ para $Re=12000$, (b) $z/L=0.95$, para $Re=12000$, (c) $z/L=0.05$ para $Re=134000$, (d) $z/L=0.95$ para $Re=134000$

Contudo, essa definição não fornece uma informação física do fenômeno. Com essa definição do espectro de energia, cujo significado físico não é evidenciado de forma clara, não se consegue obter conclusões viáveis utilizando o espectro de energia a respeito do escoamento. Historicamente, a análise das características do espectro de energia tem sido objeto de grande atenção, pois é possível extrair informações sobre a inclinação do espectro, o que permite estabelecer modelos de turbulência Miller e Dimotakis (1996).

A partir das considerações apresentadas no parágrafo anterior, pode-se observar na Fig.(8) para $Re=12000$ e $Re=134000$, no plano 0° , que a estrutura do escoamento obedece a uma lei de potência para a sub-região inercial no espectro de energia, $k^{-5/3}$, com uma inclinação de $-5/3$, independente do número de Reynolds e da posição espacial, na qual os dados foram adquiridos. Essa lei é conhecida como lei de Kolmogorov, segundo Hinze (1975), o qual caracteriza uma estrutura de escoamento turbulento, tipicamente, tridimensional. Conforme Saddoughi e Veeravalli (1994), a inclinação de $-5/3$ é possível, somente para escoamentos com valores elevados do número de Reynolds.

É possível verificar, também na Fig.(8), no plano 0° , um pico de número de onda bem definido, caracterizando as oscilações térmicas introduzidas no escoamento, conforme descrito anteriormente. Observa-se nessa figura a presença de um pico no espectro de energia, característico das oscilações introduzidas, localizado em $K=0,86$, onde K é o número de onda, o qual fornece uma frequência de aproximadamente de $0,14$ Hz, completamente idêntica à frequência do sinal introduzido na seção de aquecimento. Verifica-se, ainda na Fig.(8) de forma clara que a energia introduzida no escoamento, com a frequência de $0,14$ Hz é fortemente transportada para as escalas de frequências maiores, devido ao efeito convectivo, como é caracterizado na região inercial do espectro, descrita pela inclinação de $-5/3$.

Constata-se, também na figura (8) a existência da cascata de energia, isto é, a transferência de energia a partir dos grandes vórtices para os pequenos vórtices. O processo de cascata de energia, evidenciado nas figuras citadas, segue a idéia de Richardson, onde a energia é injetada nos grandes vórtices, $K=0,86$, e em seguida transferida para os pequenos vórtices, $K=84$.

4. Conclusão

Observou-se na análise apresentada na Fig.(7) para $Re=12000$, na direção axial, as características da propriedade correlação cruzada evidenciada nessa figura são totalmente idênticas independente da direção e do plano utilizado. Da mesma forma, observa-se na Fig.(7) para $Re=134000$, na direção axial o mesmo comportamento da propriedade correlação cruzada.

Observou-se, ainda, que as características da propriedade espectro de energia é semelhante para os números de Reynolds estudados, como apresentado em Matos (1998). Constatou-se nas figuras do espectro de energia a presença de um pico característico idêntico a frequência do sinal introduzido na seção de aquecimento, independente do número de Reynolds.

Finalmente, observou-se através dos dados experimentais, Fig.(8), a inclinação do espectro de energia proporcional a $-5/3$ na região inercial-convectiva e -1 na região condutiva-inercial, independente do plano e do número de Reynolds.

5. Referência Bibliográfica

- Hinze, O., 1975, "Turbulence", McGraw-Hill, New York.
 Holman, J.P., 1994, "Experimental Methods for Engineers", Sixth Edition, McGraw-Hill, New York.
 Lesieur, M., 1986, "Turbulence in Fluids", Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, vol 1.
 Saddouchi, Seyed G., e Veeravalli, Srinivas V., 1994, "Local Isotropy in Turbulent Boundary Layers at High Reynolds Number", J. Fluid Mech., vol. 268, pp. 333-372.
 Matos, Arlindo de, Pinho, Francisco A.A., et al, 1998, "Large-eddy simulation of turbulent flow over a two-dimensional cavity with temperatura fluctuations", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.42, n1, pp.49-59.

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE FIELD OF TEMPERATURE INSIDE THERMAL CAPACITOR

Julio Cesar Costa Campos

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

e-mail: jcampos@uber.com.br

Milton Biage

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

e-mail: mbiage@mecanica.ufu.br

Abstract. *The present work consists of an experimental study, accomplished with the purpose of foreseeing the dynamic behavior of a flow inside the thermal capacitor. A system of thermopares amplification was used, with automatic compensation of the temperature of the cold committee for accomplishment of measures of temperatures in several points of the capacitor. This study was accomplished for only number of Reynolds, in the axial direction, azimuth and radial. With the objective of to study the propagation of temperature pulses along the duct, a pulse generator was built controlled by computer that allows introducing pulse with widths and different frequencies. In the analysis of the flow the statistical functions were used, such as: autocorrelation, crossed correlation and the spectrum of energy. These measured were obtained being used thermopares type T. The obtained results they are consistent in agreement with the literature.*

Keywords. *Turbulent Flow, Statistical Functions, Temperature.*

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF VORTEX SHEDDING AROUND AN ARRANGEMENT OF PARALLEL RECTANGULAR CYLINDERS IN CROSS-FLOW AT REYNOLDS NUMBERS UP TO 1000

Rubens Campregher Junior
Odenir de Almeida
Sérgio Said Mansur
Edson Del Rio Vieira

UNESP – Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, 15385-000 – Ilha Solteira, SP, Brazil – rubens@dem.feis.unesp.br

Aristeu da Silveira Neto

UFU – Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, 38400-092 – Uberlândia, MG, Brazil

Abstract. *The flow around cylinder's arrangements is frequently encountered in engineering applications, like a set of buildings or a compact heat exchangers where the cylinders role the play of fins. Thus, the understanding of the flow phenomena around the cylinders has great practical importance. This paper describes a numerical and experimental analysis of the wake behavior at low Reynolds number on two parallel rectangular cylinders placed perpendicularly to isothermal free stream in order to understand the vortex shedding process and his importance in the flow dynamics. Numerical two-dimensional simulations were performed with FLUENT™ numerical code using the volume finite method with an incompressible SIMPLEC algorithm for the velocity-pressure coupling and the QUICK scheme for the treatment of convective terms. The experimental tests were conducted in a vertical hydrodynamic water tunnel operated in a continuous way. The fundamental vortex shedding frequency and the velocity distribution in the wake were determined by the hot-wire anemometer placed behind of two parallel cylinders. The numerical and experimental results are compared and they reveal the need of a turbulence modeling as the Reynolds number increase, but provide some important information on the vortical flow that occurs around this arrangement.*

Keywords. *rectangular cylinders, vortex shedding, numerical simulation, cylinders arrangement, experimental and numerical simulation.*

1. Introduction

The flow around an arrangement of cylinders has been received special attention in the last decades due its several engineering applications. In fact, the cylinders arrangement is commonly found in engineering practice like compact heat exchangers fins, buildings, structures of bridge decks, etc. In spite of its simple geometry the flow past cylinders is very complicated due the dynamic nature of this flow. However, in the recent literature, few experimental and numerical approaches are found dealing with different configurations of cylinders arrangements.

The most commonly works are related to circular cylinder arrangement, like Luo *et al.* (1996) and Gu and Sun (1998). The former investigated experimentally how the flow over two in tandem finite length circular cylinders is different from the usually infinite length approach. It was found that the separated flow from the free ends, and from the sides interact between each other, resulting in less negative wake pressure and drag force. The latter performed their work on two circular cylinders in a staggered arrangement and gave special attention to the discontinuities on the pressure patterns that occurs due the variation of the cylinder's angle of incidence. Several velocity profile and power spectral analysis measurements were performed in order to discuss this complex behavior.

Furthermore, Kareen *et al.* (1998) studied the effects of two and three finite cylinders disposed in line among them, but at an angle with the flow and three cylinders in a triangular configuration with one side facing the flow field. They found that the level of interference on the downstream cylinders due the upstream ones had strongly dependence on the spacing, angle of attack and the arrangement of the cylinders itself.

In the special case of flow over rectangular cylinders, the chord-to-thickness ratio, namely, its shape factor, is an important relation that affects the vortex shedding mechanisms. In fact, it is well known that the vortex shedding from the sides of the body can change the Strouhal number. The shear layer instability generated at the leading edge produces small-scale vortices (the Bloor-Gerard vortices), which interacts with the side of the body in order to produce the structures known as ILEV (Impinging-Leading-Edge-Vortices) – Hermann *et al.* (1998). The ILEV propagate along the side of the cylinder and produce oscillations on the lift force acting over the body. At the cylinder rear end, the vortex shedding is the Von Karman type and this mechanism is known by TEVS (Trailing-Edge-Vortex-Shedding). At the trailing edge, the ILEV structures traveling along the side of the body mix with the TEVS structures which can interfere either increasing or even decrease the vortex level organization.

In parallel rectangular arrangement is expected that the interaction between the ILEV and TEVS vortices be more accentuated, keeping in mind that the spacing between the cylinders is one of the most important factors that affect the flow dynamics. The Figure 1 shows, schematically, the flow past over a parallel arrangement of rectangular cylinders, where one can define three important dimensionless parameters:

$$\text{Side factor: } \mathbf{f} = A/B \quad (1)$$

The Reynolds number: $Re = U_{\infty} B / \nu$ (2)

The Strouhal number based on the width (A) of the cylinder: $St_A = f A / U_{\infty}$ (3)

Where U_{∞} is the free stream longitudinal velocity and ν is the kinematics viscosity of the fluid, and f is the fundamental vortex shedding frequency.

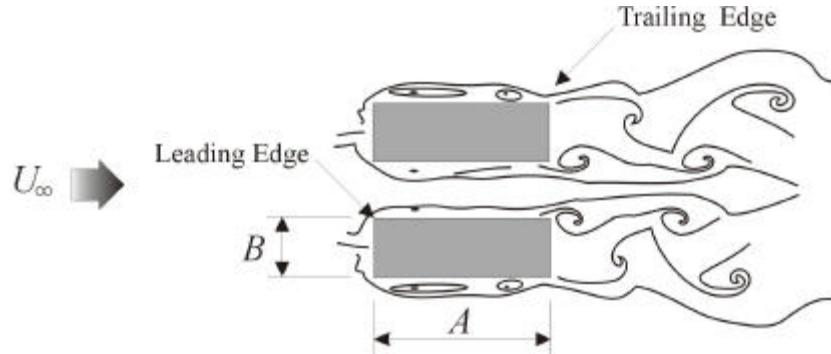


Figure 1. Flow pattern over a parallel arrangement of rectangular cylinders.

In this work, numerical and experimental results will be presented considering a single parallel arrangement consisted of two rectangular cylinders with side factor of 5, spaced by one diameter, at Reynolds numbers in a range from 100 to 1000. Experimental approach was performed in low speed hydrodynamic tunnel employing hot-wire anemometry technique, in order to evaluate the fundamental vortex shedding frequency. The numerical counterpart was done employing the finite volume technique performed by FLUENT™ 5.3 Software. The numerical and experimental results were compared and shown a good agreement among them. The flow field around the cylinders was qualified by dye wash technique into the experimental approach, and the vorticity lines were plotted in the numerical one, both providing substantial information about vortex shedding phenomena.

2. Numerical Procedure

In this work the flow was assumed to be unsteady and two-dimensional with constant fluid properties. The computational domain is a rectangular field in the cartesian coordinate system with meshes non-uniformly distributed. The numerical simulations have been accomplished by the numerical code FLUENT™ 5.3 set with the incompressible SIMPLEC finite-volume algorithm (Patankar & Spalding, 1972) associated to QUICK scheme (Leonard, 1979) for discretization of the convective terms in the Navier-Stokes equations. A second-order central difference scheme has been used for the diffusive terms. No turbulence modeling was used in the present simulations.

The Figure 2 shows the computational domain and the mesh resolution used for all simulations. The upstream length X_u was $7B$, the downstream length was $15B$ and the height was $13B$. The side factor (f) used was 5.

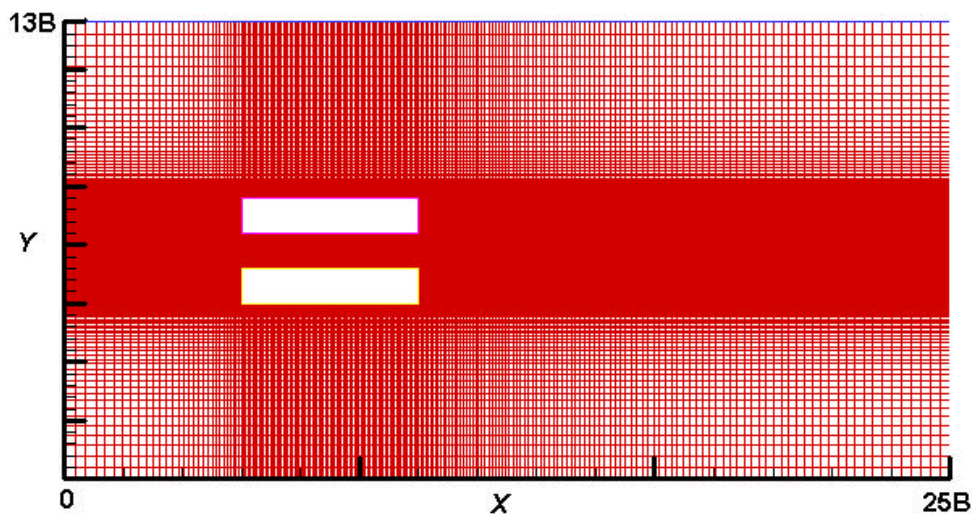


Figure 2. Computational domain – grid size 210×200 .

The governing equations may be written in the dimensionless form as:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{6}$$

Moreover, the boundary conditions have been set as follows. At the upstream boundary, the inlet flow has been assumed to be uniform. At the outlet, a zero gradient boundary condition for both U and V has been used. A no-slip condition has been prescribed at the body surfaces ($U = V = 0$). At the upper and lower boundaries have been used symmetry conditions, simulating a frictionless wall ($V = \partial U / \partial y = 0$). A marching time step of $\Delta t = 0,001$ s were used, advancing the solution until a statistically developed flow. A numerical probe is placed at 9 diameters ((B) behind the cylinder and 1,5 diameter (1,5B) below. This probe into fully developed Kármán vortex street registered the y velocity signal, after, this signal was processed by means of the Fast Fourier Transform Technique (FFT).

3. Experimental Apparatus

The quantitative and qualitative experimental results have been obtained from velocity measurements and flow visualization tests. These have been conducted in a low speed vertical water tunnel, operated by gravitational action in continuous mode, and depicted in the Figure 3. The upper reservoir (UR) has a 0,65m diameter and 1,5m height which means a net inner volume of approximately 500L. Moreover, the flow is stabilized at the set of aluminum made honeycombs and stainless steel made screens (SH) that allows to diminish the turbulence level and make the velocity profile more uniform before get into the 16:1 ratio contraction (CT).

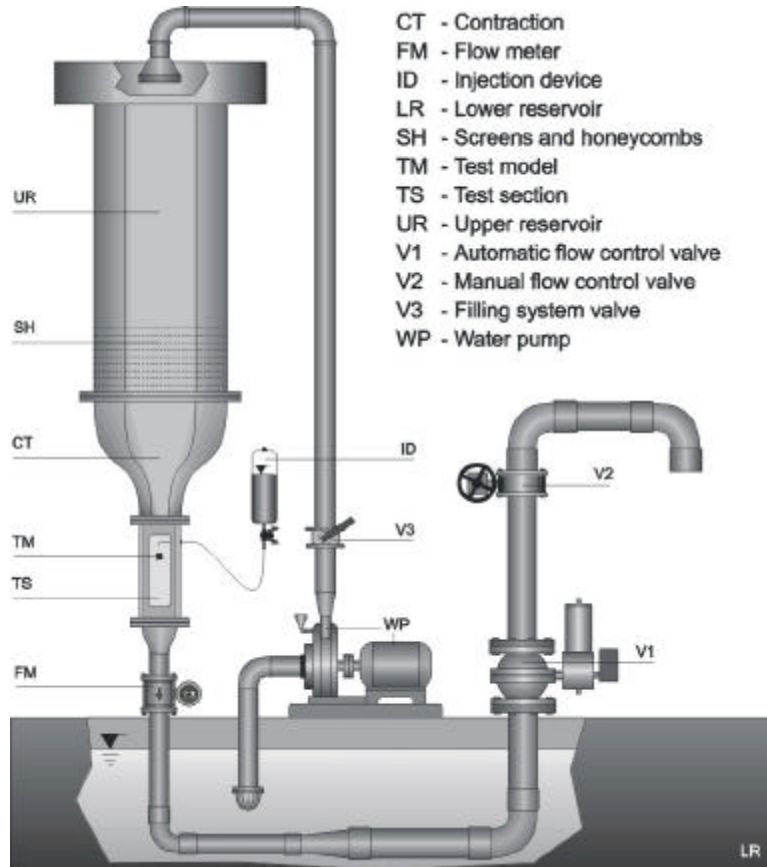


Figure 3. Water tunnel operated by gravity action

The test section (TS) size is 146×146×500 mm aluminum made with four windows and its cross-section area gradually increases at downstream in order to refrain the boundary layer development. All this features allows a free stream velocity range up to 1,5m/s with a turbulent intensity less than 1%.

Just below the test section, a *Yokogawa* flow meter (FM) model ADMAG AE208MG measures the instantaneous flow value, which can be controlled automatically by V1 valve or, manually, by the V2 valve. More details about this water tunnel facility and its operation are available in Vieira *et al* (1997).

Two flow visualization techniques were employed in this work. The first, called dye wash technique, consists on adequate injection of opaque liquid dye (ID) into the non-disturbed flow field upstream to the solid body by means of a needle. Then, dye injection is suddenly stopped, the needle is removed, and the clean water stream washes the flow field, except the regions where the flow speed is relatively small, as in the cylinder boundary layer and wake. This procedure enables to visualize, for some seconds, the vortex street downstream the cylinder. In the present work, the section test was illuminated in backlight by eight flooding lamps of 150 W, providing a uniformly diffuse bright background against which the dye patterns have been photographed. The dye employed is strong aqueous solution of black PVA pigment. The flow images have been captured using a Nikon F4s camera equipped with a Nikkor 60-mm micro lens and an ISO 100 photographic film.

The fundamental vortex shedding frequency was detected by a hot-wire anemometer DANTEC, Streamline 90N10, equipped one probe 55R11. The element sensor was placed in the same position, relatively, as the numerical probe.

4. Results and Discussion

4.1 Quantitative results

The Figure 4 displays the results performed in the water tunnel through hot-wire anemometer probe. The graphics show, in following sequence, the uncalibrated velocity (in Volts), the fundamental vortex shedding frequency (in Hz) and the energy spectrum $E(k)$. It can be seen that the frequency increases as the Reynolds number is also increased. It is worth noting that the energy spectrum is becoming closer to the $-5/3 \cdot k$ Kolmogorov's law, indicating a possible transition to the turbulent regime. This observation will discuss in the lights of the numerical and experimental flow visualization as will be seen in the following sections.

The Figure 5 shows the results of Y-velocity, fundamental frequency and energy spectrum, respectively, obtained in the numerical simulations without turbulence model. Again, It is worth noting the gradual increase of the vortex shedding frequency as a function of the Reynolds numbers. In this situation the energy spectrum isn't well defined as it was in the experimental case.

The most remarkable discrepancy in the experimental and numerical approaches, previously presented, lays mainly on the different behavior of the energy cascade. In the experimental approach it could realize that the energy spectrum becomes closer to the Kolmogorov's law as the Reynolds number increases, it is related to the turbulent characteristics of the wake. However, as the spectrum becomes wider, it's very hard to evaluate any fundamental frequency – see Figure 4(e). By the other hand, in the numerical simulation, it was possible to find such frequency, in spite of no turbulence modeling was used, which made impossible to follow the $-5/3 \cdot k$'s law – Figure 5(e).

In the Figure 6, is plotted the Strouhal number against the Reynolds number. The lack of the experimental data for 100 it's due the difficulty in finding its fundamental frequency. This problem is well understood when looking at the water tunnel visualization for Re 100 – Figure 7(a): at the probe position, the vortices weren't well developed yet, which, in a certain way, produced a weak signal, biasing the fundamental vortex shedding frequency.

The deviation on the Strouhal numbers noted in Figure 6 is, mainly, due the mesh used, which wasn't fine enough to capture the turbulent nature of the flow. As pointed on the graph, the numerical and experimental data agree each other at Reynolds numbers less than 400. After this value, the turbulent scales begin to role a play in viscous energy dissipation phenomena, promoting the transition from laminar to fully turbulent state. Surprisingly, in spite of the moderate Reynolds number, these results reveal the need of a finer grid, or a turbulence modeling in order to properly predict the flow past a parallel arrangement of a Reynolds number above 500.

4.2 Flow visualization

The Figure 7 shows for the sake of comparison the flow patterns at Reynolds numbers from 100 to 500. It is displayed the numerical vorticity lines and its water tunnel counterpart by dye tracers. The numerical images were registered in an arbitrary computational time.

It is interesting to observe in every pictures that the small space between the cylinders doesn't allow the shear layers development into inner region. Over the inner upper and bottom cylinders surface the shear layers were confined became more thin and stable. In this configuration, it can be seen only one TEVS (Trailing-Edge-Vortex-Shedding) coming up. It is expected that as the spacing between the cylinders is increased, the flow pattern behave as a flow over an isolated cylinder. In both two approaches, numerical and experimental, the wake's behavior is shifting from a regular pattern – Figure 7(a) – to a non-regular one – Figure 7(e). The latter situation, the pairing of the vortices is commonly found along the wake. It is interesting to note also at the Figure 7(c) the interaction between the TEVS both in the numerical and experimental flow field.

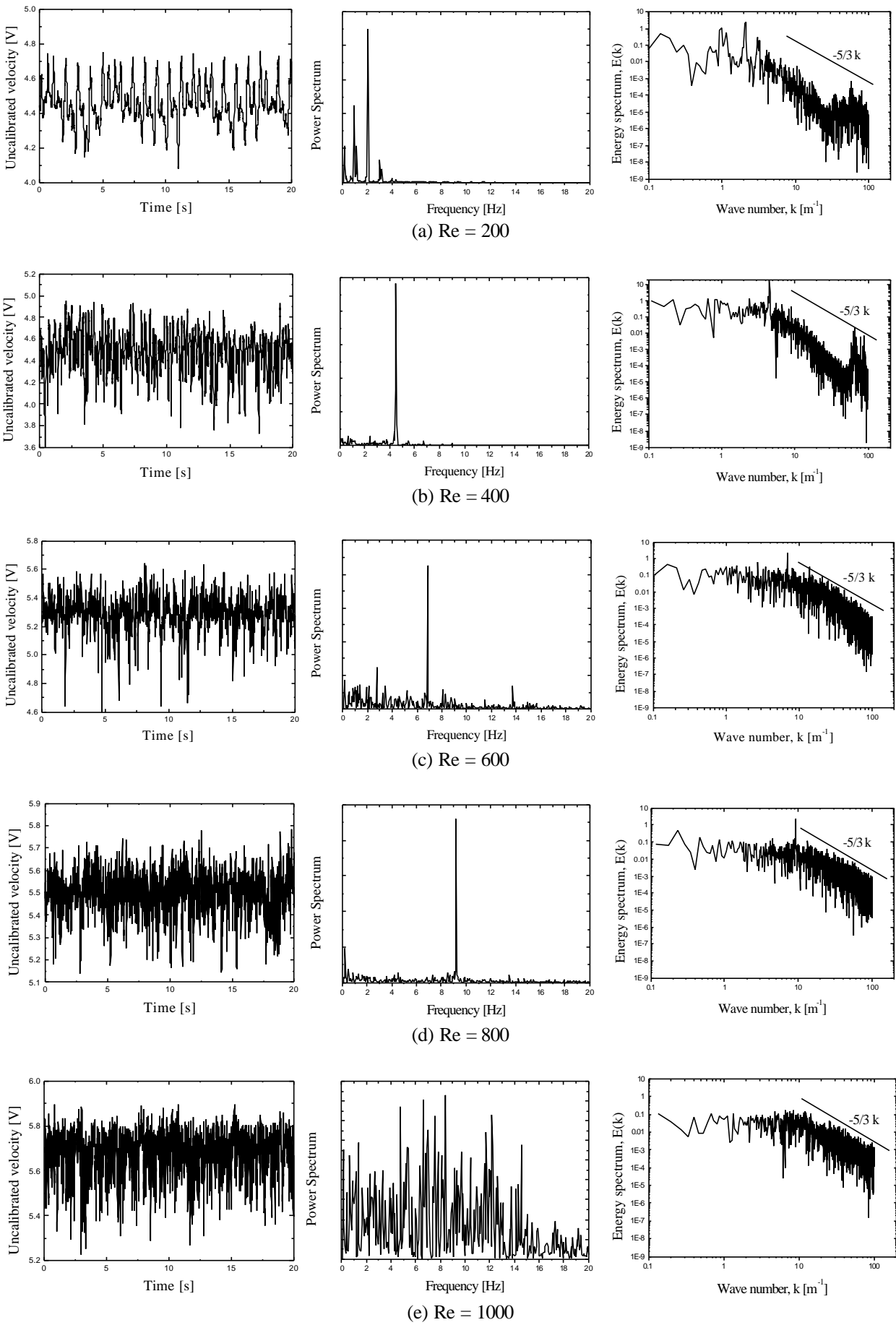


Figure 4. The uncalibrated velocity graphics (left column), fundamental frequency graphics (center column), and the energy spectrum graphics (right column) performed experimentally.

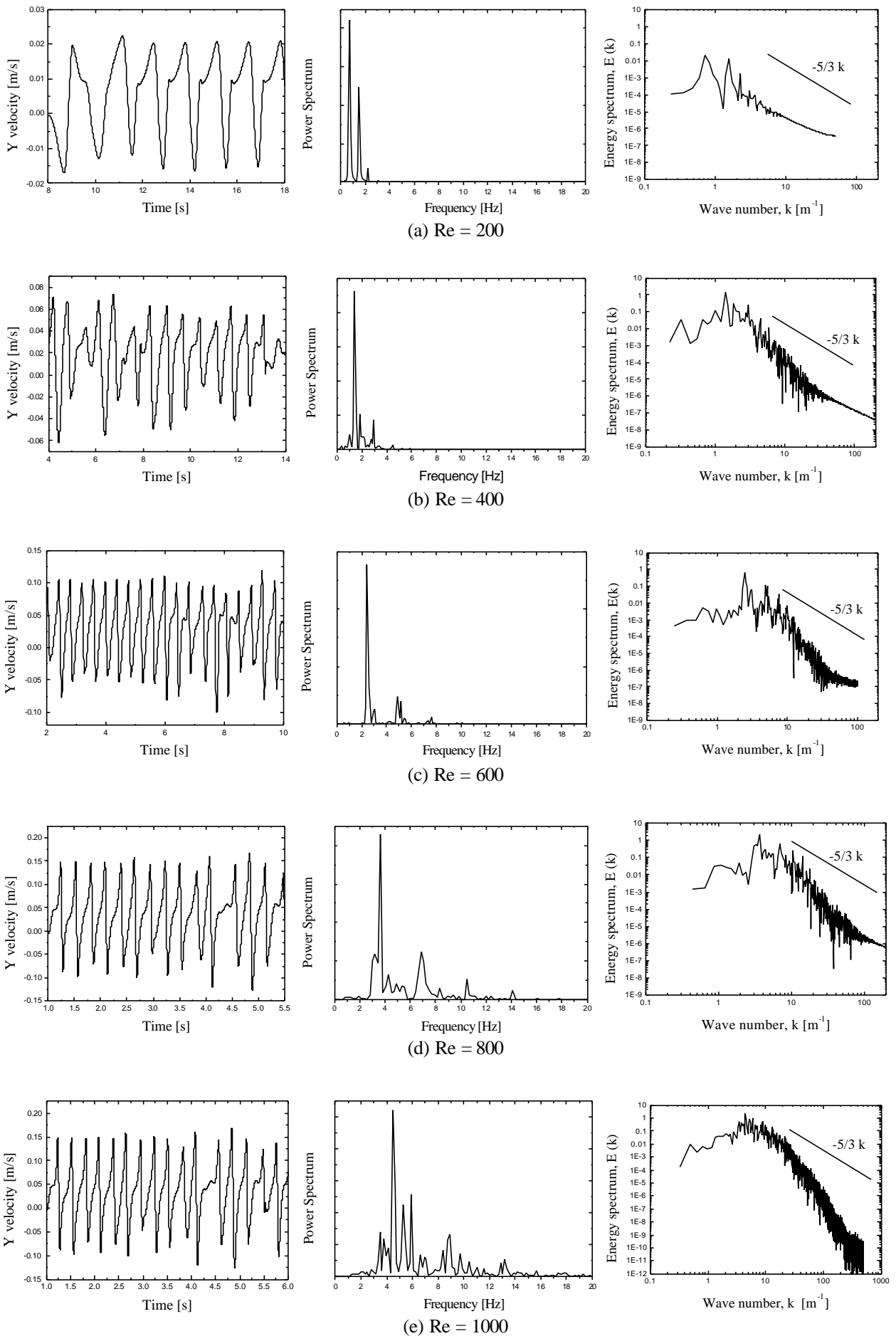


Figure 5. The Y-velocity graphics (left column), fundamental frequency graphics (center column), and the energy spectrum graphics (right column) performed by numerical simulation.

At the cylinders outer region, there is the formation, in the leading edge, of a shear layer that interacts with the surface promoting the arising of a discrete vortex, which is convected towards the trailing edge. In some cases it is possible to distinguish the interaction between the ILEV and TEVS structures, as registered in the pictures 7(d) and 7(e) (left).

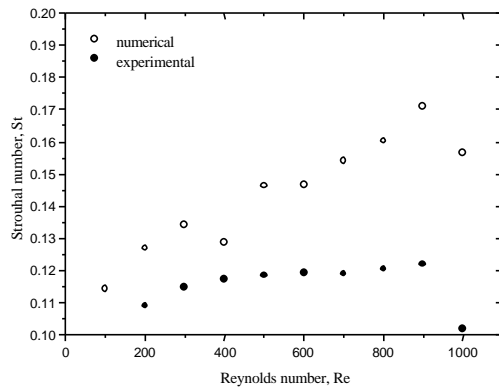


Figure 6. Strouhal x Reynolds curve.

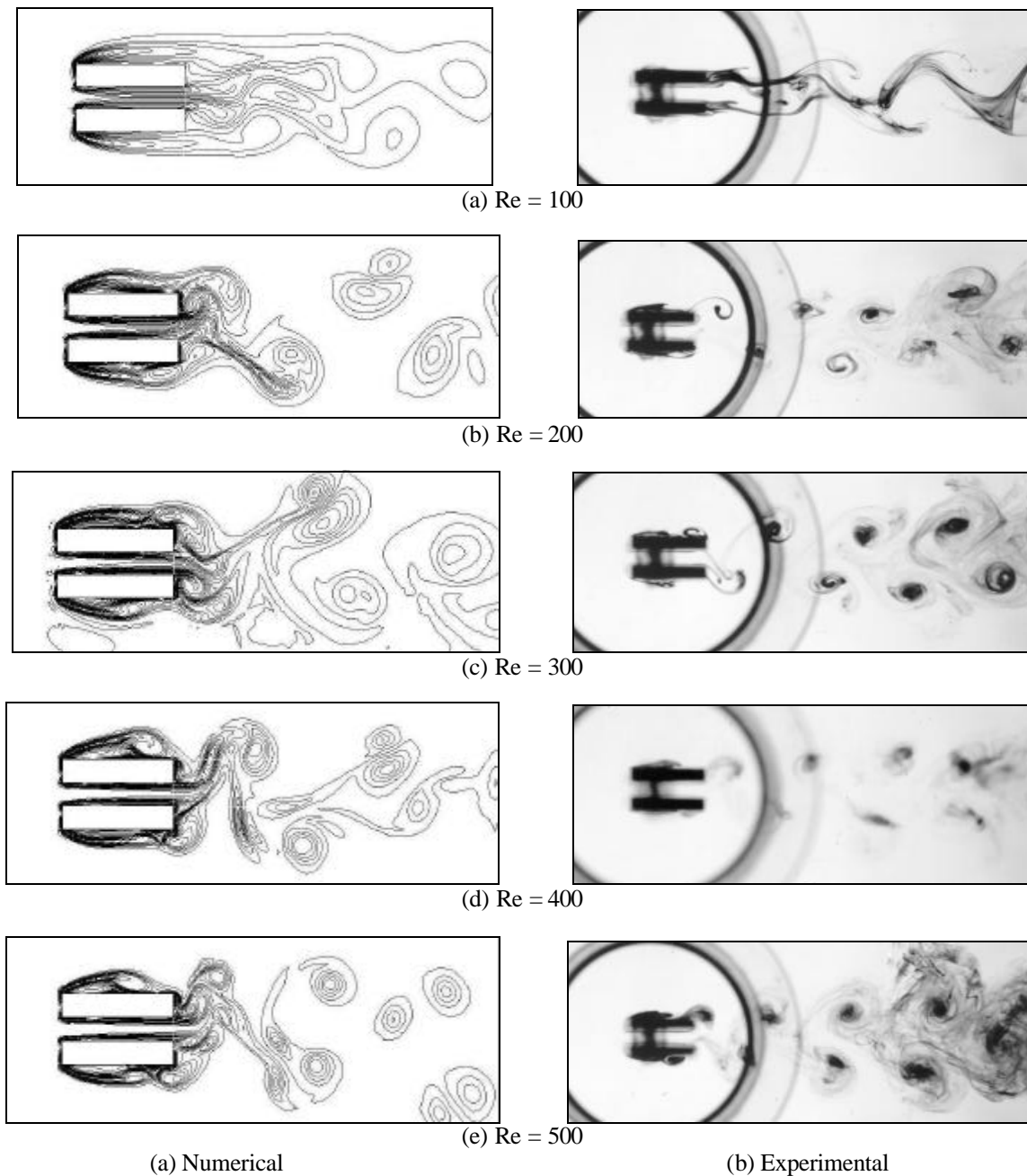


Figure 7. Flow visualization in the water tunnel and by numerical simulation.

5. Concluding Remarks

This work presented a numerical and experimental study of the flow around an arrangement of two parallel rectangular cylinders. The main parameter evaluated was the Strouhal number, which might be affected by the spacing between the cylinders, its side ratio and the flow Reynolds number. The spacing is an important feature to be explored as well as the turbulence modeling to deal with flowing at Reynolds numbers above 500.

The space between the cylinders could be changed until its influence over flow pattern assumes characteristics typically from that isolated ones. A turbulent modeling can deal with the widespread frequency results.

6. Acknowledgement

This study has been developed with financial support provided by FAPESP (proc. 97/12249-9). The authors thank also the support of PROPP/UNESP and FUNDUNESP.

7. References

- Patankar, S.V.; & Spalding, D. B.; A calculation procedure for heat and mass transfer in three-dimensional parabolic flows, *Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 15, pp. 1787-1806, 1972.
- Leonard, B.P., A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engineering*, pp. 59-98, 1979.
- Luo, S. C.; Gan, T. L.; Shew, Y. T., Uniform flow past one (or two in tandem) finite length circular cylinder(s), *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 59, p. 69-93, 1996.
- Kareem, A., Kijewski, T., Lu, P., Investigation of the interference for a group of finite cylinders, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 77 and 78, p. 503-520, 1998.
- Gu, Z., Sun T., On interference between two circular cylinders staggered arrangement at high Reynolds number, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 80, p. 287-309, 1999.
- Hermann, F., Billeter, P., Hollenstein, R., Investigations on the flow through a trashrack under different inflow conditions, ETH Zurich, http://www.dhi.dk/hic98/papers/full%20papers/051/hic_51.html

USE OF FLOW VISUALIZATION IN A VERTICAL WATER TUNNEL IN ENGINEERING TEACHING

Edson Del Rio Vieira – delrio@dem.feis.unesp.br

Emanuel Rocha Woiski – woiski@dem.feis.unesp.br

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Unesp
Cx. P. 31, – 15385-000 – Ilha Solteira, SP, Brasil

Abstract. Fluid mechanics teaching represents a very challenging field because of the high complexity associated to the movement of the fluids. In this surrounding, flow visualization provides a powerful tool enabling to make easy this hard mission. Experimental flow visualization techniques allow for observation of complex phenomena, normally invisible to the naked eye. Flow visualization provides photographs and films that are of large application in fluid mechanics learning process. These images are frequently searched upon in books and didactical tapes. In this work, flow visualization images are generated and captured directly by student's action in a hydrodynamic vertical tunnel. Those images made by the students themselves, are shown to be of great aid in classroom to awaken and motivate. The techniques utilized by image generation, capture and processing are briefly described as well as the experience obtained in the utilization of experimental flow visualization in fluid mechanics laboratory class.

Keywords: *Flow visualization, Hydrodynamic tunnel, Fluid mechanics experiments.*

1. Introduction

Many examples of many fluid mechanics classroom experiments are available in the technical literature reporting the use of aerodynamic tunnels, most of them deploying a small facilities specially built for educational purposes. A small velocity incompressible subsonic open circuit aerodynamic tunnel is a relatively inexpensive installation being capable of supplying a broad variety of several different educational experiments, as seen in Rae Jr & Pope (1984), Anderson (1988), Gorecki (1989) and Budwing *et al.* (1993).

On the other side, from a physical viewpoint, a hydrodynamic tunnel operates in principle very similarly to a low velocity aerodynamic tunnel. Concerning an educational standpoint, however, in terms of design, a few differences are worth mentioning. The main ones are associated to flow-visualization activities feasible in hydrodynamic medium. In fact, airflow is normally invisible, in such a way that although the motion of bodies produces air movements and streamlines, pathlines and streaklines, these are not visible to the naked eye. On the other hand, water flow can be easily seen, utilizing, for example, special dyes or very small solid or gaseous particles in suspension in the water stream. Many further flow visualization techniques are employed to make the flow visible, so that the ability to observe the different flows and produce images from them provides a solid reference basis for physical interpretation of the flow phenomena. In this sense, a flow image represents an important part to the comprehension of complex events associated to fluid flow. In fact, all teachers acknowledge that once a phenomenon is visualized, a large step has been taken towards understanding it. There are a number of fluid mechanics textbook exploring experimental flow images to illustrate physical and mathematical concepts, see, for example, Batchelor (1979) and Vieira (1971).

Fluid Mechanics is a complex course of study that connects heavy mathematical load and a handful of rigorous physical concepts. During a fluid mechanics laboratory class many of those concepts can be easily explained and verified in locus with aid of flow visualization. Fluid mechanics didactical experiments using flow visualization helps creating an adequate environment to stimulate student's motivation and facilitate the apprenticeship.

The experience of utilizing the hydrodynamic flow visualization in a small vertical water tunnel on teaching fluid mechanics to mechanical engineering undergraduate students is described in this work.

2. Hydrodynamic flow visualization facilities

Flow visualization tests can be much more easily performed in water than in air, and experimental hydrodynamics setups are classified according to their basic principle or their different layout. In the work of Werlé (1973), a complete explanation of three different hydrodynamic flow visualization facility types is displayed. In the first of all, a very simple apparatus is described, especially useful to didactical purposes, in which a thin flow, formed inside the gap along two very close parallel walls, is suitable for a model of a two-dimensional highly viscous flow, exhibiting flow Reynolds number close to one, also named creeping flow. In this case, the flow velocity is sufficiently small for inertial forces to be negligible. Denoting the reference length of the body by (L), the clearance by (h) and the velocity of the main flow by (U), then the Reynolds number is limited by Eq.(1)

$$\text{Re} = \left(\frac{UL}{\nu}\right)(h/L)^2 \quad (1)$$

In this case, the flow is generally made visible by fine colored filaments emitted by a rake of needle ejecting soluble liquid pigment in order that beautiful images can be promptly visualized. An example of this equipment is found in Alé *et al.* (1999) and inspiring images obtained from a like this apparatus can be viewed in Nakayama (1988).

Channels with free surface, the second type of facility described by Werlé, are often employed in visualization. A free surface channel is simply a water channel in which the model is adequately positioned in a carriage, which is towed with a cable attached to a winch driven by a small synchronous electric motor by way of an adjustable gear. Free surface channels utilized for visualization purposes require lateral walls with glass windows to facilitate the visual access to the test section. Visual inspection can be made along the free surface, but when the model is in movement waves are formed and the model or strut penetrates the water surface, therefore diffculting the image capture and causing image distortions. The still or movie camera can be mounted firmly attached to the carriage, permitting the acquisition of flow images in relative motion, *i.e.*, the camera is dislocated with the same velocity of the model. Those images can be used for didactical purposes and compared with images by a stationary camera located at any fixed position near the tank. Use of towing tanks with free surface is described by Clutter & Smith (1961) and by Gad-el-Hak & Ho (1986) and Gad-el-Hak (1988).

The third apparatus as described by Werlé is the a water tunnel, indisputably the most standard facility employed for hydrodynamics flow visualization. Even though limited to the study of subsonic incompressible flows, water tunnels can be built in many ways. They differ mainly in the arrangement of their test section and operating principle. Tunnels with horizontal test section, closed or free surface type, operating by action of centrifugal or axial pump, are quite similar to low velocity aerodynamics tunnels of closed circuit, a lot of those installations being found around the world. On the other hand, although the construction of a vertical test section tunnel operating by gravity is fairly inexpensive apparatus, one is still able to perform several didactical low cost experiments with it. In fact, test sections of a vertical water tunnel can be made in very reduced dimensions (about 0.150 X 0.150 m or less) and yet allow for a number of experiments. A small vertical hydrodynamic tunnel can be erected suitable to operate in a flow regime of test-section Reynolds number (consider the length characteristic equal to 10 % of square root of section test transversal area) up to 5×10^3 . In this regime, under moderately low flow blockage, many experimental classes can be done, in especial those related to the von Kármán street, as it is the case of vertical hydrodynamic tunnel experiments applied in vortex shedding downstream a circular cylinder studied by Lindquist *et al.* (1999). An extensive explanation about hydrodynamic tunnel, reporting more than one hundred different facilities, can be analysed in the work of Erickson (1981).

3. Hydrodynamic flow visualization

Flow visualization has been considered the oldest tool for fluid mechanics research, and perhaps, the more straight way of flow examination. Nowadays, even though there are many other experimental techniques available, flow visualization is still intensively used for research, numerical validation and solution of technological problems. Flow visualization image processing allows obtaining important qualitative and quantitative data about the flow therefore accomplishing a broader comprehension about the movement of fluids. Many books on flow visualization reviews are obtainable in technical literature, see the renowned book by Merzkirch (1987) for coverage of nearly all fields of flow visualization as well as the handbook edited by Yang (1989), presenting a comprehensive account of many different flow visualization applications. Other works by Prandtl & Tietjens (1957) – probably the first flow visualization review – and Mueller (1983), are also good reference text on flow visualization in water medium.

There are as well several review papers available on flow visualization in hydrodynamics medium. The review of Balint (1953) is of such historical magnitude, that quite a number of techniques described in that paper are used till the present days, evidently including several technological changes. Clayton & Massey (1967) review is oriented towards the possibility of obtaining quantitative information using only flow visualization. Since long, flow visualization has been traditionally employed to obtain qualitative information about the fluid motion. Today, by means of PIV (particle image velocimetry) techniques, *i.e.*, flow visualization allied to digital image processing, acquiring quantitative measurements from the flow field using flow images has become rather simple.

The work of Settles (1986) compares several flow visualization techniques, paying special attention to optical techniques – thermography, interferometry, holography, tomography, schlieren and high-speed photography. In his work, one of the first presentations of digital and optical image processing is described. Previously, there was the classical work by Merzkirch (1966), which has been directed to the general public in a colloquial and farsighted language, besides presenting the prospect of flow images creation utilizing computer fluid dynamic analysis.

In other works several aspects and techniques of flow visualization are comprehensively explained, as it is the case of the Gad-el-Hak's (1988) review on unsteady flow visualization, explaining the use of laser fluoresce dyes, laser sheet visualization, chemical fluorescence dyes and naturally visualized flows.

Further hydrodynamic flow visualization reviews can be found dedicated to more specific applications. The paper by Coutanceau & Defaye (1991) is an excellent example. In that work, a long effort was employed towards a comprehensive exhibition of circular cylinder wake configurations using several flow visualization techniques. Another instance is the article by Winter *et al.* (1956), in which a number of hydrodynamics flow visualization techniques are proposed to study aerodynamics problems, including compressible flows. Several engineering gas flow problems take place accompanied by high gradients of density. Strangely enough, the preliminary study of those kinds of flows can be

performed using liquid flow, i.e., a flow with constant density and that is made possible simply because of the large number of aerodynamic variables influencing the flow field.

As a matter of fact, papers including some form of flow visualization are currently found in practically all the issues of the major journals that publish works on fluid mechanics.

In order to visualize the hydrodynamics flow, the most inexpensive mode is by means of introducing different kinds of substances named flow tracers. In water medium, gas bubbles, color liquid dyes and solid micro-particles are ordinarily employed, corresponding to the commonest procedure in hydrodynamics flow visualization. Hydrogen bubbles are produced by water electrolysis when a small diameter wire is stretched across the region into the flow under investigation. The very thin metal wire, generally of tungsten or platinum, operates like a cathode, linked to a DC current circuit. Small hydrogen bubbles, which are formed around the wire, are swept off by the passing water. Those micro bubbles are carried along by the water stream and because of the very low rise-rates, form good markers for the fluid. More extended information about hydrogen-bubble flow visualization technique are found in Schraub *et al.* (1965), Davis & Fox (1967) and Clutter & Smith (1961).

The use of colored liquid tracers injected under pressure in the flow field is readily implemented by means of long hypodermic needles (about 0.7 mm OD). The liquid tracer can also be injected by means of minuscule orifices drilled along the test body external surface. The pressure and velocity of injection should be carefully adjusted in order to minimize the flow field perturbations. Several different inks are proposed in the technical literature – food dyes, Indian ink, condensed milk, fat milk, solution of ink pigments, aniline, dust for ice cream and much others. The filet should be stable, not easily soluble, and exhibiting no adherence to the walls as well as viscosity closer to the fluid of work.

The great name in the hydrodynamics flow visualization by means of liquid tracer injection is Prof. Werlé from ONERA – France. Starting in the fifties, Prof. Werlé operated three vertical water tunnels for more than three decades. Several quite beautiful flow pictures produced by Werlé's team can be found in ONERA publications, many of those dedicated to aerodynamics problems. Superb images of separation, detachment, vortices, boundary layers, recirculations and visualized flow around delta wings and airplanes, trains and cars can be examined in an extensive number of technical publications, as in Werlé (1953, 1973, 1982) and Werlé & Gallon (1982).

Solid micro-particles – diameter sized about 50 μm – in suspension in a fluid when intensely lightened provokes the scattering phenomenon. Because the incident light ends up reflected in all directions, the small particles seem to be much larger, which allows for their trajectory along the flow field to be tracked. Generally, in this technique, a sheet of common or laser light illumines a determined part of the flow, adequately positioned along the flow field, in the region under investigation.

Several particle types are available for use in hydrodynamic medium. Hassinger (1968) describes the use of cosmetic powder, micro-spheres of glass and TiO_2 . Today, several commercial powders with tightly controlled dimensions, high reflexivity level and density very close to the water are obtainable.

Micro-particles are intensively employed in PIV (particle image velocimetry) techniques. PIV is a modern and accurate technique of velocimetry employed in research laboratories, which uses flow image and digital processing to obtain the flow velocity. Unfortunately, PIV is an expensive and complex method, and till present days, it is less than adequate to be implemented in undergraduate engineering courses. More information about solid micro-particles flow visualization in hydrodynamic medium and PIV techniques can be obtained in the work of Economikos *et al.* (1990).

4. Experimental apparatus

A water tunnel is a powerful tool and many concepts from fluid dynamics – such as streamlines, pathlines and streaklines – are possible for *in vitro* demonstration. Several vertical water tunnels are described in the technical literature designed to multiple purposes. The Mechanical Engineering Department of the Ilha Solteira Engineering Faculty of the Paulista State University - Unesp - started up, back in 1994, a vertical low turbulence water tunnel prototype destined only to research applications. Promptly, the researchers team realized the large potential of this pilot apparatus as a laboratory classroom, in undergraduate mechanical engineering courses. In fact, water tunnel permits a wide variety of flow visualization experiments. Those flow visualization practical experiments have represented an invaluable opportunity to illustrate several theoretical concepts learned in classroom.

Figure 1 shows the water tunnel schematic view. This facility can be operated in continuous or blow-down modes. Continuous operation mode is indicated to long time run in constant flow velocity. In opposition, blow-down mode corresponds to the easiest operation approach, but implies a continuous decrease in flow velocity. In blow-down operation mode the tunnel is completely filled with water. After waiting a short time, enough to bring to rest the water inside the tunnel, followed by the opening of the manual or the automatic pneumatic control valves (respectively valves # V2 and V1 in the Figure 1), the tunnel is ready for a run.

With the deployment of multiples injection needles and different colored dyes it turns possible to obtain several color filets and to capture didactical images. The authors have been experimenting with a wide range of different color solutions. The better results have been obtained utilizing a solution of clear tap water, ethyl alcohol and commercial PVA pigments. The latter are readily available in many colors in stores and can produce a opaque and high contrast filet easily captured in the picture image. The black PVA pigment produces the better results.

The flow images might be captured in still pictures using a conventional single lens reflex camera, using chemical film or electronic CCD sensor. Single lens reflex (SLR) cameras equipped with a internal photometer through the lens are indicated due to the use of interchangeable lens and absence of parallax errors.

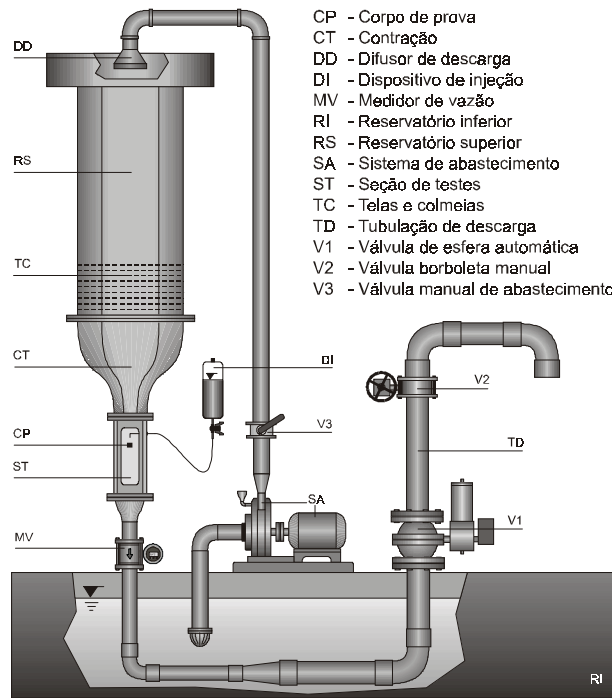


Figure 1 Vertical low turbulence hydrodynamic tunnel.

A video system is also necessary. Traditional video home system (VHS) produces images of poor definition (less than 200 lines), and should be utilized with restrictions in scientific works, restricted to quick-and-dirty didactical presentations. The use of SVHS system is a suitable choice, since it is an economical professional system, and yet capable of broadcast-quality image generation.

5. Results

The first experiment proposed for classroom in the undergraduate mechanical engineering course in Ilha Solteira is the determination of the vortex shedding frequency of bluff-bodies. The study of the flows around non-aerodynamic bodies finds several applications in Mechanical Engineering. The classic disaster of the Tacoma Narrows Bridge is an excellent instance of fluid-structure interaction associated with vortex shedding. Bluff-body aero/hydrodynamics is a fine instance of instructive experiments. A first approach concerns circular cylinders due to the obvious engineering applications. Fig. 2 shows several flow configuration structures, as function of Reynolds number (Re), in the wake a circular cylinder. The Reynolds number is a very important dimensionless parameter associated to the flow motion. It expresses, in short, a relationship between viscous and inertial forces acting on the flow field.

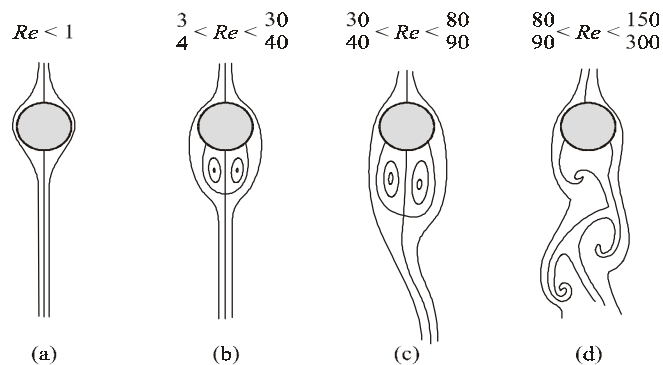


Figure 2 Wake of a circular cylinder em several flow regimes, in accord to Gersten, (1983).

In the case of Reynolds number ranging between $3 < Re < 30-40$, the flow separates steadily from the solid body, developing a closed region of re-circulation with eddy-like motion behind the cylinder, which, due to its closed nature, looks like a bubble. Some of the main features of a typical wake-bubble are illustrated in the Fig. (3a). In blow-down operation mode it is possible to visualize this re-circulation bubble - for a detailed explanation see the paper by Campos-Silva *et al.* (1998) - and capture the flow image. Fig. (3a) illustrates the re-circulation bubble downstream a circular cylinder.

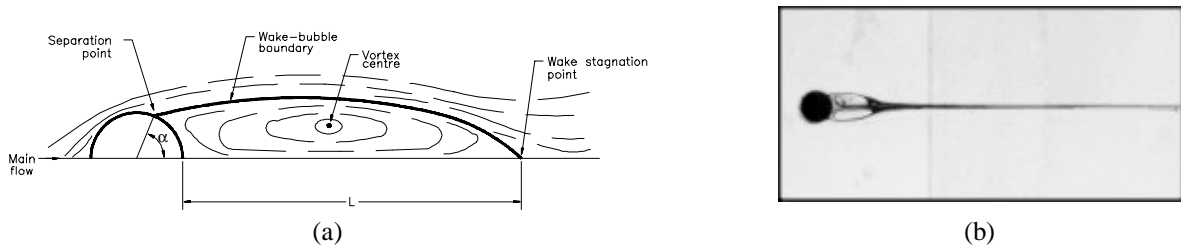


Figure 3 Bubble re-circulation steady separation in a wake of a circular cylinder. (a) Main features; (b) Hydrodynamic flow visualization ($Re = 36$).

The bubble length (L) can be determined directly from the image and compared to the cylinder diameter (D). Fig. (4), obtained in the hydrodynamic tunnel by undergraduate students, depicts the non dimensional bubble length (relative to the cylinder diameter) as function of Reynolds number.

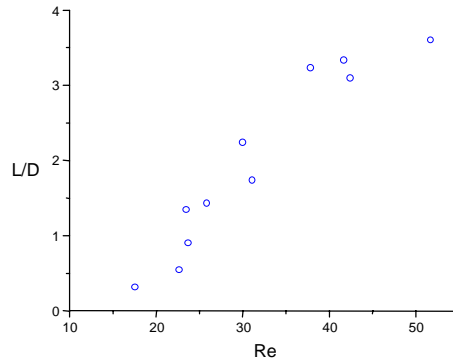


Figure 4 Nondimensional bubble length (L/D) as function of the Reynold number.

Bubble re-circulating length is an important parameter frequently employed for qualification of numerical codes in CFD so that an extensive number of publications are dedicated to its study. For Reynolds to $30-40 < Re < 80-90$ the re-circulation bubble is unsteady and the wake appears to be unstable, as depicted in the Fig. 5.

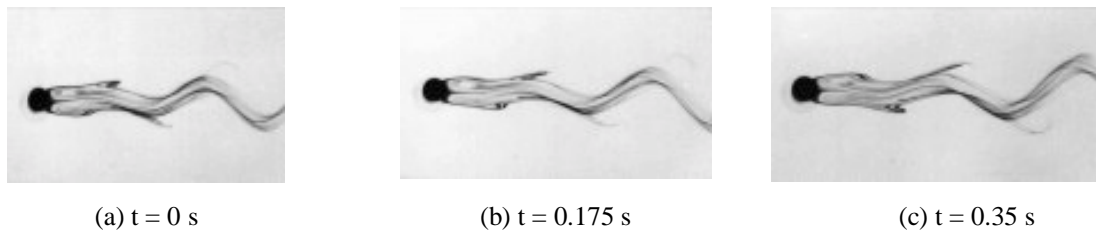


Figure 5. Unsteady wake of a circular cylinder – $R = 46$

Fig. (6a) to (6e) present a sequence of pictures taken from the von Kármán vortex street visualized in the water tunnel for Reynolds number near 250. These images, again obtained by the undergraduate students in laboratory class, exhibit a short time sequence showing the vortex shedding process, captured in 35 mm photographic film with a rate of 5.7 fps (frames per second) using Nikon F4s camera equipped with a 60 mm macro lens. The same time sequence can be captured in video tape in 30 fps (NTSC standard). Video deployment represents a good frame rating capture system; quickly processing – no chemical development process is necessary – and a fast way to determine the vortex shedding frequency by visual means. Afterwards, by means of a broadcasting videocassette recorder, utilizing a time code board, all frames can be precisely identified and the time sequence determined. Observing in slow motion the vortex shedding, it is possible to determine the time elapsed by generation and shedding of each vortex. For details of the techniques of vortex shedding frequency evaluation using a VCR, refer to the works by Lindquist *et al.* (1999) and Gonçalves & Vieira (1999).

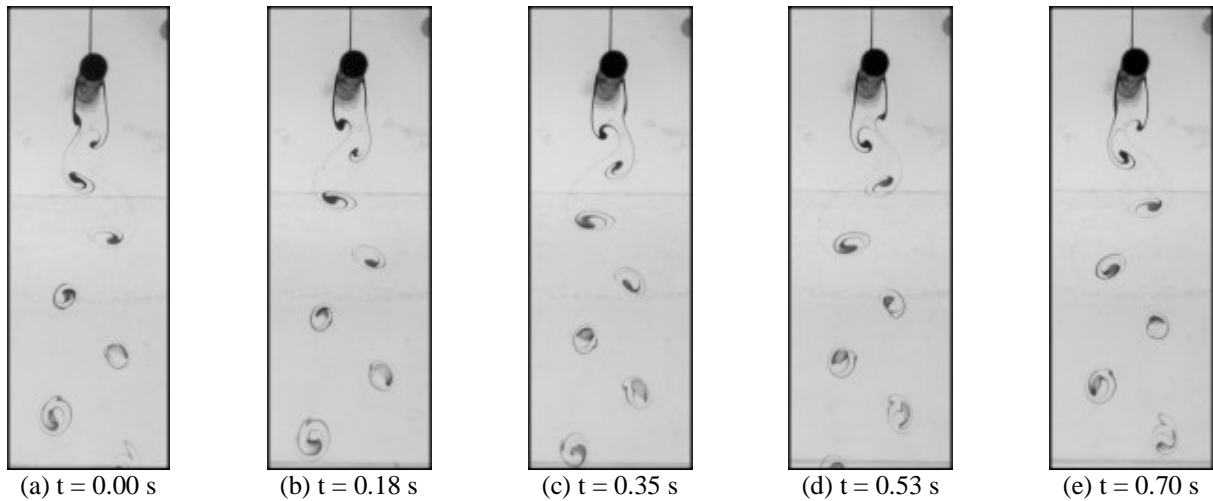


Figure 6. Unsteady wake of a circular cylinder – $Re = 46$

The non-dimensional vortex shedding frequency (Strouhal number) is defined by:

$$Sr = \frac{f D}{V} \tag{2}$$

The Strouhal number behavior em function of the Reynolds number can be determined by visual inspection in slow motion for several different cylinder geometries such as triangular, according Gonçalves & Vieira (2000), or square, according Lindquist *et al.* (1997) depicted in Fig. 7.

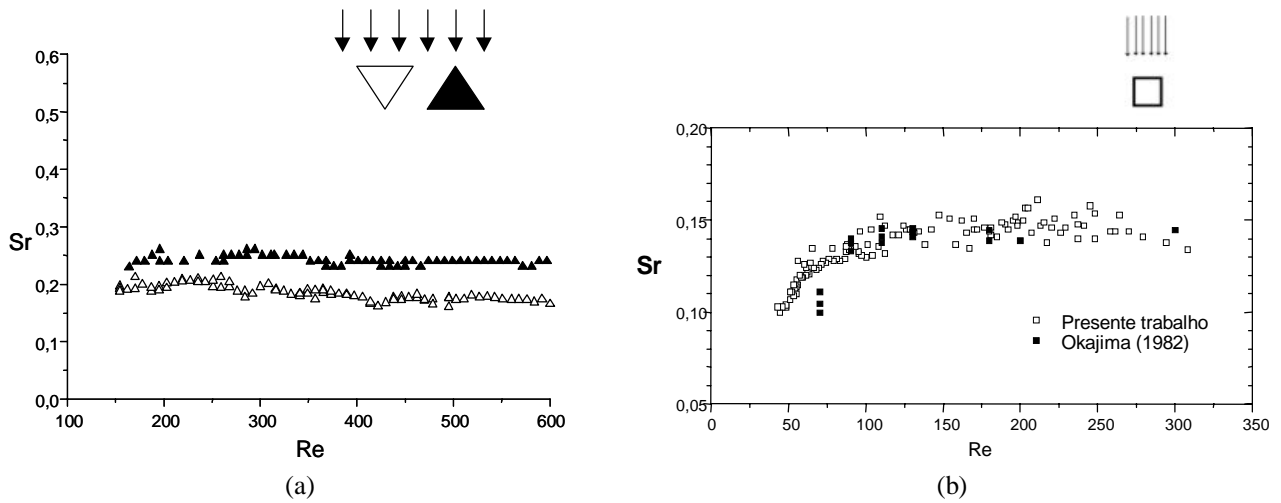


Figure 7. Strouhal number (Sr) behavior in function of Reynolds number (Re). (a) Triangular isosceles cylinder in two opposite attack angle ($\alpha = 0^\circ$ and $\alpha = 60^\circ$); (b) Square cylinder ($\alpha = 0^\circ$).

Are spent this type is carried out in two-hour work in laboratory class and two hours more examining the videotape in order to extract the vortex shedding frequency, if utilizing about 10 measurements points. An example of those measurements executed by undergraduate students can be viewed in the Fig. 8.

Many other geometric forms of bluff-bodies can be explored, showing good quality flow images so that can be utilized for educational intentions. It must be stressed that, in each case, the undergraduate students themselves, obtain the flow images by direct operation of the facilities bringing about an enormous differential in the teaching process, while easing considerably the learning task.

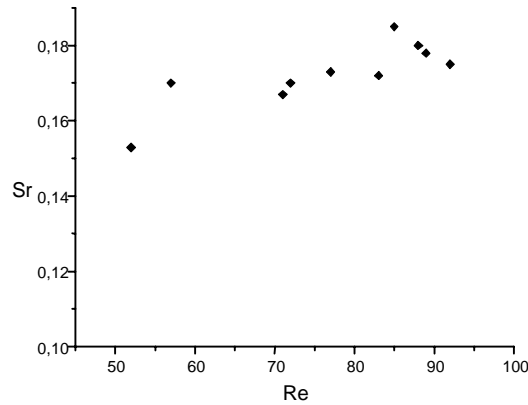


Figure 8. Strouhal number (Sr) versus Reynolds number (Re) for a circular cylinder obtained in laboratory class.

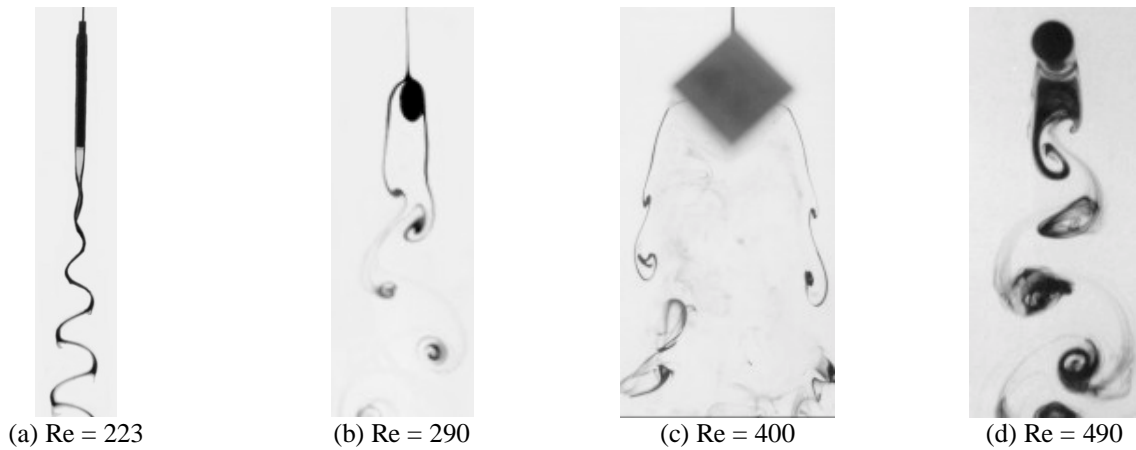


Figure 9. Flow, in different Reynolds, around prismatic bluff-bodies with several different cross-section geometries. (a) Rectangular cylinder, aspect ratio 15:1; (b) ellipsoidal with radius ratio = 260; (c) Square cylinder with high blockage ratio 23 %; (d) Circular cylinder.

A number of other methodologies may be employed in vortex wake studies as well as implemented in a laboratory classroom environment. Specifically, hot-film anemometry is used, satisfactorily, by Vieira (2000) to determine Strouhal number, while a detailed comparison between quantitative results obtained from hydrodynamic visualization and hot-film anemometry is available in Lindquist (2000). In fact different tools in experimental undergraduate classes may help providing several distinct teaching opportunities. Comparisons between direct measurements and visualization techniques are found in practically all reviews of flow visualization, although mostly due to the increasing use of PIV techniques. From the teacher viewpoint, however, flow visualization and direct measurements are complementary techniques at hand, as very well explained by Freymuth (1988).

The study of flow around airfoils is important for several applications, mainly in car competitions. Flows around foils motivate the students to Fluid Mechanics learning and a water tunnel seems to be quite an adequate way to help promoting this. Fig. (10) depicts a flow around a NACA 0012 airfoil in two configuration of attack angles – $\alpha = 0^\circ$ and 12° .

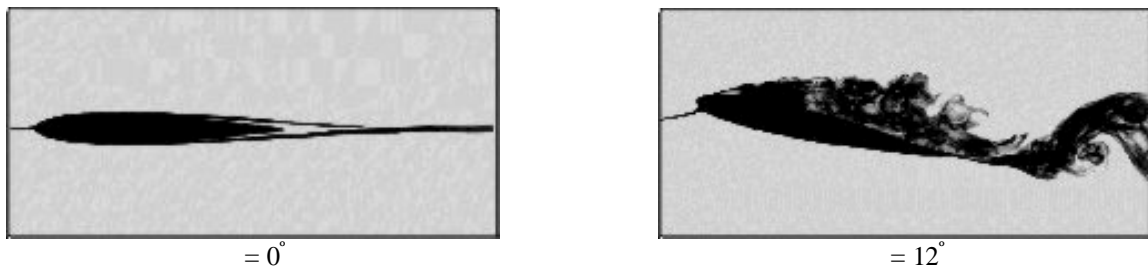


Figure 10. Flow around a NACA 0012 airfoil in two different attack angle configuration $Re = 5 \cdot 10^3$.

The determination of the wake flow configurations for several Reynolds number regimes to different geometries of bluff-bodies using hydrodynamic flow visualization is a experiment relatively easy and provokes good results. Fig. 11 shows a wake of a rectangular cylinder of aspect ratio 2:1 in two different attack angles ($\alpha = 0^\circ$ and $\alpha = 90^\circ$). The configuration of wake is a function directly dependent of the geometry.

Interpretation of streaklines demands a vigilant caution in unsteady wake mode. Streakline creates a deceptive illusion in unsteady flow, aspect carefully explained by Kurosaka & Sundaram, (1986) and Hama, (1962). Hydrogen bubble flow visualization may help the student understanding this complex problem. The fig. 12 shows a flow image using hydrogen micro-bubbles obtained using a long exposure time (around ¼ s) to obtain the picture. The flow is around a regular triangular cylinder and the tracers shows a image with an apparent absence of the vortices, offering an excellent opportunity, for the teacher, to explain the difference between streaklines and streamlines.

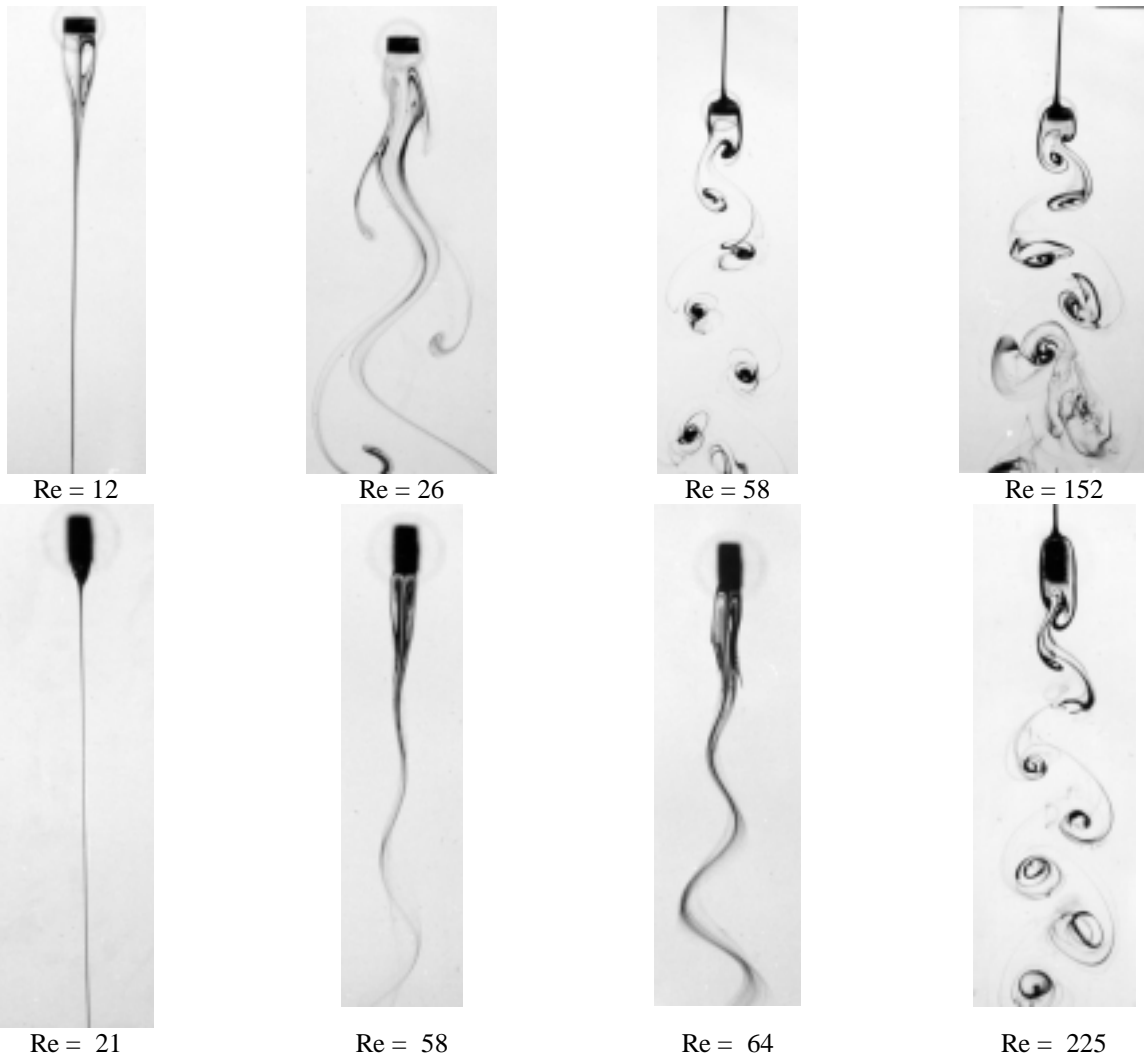


Figure 11. Flow wake a rectangular cylinder in two different attack angle configuration.

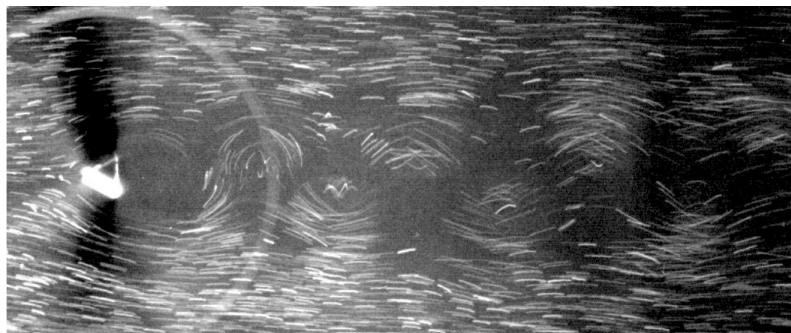


Figure 12. Image flow using hydrogen bubbles technique, Re = 170.

6. Conclusions

Leonardo Da Vinci (1452 – 1519) deduced the conservation of mass equation for incompressible, one-dimensional flow, and was also a pioneer in the flow visualization. Since da Vinci, 500 years ago, fluid mechanics science has been through an enormous development. Together, heavy mathematical load and complex theoretical concepts are needed to

explain the motion of fluids, and from the many tools available as support to the hard task of fluid mechanics teaching and learning, flow visualization is traditionally employed in classroom. Unfortunately, still pictures as well as old videotapes and films are the common rule in schools. In this paper, several hydrodynamic flow visualization examples have been proposed, as well as the corresponding resulting images are included. The flow generation as well as the image capturing and processing are tasks proposed to - and accomplished by - undergraduate students.

An aerodynamic tunnel is a invaluable tool in a fluid mechanics classroom laboratory environment since it provides a lot of several different didactical experiments. Along the same reasoning, employing a hydrodynamic tunnel even undergraduate students obtain a large variety of flow images, which reveal themselves as powerful tools to convey the concepts of fluid mechanics.

In the past, visual photographic methods have been used to gain qualitative understanding of flow fields. With the advent of modern image analysis, visual information can be converted into useful quantitative information that will enhance analysis and interpretation of physical phenomena. In this viewpoint, flow visualization associated to image processing offer a great opportunity for future new fields of work, see for further information in Brodkey (1986).

Experimental fluid mechanics has undergone an even quicker development in the recent days. In fact, the advent of cheaper computers, digital image processing, laser and new electronics compounds are imposing fast transformations in many scientific fields. Therefore modern fluid mechanics research still relies upon experimental tools, so that if fluid mechanics students desire to be prepared for the future, flow visualization and image processing will unquestionably continue to play a significant role in the process of learning.

Acknowledgement

Hydrodynamic Tunnel facility in Unesp - Ilha solteira has been recently modernized by FAPESP grants. The authors are thankful to Fundunesp and PROPP / Unesp.

References

- Alé, J.V.; Dias, D.S. Peña, R.M. and Cordeiro, C., 1999, "Visualização de Fluxo em Corpos Submersos com Técnica de Injeção de Corantes", Proceedings (in CD-ROM) of the COBEM 99 – XV Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia.
- Anderson Jr., A.D., 1988, "Fundamentals of Aerodynamics", McGraw-Hill Book Company, New York,
- Balint, E., 1953, "Techniques of Flow Visualization", Aircraft Engineering, vol. 25, pp.161-166.
- Batchelor, G.K., 1979, "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press.
- Brodkey, R.S., 1986, "Image Processing and Analysis for Turbulence Research", Chemical Engineering Education, vol.20, pp.202-207.
- Budwig, R.S.; Foss, J.S. and Stock, D.S. (ed), 1993, "Forum on Instructional Fluid Dynamics Experiments", ASME - FED-Vol.152, Washington.
- Campos-Silva, J.B., Vieira, E.D.R. and Moura, L.F.M., 1998, "Control Volume-Finite Element and Flow Visualization Methods Applied for Unsteady Viscous Flow Past a Circular Cylinder", Proceedings of the V CEM NNE - V Congresso de Engenharia Mecânica Norte e Nordeste, vol.2, pp.80-87, Fortaleza.
- Clayton, B.R. and Massey, B.S., 1967, "Flow Visualization in Water: A Review of Techniques". Journal of Science and Instrumentation, vol.44, pp.2-11.
- Clutter, D.W. and Smith, A.M.O., 1961, "Flow Visualization by Electrolysis of Water", Aerospace Engineering, vol.20, pp.24-76.
- Coutanceau, M. and Defaye, J.-R., 1991, "A Circular Cylinder Wake Configurations: A Flow Visualization Survey", Applied Mechanics Review, vol.44, n° 6, pp.255 – 305.
- Davis, W. & Fox, R.W., 1967, "An evaluation of the hydrogen bubble technique for quantitative determination of fluid velocities within clear tubes, Journal of Basic Engineering, vol.89, pp.771-781.
- Economikos, L.; Shoemaker, C.; Brodkey, R.S. and Jones, D., 1990, "Toward Full-Field Measurements of Instantaneous Visualizations of Coherent Structures in Turbulent Shear Flows, Experimental Thermal and Fluid Sciences, vol.3, pp.74-86.
- Erickson, G.E., 1981, "Vortex Flow Correlation", Air Force Wright Aeronautical Laboratory Report AFWAL - TR 80 3143, 200 p.
- Freytmuth, P.; Bank, W. and Palmer M., 1983, "Flow Visualization and Hot-Wire Anemometry", TSI Quartely.
- Gad-el-Hak, M. and Ho, C.-C., 1986, "Unsteady Vortical flow Around Three-dimensional Lifting Surfaces", AIAA Journal, vol.24, no. 5, pp.713-721.
- Gad-el-Hak, M., 1988, "Visualization Techniques for Unsteady Flows: An Overview", Journal of fluids Engineering, vol.110, pp.231-243.
- Gersten, K., 1983, "Immersed Bodies", in: Heat Exchanger Design Handbook, vol.2, pp.223.1-223.9, Hemisphere Publishing Co..
- Gonçalves, H.C. and Vieira, E.D.R., 1999, "Strouhal Number Determination for Several Regular Polygon Cylinders for Reynolds Number up to 600", Proceedings (in CD ROM) of the COBEM 2000 – XV Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia.

- Gonçalves, H.C. and Vieira, E.D.R., 2000, "Estudo da Esteira de Corpos Rombudos Utilizando Visualização de Escoamentos em Meio Hidrodinâmico", II Escola Brasileira de Primavera de Transição e Turbulência – ETT 2000, pp.388-400, de 11 a 15 de dezembro de 2000, Uberlândia, MG
- Gorecki, J.P., 1989, "Túneis Aerodinâmicos", Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, São José dos Campos.
- Hama, F.R., 1962, "Streaklines in a Perturbed Flow", *The Physics of Fluids*, vol.5, no.6, pp.644-650.
- Hasinger, S.H., 1968, "An Experiment with Particles in a Free Vortex", *AIAA Journal*, vol.6, n.5, pp.939-940.
- Kurosaka, M. and Sundaram, P., 1986, "Illustrative Examples of Streaklines in Unsteady Vortices: Interpretational Difficulties Revisited", *The Physics of Fluids*, vol.29, no.10, pp.3474-3477.
- Lindquist, C., 2000, "Estudo Experimental do Escoamento ao Redor de Cilindros de Base Quadrada e Retangular", Dissertação de mestrado, Unesp - Ilha Solteira.
- Lindquist, C., Vieira, E.D.R. & Mansur, S.S., 1997 "Análise Experimental do Escoamento ao Redor de Um Perfil de Base Quadrada em Dois Diferentes Ângulos de Ataque: $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 45^\circ$ ", Proceedings (in CD-ROM) of the COBEM 97 – XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, paper code: 058, 6 pp, Bauru, SP.
- Lindquist, C.; Mansur, S.S. and Vieira, E.D.R., 1999, "Flow Visualization of von Kármán Vortex Street: a Tool for Fluid Mechanics Learning", ICECE-Rio, International Conference on Engineering and Computer Education, 11-14 August, Rio de Janeiro.
- Merzkirch, W. F. 1966, "Making Flow Visible", *International Science and Technology*, n.58, pp.46-56.
- Merzkirch, W.F.; 1987, "Flow Visualization", Academic Press, Orlando.
- Mueller, T.J., 1983, "Flow Visualization by Direct Injection", in: *Fluid Mechanics Measurements*, Goldstein, R.J. (ed.), Hemisphere Publishing Corporation, pp.307-375.
- Nakayama, Y., 1988, "Visualized Flow - Fluid Motion in Basic and Engineering Situations Revealed by Flow Visualization", Pergamon Press.
- Okajima, A., 1982, "Strouhal Numbers of Rectangular Cylinders", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.123, pp.379–398.
- Prandtl, L. and Tietjens, O.G., 1957, "Applied Hydro- and Aeromechanics". Dover Publications, Inc. New York.
- Rae Jr., W.H. and Pope, A., 1984, "Low-speed Wind Tunnel Testing", John Wiley & Sons, New York.
- Settles, G.S., 1986, "Modern Developments in flow Visualization", *AIAA Journal*, vol.24, n.8, pp.1313-1323.
- Vieira, E.D.R., 2000, "A Laboratory Class for Introducing Hot-Wire Anemometry", ICECE 2000 - International Conference on Engineering and Computer Education, São Paulo, SP.
- Vieira, R.C.C. "Atlas de Mecânica dos Fluidos - vol.1: Estática, vol.2: Cinemática, vol.3: Fluidomecânica." Editora Edgard Blüsher Ltda, 1971.
- Yang, W.-J.(ed.), 1989, "Handbook of Flow Visualization", Hemisphere Publishing, Washington DC.
- Werlé, H., 1953, "Visualisation en Tunnel Hydrodynamique - Dispositifs Réalisés - Méthodes Utilisées - Résultats Obtenus", *La Recherche Aéronautique*, n° 33, pp.3-7, 1953 ou ONERA T.P. n° 33,.
- Werlé, H., 1973, "Hydrodynamic Flow Visualization", *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol.5, pp.361-382. Also available in ONERA Technical Publications – T.P. n.1222-1973.
- Werlé, H., 1982, "Flow Visualization Techniques for the Study of High Incidence Aerodynamics". O.N.E.R.A. T.P. n1982-5. AGARD VKI Lectures Series 121. "Aérodynamique à Haute Incidence". Institut von Kármán, Rhode St Genève, Also available in ONERA Technical Publications – T.P. n. 1982-5.
- Werlé, H. and Gallon, M., 1982, "Le Nouveau Laboratoire de Visualisation Hydrodynamique de la Direction de l'Aérodynamique". *La Recherche Aérospatiale*, n5, p.289-311,
- Winter, E.F. and Deterding, J.H, 1956, "Apparatus and Techniques for the Application of a Water Flow System to the Study of Aerodynamic Systems". *British Journal of Applied Physics*, vol.7, n° 7, pp.247 – 260.

CONCEPTUAL ASPECTS AND PRELIMINARY TESTS FOR THE FLEXIBLE BLADE FLOWRATE MEASUREMENT TRANSDUCER

Alcir de Faro Orlando

Mechanical Engineering Department, PUC-Rio, R. Marquês S. Vicente 225, CEP 22453-900, Rio de Janeiro
e-mail afo@mec.puc-rio.br

Marcelo de Bastos Lavrador

Mechanical Engineering Department, PUC-Rio, R. Marquês S. Vicente 225, CEP 22453-900, Rio de Janeiro

Marcus Frederico Sousa Meneses

Mechanical Engineering Department, PUC-Rio, R. Marquês S. Vicente 225, CEP 22453-900, Rio de Janeiro

Rodrigo de Paula Mota

Mechanical Engineering Department, PUC-Rio, R. Marquês S. Vicente 225, CEP 22453-900, Rio de Janeiro

Flavio Gryner

Mechanical Engineering Department, PUC-Rio, R. Marquês S. Vicente 225, CEP 22453-900, Rio de Janeiro

Abstract. A fluid flowrate measurement transducer was developed, patented and tested under different operating conditions, aiming the determination of its performance. The basic principle of operation is the deformation of a metallic blade submitted to hydrodynamic forces of the flow field around it. The deformation is measured by a temperature compensated strain gage circuit, which also measures the flow field direction, according to the transducer electrical output sign. The fluctuating force field acting on the blade surface, as a result of the hydrodynamic turbulent flow around it, was responsible for a higher uncertainty of measurement. Therefore, several runs had to be performed to increase the reliability of the results. The flow rate range can be adjusted by varying the angle of attack of the flow field. Besides the calibration curve of the sensor and its measurement uncertainty, under different operating conditions, suggestions are given to further decrease its uncertainty of measurement, as compared to other existing instruments in the market.

Keywords. Flowrate measurement, Flexible blade transducer, Transducer performance analysis.

1. Introduction

The need of having a flowmeter, that also measures the direction of the flow, resulted in the development of a transducer to be presented in this paper. In order to be used for industrial applications, tests had to be conducted to determine its calibration, repeatability and uncertainty of measurement, besides temperature dependence. This paper presents the results and a critical analysis of its use in comparison with other available transducers.

The principle of operation is the relationship between the flowrate and the net force that acts on a blade, when it is placed in a flow field and submitted to a hydrodynamic pressure profile along its surface. In order to increase the sensitivity of force measurement, a flexible blade was used as a transducer, and its deformation was measured by a temperature compensated strain gage circuit. The advantage of using this device is the possibility of increasing its operating flowrate range by varying the angle of attack of the main flow with respect to the blade. This can be obtained by rotating the blade around its axis.

When an object moves through a fluid, a resistance to its motion, called drag, appears as the result of the hydrodynamic force profile that arises along its surface. The fluid deviates from the surface of the object, and a boundary layer is established along it. The so called skin drag is the result of the tangential forces due to the velocity gradient in the normal direction to the surface. The form drag is the result of the net pressure distribution along the surface. Usually, the form drag is much higher than the skin drag, which is usually neglected for practical applications. Shapiro (1961) analyses the fluid dynamics of the drag, showing experimentally how it can be a function of shape, velocity and fluid properties. Schlichting & Kestin (1968) analyses the fluid flow over cylinders and spheres, showing that the drag can be also a function of the separation point. For bodies with sharp edges, it can be shown that the drag coefficient is almost independent of Reynolds number. Mark's (1958) presents its value for several shapes. Thus, it can be concluded a blade provides an almost linear relationship between force and second power of velocity over a wide range of Reynolds number, which is very good for measurement purposes.

The experimental problem of measuring accurately force on the blade can be solved by using a thin blade, so that it becomes flexible under the action of the hydrodynamic forces. The usual method is to attach strain gages on both sides of the blade, with a temperature compensation circuit, so that strain can be measured and related to force. Due to the

fact that the fluctuating pressure of the wake side of the blade induces its vibration, the measurement scheme must give the average value of the force, which will be related to the velocity, thus reducing uncertainty of measurement.

This paper describes the development of the transducer, giving metrological information to the end user.

2. Theoretical aspects

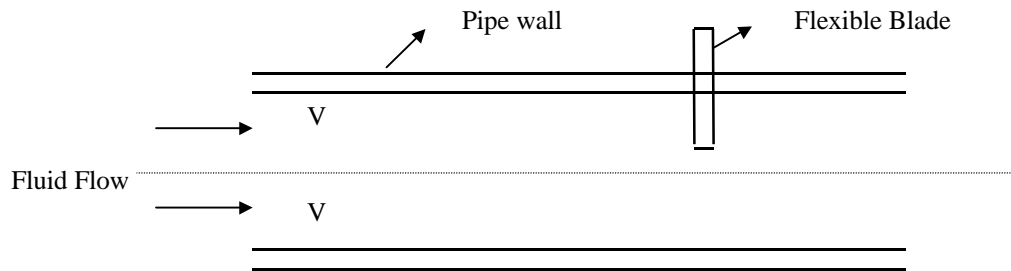


Figure 1 : Measurement device in the flow field at velocity V

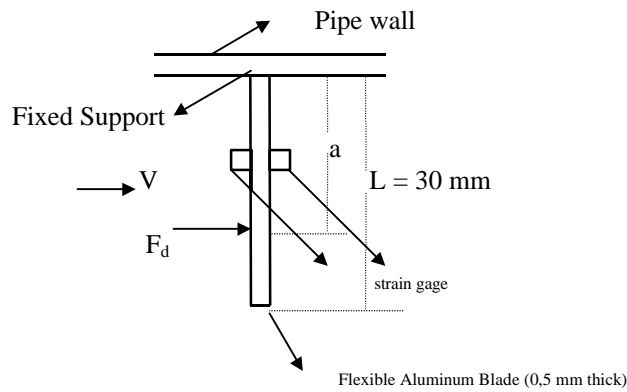


Figure 2 : Schematics of the measurement system

Figure 1 shows the flexible blade placed perpendicularly to the flow field at velocity V. Figure 2 shows that the blade is attached to the pipe wall by a fixed support, so that translational and rotational movements are prevented. Due to the action of the flow field at velocity V, a hydrodynamic drag force acts against the flexible blade, bending it, with the tip the blade being the point of maximum deflexion δ . F_d is considered as the net drag force resulting from the pressure distribution along the blade surface. When the flow direction is inverted, the blade is bent towards the other side. The drag coefficient C_d is defined as :

$$C_d = (F_d / A_b) / (\rho \cdot V^2 / 2) \tag{1}$$

where,

ρ is the fluid specific mass

A_b is the pojected area of the blade , perpendicularly to the flow field

According to Mark's (1958), the drag coefficient for rectangular plates varies from 1,16 (thin blade) to 2 (thick blade).

The fluid mass flow rate in the pipe (m) can be calculated as :

$$m = \rho \cdot V \cdot A \tag{2}$$

where,

A is cross section area of the pipe.

The literature presents the solution for the problem of the determination of the deflection and deformation of beams subjected to a concentrated load or a uniformly distributed load, or even the formulation of the problem when the load has an arbitrary profile. The difficulty in using these solutions for determining the relationship between deformation and fluid flow rate is that the load must be known for different operating conditions. Also, because of the fact that there is an uncertainty in positioning the strain gages for load and deformation measurement, there can be an

uncertainty in determining the flow rate from these theoretical relationship. Moreover, the flow velocity varies along the pipe radius. Thus, the blade is submitted to a varying velocity field along its length. It is therefore much more reliable to calibrate directly the output signal from the transducer as a function of flow rate and attack angle, after having positioned the probe.

The principle of operation of the transducer of this paper is the variation of its deflection with fluid flow velocity. The usual way of measuring deflection is by using strain gages on the blade surface. Because of the fact that the strain gage resistance is a function of its deformation and temperature, the separation of the two effects must be conducted so that deformation be measured accurately. The strain gage temperature (equal to fluid temperature) can be measured and its contribution to resistance determined. Or, a temperature compensated circuit can be used, so that only the contribution of deformation in the strain gage resistance be available in the transducer output signal.

Beckwith & Buck (1961) describe a temperature compensated strain gage circuit for measuring deformation in a thin beam. Two strain gages are placed on each side of the beam, at the same position along the neutral line. Two of them are subjected to tension, and two of them are subjected to compression. If the four strain gages are part of a complete resistance measuring Wheatstone bridge, the contribution of temperature in the output signal is negligible, and the output signal is amplified by a factor of two, with respect to a simple circuit.

This paper presents the metrological characteristics of the transducer as a function of fluid flow velocity and angle of attack, which was varied by rotating the blade with respect to its axis, thus enabling the transducer to be used at different velocities with the same sensitivity.

3. Experimental facility

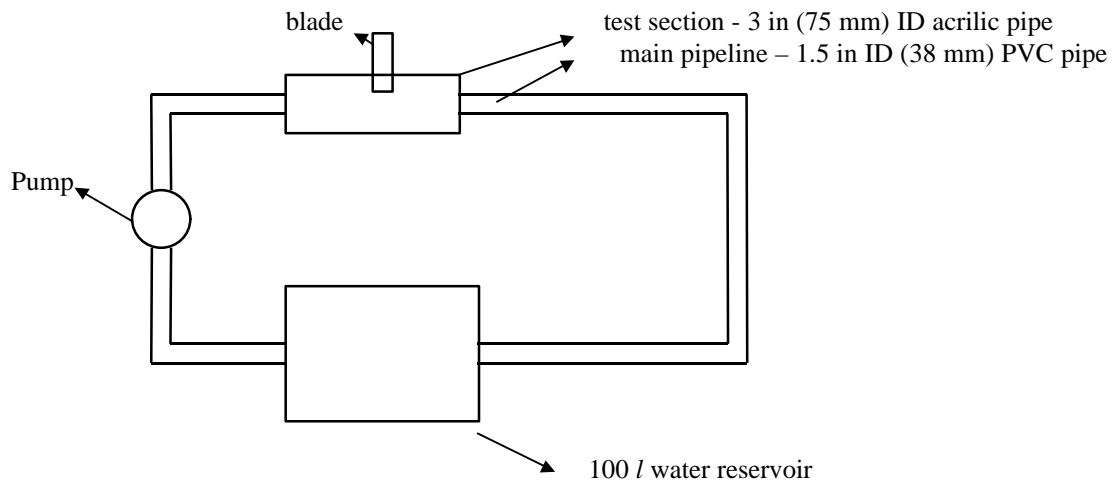


Figure 3 : Schematics of the test section

The experimental facility consists of a 100 l water reservoir and a test section. A pump circulates water between the two components. A three way valve deviates the water flow to a bucket, where both the amount of water and time are measured, thus determining the flow rate. The transducer is placed in the middle of the 700 mm long test section. The aluminum blade is 30 mm long, 0.5 mm thick, and 5 mm wide, protruding into almost the tube centerline. The strain gages are placed in the middle of the blade, two of them at each side.

During the tests, it was noted that the water temperature in the closed loop kept on rising continuously until reaching the steady state., because of the energy supplied by the pump. It was soon observed the the strain gage measurement system did not have a temperature compensation scheme, the uncertainty would be larger. Even though, it was decided to only take measurements under steady state conditions. In a closed loop mode, it took about 6 hours so that the temperature would be stable 23 °C above the initial value. The solution to get a more rapid steady state was to use a constant level water reservoir, rather than a closed loop, with the overflow water thrown directly into the sump. As a result, the water temperature in the test section got stable after 20 minutes, and 2 °C above the initial value.

During the calibration, the weight of the water in the bucket was measured by a balance to within ($U_M = \pm 20$ g). In order to decrease the uncertainty, three values were measured for each point. Time was measured with a stop watch with an uncertainty of ($U_t \pm 0.2$ s), that includes the operator reaction time. The transducer signal, as a result of the unbalance of the Wheatstone bridge, was measured with a commercially available KRATOS bridge to within ($U_E = \pm 0.1$ mV). The bridge output signal indicates the direction of the flow.

As a first estimate of the uncertainty of results in the range of experiments, the unbalance of the bridge could be measured at best to within ($U_E / E = \pm 0.5\%$). Flow rate could be measured to within ($U_Q / Q = \pm 0.2\%$), at best. Therefore, flow rate could be estimated from calibration curve and measurement of the unbalance of the bridge to

within ($U / Q = \pm 0.53\%$), at best. It was soon discovered that if a lower uncertainty was to be obtained, a better way of measuring the unbalance of the bridge should be used.

Finally, in order to reduce the uncertainty of measurement, an averaging scheme was used by means of integrating the output from the KRATOS bridge with a oscilloscope every 5 μ s. The resulting uncertainty was approximately the same as before. The transducer was calibrated for attack angles of 0°, 20°, 40°, 60° and 80°. The attack angle is defined as the angle between the line that is perpendicular to the blade surface and the direction of the flow field, which coincides with the tube axis, being zero when the blade is perpendicular to the flow field.

4. Results and Analysis

For each attack angle, several water flow rates in the 0.3 to 1.7 kg/s range were chosen. At least three measurements were taken for each point. Considering 16 to 23 points for each attack angle, at least 48 to 69 points were taken in this calibration.

A least square procedure was used to fit the experimental data, using 1, 2, 3 and 4 degree polynomials. Its degree was chosen so that the root mean square deviation of the fitting (u_{fit}), was a minimum value. A three or four degree polynomial is shown to better fit the experimental data, as approximately predicted by a theoretical analysis. Table 1 presents the coefficients of the following polynomial :

$$Q = C_1 + C_2 .E + C_3 .E^2 + C_4 .E^3 + C_5 .E^4 \tag{3}$$

where,

Q is the flow rate, kg/s

E is the transducer signal, mV

u_{fit} is the root mean square deviation, kg/s

Table 1 : Coefficients of the polynomial fitting and root mean square deviation (u_{fit})

Coefficient	Attack Angle				
	0°	20°	40°	60°	80°
C_1	0.169651995	0.245154247	0.237067627	0.244548572	0.251866602
C_2	0.240137292	0.123825226	0.154449515	0.201446469	0.399778691
C_3	-0.02192121	0.006285259	-0.00829194	-0.01450311	-0.04128774
C_4	0.001212308	-0.00132894	0.000255656	0.000758089	0.001985333
C_5	-0.00002623	0.000047832	0	0	0
u_{fit}	0.0355	0.0466	0.0485	0.0383	0.0366

Figure 4 presents a plot of the fitting in Table 1. It can be seen that the transducer signal reaches a maximum value for the 20° and 40° attack angle condition, being minimum for the 80° attack angle condition. Furthermore, it is clearly seen that if higher values of flow rates are to be measured, a larger attack angle has to be used to increase the transducer signal. Due to the fact that the sensisitivity of the transducer with respect to its signal is lower, higher values of flow rate still result in operating the transducer in the elastic deformation range of the blade.

The uncertainty of flow rate measurement with the transducer was calculated following (ISO Guide, 1995) directions, at a confidence level of 95.4% ($k=2$).

Uncertainties of transducer signal, water mass and time were considered to be of the A type, because they were obtained from calibration . Thus, the the standard uncertainty could be estimated dividing the expanded uncertainty by 2. The combined standard uncertainty (u) can be calculated from the knowledge of three values.

- (1) Standard uncertainty of the fitting (u_{fit}), as given by Table 1.
- (2) Standard uncertainty of flow rate (Q), from the knowleged of its definition .

$$Q = M / t \tag{4}$$

where,

M is the the water mass in the bucket, kg

t is a fixed time for flow rate measurement, 5 seconds

The flow rate uncertainty (u_Q) can be calculated as

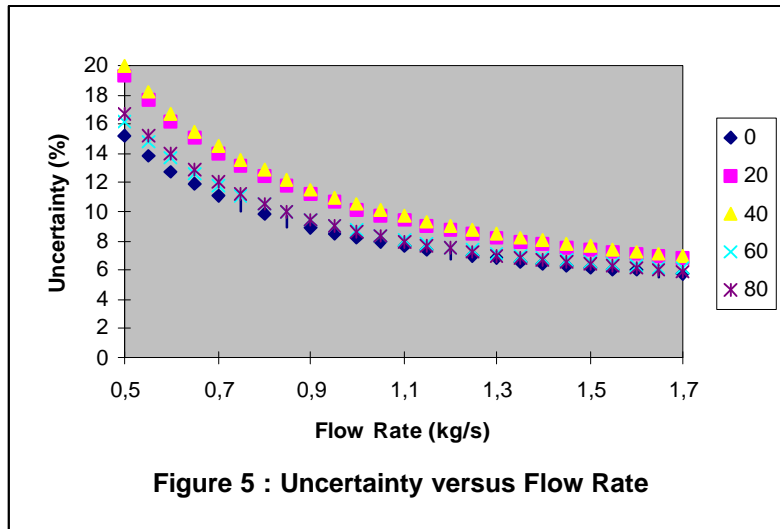
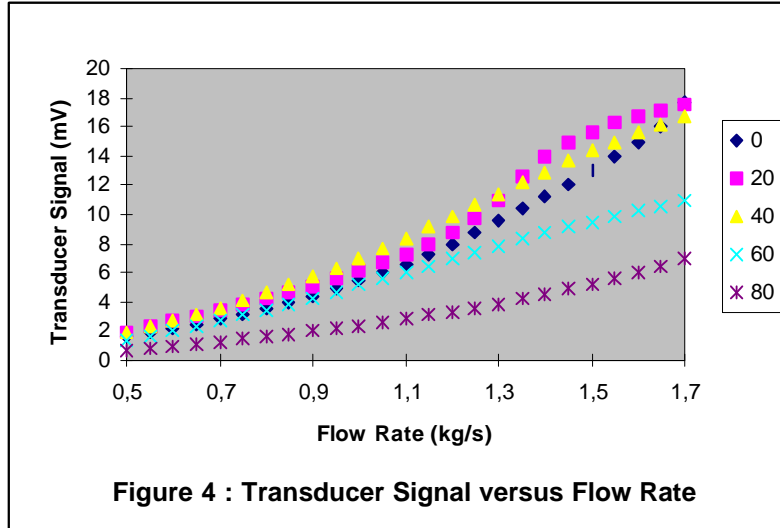
$$(u_Q / Q)^2 = (u_M / M)^2 + (u_t / t)^2 \tag{5}$$

where,

u_M is the standard uncertainty for mass measurement, $u_M = 0.010$ kg

u_t is the standard uncertainty for time measurement, $u_t = 0.1$ s

t is the fixed time for flow rate measurement, $t = 5$ s



(3) Standard uncertainty of the transducer signal measurement, u_{transd}

$$u_{transd} = c_E \cdot u_E \tag{6}$$

u_E is the standard uncertainty of transducer signal measurement, $u_E = 0.05$ mV

c_E is the coefficient of sensitivity (partial derivative of Q with respect to E , using Eq. (3))

The combined standard uncertainty (u) of flow rate measurement with the transducer, using Eq.(3), can be calculated as

$$u = ((u_Q)^2 + (u_{transd})^2 + (u_{fit})^2)^{1/2} \tag{7}$$

The expanded uncertainty of flow rate measurement with the transducer (U), using Eq.(3), with a coverage factor $k=2$ is :

$$U = 2.u \quad (8)$$

Figure 5 presents the calculated percentual expanded uncertainty of flow rate measurement (I) for different attack angles, defined as :

$$I = 100. U / Q \quad (9)$$

It can be seen that the lowest uncertainty condition is for the angle of attack of 0° . The highest uncertainty is for 20° and 40° , where the transducer signal is higher. Also, the uncertainty levels off in the 5.8% to 7.0% range, for higher flow rates. The transducer is not adequate for low flow rate values, because it has high uncertainties.

Upon examining the values of uncertainties obtained with this transducer, it can be seen that there more accurate commercial transducers in the market. The flexible blade transducer is less expensive than others , has a very good spatial resolution not interfering too much with the flow field , which results in smaller pressure drops. Therefore, an attempt has to be made for reducing its uncertainty of measurement.

It was observed that the fluctuating signal of the transducer is responsible for most of the overall uncertainty. Thus it can be concluded that if a better measurement transducer signal be used, including a better averaging scheme, the uncertainty can be greatly reduced, by probably a factor of 2. Therefore, the transducer signal should be measured to within ± 0.05 mV, at least.

The calibration could also be improved by increasing the time required for filling the bucket to probably 30 s.

Finally, the transducer should be specified for operating in its highest range for reducing uncertainty. Its performance can be compared to the rotameter one.

5. Conclusions

A flexible blade transducer has been developed and patented for measuring flow rate.

The transducer operates under the principle of the deformation of a flexible blade, as measured by a complete temperature compensated Wheatstone bridge, with strain gages attached to both sides of it.

The transducer signal can be varied by rotating the blade around its axis, thus changing the attack angle. It was shown that 20° to 40° range attack angle condition has the highest sensitivity, although also the highest uncertainty of measurement. If a higher flow rate is to be measured, a larger attack angle should be used and the transducer still be operated in the elastic deformation range of the blade.

It was shown that the fluctuation of the transducer signal was responsible for most of the contributions to the overall uncertainty of measurement. Thus it was concluded that a better signal averaging scheme, together with a more accurate transducer signal measurement has to be used to greatly reduce the overall uncertainty of results. If this is done, the transducer competes approximately in performance with a rotameter, being, at the same time, less expensive and more flexible, as far as measurement range is concerned.

6. References

ISO Guide, 1995, "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", International Organisation for Standardisation _ISO, Switzerland.

Marks, 1958, "Mechanical Engineers Handbook", McGraw - Hill Book Company, New York, USA.

Schlichting, H. & Kestin, J., 1968, "Boundary Layer Theory", McGraw - Hill Book Company, New York, USA.

Shapiro, A.H., 1961, "Shape and Flow : The Fluid Dynamics of Drag", Anchor Books, New York, USA.

ESTRUTURA DE SUB-CAMADA VISCOSA EM CAMADA LIMITE TURBULENTO NA PLACA POROSA PENETRÁVEL

Vlassov D.

Departamento de Engenharia Mecânica, da Universidade Federal do Paraná, Centro politécnico, C/P 19011, Curitiba - PR - Brasil, CEP 81531-990, E-mail: vlassov@demec.ufpr.br

Resumo. No trabalho são apresentados dados de investigação experimental de estrutura de sub-camada viscosa em camada limite turbulenta sobre um plano poroso no caso de insuflação. O ensaio foi feito em túnel aerodinâmico em condições isotérmicas, aproveitando termoanemômetro de fio quente. Foi determinado que a insuflação através de parede porosa provoca deformação de camada limite turbulenta em particular em sub-camada laminar. Medições de perfis de velocidade média perto da parede mostram que a distribuição linear de velocidade continua existir mesmo em condições de insuflação que permite calcular diretamente coeficiente de atrito superficial. Foi determinado que na sub-camada viscosa, mesmo perto da superfície, existem vórtices de turbulência, mas caráter de turbulência não é regular.

Palavras chave: camada limite turbulenta, parede porosa, aero-gasodinâmica, transferência de calor e de massa.

1. Introdução

Materiais porosos fabricados de grades metálicas encontram aplicação prática na tecnologia de ponta. A insuflação e a sucção de ar através de paredes porosas de superfícies externas de corpos aerodinâmicos exerce uma influência sobre desenvolvimento de camada limite (Kutateladze S.S., 1990) e características aerodinâmicas. Em particular, a insuflação de ar através de paredes porosas pode ser usada para mudar sustentação e arrasto de asas e de órgãos de controle de vetor de empuxo.

Paredes porosas são usadas na prática de proteção térmica de paredes de câmaras de combustão de motores foguete. Dos vários métodos da proteção térmica mais usado é o de arrefecimento das paredes por "transpiração" (Kutateladze S.S., 1990; França G.A.C., 1996). Neste caso as paredes internas das câmaras são feitas de materiais porosos, através de que um fluido é insuflado para a superfície interna de câmara de combustão. O fluxo de calor dirigido de produtos de combustão para a parede é gasto para aquecimento e evaporação do fluido. Há de notar, que o próprio fluxo de calor neste caso é muito menor, por que perto de parede na camada limite forma-se uma película do valor saturado ou superaquecido do fluido. A vantagem deste método de arrefecimento de paredes consiste em grande eficiência e economia.

O desenvolvimento de teoria de camada limite turbulenta em condições de insuflação através de paredes porosas e de métodos da proteção térmica, elaboração de seguros modelos matemáticos e de simulação numérica exigem conhecimentos profundos de fenômenos de transporte turbulento da energia e da massa na camada limite.

1. 1. Hipótese de três sub-camadas.

A contemporânea concepção de camada limite turbulenta é baseada com modelo de três zonas (Hinze J.O., 1959; Schiozer D., 1996). A primeira zona é a zona situada em íntima proximidade de superfície da parede, ela é chamada a sub-camada viscosa ou a sub-camada laminar. A espessura da sub-camada viscosa δ_v na parede impenetrável faz parte de 0,001 a 0,01 da espessura total da camada limite δ . Na sub-camada viscosa as tensões tangenciais viscosas

$\tau_v = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$ são maiores que as tensões turbulentas de Reynolds $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$, pois $\tau_v > \tau_t$.

onde: μ viscosidade dinâmica,
 U componente longitudinal da velocidade,
 y coordenada vertical,
 ρ densidade,
 u' componente longitudinal de flutuação turbulenta da velocidade,
 v' componente vertical de flutuação turbulenta de velocidade,
 $\overline{u'v'}$ valor médio de produto instantâneo das componentes de flutuação turbulenta da velocidade.

Em parte externa da camada limite, na zona três, é o contrário, as tensões turbulentas são maiores que as viscosas $\tau_t > \tau_v$. Nesta zona realiza-se uma interação mútua entre a camada limite e o escoamento principal. A espessura da terceira zona em condições da placa impenetrável faz parte de 0,8 a 0,9 da toda da espessura da camada limite. A insuflação diminui a espessura da zona externa. O valor de tensões viscosas nesta zona é menosprezível e faz parte só de ordem de por cento das tensões turbulentas. Medições e análise de perfis da velocidade e das tensões turbulentas na

camada limite turbulenta, em condições de valores moderados e grandes da insuflação, mostram que o desenvolvimento desta zona não depende de condições na superfície e da intensidade de insuflação (Vlassov D., 1975).

O gráfico de perfis de velocidade adimensional na zona três da camada limite $\bar{U} = \frac{U}{U_\infty} = f(y)$, construído em função de distância não de parede, mas sim de distância de fronteira externa da camada limite, apresenta que todos perfis de velocidade na terceira zona coincidem independentemente de intensidade da insuflação (U_∞ é a velocidade de escoamento principal). A análise analítica de perfis da velocidade e de tensões turbulentas apresenta que variações de velocidade longitudinal na terceira zona satisfazem uma curva de variação de velocidade em um jato plano. No caso de ausência da insuflação o perfil da velocidade na camada limite sobre o plano coincide com o perfil da velocidade no jato plano na faixa de velocidades de $1 \leq \bar{U} \leq \frac{2}{3}$. Com aumento de insuflação esta faixa se alarga e, por exemplo, em presente ensaio, para $\bar{V}_w = \frac{V_w}{U_\infty} = 0,0243$ a faixa se alarga de $1 \leq \bar{U} \leq 0,2$ (nota: o índice "w" indica que o valor de parâmetro da parede).

É óbvio que fazer a medição de distribuição da velocidade nesta zona não apresenta dificuldades, mas a forma destes perfis da velocidade não tem nenhuma correlação com o atrito superficial e não contem e por isso não pode dar uma informação sobre condições na superfície da parede na camada limite.

Entre a primeira e terceira zonas está situada segunda zona, chamada de núcleo turbulento. Nesta zona considera-se que a tensão viscosa é igual à turbulenta, $\tau_v = \tau_t$. Resolução analítica empregando essa igualdade, em condições da placa impenetrável, apresenta existência de um trecho logarítmico no perfil da velocidade. Medições feitas na placa penetrável apresentam que com aumento da intensidade de insuflação a parte logarítmica do perfil da velocidade gradualmente desaparece e assim perde-se a informação sobre condições na superfície.

A maior intensidade de variação de parâmetros na camada limite ocorre, em sub-camada viscosa. Pequena espessura desta sub-camada muito dificulta o estudo instrumental de fenômenos físicos que ocorrem perto da parede.

1. 2. Descrição do modelo e de túnel aerodinâmico.

O modelo experimental apresentou uma placa de comprimento total de 2530 mm e de largura de 400 mm. A placa foi constituída de um trecho inicial impenetrável de comprimento de 1000 mm; de um trecho de placa porosa penetrável de comprimento de 1030 mm e de um trecho traseiro impenetrável de comprimento de 500 mm. O comprimento de trecho inicial garantiu uma camada limite turbulenta desenvolvida no início do trecho poroso, $Re_x \approx 6,5 \cdot 10^5$. O comprimento de trecho traseiro foi escolhido para evitar a influência sobre camada limite por cima da placa porosa de descolamento do fluxo de borda traseira do modelo.

A placa porosa foi fabricada por método de laminagem a quente no meio de vácuo de um pacote de grades (tecidos de aço) feitas de aço inoxidável. O pacote foi constituído por 20 camadas das grades de arame relativamente grossa; por cima delas mais 8 camadas das grades de arame de diâmetro de 0,09 mm com a célula quadrada de 0,14 x 0,14 mm e por cima delas mais 10 camadas das grades de fina arame de diâmetro de 0,055 mm com a célula de 0,071 x 0,071 mm. O uso no pacote das últimas grades finas (que depois de laminagem constitui a superfície externa da placa porosa) permitiu adquirir a mínima rugosidade da superfície e pequenos tamanhos de poros. Dimensões da placa porosa depois de usinagem foram: 1030 x 399 mm, espessura de 7,75 mm. A massa de ~22 kg. A porosidade do material de poroso P foi de 11,8%. A porosidade de material da placa foi calculada pela fórmula

$$P = \frac{\rho_c - \rho_p}{\rho_c} 100\% , \tag{1}$$

onde: ρ_c - densidade de aço inoxidável de que foi feita a arame das grades,
 ρ_p - densidade de material poroso.

O valor médio de poros é de 15 mkm. A placa porosa foi soldada por cima de uma caixa de altura de 80 mm. Dentro da caixa por baixo da placa porosa foi montado um sistema de distribuição uniforme do ar de insuflação.

A uniformidade de insuflação do ar pela superfície da placa porosa foi verificada usando um medidor de microvazões feito com base de termoanemómetro. A variação de velocidade da insuflação pela toda a placa ficou na faixa de $\pm 10\%$ e no meio da placa, onde foram feitas as medições, na faixa de $\pm 5\%$. Durante o ensaio a velocidade do ar de insuflação V_w foi variada discretamente $V_w = 0,0; 0,05; 0,1; 0,142; 0,18; 0,212, 0,243$ m/s.

O ensaio experimental foi realizado em um túnel aerodinâmico subsônico, com a câmara de Eiffel, de Universidade Federal de Moscou. O bocal deste túnel tem um dispositivo celular (honeycomb) para uniformizar o fluxo do ar na entrada. A parte de trabalho do túnel é feita em forma de um octógono regular com distância entre lados opostos de 800 mm e de comprimento de 1750 mm. A corrente do ar no túnel é criada com uma hélice de 12 pás situada na saída do difusor. A hélice, através de uma luva eletromagnética, é acoplada com um motor de corrente alternada. A luva

eletromagnética serve para controlar rotações da hélice. Para evitar a influência de variação casual de tensão elétrica e de variação de temperatura das peças do túnel sobre o número de rotações foi montado um esquema eletrônico com taquímetro e acoplamento por reação. No ensaio, com ajuda desse esquema, as rotações da hélice foram mantidas constantes, garantindo valor constante de velocidade do ar do escoamento principal na parte de trabalho.

Parâmetros do fluxo do ar no túnel: a velocidade do ar $U_{\infty} = 10 \text{ m/s}$ ($\pm 0,5\%$); a taxa de turbulência da corrente do ar na parte de trabalho variou de $0,5\%$, na saída do bocal foi a $0,7\%$ na entrada do difusor; a temperatura do ar 20 ($-2+10$) °C; gradiente de pressão na parte de trabalho foi nula $\frac{dp}{dx} = 0$.

2. Metodologia usada

2. 1. Correção de influência de parede

No ensaio foi usado um kit de termooanemómetro de temperatura constante DISA de produção dinamarquesa. O sensor do termooanemómetro tinha um fio de diâmetro de 5 microns e de comprimento de $\sim 1,2$ mm, feito de tungstênio e coberto por uma camada de platina para evitar a corrosão do fio.

Em muitos trabalhos científicos foi estabelecido que com a aproximação do fio de sensor do termooanemómetro para a parede o processo de transferência de calor entre do fio e ambiente sofre uma intensificação. Pois o sinal do termooanemómetro aumenta. As causas que provocam a intensificação de transferência de calor do fio ainda não são bem claras, mas o aumento do sinal é considerável e exige uma correção.

Neste trabalho a influência da parede sobre o sinal do termooanemómetro foi compensada por uma correção E_{cor} [V] do sinal do termooanemómetro. O valor da correção, em caso geral, depende: de distância do fio da superfície; de superaquecimento do fio (de temperatura do fio); de material de parede e de geometria do sensor. O valor do superaquecimento do fio a ($a > 1$) é controlado por aumento da resistência do fio no estado de trabalho R_t em relação a resistência do fio frio R_f (à temperatura do ambiente) $a = \frac{R_t}{R_f} - 1$. O superaquecimento do fio mantinha-se constante

durante a calibração do sensor no túnel aerodinâmico e no ensaio. Foi estabelecido que com aumento do superaquecimento do fio a influência da parede sobre o sinal também aumenta. Foi estabelecido, também, que quanto maior for a condutividade térmica do material da parede tanto maior será a influência sobre o valor da correção.

Neste trabalho foi feita uma suposição que o sinal de termooanemómetro não depende de velocidade de escoamento, mas sim depende só de distancia entre fio e a superfície da placa, pois $E_{cor} = E_{cor}(y)$. Com base desta suposição a fórmula de King em condições de escoamento perto da parede pode ser apresentada

$$E^2 = E_0^2 + E_{cor}^2 + kW^n, \tag{2}$$

- onde:
- E - sinal do termooanemómetro, em V;
 - E_0 - sinal no ar parado e fora da parede, em V;
 - E_{cor} - correção, em V;
 - k - coeficiente;
 - W - velocidade do ar, em m/s;
 - n - potência que depende de tipo de sensor, $n \approx 0,5$.

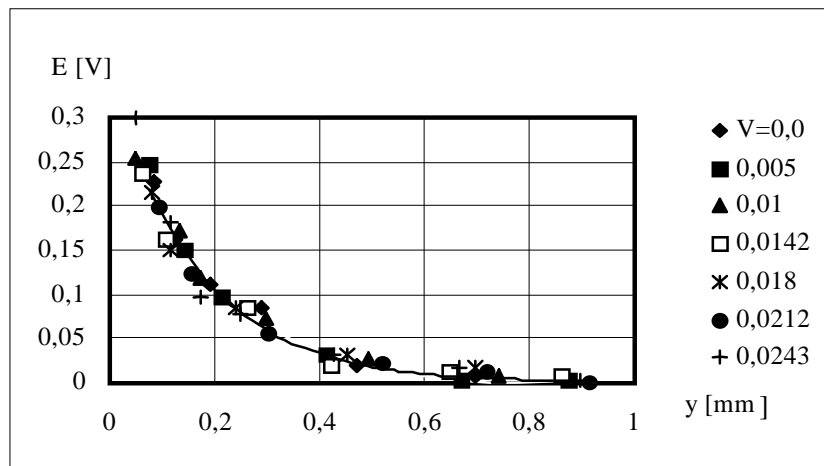


Figura 1. Influência de distância da parede e de insuflação sobre a correção

Para determinar a influência da parede e da velocidade da insuflação sobre o valor da correção foi feito um ensaio especial em que foram registrados sinais do termoanemómetro em função da distancia da parede. A distância do fio à parede (coordenada y) foi medida com um catetómetro ótico com exatidão de 0,001 mm. As leituras foram tiradas em ausência do escoamento principal do ar, variando só a velocidade do ar injetado. Para evitar a influência de correntes casuais do ar o sensor foi envolvido em uma tela protetora cilíndrica. Na figura 1 é apresentado aumento de leituras de termoanemómetro $E_{corr}(y)$ provocado pela parede em função de distância da parede e de velocidade relativa de insuflação $\bar{V}_W = \frac{V_W}{U_\infty}$. O ensaio revelou que o valor da correção E_{corr} não depende de velocidade do ar insuflado, pois a correção depende só da distância da parede, $E = f(y)$

2.2. Metodologia de decomposição do vetor de velocidade

Em condições da insuflação, linhas de corrente (trajetórias) sofrem uma variação muito grande. Diretamente na parede existe só a componente vertical da velocidade V_W dirigida pelo eixo y e na fronteira externa da camada limite existe só a componente longitudinal da velocidade igual à velocidade de escoamento principal U_∞ . Pois o vetor de velocidade muda sua direção de vertical na parede até a horizontal fora da camada limite. Para medir as componentes de velocidade V e U foi usada uma metodologia especial publicada em (Vlassov D., DISA Information). Para decompor o vetor da velocidade W na camada limite em componentes horizontal U e vertical V foi aproveitado fenômeno de variação de troca de calor entre o fio do termoanemómetro e o ar, em função de posição de fio em relação ao vetor de velocidade W . O sensor do termoanemómetro foi calibrado em túnel aerodinâmico. O sinal do termoanemómetro variou em função da variação de velocidade W e de ângulo φ entre W e o eixo do fio. Durante a calibração foi mantido um certo valor da velocidade de escoamento do ar no túnel e foram registradas leituras do termoanemómetro E [V] em função de ângulo φ que se variou de 0° a 90° . A calibração foi feita para vários valores da velocidade $0,2 < W < 10$ m/s. Com base da calibração foi construído um gráfico de leituras de termoanemómetro E [V] em função de W e φ , pois $E = f(W, \varphi)$.

Para determinar os componentes de velocidade, o fio do sensor foi colocado na camada limite em duas posições. A primeira posição foi a perpendicular ao eixo longitudinal da placa (ao longo de coordenada lateral z), nesta posição foi registrado o sinal de termoanemómetro E_\perp [V]. Usando este sinal foi do gráfico determinado o módulo do vetor de velocidade W . Depois de tirar a leitura do E_\perp o corpo do sensor fio girado em torno do seu eixo y para o ângulo de 90° mantendo o mesmo valor de coordenada y . Nesta segunda posição o fio do sensor ficou na posição paralela ao eixo x . Nesta posição foi registrado o valor do sinal E_\parallel [V] que depois foi usado para determinar do gráfico o ângulo φ . É óbvio que $U = W \cos \varphi$ e $V = W \sin \varphi$. Mudando a coordenada y e repetindo as mesmas medições foram determinados perfis das componentes de velocidade $U = f(y)$ e $V = f(y)$.

Em proximidade da superfície da placa porosa, na zona de existência da influência da parede, o valor verdadeiro do sinal do termoanemómetro foi determinado usando a correção

$$E_\perp(y) = \sqrt{E_{\perp med}^2(y) - E_{corr}^2(y)}, \quad E_\parallel(y) = \sqrt{E_{\parallel med}^2(y) - E_{corr}^2(y)}, \quad (3)$$

onde: $E_{\perp med}$ e $E_{\parallel med}$ - sinais medidos de termoanemómetro em posição perpendicular e paralelo ao eixo x .

2.3. Metodologia de medição de intensidade de turbulência

O fio de termoanemómetro tem a inércia térmica muito pequena, isso permite medir flutuações turbulentas da velocidade com frequência de 0 até as 400 kHz. A metodologia de medição de intensidade de turbulência com sensor de um só fio é baseada em emprego da curva de calibração $E = f(W)$ (veja Eq.1). A derivada $\frac{dE}{dW}$ determina a sensibilidade do termoanemómetro com a variação de velocidade. A sensibilidade do termoanemómetro depende de valor da velocidade média e, com aumento da última, a sensibilidade diminui que provoca erros de medição de turbulência (Hinze). No presente trabalho, para evitar os erros de medição de turbulência, foi empregado um termoanemómetro linearizado com a curva resposta $E = \beta W$, onde β é um coeficiente de proporcionalidade.

Examinemos funcionamento de sensor linearizado exposto em escoamento (bidimensional) em camada limite sobre a placa. O escoamento é caracterizado por componentes médias da velocidade longitudinal U e vertical V e, também, componentes da flutuação de velocidade (componentes turbulentas) longitudinal u' , vertical v' e lateral ω' . Para o corpo do sensor do termoanemómetro dirigido pelo eixo y e fio pelo eixo lateral z a velocidade efetiva de arrefecimento do fio de termoanemómetro pode ser apresentada como

$$|W_{ef}| = \sqrt{k_1^2 (U + u')^2 + (V + v')^2 + k_3^2 \omega'^2}, \tag{4}$$

onde: k_1 e k_3 - coeficientes que caracterizam a sensibilidade do fio em direções de eixos x e z correspondentemente, $k_1 \cong 1,2$ e $k_3 \cong 0,25$.

Depois decomposição de Eq. 4 em série e uso de fórmula para cálculo aproximado de raiz quadrada teremos

$$|W_{ef}| = \sqrt{k_1^2 U^2 + V^2} \left[1 + \frac{k_1^2 U u' + V v'}{k_1^2 U^2 + V^2} + \frac{k_1^2 u'^2 v'^2 + k_3^2 \omega'^2}{2(k_1^2 U^2 + V^2)} + \dots \right]. \tag{5}$$

Análise da Eq.5, em condições da camada limite ($U \gg V$), apresenta que na camada limite sobre o plano impenetrável o membro $k_1^2 U u' \gg V v'$, por isso as medições da turbulência apresentam a velocidade média e componente longitudinal de flutuações, pois $|W_{ef}| = k_1 (U + u')$. Na camada limite sobre placa penetrável, no caso da insuflação, em particular perto da parede, ambas componentes U e V são comensuráveis que dificulta separação de componentes u' e v' . Nestas condições o termoanemómetro vai medir a velocidade efetiva igual ao vetor da velocidade média na camada limite e uma componente de flutuação que atua ao longo do vetor da velocidade média, pois $|W_{ef}| = W + g'$.

A intensidade de turbulência perto da parede determina-se como

$$\frac{\sqrt{g'^2}}{W} = \frac{\sqrt{e'^2}}{E - E_{corr}}, \tag{6}$$

onde: $\sqrt{g'^2}$ - média quadrada de componente da flutuação da velocidade,
 $\sqrt{e'^2}$ - sinal médio quadrado do termoanemómetro linearizado.

3. Resultados de ensaio e conclusões

3.1. Perfis de velocidade perto da parede

Medições dos perfis de velocidade foram feitas em 10 seções pelo comprimento de placa porosa. A velocidade de

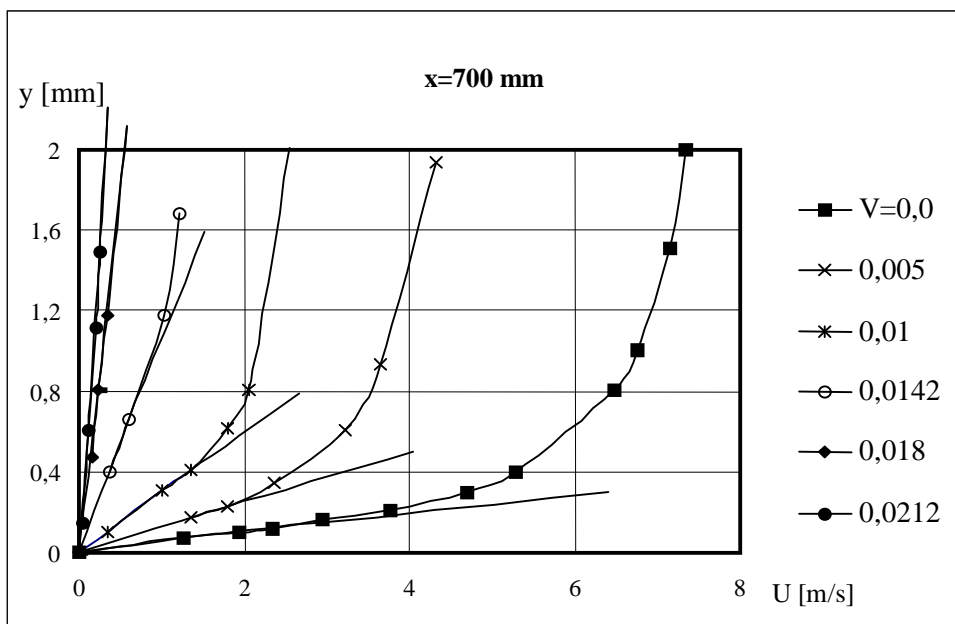


Figura 2. Perfis da velocidade longitudinal perto da parede

insuflação foi variada de $V_w=0$ a 0,243 m/s. A velocidade $V_w=0$ corresponde um escoamento em camada limite sobre o plano impenetrável (compacto).

É importante comparar o desenvolvimento da camada limite sobre um plano compacto com o desenvolvimento da mesma sobre o plano poroso sem a insuflação. Investigações preliminares apresentavam que não só a rugosidade de superfície, mas, também, a porosidade do material de parede e o tamanho dos poros influem sobre o desenvolvimento da turbulência. A porosidade própria do material poroso da parede ainda não determina o tamanho médio de poros. O mesmo valor de porosidade podem ter placas feitas de arames grossas e finas. A placa porosa feita das arames grossas vai ter a superfície rugosa e grande tamanho dos poros. O desenvolvimento da camada limite sobre esta placa (sem a insuflação) é diferente que o sobre a placa compacta. No caso da placa compacta um vórtice recém nascido como uma bola reflete-se de parede e desestabiliza mais o núcleo turbulento da camada limite. No caso da placa porosa e grandes tamanhos dos poros um vórtice parcialmente penetra em canais dos poros e parcialmente amortece-se que provoca uma demora de desenvolvimento da turbulência (o mesmo fenômeno de amortecimento da turbulência foi descoberto em corpos de golfinhos, mas em vez da superfície porosa eles têm debaixo de pele uma mole camada de gordura que, também, amortece os vórtices recém-nascidos e demora a transição de camada limite laminar para a turbulenta, diminui arrasto do corpo dos golfinhos e permite lhes desenvolver velocidades grandes em água).

No presente trabalho, para minimizar a influência da porosidade de superfície da placa sobre o desenvolvimento da camada limite, a parte superficial da placa foi feita de grades finas e o tamanho médio de poros foi só ~15 mkm. Os perfis de velocidade e características de turbulência obtidos na camada limite sem a insuflação têm boa coincidência com as medições análogos feitas na placa impenetrável conhecidas na bibliografia (p. ex. Klefanoff e Laufer NACA).

A insuflação do ar provoca uma série de regularidades de deformação de perfis de velocidade. A maior deformação sofre a parte interna de camada limite que situa perto da superfície da placa porosa (veja Figura 2). Quanto maior for a insuflação maior será a deformação de perfis.

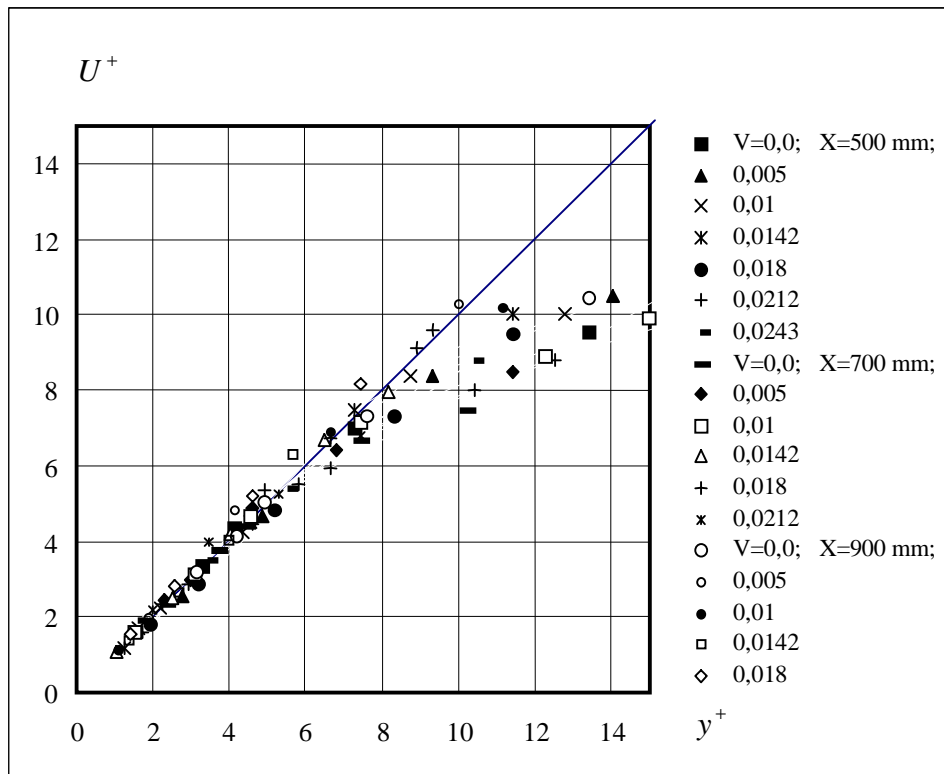


Figura 3. Perfis de velocidade longitudinal em escala adimensional

É importante notar que em sub-camada viscosa continua existir a distribuição linear de velocidade com o valor constante de gradiente de velocidade. Conhecimento do valor de gradiente de velocidade na sub-camada viscosa permite diretamente, sem uso de qualquer hipótese, calcular a tenção superficial $\tau_w = \mu \frac{dU}{dy}$ e o coeficiente de atrito

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \cdot 2$$

camada viscosa δ_v uma espessura da zona em que existe a distribuição linear da velocidade longitudinal, podemos concluir que essa espessura sofre grande aumento com aumento de velocidade de insuflação.

Usando a velocidade dinâmica de atrito calculada como $U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{v \frac{dU}{dy}}$, onde v - viscosidade cinemática, podemos apresentar os perfis de velocidade em coordenadas adimensionais $U^+ = \frac{U}{U_\tau}$ e $y^+ = \frac{yU_\tau}{v}$ (veja Figura 3).

A reta apresenta equação $U^+ = y^+$. Geralmente, para placa impenetrável, é considerado que a sub-camada viscosa estende-se na faixa $0 \leq y^+ \leq 5$. Dados apresentados na Figura 3 confirmam que esta consideração é válida também

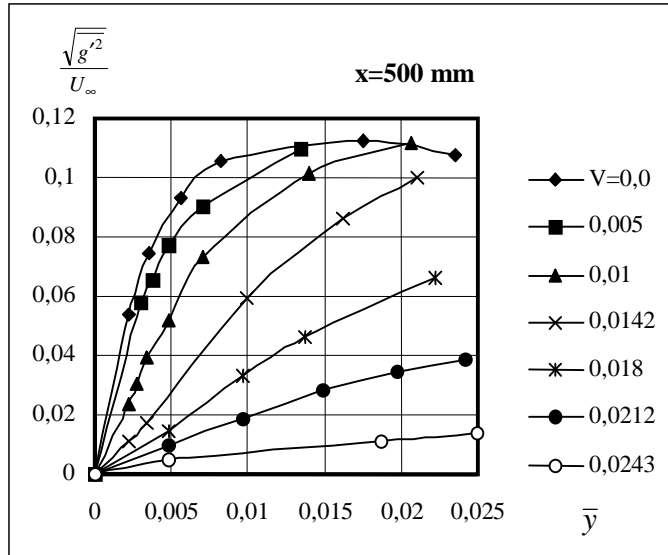


Figura 4. Intensidade de turbulência perto de parede

para camadas limite com a insuflação. Sob grandes valores da insuflação a espessura da sub-camada pesquisa-la com maior segurança de medições.

Há de notar que a insuflação bruscamente aumenta a espessuras da sub-camada viscosa e do núcleo turbulento e por conseguinte a espessura de toda camada limite. Por exemplo, para $x= 500$ mm, sem a insuflação a espessura de toda a camada limite era de 37 mm, mas para $V_w=0,243$ m/s ela já aumenta até a de 80 mm.

3.2. Intensidade de turbulência

Na figura 4 são apresentados resultados de medições da intensidade de turbulência na zona diretamente adjacente a parede porosa para $x=500$ mm. (em conformidade com a fórmula 6). A coordenada relativa apresenta valores $\bar{y} = \frac{y}{\delta}$.

Sem a insuflação o máximo da intensidade da turbulência (~11%) fica pretíssimo da parede (~0,6 mm). A medida de aumento da insuflação o máximo da turbulência desloca se mais longe da parede, a intensidade de turbulência aumenta e, quando a insuflação atinge o valor $\bar{V}_w=0,0243$, o máximo (~17%) já fica na distância de ~35 mm da parede.

É muito importante notar que a turbulência continua existir na sub-camada viscosa apesar de aumento brusco da sua espessura em condições da insuflação.

A análise de características de turbulência, revelou que o valor da espessura adimensional da camada limite \bar{y} não é uma coordenada adequada para generalizar as propriedades de turbulência na camada limite. Se usar para construir o gráfico em vez da coordenada relativa \bar{y} a velocidade relativa \bar{U} , a variação da intensidade da turbulência na camada limite apresenta que para todos velocidades de insuflação usadas no ensaio todos os máximos situam em coordenada $\bar{U} \approx 0,6$ com a mesma tendência de distribuição de $\frac{\sqrt{g'^2}}{U_\infty} = f(\bar{U})$. Por outras palavras, a distribuição de propriedades de

turbulência na camada limite depende não de coordenada transversal \bar{y} , mas sim da velocidade relativa \bar{U} .

3.3 Intermitência de turbulência

O estudo de oscilogramas de variação das flutuações turbulentas da velocidade em função de tempo evidenciou que elas têm um caráter de intermitência, pois de alternância de correntes turbulentas e laminares. O fenômeno da

intermitência de turbulência na fronteira externa da camada limite está bem conhecido. No núcleo turbulento da camada limite a intermitência de turbulência não existe, pois o escoamento é continuamente turbulento.

A análise de escoamento na sub-camada viscosa apresentou que nela também existe a intermitência de turbulência. Na placa impenetrável a espessura da sub-camada laminar é muito pequena e não permite fazer seguras medições da intermitência. Quando a velocidade da insuflação é grande a espessura da sub-camada já é suficiente para fazer as medições seguras da intermitência de turbulência.

A intermitência de turbulência pode ser caracterizada por um coeficiente γ que varia de 0 a 1. Quando $\gamma = 1$ a corrente é continuamente turbulenta e quando $\gamma = 0$ a corrente é continuamente laminar.

Para medir o coeficiente de intermitência da turbulência foi construído um esquema eletrônico que gerou sinais "1" e "0" em função de intensidade da turbulência. O esquema gera o sinal "1" quando a intensidade da turbulência é maior que um preestabelecido nível de intensidade e gera "0" quando a intensidade é menor do mesmo nível. O esquema realizou integração do valor do coeficiente γ no tempo. Se durante o ensaio num certo local da sub-camada laminar a leitura apresentou um valor do coeficiente de intermitência $\gamma = 0,5$, então no local de medição o escoamento é de 50% do tempo turbulento e de 50% do tempo laminar.

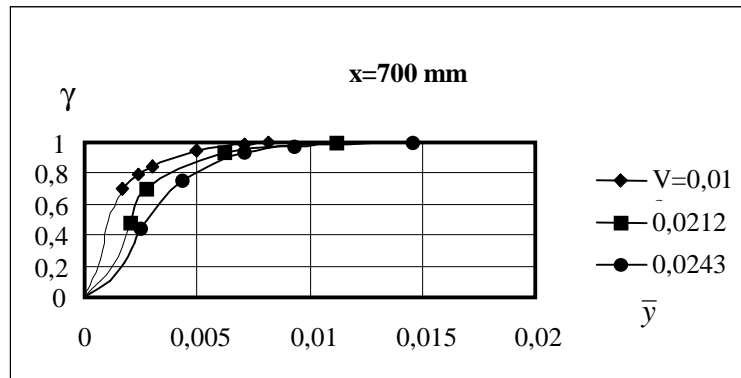


Figura 5. Intermitência de turbulência em subcamada viscosa

Na Figura 5 são apresentados resultados das medições. Pode-se concluir que na camada limite turbulenta não existe uma fronteira evidente entre o escoamento viscoso na sub-camada e o turbulento na zona do núcleo. Esta fronteira "respira" de mesma maneira como fronteira externa da camada limite. Tomando em consideração a forma de curvas e a tendência de influência da insuflação, é provável fazer a conclusão que as flutuações turbulentas atingem a superfície da placa. É possível, também, propor com certeza que análoga intermitência existe sob pequenas velocidades da insuflação, até à $\bar{V}_w = 0$, mas é óbvio que a região de intermitência diminui.

Resultados de medições de intensidade e de intermitência da turbulência permitem fazer a conclusão que o nome atribuído em primeiros trabalhos para a primeira zona como sub-camada laminar não corresponde a realidade, nesta sub-camada existem flutuações da velocidade e por isso mais correto chama-la a sub-camada viscosa. Resultados de medições de tensões turbulentas τ_t e comparação delas com tensões viscosas τ_v mostraram que a insuflação bruscamente diminui região em camada limite em que $\tau_v > \tau_t$. Se na placa impenetrável a região em que $\tau_v > \tau_t$ estende-se de $\bar{U} = 0$ a $\bar{U} \approx 0,8$, no caso da insuflação a mesma região diminui e a partir de $\bar{V}_w = 0,018$ em toda a camada limite $\tau_v \approx 0,5\tau_t$.

4. Referências

França G.A.C. e outr., 1996, "Turbulent incompressible flow within a channel with transpiration: solution of the coupled problem porous wall - main flow", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, vol. XVIII N1.

Hinze J.O., 1959, "Turbulence, an Introduction to its Mechanism and theory", McGRAW-HILL book company, New York.

Kutateladze S.S., Leontiev A.I., 1990 "Heat Transfer, Mass Transfer, and Friction in Turbulent Boundary Layers", Hemisphere Publishing Corporation, New York.

Schiozer D., 1996, "Mecânica dos Fluidos", LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, RJ.

Vlassov D.I., Poliaev V.M., 1975, "Using Hot-wire Probes for Investigation of Flow in the Boundary Layer Along a Permeable Surface". Disa Information, Measurement and Analysis, N18, Denmark.

Vlassov D., Poliaev V., Bashmakov I., 1975, "Sobre algumas particularidades de escoamento em camada limite turbulenta sobre placa porosa sob insuflação", Coletânea "Escoamentos turbulentos perto de paredes", Vol. 2, Divisão Siberiana de Academia de Ciências de URSS.

Viscous sub-layer structure in boundary layer along permeable surface

Vlassov D., Department of Mechanical Engineering, of the Federal University of Paraná, Polytechnic Center, C/P 19011, Curitiba - PR - Brazil, ZIP CODE 81531-990, E-mail: vlassov@demec.ufpr.br

Abstract. This work presents experimental data of the viscous sub-layer structure of boundary layer on a flat porous wall with mass flux outward. The experiments were carried out in a wind tunnel in isothermal conditions. Hot-wire anemometer was used for velocity measurements. Mass flux from the wall lead to deformation in the viscous sub-layer as well as in the turbulent layer. Velocity measurements near the wall showed that a linear profile would still hold even in the presence of wall mass flux. That allowed a direct calculation of the skin friction coefficient. It was determined that in the viscous sub-layer, even closer to the wall, there exist turbulent vortices. Those vortices were found to be of irregular type.

keywords: turbulent boundary layer; porous wall, gasdynamics, heat and mass transfer